Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

BELKHIRI RANIA & BOUREGHDAD LAMIS

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Système Dynamique

Thème

Étude mathématique des problèmes viscoélastique de contact sans et avec frottement et usure

---

Soutenu publiquement le 07 juillet 2021 devant le jury composé de

DR-TAYEB SALHI	Président
MA-SIDHOUM KARIMA	Encadreur
MA-BENAISSA SORIA	Examinateur

Promotion 2020/2021

Remerciements

Nous tenons à adresser notre encadreure SIDHOUME .K qui à dirigé notre travail avec beaucoup de patience et à sés conseils pour faire un travail parfait.

On tient à remercre également l'ensemble de mombre du jurés :
SALHI et BENAISSA pour avoir examiné notre travail.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sinceres au corps professoral et administratif de l'Université de Mohamed El- Bachir- El Ibrahimi pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploint grands , efforts pour assures à leur étudiants une formation actualisée.

Enfin, on tient à exprimer vivement nos remerciements avec une profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué de prés ou loin à sa réalisation , car un projet ne peut pas être le fruit d'une seule personne .

Dédicace

Au nom d'Allah ,le tout Miséricordieux le Trés Msériordieux

Tout d'abord je tient à le tout puisant de mavoir donné le courage et la patience pour arriver à ce stade afin de réaliser ce travail que je dédie :

A mon père "KHOTIR" et ma mère "NACIMA"

Pour leur amoure inestimable, leur sacrifice ,leur confiance .

leur soutien et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer

A ma grand mère "KH ZINEB" de regrettée mémoire pour toute l'affection qu'elle ma donnée et présieux encouragement

A mon frére et mes chers soeures : "AHEMED YACINE" , "INAS" , "AYA"," AMANI"

Qui sont mon bonheur , et mon soutien dans cette vie

A tout les amis à l'université de EL BACHIR EL IBRAHIMI - BBA

A mon binôme "RANIA" et tout sa famille.

Bo Lamis

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents , source de tendresse et d'effection ,à ceux qui ont consacré leur existence à bâtir La mienne et qui m'ont sentenu tout au long de ma vie. C'est grâce à eux je puisse arriver à ce stade.

A Madame "SIDHOUME KARIMA" pourson encadrement qui n'a jamais attardé à m'orienter et m'encourager afin de donner le meilleur de moi , même.

A mon binôme de ce projet " Boureghdad Lamis "

A mes chers soeurs : Meriem, Assia,Amel,Houda et mon frére mouhamed

A tout ma famille.

A tous mes amis : Rayane,Zineb,Kenza,Wafa,Imane .

A tous ceux que j'ai connu durant mon cycle d'étude.

BL RANIA

Table des matières

Introduction

La théorie mathématique de la mécanique du contact a fait impressionnante progrès dernières années. A présent, de nombreux résultats mathématiques et numériques traitant de divers aspects de la théorie sont dispersés à travers un variété de revues savantes et actes de conférence. Le principale intérêt de cette théorie réside dans ce qui se passe sur la frontières des domaines sous enquête. En effet, les modèles sont sous la forme d'équations variationnelles ou les inégalités avec des termes de limites non standard. Le temps est venu de mettre ces résultats et les méthodes mathématique sous -jacentes dans un format unifié qui est plus accessible aux professionnels et aux études supérieures spécialisées étudiants .

Les problèmes de contact avec ou sans frottement entre corps déformables ou entre deux corps viscoélastiques sont abondants en industrie et dans la vie de tous les jours.le simple contact entre une roue de voiture et une route, le piston avec la chemise, du train d'atterrissage avec le sol ,ne sont que quelques exemples parmi bien d'autre.

Le contact entre corps déformables abonde dans l'industrie et tous les jours vie. En raison de l'importance industrielle des processus physique qui aura lieu lors d'un contact,un effort considérable a été fait dans leur modélisation, l'analyse numériques. Même si on se restreint aux publications traitant uniquement avec les processus impliqués dans collage ou dommages matériels,on trouve que l'ingénierie et la littérature de calcul sur ces questions et de sujets connexes est vaste. Par ailleurs la littérature mathématique concernant ces sujets est en croissance rapide.

L'objet de ce mémoire est l'étude de deux problèmes viscoélastique. On considère la loi de comportement viscoélastique dans le cas non linéaire et les condition aux limites sont des conditions de contact avec usure avec et sans frottement.

Le mémoire comporte trois chapitre et est structurés de la manière suivantes :
Dans le premier chapitre, on commence par la définition de cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les condition aux limites ainsi que la formulation mécanique de problème où étudier. Ensuite,nous passons en revenue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels,les équations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorème qui seront d'une grande utilisé pour les démonstrations.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions un problème de contact sans frottement et avec usure dans un processus quasi-statique. Nous présentons une formulation variationnelle du problème, et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution basée sur des techniques de Cauchy -Lipschitz et de Gronwall.

le troisième chapitre, on étudie un problème de contact avec frottement et usure dans un processus quasi-statique. On établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution, les démonstrations sont basées sur une formulation variationnelle et des arguments de point fixe.

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d(d = 1, 2, 3)$,on note par.

$\overline{\Omega}$	:	l'adhérence de Ω
$\mathbb{R}$	:	l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^d$	:	l'espce euclidien de dimension (d=1,2,3)
$\mathbb{S}^d$	:	l'espace de second ordre sur les tenseurs symétriques on $\mathbb{R}^d$ tell que (d=1,2,3)
Γ	:	la frontière de Ω supposée régulière
$\Gamma_i(i = 1, 2, 3)$	:	une partie mesurable de la frontière Γ
$mes\ \Gamma_1$	:	la mesure de Lebesgue $(d = 1)$dimensionnelle de Γ_1
ν	:	la normale unitaire sortant *à* Γ
$v_{\mathbf{v}}, v_\tau$	:	les composantes normal et tangentiel du champ vectoriel v defini sur $\overline{\Omega}$
$C(\overline{\Omega})$	:	l'espace des fonctions réelle continument différentiables sur $\overline{\Omega}$
H	:	l'espace $L^2\ (\Omega)^d$
H_1	:	l'espace $H_1\ (\Omega)^d$
$\mathcal{H}$	:	l'espace $L^2(\Omega)^{d\times d}$
$\gamma\ H_1 \longrightarrow H_\Gamma$	:	l'application trace pour les fonctions vectorielles

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$,on utilise les notations suivantes

H^d	:	l'espace $\{x - (x_i)/x_i \in H)\}$
$H^{d\times d}$	:	l'espace $\{x_i = (x_{ij})/x_{ij} = x_{ij} \in H\}$
$(.,.)_H$	:	le produit scalaire de H
$\|.\|_H$	:	la norme de H
H'	:	l'espace dual de H
$(.,.)_{H'\times H}$	:	le produit dualité entre $H' \times H$
$\mathcal{X}_k$	:	la fonction indicatrice de $k \subset H$
$2^{\mathbf{K}}$	:	l'ensemble de toutes les parties de K
$x_n \longrightarrow x$	:	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H
$x_n \rightharpoonup x$	:	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H

Si de plus $[0; T]$ est un intervalle de temps $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on note par :

$C([0;T],H)$	:	l'espace des fonctions continument dérivable de $[0;T]$ dans H
$\|\,.\,\|_{0,H}$	:	la norme de $C([0;T],H)$
$C^1([0;T],H)$	:	l'espace des fonctions continument dérivable de $[0,T]$ dans$H$
$\|\,.\,\|_{1,H}$	:	la norme de $C^1([0;T],H)$
$L^p(0,T,H)$	:	l'espace des fonction mesurables de$[0,T]$ dans H
$W^{k,p}(0,T,H)$	:	l'espace de Sobolev de paramètres $k\ et\ p$
$\|\,.\,\|_{k,p,H}$	:	la norme de $W^{k,p}(0,T,H)$

Pour une fonctions f, on note

$domf$	:	le domaine de f
$\sup pf$	:	le support de f
$\dot{f},\ddot{f}$	:	les dérivés premiére et seconde de f par rapport au temps
$\partial_i f$	:	la dérivée partielle de f par rapport à la ième composante x_i
∇f	:	le gradient de f
$\varepsilon(f)$	:	la partie symétrique du gradient de f qui vaut $\frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$
$Divf$	:	la divergence de f
∂f	:	le sous différentiele de f

Si H^1 et H^2 sont deux espace de Hilbert réels, on note par :

$\pounds(H^1,H^2)$ l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2.

$\|\,.\,\|_{\pounds(H^1,H^2)}$ la norme de $\pounds(H^1,H^2)$

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre a pour but l'introduction et la formulation des problèmes mécaniques qui sont traités dans la suit, ainsi que le rappel des notions principales de la théorie des milieux continues et d'analyse fonctionnelle nécessaires pour la compréhension de ce mémoire. Ce chapitre comporte de deux section, la première section est consacrée a la formulation mécanique des différents problème pour la loi viscoèlastique avec terme intégrale. A la fin de ce chapitre nous passons en revue quelques rappels d'analyse.

1.1 Formulation des problème viscoélastiques

On donne la formulation mathématique des problèmes qui seront étudiés dans ce mémoire.

1.1.1 Lois de comportement :

L'objet de la mécanique des milieux continus est l'étude du mouvement des corps si les distances relatives ses points sont variables. Le principe fondamental de la mécanique est

$$\mathrm{Di}v\ \sigma + \mathrm{f} = \mathrm{p}\ddot{u}$$

Cette équation s'appelle équation du mouvement, où p représente la densité de masse et $\ddot{u}$ représente l'accélération. Si u varie lentement avec le temps alors p$\ddot{u}$ sera négligeable ce qui conduit à l'équilibre

$$\mathrm{Di}v\ \sigma + \mathrm{f} = 0$$

où $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ représente la densité des volumiques sur Ω et Div σ est la divergence du tenseur σ. l'équation équivalente à d relation scalaires ,et mathématique cette équation ne suffit par à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par example des d composants u_i du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.
Du point de vue physique par ailleurs, il faut remarquer que l'équation exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continues auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. L'équation est

donc insuffisaite, à elle seule, à d'écrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autre relation qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable générale la loi de comportement qui est une relations reliant le tenseur de contrainte σ, le tenseur de déformation ε et leur dérivées.

1.1.2 Loi de comportement viscoélastique :

la loi de comportement d'un matériau viscoélastique est donnée par :

$$\sigma = \mathcal{A}\,\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\,\varepsilon(u) \tag{1.1}$$

ou $\mathcal{A}$ est la fonction de viscosité non linéaire, $\mathcal{G}$ représente le tenseur d'élasticité

1.1.3 Condition aux limites

Condition de contact avec frottement et usure :

Le corps est suppose rentrer en contact avec une fondation rigide, se déplacant à la vitesse v^* . Ce contact sera supposé toujours maintenu au cours de l'étude du phénomène.
Décrivons a présent la condition de contact entre la partie de la frontière Γ_3 du corps et la fondation rigide. Ici la relation :

$$u_\nu = -w \tag{1.2}$$

reste valide afin de représente l'effet de l'usure sur la surface de contact Γ_3. cette dernière égalité indique alors que la position de contact dépend de l'usure. Pour la fonction assez régulières, on a

$$\dot{u}_\nu = -\dot{w} \tag{1.3}$$

L'usure étant toujours croissante, la fonction $\dot{w}$ est positive et ainsi

$$\dot{u}_\nu \leq 0 \tag{1.4}$$

Supposons de plus que pendent l'évolution de phénomène, la surface de contact Γ_3 se réarrange de sort que la vitesse tangentielle soit négligeable. la vitesse de glissement ne sera ainsi plus que la vitesse $v^* =\mid v^* \mid$, qui sera entendu supposé positive.La version simplifiée de loi d'Archard peut être utilisée. Les relation (1.2) et (1.3)entrainent

$$\sigma_\nu = -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid \quad où \quad \beta = \frac{1}{k_w \mid v^* \mid} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3\times]0, T[\tag{1.5}$$

Le frottement suit la loi donnée par :

$$\sigma_\tau = -\lambda\,(\dot{u}_\nu - v^*) \quad \lambda \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3\times]0,T[\tag{1.6}$$

Compte tenu de l'interprétation du problème physique et ayant glissement et frottement, on a la relation :

$$\mid \sigma_\tau \mid = -\mu\,\sigma_\nu \quad \text{sur} \quad \Gamma_3\times]0,T[\tag{1.7}$$

Des précédentes relations, la condition de contact est donnée par :

$$\sigma_\nu = -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid, \mid \sigma_\tau \mid = -\mu\,\sigma_\nu \quad \text{sur} \quad \Gamma_3\times]0.T[\tag{1.8}$$

$$\sigma_\tau = -\lambda\,(\dot{u}_\tau - v^*), \lambda \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3\times]0,T[\tag{1.9}$$

Dans le cas sans frottement, les mouvements tangentielles sont libres et la loi (1.8) devient

$$\sigma_\nu = -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid, \mid \sigma_\tau \mid = 0 \quad \Gamma_3\times]0,T[\tag{1.10}$$

1.1.4 Formulation mathématique des problèmes viscoélastique

Cadre physique :

Nous considérons un corps viscoélastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2,3)$ avec une surface frontière régulière et de Lipschitz partitionnée d'une part en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3, telles que mes $\Gamma_1 > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante àΓ. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfacique de densité f_2 et dans Ω agissant des force volumique de densité f_0. On suppose que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps.

Soit $T > 0$ et $[0,T]$ l'intervalle de temps en question. Nous étudions dans l'intervalle de $[0,T]$ l'évolution du corps matériel d*û*e *à* l'application de forces de volume et de traction de surface.

Nous notons par $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ le champ de déplacements, $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ le champ de contraintes et $\varepsilon(u)$ représente le tenseur des déformations. Le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times (0,T)$ le champ de déplacement u est par conséquent nul. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur $\Gamma_2 \times (0,T)$. Le corps éventuellement en contact avec une fondation rigide sur $\Gamma_3 \times (0,T)$. Les condition sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être diverses et donner lieu à une variété de modèles de contact avec frottement.

1.2 Rappels d'analyse fonctionnels

1.2.1 Espace Fonctionnel

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés. on rappelle aussi quelques espace de fonction définie sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert. Toute les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire sont introduits dans cette section.

1.2.2 Espace de Hilbert associé aux opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$, $(d = 2, 3)$, "." et $|\ .\ |$ représentent le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ respectivement. Ainsi,

$$\begin{array}{lll} u \cdot v = u_i v_i, & \mid v \mid = (v, v)^{\frac{1}{2}}, & \forall\ u, v \in \mathbb{R}^d \\ \sigma \cdot \tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}, & |\sigma| = (\sigma, \sigma)^{\frac{1}{2}}, & \forall\ \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d \end{array}$$

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné avec une surface frontière régulière de Lipschitz notée Γ.

Nous utilisons les espaces suivants :

$$\begin{cases} H = \{u = (u_i) \quad / u_i \in L^2(\Omega) \quad / i = \overline{1, d}\} = L^2(\Omega)^d \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \quad / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \quad / i, j = \overline{1, d}\} = L^2(\Omega)^{d \times d} \\ H_1 = \{u \in H \quad / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} = \{u = (u_i) \quad / u_i \in H^1(\Omega) \quad / i = \overline{1, d}\} = H^1(\Omega)^d \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \quad / \sigma_{ij} \in H\} \end{cases} \tag{1.11}$$

où $\varepsilon : H_1 \longrightarrow H$ et $Div : H_1 \longrightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = \varepsilon_{ij}(u)\ , \quad \varepsilon_{ij}(u) = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\ , \quad \mathrm{Di}v\, \sigma = (\sigma_{ij,j}) \quad 1 \leq i, j \leq d$$

où la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire que

$$u_{i,j} = \tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Ces espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réels munis de leurs produits scalaires donné par :

$$\begin{cases} (u,v)_H = \int\limits_{\Omega} u_i v_i \ dx; \qquad \forall\ u,v \in H \\ (\sigma,\tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \qquad \forall\ \sigma,\tau \in \mathcal{H} \\ (u,v)_{H_1} = (u,v)_H + (\varepsilon(u),\varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \qquad \forall\ u,v \in H_1 \\ (\sigma,\tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma,\tau)_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Di}v\,\sigma, \mathrm{Di}v\,\tau)_H \qquad \forall\ \sigma,\tau \in \mathcal{H}_1 \end{cases} \tag{1.12}$$

Les normes sur les espaces H, H_1, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$,sont notées par $|.|_H$, $|.|_{H_1}$, $|.|_{\mathcal{H}}$, $|.|_{\mathcal{H}_\infty}$, respectivement.

Puisque la Frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur à la frontière est définie p,p Pour tout champ de vecteur $u \in H_1$ nous utilisons la notation u pour désigner la trace γ_u de u sur Γ et nous notons par u_ν et u_τ les composantes normales et tangentielles de u sur la frontière données par :

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu \tag{1.13}$$

Pour champ des contraintes σ nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière, à savoir :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu)\cdot\nu, \qquad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu \tag{1.14}$$

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H \longrightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire continue. mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ. ce sous espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ de dual de H_Γ, et $(.,.)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ .
Pour tout $\sigma \in H_1$, il existe un élément noté $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que

$$(\sigma v, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Di}v\,\sigma, v)_H \qquad \forall\ v \in H_1$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot\ v\ da \qquad \forall\ v \in H_1$$

donc, si σ est assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green) :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Di}v\,\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot\ v\ da \ \ \forall v \in H_1(\Omega) \tag{1.15}$$

l'espace de déplacements admissible V est un sous espace fermé de H_1 défini par :

$$V = \{v \in H_1(\Omega)^d \quad /v = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\}$$

puisque mes $(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn S'applique sur V il existe une constant $C_\kappa > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ telle que :

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geqslant C_\kappa |v|_{H_1(\Omega)^d}, \qquad \forall\ v \in V. \tag{1.16}$$

sur V nous considérons le produit scalaire donné par :

$$(u,v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \qquad \forall\ u,v \in V. \tag{1.17}$$

et soit $|.|_V$ la norme associée,i.e.

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}, \qquad \forall\, v \in V \tag{1.18}$$

par l'inégalité de Korn,il vient que $|.|_{H_1}$ et $|.|_V$ sont des norme équivalentes sur V et ainsi $(V, |.|_V)$ est un espace de Hilbert réel.En outre, par le théorème de trace de Sobolev il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_2 telle que :

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leqslant C_0 |v|_v, \qquad \forall\, v \in V \tag{1.19}$$

1.2.3 Fonction convexe

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$. Un telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$ c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \qquad \forall\, u, v \in X, t \in\,]0,1[$$

la fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$tel que $u \neq v$. Pour toute fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$,on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par

$$\mathrm{dom}(\varphi) = \{u \in X \quad / \varphi(u) < +\infty\} \tag{1.20}$$

$$\mathrm{epi}(\varphi) = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \quad / \varphi(u) \leq \alpha\}. \tag{1.21}$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivantes :
1) φ est propre si et seulement si $\mathrm{dom}(\varphi) \neq \emptyset$,
2)le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
3)φ est convexe si et seulement si epiφ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Soit maintenant H un espace de Hilbert.
Une fonction $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi continue inférieurement (s.c.i) en $u_0 \in H$ si

$$\lim_{u \longrightarrow u_0} \inf \varphi(u) \leq \varphi(u_0)$$

Une fonction est s. c.i sur $K \subset H$ si elle est s.c.i en tout point de K et elle s.c.i sur tout H.

La propriété de semi continuité peut être caractérisée de la façon suivante :

Lemme 1.1 *Soit $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*
1)φ est semi- continue inférieurement .
2) L'épigraphe de φ est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.

1.2.4 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Soit H un espace de Hilbert . Soient $\kappa \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{\kappa,p}(0,T;H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in D'(0,T;H)$ telles que $D_j u \in L^p(0,T,H)$ pour $j = \overline{0,\kappa}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions.
Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{\kappa,p}(0,T;H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\mid u \mid_{W^{\kappa,p}(0,T;H)} = (\sum_{j=0}^{\kappa} \int_0^T \mid D_j u(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\, u \in W^{\kappa,p}(0,T;H)$$

En particulier ,$W^{\kappa,2}(0,T;H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par :

$$(u,v)_{W^{\kappa,2}(0,T;H)} = (\sum_{j=0}^{\kappa} \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_H dt \qquad \forall\, u,v \in W^{\kappa,2}(0,T;H)$$

D'autre part ,$W^{\kappa,\infty}(0,T;H)$ est un espace de Banach pour la norme définit par

$$\mid u \mid_{W^{\kappa,\infty}(0,T;H)} = (\sum_{j=0}^{\kappa} \sup_{[0,T]} \text{ess} \mid D_j u(t) \mid_H) \qquad \forall\, u \in W^{\kappa,\infty}(0,T;H)$$

Pour le cas particulier $\kappa = 0$, on remarque que

$$W^{0,p}(0,T;H) = L^p(0,T;H)$$

Et on note alors la norme $L^p(0,T;H)$ par $\mid . \mid_{L^p(0,T;H)}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. On définit aussi , pour tout $\kappa \in \mathbb{N}$, l'espace $C^\kappa(0,T;H)$ des fonction $u : [0,T] \longrightarrow H$ telles que pour tout $j = \overline{0,\kappa}$ les dérivées $\frac{d^j u}{dt^j}$ existent et sont continues sur [0,T]. On note, en particulier, $C^0(0,T;H)$ par $C(0,T;H)$. L'espaces $C^\kappa(0,T;H)$ est un espaces de Banach pour la norme définie par

$$\mid u \mid_{C^\kappa(0,T;H)} = \sum_{j=0}^{\kappa} \max_{t\in[0,T]} \mid \frac{d^j u}{dt^j} \mid_H \qquad \forall\, u \in C^k(0,T;H)$$

en particulier, les normes sur les espaces C(0,T,H) et $C^1(0,T;H)$ sont données par

$$\mid u \mid_{C(0,T;H)} = \max_{t\in[0,T]} \mid u(t) \mid_H \qquad \forall\, u \in C(0,T;H)$$

$$\mid u \mid_{C^0(0,T;H)} = \mid u \mid_{C(0,T;H)} + \mid \dot{u} \mid_{C(0,T;H)} \qquad \forall\, u \in C^1(0,T;H)$$

On précise que le point au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette expression par rapport au temps , représentée par la variable $t \in [0,T]$.

1.2.5 Inéquation variationnelle

Soient $A : H \longrightarrow H$ un opérateur non linéaire , $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. Un nombre de problème aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante :

Trouver u tel que $u \in H$,

$$(Au, v-u)_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)_H \qquad \forall\ v \in H \tag{1.22}$$

Le problème (1.22) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H. On dit que l'opérateur A est :

1) frottement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - v, u - v)_H \geq m \mid u - v \mid^2 \qquad \forall\ u, v \in H \tag{1.23}$$

2) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0 \qquad \forall\ u, v \in H \tag{1.24}$$

3) de Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\mid Au - Av \mid_H \leq L \mid u - v \mid \qquad \forall\ u, v, \in H \tag{1.25}$$

4) hémicontinu si

$$\forall\ u, v \in H \quad \text{l'application t} \longrightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \longrightarrow H' \quad \text{est continue} \tag{1.26}$$

On peut démontrer que si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz alors A est inversible et A^{-1}est fortement monotone et de Lipschitz. En ce qui concerne le problème (1.22) , on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théoréme : Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et φ une fonction propre, convexe et semi continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique (1.22) admet une solution unique .
Le théorème précédent représente un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de seconde espèce .

1.2.6 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques de type Gronwall qui interviennent dans de nom breux problèmes de contact, en particulier par établir l'unicité de la solution .

Lemme 1.2 *Soient m,n* $\in (C[0,T], \mathbb{R})$*telles que* $m(t) \geq 0$ *et* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$, $a \geq 0$ *une constante, et* $\phi \in C([0,T], \mathbb{R})$ *:*
1.Si :

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\ ds + \int_0^t n(s)\,\phi(s)\ ds, \qquad ,\forall\ t \in [0,T]$$

Alors

$$\phi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)\ ds)\ \exp(\int_0^t n(s)\ ds), \qquad \forall\ t \in [0,T],$$

2.Si :

$$\phi(t) \leq m(t) + a\ \int_0^t \phi(s)\ ds, \qquad \forall\ t \in [0,T],$$

Alors

$$\int_0^t \phi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)\ ds, \qquad \forall\ t \in [0,T],$$

pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient

Corollaire 1.1 *Soit $n \in C([0,T],\mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$,et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0,T],\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\phi(s)\ ds, \qquad \forall\ t \in [0,T],$$

Alors

$$\phi(t) \leq a\ \exp\left(\int_0^t n(s)\ ds\right) \qquad \forall\ t \in [0,T].$$

Lemme 1.3 *soient $m, n \in C([0,T],\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0,T],\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\frac{1}{2}\,\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\,\phi(s)\ ds + \int_0^t n(s)\,\phi^2\ ds, \qquad \forall\ t \in [0,T],$$

$$\mid \phi(t) \mid \leq (a + \int_0^t m(s)\ ds)\ \exp\left(\int_0^t n(s)\ ds\right), \qquad \forall\ t \in [0,T].$$

1.2.7 Énoncés des certains théorèmes

Nous considérons maintenant quelques théorèmes importants qui sont utilisées le long de cette mémoire .

Définition : On dit q'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est
1) Continue s'il existe une constante C telle que

$$\mid a(u,v) \mid \leq C \mid u \mid_H \mid v \mid_H \qquad \forall\ u, v \in H \tag{1.27}$$

2) Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v,v) \leq \alpha \mid v \mid_H^2 \qquad u, v \in H \tag{1.28}$$

Théoréme 1.1 *(Conséquence de Minty-Browder). Soit $A : H \longrightarrow H$ une application non linéaire, fortement monotone et de Lipschitz.*
Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in H$ unique solution de l'équation $Au = f$.

Théoréme 1.2 *(Cauchy Lipschitz) . Soit X un espace de Banach et soit $F : [0,T] \times X \longrightarrow X$ une application continue telle que :*

$$\mid F(t,x_1) - F(t,x_2) \mid_X < L \mid x_1 - x_2 \mid$$

$$\forall \; x_1, x_2 \in X \quad et \quad \forall \; t \in [0,T] \quad L \geq 0$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe $x \in C^1(0,T,X)$ unique tel que :

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \qquad \forall \; t \in [0,T]$$

Chapitre 2

Problème viscoélastique sans frottement et avec usure

Nous présentons dans le second chapitre une étude mathématique d'un problème vésco-élastique sans frottement et avec usure, ce chapitre comporte trois sections .Dans la première section, nous écrivons le problème mécanique, et la deuxième section nous précisons les hypothèses adéquats sur les données. Enfin ,dans la troisième section nous énonçons et nous démontrons notre résultat principal d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites en viscoélastique, deux méthodes la théorie des opérateurs monotones et une version du théorème de Cauchy-Lipschitz .

2.1 Formulation mécanique du problème

Le problème peut se formuler de la manière suivant :

Problème P : Trouver le champs de déplacement$u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0.T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ tels que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \qquad dans \quad \Omega \times (0, T) \tag{2.1}$$

$$Div\, \sigma + f_0 = 0 \qquad dans \quad \Omega \times (0, T) \tag{2.2}$$

$$u = 0 \qquad sur \quad \Gamma_1 \times (0, T) \tag{2.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad sur \quad \Gamma_2 \times (0, T) \tag{2.4}$$

$$\sigma_\nu = -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid, \sigma_\tau = 0 \qquad sur \quad \Gamma_3 \times (0, T) \tag{2.5}$$

$$u(0) = u_0 \qquad dans \quad \Omega \tag{2.6}$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (2.1)-(2.2) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites.
D'abord,la relation (2.1) représente la loi de comportement d'un matériau viscoélastique, et la relation (2.2)représente l'équation d'équilibre pour champ de déplacement, les relation (2.3),(2.4) sont les conditions de déplacement de traction,(2.5)représente les conditions de contact aux limite avec usure et sans frottement, la relation (2.6) représente la condition initiale du champ de déplacement.

2.2 Formulation variationnelle du problème

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique P. Nous définissons le sous espace fermé de $H^1(\Omega)^d$:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \quad / \quad v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\}$$

Puisque mes $\Gamma_1 > 0$,l'inégalité de Korn s'applique sur V ; alors il existe une constante $C_k > 0$ dépend uniquement de Ω et Γ_1, telle que :

$$\mid \varepsilon(v) \mid_{\mathcal{H}} \geq C_k \mid v \mid_{H(\Omega)^d} \qquad \forall\, v \in V$$

Nous considérons sur l'espace V le produit scalaire donnée par :

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad , \quad \mid v \mid_V = \mid \varepsilon \mid_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, u, v \in V \tag{2.7}$$

Par l'inégalité de Korn ,il vient que $\mid . \mid_{H^1(\Omega)^d}$ et $\mid . \mid_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \mid . \mid_V)$ est un espace de Hilbert réel.

Pour étudier le problème (2.1)-(2.6) nous introduisons les hypothèses suivantes :

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \quad \text{Il existe une constante} \quad L_{\mathcal{A}} > 0 \quad \text{tel que} \\ \mid \mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2) \mid \leq L_{\mathcal{A}} \mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mid \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \qquad p.p \quad x \in \Omega \\ (b) \quad \text{Il existe une constante} \quad m_{\mathcal{A}} > 0 \quad \text{tel que :} \\ (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geqslant m_{\mathcal{A}} \mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mid^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \quad p.p \quad x \in \Omega \\ (c) \quad x \longrightarrow (\mathcal{A}, \varepsilon) \text{est Lebesgue mesurable sur} \quad \Omega \\ (d) \quad \text{L'application} \quad x \longrightarrow \mathcal{A}(x, 0) \quad \text{appartient à } \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.8}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\begin{cases} (a) \quad \text{Il existe une constante} \quad L_{\mathcal{G}} > 0 \quad \text{tel que :} \\ \quad \mid \mathcal{G}(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2, \alpha_2) \mid \leqslant L_{\mathcal{G}}(\mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mid + \mid \alpha_1 - \alpha_2 \mid), \\ \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad p.p \quad x \in \Omega \\ (b) \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon \in \mathbb{S}^d \quad et \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \qquad x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon, \alpha) \quad \text{est Lebesgue mesurable sur} \quad \Omega \\ (c) \quad \text{L'application} \quad x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0) \quad \text{appartient à } \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.9}$$

On suppose que les forces volumique f_0 et les tractions surfaciques f_2 satisfaisant la régularité

$$f_0 \in L^2(0, T; H) \qquad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d) \tag{2.10}$$

le champ de déplacement initial est :

$$u_0 \in V \tag{2.11}$$

Nous énonçons maintenant quelques définition qu'on utilise dans la suite de ce chapitre :

$f \in V$ par

$$(f(t), v)_V = \int_\Omega f_0(t) \cdot \; v \; dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot \; v \; da \qquad \forall \; v \in V \quad , t \in [0, T] \tag{2.12}$$

La condition (2.10)impliquent

$$tel - que \quad f \in L^2(0, T, V) \tag{2.13}$$

Soit $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction de frottement définie par :

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \beta \mid u_\nu \mid v_\nu \; da \qquad \forall \; u, v \in V \tag{2.14}$$

A l'aide de la formule de Green on voit directement que si u et σ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisont (2.1)(2.2) et (2.4) avec (2.14) pour tout $t \in [0,T]$ on déduit que :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Div}\,\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot\ v\ da \qquad , \forall\ v \in V \tag{2.15}$$

Nous divisons l'intégrale de surfaces Γ_1, Γ_2 et Γ_3 ; puisque $v - u(t) = 0$ sur Γ_1 et $\sigma(t)v = f_2(t)$ sur Γ_2 en tant compte de (2.12) on obtient que :

$$\textstyle\int_\Omega \sigma \cdot \varepsilon(v)\ dx + \int_\Omega (-f_0) \cdot\ v\ dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot\ v\ da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot\ v\ da \qquad \forall\ v \in V$$

alors

$$\textstyle\int_\Omega \sigma \cdot \varepsilon(v)\ dx - \int_\Omega f_0\ \cdot\ v\ dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot\ v\ da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot\ v\ da \qquad \forall\ v \in V$$

donc

$$\textstyle(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = \int_\Omega f_0 \cdot\ v\ dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot\ v\ da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot\ v\ da \qquad \forall\ v \in V$$

enfin ,on déduit que

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot\ v\ da \qquad \forall\ v \in V, \qquad t \in [0,T] \tag{2.16}$$

notons que

$$\sigma\nu \cdot v = \sigma_\nu \cdot v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3 \tag{2.17}$$

et en utilisant la condition de contacte aux limite avec usure et sont frottement (2.5)nous avons :

$$\sigma\nu \cdot v = -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid \cdot v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau$$

ona $\quad \sigma_\tau = 0$

alors

$$\sigma\nu \cdot v = -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid \cdot v_\nu + 0$$

donc

$$\sigma\nu \cdot v = -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid \cdot v_\nu \tag{2.18}$$

Nous combinons maintenant (2.16) et (2.18) pour obtenir que :

$$\textstyle(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f(t), v)_V - \int_{\Gamma_3} \beta \mid \dot{u}_\nu \mid \cdot\ v_\nu\ da$$

Alors

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f(t), v)_V - j(\dot{u}, v)$$

donc

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T] \tag{2.19}$$

Problème PV_1 : Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \longrightarrow V$

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \tag{2.20}$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) = (f(t), v)_V \qquad \forall v \in V \quad \forall t \in [0, T] \tag{2.21}$$

$$u(0) = u_0 \tag{2.22}$$

On note que le problème variationnel **PV** est formulé en termes de champ de déplacement.

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre intêret principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **PV**.

Théoréme 2.1 *D'après le hypothèses (2.8) et (2.9) le problème* ***PV*** *admet une solution unique* (u, σ) *ayant la régularité suivant :*

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \quad , \quad \sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}_1)$$

la fonction $\{u, \sigma\}$ *s'appellent la solution faible du problème* PV_1*.*

Preuve :
La démonstration du Théorème (2.1) sera fait en plusieurs étape, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et le théorème de Cauchy Lipschitz .

Nous supposons que les hypothèses du théorème (2.1) sont vérifie C un constante positive qui dépend de Ω, Γ_1 et Γ_3 dont la valeur variée d'un place à l'autre.

Lemme 2.1 *:*
Il existe une solution unique du problème PV_1 *qui satisfait la régularité (2.1).*

Démonstration :
Nous allons appliquer le théorème de représentation de Riez pour définir l'opérateur $A : V \longrightarrow V$ et $G : V \longrightarrow V$ par :

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v) \tag{2.23}$$

$$(Gu, v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \tag{2.24}$$

Pour tout $u, v \in [0, T]$ soient $u_1, u_2 \in V$ en utilisant (2.8), (2.9) et aussi la définition de j donné par (2.14), nous trouvons :

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u_1) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1 - u_2))_{\mathcal{H}} + \textstyle\int_{\Gamma_3}(\beta u_{1\nu} - \beta u_{2\nu})(u_{1\nu} - u_{2\nu})\, da$$

D'après (2.8) et (2.9) nous obtenus :

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \geq m_{\mathcal{A}} \mid u_1 - u_2 \mid_V^2 - C_0^2 \mid \beta \mid_{L^\infty(\Gamma_3)^d} \mid u_1 - u_2 \mid^2$$

Donc

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geq (m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \mid \beta \mid_{L^\infty(\Gamma_3)^d}) \mid u_1 - u_2 \mid_V^2 \tag{2.25}$$

D'un autre coté en utilisant (2.23) et (2.14), on trouve que :

$$(Au_1 - Au_2, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u_1) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \textstyle\int_{\Gamma_3}(\beta u_{1\nu} - \beta u_{2\nu})\, v_\nu\, da$$

Pour tout $v \in V$, par (2.9) et (1.19) nous déduisons que :

$$\mid Au_1 - Au_2 \mid_V \leq L_{\mathcal{A}} \mid u_1 - u_2 \mid_V + C_0^2 \mid \beta \mid\mid u_1 - u_2 \mid$$

$$\mid Au_1 - Au_2 \mid_V \leq (L_{\mathcal{A}} + C_0^2 \mid \beta \mid) \mid u_1 - u_2 \mid_V \tag{2.26}$$

l'inégalité de (2.25) et (2.26) montre que, si $\mid \beta \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} < \beta_0 \quad où \quad \beta_0$ est donné par $\beta_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$
Alors l'opérateur :
$A : V \longrightarrow V$ est un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone sur V . Par conséquent, l'opérateur **A** est inversible et sons inverse A^{-1} est aussi un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone sur V.

De même ; à partir de (2.8) (2.9) et (2.24), il s'ensuit que

$$(Gu_1 - Gu_2, v)_V = (\mathcal{G}\,\varepsilon(u_1) - \mathcal{G}\,\varepsilon(u_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}$$

$$\mid Gu_1 - Gu_2 \mid_V \leq L_{\mathcal{G}} \mid u_1 - u_2 \mid_V \tag{2.27}$$

C'est à dire que l'opérateur G est un opérateur Lipschitzien continu sur V . Considérons maintenant l'opérateur $F(t, .) : V \longrightarrow V$, défini sur (0 ,T) par

$$F(t, v) = A^{-1}(f(t) - Gv) \qquad \forall\ v \in V \tag{2.28}$$

En utilisant (2.13) et (2.27) il trouve que F vérifie le théorème de Cauchy Lipschitz .
aussi , en utilisant (2.13), (2.27) , on obtient l'existence et l'unicité de $u \in W^{1,2}(0, T; V)$ tel que :

$$A\dot{u}(t) + Gu(t) = f(t) \qquad \forall\ t \in [0, T] \tag{2.29}$$

$$u(0) = u_0 \tag{2.30}$$

considérons maintenant l'élément σ par (2.20), il résulte de (2.23), (2.24) et (2.29) que $\{u, \sigma\}$ et une solution du problème PV .
En utilisant les hypothèses (2.8), (2.9) et (2.20), et les propriétés de tenseur de déformation, nous obtenons $\sigma \in L^2(0, T, \mathcal{H}_\infty)$, en prenant $v = \varphi \in D(\Omega)^d$ en (2.20), en utilisant la définition (2.12) pour f(t), nous trouvons :

$$Div\,\sigma + f_0 = 0 \qquad \forall\ t \in [0,T] \tag{2.31}$$

Avec l'hypothèse de régularité (2.10) sur f_0 et, (2.31) nous déduisons $Div\,\sigma \in L^2(0,T;H)$ par conséquent , $\sigma \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1)$ pour $t \in [0,T]$.

Unicité :

Soit $\{u_i, \sigma_i\}$ i= 1,2 $\in H \times \mathcal{H}$ deux solutions du problème PV_1

On pose :

$u = u_1 - u_2$

$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$

On trouve que :

$(\mathcal{A}\,\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\,\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\,\varepsilon(u_1) - \mathcal{G}\,\varepsilon(u_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}}$

$+j(\dot{u}_1, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) - j(\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) = (f - f, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V$

$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\,\varepsilon(u_1) - \mathcal{G}\,\varepsilon(u_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}}$

$+j(\dot{u}_1, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) - j(\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0$

d'après (2.13) et (2.14) nous trouvons :

$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))\mathcal{H} \leq\ L_A \mid \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \mid_V \qquad \forall\ t \in [0,T]$

Aussi :

$$j(\dot{u}_1, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) - j(\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) \geq 0 \qquad \forall\ t \in [0,T]$$

$$(A\dot{u}_1 - A\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V \leq\ (Gu_1 - Gu_2, u_1 - u_2)_V$$

$$L_A \mid \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \mid_V \leq L_G \mid u_1 - u_2 \mid$$

encore, en utilisant (2.26) on trouve :

$$\mid \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \mid_V \leq\ C \mid u_1(t) - u_2(t) \mid$$
$$\int_0^t \mid \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \mid_V \leq\ C \int_0^t \mid u_1(s) - u_2(s) \mid\ ds \qquad \forall\ t \in [0,T]$$
$$\mid u_1(t) - u_2(t) \mid_V \leq\ 0 + C \int_0^t 1\,.\mid u_1(s) - u_2(s) \mid\ ds \qquad \forall\ t \in [0,T]$$

En utilisant maintenant le lemme de Gronwall , tell que $C \geq 0$:

$$| \, u_1(t) - u_2(t) \, |_V \leq 0. \, exp \, (C \, \int_0^t 1 \, ds) \qquad \forall \, t \in [0, T]$$

$$| \, u_1(t) - u_2(t) \, |_V \leq 0 \qquad \forall \, t \in [0, T] \tag{2.32}$$

Alors , d'après (2.30) et (2.32), nous trouvons que $u_1 = u_2$, ce qui implique que $\sigma_1 = \sigma_2$ donc l'unicité de la solution .

Chapitre 3

Problème viscoélastique avec frottement et usure

Nous décrivons dans ce chapitre un modèle mathématique dans processus quasistatique d'un problème de contacte avec frottement pour des matériaux viscoélastique, nous supposons que le contact et avec conditions de usure et frottement .
Ce chapitre comporte trois sections, dans la première section nous écrivons le problème mécanique ; En suite, dans la deuxième section nous précisons les hypothèses adéquats sur les données et obtenons la formulation faible, puis dans la troisième section, nous énonçons un théorème sur l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème, et nous le prouvons.

3.1 Formulation mécanique du problème

Le problème peut se formuler de la manière suivante :
Problèm PV : Trouver un champ de contrainte $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$; un champ de déplacement $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tels que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \qquad dans \quad \Omega \times (0,T) \tag{3.1}$$

$$Div\,\sigma + f_0 = 0 \qquad dans \quad \Omega \times (0,T) \tag{3.2}$$

$$u = 0 \qquad sur \quad \Gamma_1 \times (0,T) \tag{3.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad sur \quad \Gamma_2 \times (0,T) \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu = -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid, \mid \sigma_\tau \mid = -\mu\,\sigma_\tau \\ \sigma_\tau = -\lambda(\dot{u_\tau} - v^*),\ \lambda \geq 0 \qquad sur \quad \Gamma_3 \times (0,T) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0 \qquad dans \quad \Omega \tag{3.6}$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (3.1)-(3.6) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites.
D'abord,la relation (3.1) représente la loi de comportement d'un matériau viscoélastique,et la relation (3.2) représente l'équation d'équilibre pour champ de déplacement,les relation (3.3),(3.4) sont les conditions de déplacement de traction,(3.5) représente les conditions de contact aux limites avec usure et frottement, la relation (3.6) représente les conditions initiales du champ de déplacement.

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique P. Nous définissons le sous espace fermé de $H^1(\Omega)^d$:

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^d /\ v = 0 \ sur \ \Gamma_1\}$$

Puisque mes $\Gamma_1 > 0$,l'inégalité de Korn s'applique sur V, alors il existe une constante $C_k > 0$ dépend uniquement de Ω et Γ_1, telle que :

$$\mid \varepsilon(v) \mid_{\mathcal{H}} \geq C_k \mid v \mid_{H^1(\Omega)^d} \qquad \forall\ v \in V$$

Nous considérons sur l'espace V le produit scalaire donnée par :

$$(u,v)_\nu = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad , \quad \mid v \mid_V = \mid \varepsilon(v) \mid_{\mathcal{H}} \quad \forall\ u,v \in V \tag{3.7}$$

Par l'inégalité de Korn ,il vient que $\mid . \mid_{H^1(\Omega)^d}$ et $\mid . \mid_V$ sont des normes équivalent sur V et ainsi$(V, \mid . \mid_V)$ est un espace de Hilbert réel.

3.2 Formulation variationnelle du problème

Nous énonçons les hypothèse sur les données ; nous supposons que L'opérateur de viscosité

$\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ l satisfait

$$\begin{cases} (a) \quad \text{Il existe une constante } \ L_{\mathcal{A}} > 0 \quad \text{tel que} \\ \mid \mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2) \mid \leq L_{\mathcal{A}} \mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mid \qquad \forall\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \qquad p.p \quad x \in \Omega \\ (b) \quad \text{Il existe un constante } \quad m_{\mathcal{A}} > 0 \quad \text{tel que} \\ (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - (\mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geqslant m_{\mathcal{A}} \mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mid^2 \\ \quad \forall\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \quad p.p \quad x \in \Omega \\ (c) \quad x \longrightarrow (\mathcal{A}, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \ \Omega \\ (d)\text{L'application } \ x \longrightarrow \mathcal{A}(x, 0) \ \text{ appartient } \ \text{à } \ \mathcal{H} \end{cases} \tag{3.8}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \quad \text{Il existe une constante } \ L_{\mathcal{G}} > 0 \quad \text{tel que :} \\ \qquad \mid \mathcal{G}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2) \mid \leqslant L_{\mathcal{G}}(\mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mid), \forall\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \\ \qquad\qquad \forall \quad p.p \quad x \in \Omega \\ (b) \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \\ \qquad x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon, \alpha) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ (c) \quad \text{L'application} \quad x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0) \quad \text{appartient à } \mathcal{H} \end{cases} \tag{3.9}$$

On suppose que les forces volumique f_0 et les tractions surfaciques f_2 satisfaisant la régularité

$$f_0 \in C(0, T; H) \quad , \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d) \tag{3.10}$$

Enfin , les fonctions β et μ vérifient les condition suivantes :

$$\beta \in L^\infty(\Gamma_3) \ \ , \ \ \beta(x) \geq \beta^* > 0 \qquad\qquad p.p.sur\ \Gamma_3 \tag{3.11}$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \mu > 0 \qquad\qquad p.p.sur\ \Gamma_3 \tag{3.12}$$

En suite ; nous rappelons le champ de déplacement initial satisfait :

$$u_0 \in V \tag{3.13}$$

Par ailleurs, nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir la fonction $f : [0; T] \longrightarrow V$ par l'égalité :

$$(f(t), v)_V = \int_\Omega f_0(t) \cdot v \ dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \ da \qquad \forall\ v \in V \ , \ t \in [0, T] \tag{3.14}$$

Pour tout $v \in V$ et $t \in [0,T]$ il résulte de l'hypothèse (3.9) que f a la régularité :

$$f \in C(0,T;V) \tag{3.15}$$

Soit $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction de frottement définie par :

$$j(u,v) = \int_{\Gamma_3} \beta \mid u_\nu \mid (\mu \mid v_\nu - v^* \mid + v_\nu)\, da \qquad \forall\, u, v \in V \tag{3.16}$$

Nous supposons dans ce qui suit que les deux $\{\sigma, u\}$ sont des fonctions suffisamment régulières qui vérifient (3.1) - (3.6) est donné . Nous utilisons la formule de Green et l'équation d'équilibre (3.2) pour obtenir :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (Div\, \sigma, v - \dot{u})_H = \textstyle\int_\Gamma \sigma\nu \cdot\ (v - \dot{u})\ da\ \ , \forall\ v \in V$$

Alors

$$\begin{gathered}\textstyle\int_\Omega \sigma(t) \cdot \varepsilon(v - \dot{u})\ dx + \int_\Omega Div\, \sigma \cdot (v - \dot{u})\ dx = \\ \textstyle\int_{\Gamma_1} \sigma\nu \cdot\ (v - \dot{u})\ da + \int_{\Gamma_2} \sigma\nu \cdot\ (v - \dot{u})\ da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot\ (v - \dot{u})\ da\ \ \forall v \in V\end{gathered}$$

Donc

$$\textstyle\int_\Omega \sigma(t) \cdot \varepsilon(v - \dot{u})\ dx - \int_\Omega f_0 \cdot (v - \dot{u})\ dx = \int_{\Gamma_1} \sigma\nu \cdot\ (v - \dot{u})\ da + \int_{\Gamma_2} \sigma\nu \cdot\ (v - \dot{u})\ da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot\ (v - \dot{u})\ da$$

En suite , nous divisons l'intégrale de surface Γ_1, Γ_2 et Γ_3 . Puisque $v - u(t) = 0$ sur Γ_1 ;
$\sigma(t)\nu = f_2(t)$ sur Γ_2 , en tenant compte de (3.14) on obtient que :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} - \int_\Omega f_0 \cdot (v - \dot{u})\ dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u})\ da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u})\ da \tag{3.17}$$

donc

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} = \textstyle\int_\Omega f_0 \cdot (v - \dot{u})\ dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u})\ da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u})\ da$$

On déduit que

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} = (f(t), v - \dot{u})_V + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u})\ da \tag{3.18}$$

Notons que

$$\sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) = \sigma_\nu \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu) + \sigma_\tau \cdot (v_\tau - \dot{u}_\tau) \tag{3.19}$$

Et utilisant la condition de contact aux limites avec frottement et usure (3.5) nous avons :

$$\begin{aligned}\sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) &= \sigma_\nu \cdot\ (v_\nu - \dot{u}_\nu) + \sigma_\tau \cdot\ (v_\tau\ - \dot{u}_\tau) \\ &= -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu) - \mid \sigma_\tau \mid \parallel v_\tau - \dot{u}_\tau \parallel \\ &= -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid \cdot (v_v - \dot{u}_\nu)\ - \mu\, \beta \mid \dot{u}_\nu \mid \parallel v_\tau + v^* - \dot{u}_\tau - v^* \parallel \\ &= -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu)\ - \mu\, \beta \mid \dot{u}_\nu \mid \parallel (v_\tau - v^*) - (\dot{u}_\tau - v^*) \parallel \\ &\geq -\beta \mid \dot{u}_\nu \mid \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu)\ - \beta \mid \dot{u}_\nu \mid (\mu \parallel v_\tau - v^* \parallel - \mu \parallel \dot{u}_\tau - v^* \parallel)\end{aligned}$$

Enfin, on déduit que :

$$\sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) = \beta \mid \dot{u}_\nu \mid (\mu \parallel \dot{u}_\tau - v^* \parallel + \dot{u}_\nu) - \beta \mid \dot{u}_\nu \mid (\mu \parallel v_\tau - v^* \parallel + v_\nu) \quad (3.20)$$

il vient que

$$\int_\Omega \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u})\, dx + \int_{\Gamma_3} \beta \mid \dot{u}_\nu \mid (\mu \parallel v_\tau - v^* \parallel + v_\nu)\, da_, - \int_{\Gamma_3} \beta \mid \dot{u}_\nu \mid (\mu \parallel \dot{u}_\tau - v^* \parallel + \dot{u}_\nu)\, da \quad (3.21)$$
$$\geq \int_\Omega f_0 \cdot (v - \dot{u})\, dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u})\, da, \quad \forall\, v \in V$$

D après , l'égalité (3.14) et (3.15) , nous obtenons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (f(t), v - \dot{u})_V \quad , \forall\, v \in V$$

Problème P_2V : Trouver le champ de contrainte $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$; le champ de déplacement $u : [0, T] \longrightarrow V$ tels que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \quad (3.22)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (f(t), v - \dot{u})_V \quad , \forall\, v \in V \quad , \forall\, t \in [0, T] \quad (3.23)$$

$$u(0) = u_0 \quad (3.24)$$

Notons que le problème variationnel P_2V est formulé termes de champ de contrainte et le champ de déplacement .

3.3 L'existence et l'unicité de la solution

Dans cette section ; nous énonçons et prouvons le résultat de l'existence d'unicité suivant :

Théoréme 3.1 *Supposons que les hypothèses (3.8)-(3.13) sont satisfaites alors il existe une constante* β_0 *qui ne dépend que* $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2$ *et* $\mathcal{A}$ *tels que : ,si*

$$\mid \beta \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} (\mid \mu \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \beta_0 \quad (3.25)$$

Alors le problème P_2V *admet une solution unique* $\{u, \sigma\}$ *. De plus la solution présente la régularité*

$$u \in C^1(0, T; V) \quad (3.26)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1) \quad (3.27)$$

Les fonctions u, σ qui satisfont (3.22) - (3.24) s'appellent une solution faible du problème de contact .

Nous concluons de ce qui précède que problème PV admet une solution unique a condition que les hypothèses du (3.8)- (3.13) sont satisfaites. La démonstration du théorème (3.1), sera réalisée en plusieurs étapes, dans tout ce qui suit, nous supposons que les hypothèses du théorème (3.1) sont satisfaites et nous considérons que C est une constante positive qui dépend de Ω, Γ_1 et Γ_3 dont la valeur ne changer d'une place à l'autre .

Remarque 3.1 *On remarque que si ν^* est assez grand , donc $\beta = \frac{1}{k_1 \nu^*}$ est suffisamment petit et , par conséquent ; la condition (3.25) pour la solution unique du problème PV est satisfaite .Nous concluons que le problème mécanique (3.1)-(3.6) a une faibles solution unique si la vitesse tangentielle de la fondation est assez grande. De plus , la résolution du problème (3.1)-(3.6), nous permet de trouver la fonction de l'usure par intégration de (1.10) et on utilise la condition initiale $w(0) = 0$ qui indique que le corps à l'instant initiale n'est pas soumis à un usure.*

Soient $\quad \eta \in C(0, T, \mathcal{H}) \quad$ *et* $\quad g \in C(0, T, V)$.

Problème $PV_{\eta g}$: Trouver le champ de déplacement $u_{\eta g} : [0, T] \longrightarrow V$ et le champ de contrainte $\sigma_{\eta g} : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ tels que :

$$\sigma_{\eta g}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_{\eta g}(t))) + \eta(t) \quad , \forall\ t \in [0, T] \tag{3.28}$$

$$(\sigma_{\eta g}(t)\,,\,\varepsilon(v - v_{\eta g}(t)))_{\mathcal{H}} + j(g(t), v) - j(\,g(t)\,,\,v_{\eta g}(t)) \,\geq\, (f(t)\,, v - v_{\eta g}(t))_V \tag{3.29}$$

$$\forall\ v \in V \quad , \forall\ t \in [0, T]$$

Lemme 3.1 *Il existe une solution unique du problème $P_1 V_{\eta g}$ qui satisfait :*

$$v_{\eta g} \in C(0, T; V) \tag{3.30}$$

$$\sigma_{\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H}_1) \tag{3.31}$$

Démonstration 3.1 *Nous considérons sur l'espace V,l'opérateur A défini par :*

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\,(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \forall\ u, v \in V \tag{3.32}$$

(3.32)et (3.8) resulte que :

$$|\ Au - Av\ |_V \leq L_{\mathcal{A}}\ \ |\ u - v\ |_V\ ;\ \forall\ u, v \in V \tag{3.33}$$

Ce qui conclure que $A : V \longrightarrow V$ est Lipschitz . Alors par (3.32) et (3.8),nous trouvons

$$(Au - Av, u - v)_\nu\ \geq\ m_{\mathcal{A}}\ |\ u - v\ |_\nu^2\ ,\ \forall\ u, v \in V \tag{3.34}$$

C'est â dire que $A : V \longrightarrow V$ est un opérateur fortement monotone dans V. De plus ,l'utilisation du théorème de représentation de Riesz,nous pouvons définir un élément $F \in C(0, T; V)$ par

$$(F(t), v)_\nu = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}$$

Pour A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur V et pour j une fonction convexe,propre et semi-continue,il vient du résultat sur les inégalités elliptiques qu'il existe une fonction unique $v_{\eta g}(t) \in V$ qui satisfait

$$(Av_{\eta g}(t), v - v_{\eta g}(t))_{\mathcal{H}} + j(g(t), v) - j(g(t), v_{\eta g}(t)) \tag{3.35}$$

$$\geq (F(t), v - v_{\eta g}(t))_V\ ,\ \forall\ v \in V$$

Pour obtenir $\sigma_{\eta g}(t) \in \mathcal{H}$,nous utilisons la relation (3.32),l'hypothèse (3.8)et les propriétés du tenseur de déformation. On pose $v = v_{\eta g}(t) \pm \psi$,où $\psi \in D(\Omega)^d$ est qualificatif et en utilisant la définition (3.14) pour f(t) nous trouvons

$$Div\, \sigma_{\eta g}(t) + f_0(t) = 0\ ,\ \ t \in (0, T) \tag{3.36}$$

avec la régularité (3.24) sur f_0 , nous remarquons que $Div\, \sigma_{\eta g}(t) \in H$.Par conséquent, $\sigma_{\eta g} \in \mathcal{H}$.

Soient t_1 , $t_2 \in [0.T]$ et nous notons $\eta(t_i) = \eta_i$, $f(t_i) = f_i$, $g(t_i) = g_i$, $v_{\eta g}(t_i) = v_i$ et $\sigma_{\eta g}(t_i) = \sigma_i$ pour $i = 1, 2$..

D'un autre côté , en utilisant la relation (3.29) ,nous trouvons :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad\le (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_\nu + (\eta_1 - \eta_2, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad +j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2)\end{aligned} \tag{3.37}$$

D'après (3.15) nous avons :

$$j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2)$$

$$= \int_{\Gamma^3} (\beta \mid g_{1v} \mid - \beta \mid g_{2v} \mid)\, (\mu \mid v_{2\tau} - v^* \mid - \mu \mid v_{1\tau} - v^* \mid + v_{2\nu} - v_{1\nu}) da$$

De plus que ,notons que (3.11) et (3.12) implique que :

$$\begin{aligned}&\mid j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2) \mid \\ &\le C_0^2 \mid \alpha \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} (\mid \mu \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \mid g_1 - g_2 \mid_V + \mid v_1 - v_2 \mid_V\end{aligned} \tag{3.38}$$

Et aussi la relation (3.7) , l'hypothèse (3.8) et l'inégalité (3.38) combinées avec (3.37)nous donne :

$$m_{\mathcal{A}} \mid v_1 - v_2 \mid_V \le C_0^2 \mid \alpha \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} (\mid \mu \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \mid g_1 - g_2 \mid_V + \mid f_1 - f_2 \mid_V + \mid \eta_1 - \eta_2 \mid_{\mathcal{H}} \tag{3.39}$$

Encore, l'inégalité (3.14) et la régularité des fonctions f et g et η montrent que

$$v_{\eta g} \in C(0, T; V)$$

De (3.11) et (3.28) nous obtenons

$$\mid \sigma_1 - \sigma_2 \mid_{\mathcal{H}} \le L_{\mathcal{A}} \mid v_1 - v_2 \mid_V + \mid \eta_1 - \eta_2 \mid_{\mathcal{H}} \tag{3.40}$$

et d'après (3.2) on a

$$Div\, \sigma_{\eta g}(t_i) + f_0(t_i) = 0,\ i = 1, 2 \tag{3.41}$$

Aussi,la régularité des fonctions η, v, f_0 est des relations (3.40)-(3.41) montrent que

$$\sigma_{\eta g} \in C(0,T;\mathcal{H}_1)$$

Pour $g \in C(0,T;V)$ et $\eta \in C(0,T;\mathcal{H})$. Nous considérons l'opérateur suivants :

$$\Lambda_\eta : C(0,T;V) \longrightarrow C(0,T;V)$$

défini par :

$$\Lambda_\eta g = v_{\eta g},\ \forall g \in C(0,T;V) \tag{3.42}$$

Lemme 3.2 *Supposons que les hypothèses (3.8)-(3.13) est satisfaites.Alors une réel $\beta_0 \succ 0$, qui ne dépend que de Ω ,Γ_1, Γ_3 et $\mathcal{A}$ telle que si (3.25) est vérifiée, l'opérateur Λ_η a un point fixe unique $g_\eta^* \in C(0,T;V)$*

Démonstration 3.2 *Soient $g_1, g_2 \in C(0,T;V)$ et $\eta \in C(0,T;\mathcal{H})$ .Nous utilisons la notation $v_i = v_{\eta gi}$ et $\sigma_i = \sigma_{\eta gi}$ pour $i = 1,2$*
Ensuite,nous utilisons les même arguments que ceux utilisés dans (3.39) pour trouver :

$$m_{\mathcal{A}} \mid v_1(t) - v_2(t) \mid_V \leq C_0^2 \mid \beta \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} (\mid \mu \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} +1) \mid g_1(t) - g_2(t) \mid_V, \forall t \in [0,T] \tag{3.43}$$

Par ailleurs ,en utilisant (3.39)et (3.43) nous obtenons

$$\mid \Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t) \mid_V \leq \frac{C_0^2}{m_{\mathcal{A}}} \mid \beta \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} (\mid \mu \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} +1) \mid g_1(t) - g_2(t) \mid_V, \forall t \in [0,T] \tag{3.44}$$

Soit

$$\beta_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$$

β_0 est une constante positive qui dépend de Ω ,Γ_1,Γ_3 et de l'opérateur $\mathcal{A}$
Si (3.25) est satisfait,nous déduisons de (3.44) que l'opérateur Λ_η est une contraction.
Nous conclusons par théorème du point fixe de Bannach que l'opérateur Λ_η a un point fixe unique $g_\eta^* \in C(0,T;V)$
Nous désignons par

$$v_\eta = v_{\eta g_\eta^*} \ ,\ \sigma_\eta = \sigma_{\eta g_\eta^*} \tag{3.45}$$

Nous considérons la fonction $u_\eta(t)$:$[0,T] \longrightarrow V$ définit par :

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) \ \ ds + u_0 \ , \ \forall \ t \in [0, T] \tag{3.46}$$

En utilisant (3.34),nous trouvons que u_η satisfait la régularité exprimé dans (3.26).

d'un autre côté, soit $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$,nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans (3.45)

Encore , pour $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$, considérons l'opérateur $\Lambda(\eta) : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$

$$(\Lambda(\eta)(t), v)_V = \mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_\mathcal{H} \tag{3.47}$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 3.3 *Pour $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$, la fonction $\Lambda(\eta) : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue et un élément unique $(\eta^*) \in C(0, T; \mathcal{H})$ tel que*

$$\Lambda \eta^* = \eta^*$$

Démonstration 3.3 *Soit $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$, en utilisant (3.9)nous avons*

$$\mid \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2) \mid_\mathcal{H} \leq \mid \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_2)) \mid_\mathcal{H} \tag{3.48}$$

Après, en raison de la régularité du u_η exprimé dans (3.26), nous déduisons de (3.34) que $\Lambda_{(\eta)} \in C(0, T; V)$

Par conséquent $\Lambda_{(\eta)} \in C(0, T; \mathcal{H})$ .Soient $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$

Nous utilisons la notation $g^*_{\eta_i} = g_i$, $\sigma^*_{\eta_i} = \sigma_i$, $u_{\eta_i} = u_i$,et $\dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i, i = 1, 2$

De même ,à partir (3.42)et (3.45) nous trouvons

$$\mid \Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t) \mid^2_\mathcal{H} \leq C \mid u_1(t) - u_2(t) \mid^2_V \tag{3.49}$$

Soit

$$u_i(t) = \textstyle\int_0^t v_i(s) \ ds + u_0$$

Nous avons

$$\mid u_1(t) - u_2(t) \mid^2_V \leq \int_0^t \mid v_1(s) - v_2(s) \mid^2_V \ ds, \forall t \in [0, T] \tag{3.50}$$

il vient de $P\,\boldsymbol{V}_{\eta g}$ pour $\eta = \eta_i, i = 1, 2$ que

$$\sigma_i(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_i(t))) + \eta_i(t) \qquad \forall \ t \in [0, T] \tag{3.51}$$

$$(\sigma_i(t), \varepsilon(v - v_i(t)))_{\mathcal{H}} + j(g_i(t), v) - j(g_i(t), v_i(t)) \geq (f(t), v - v_i(t))_V, \quad \forall\ t \in [0, T]$$

En utilisons (3.51) afin de voir que

$$(\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t) - v_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq j(g_1(t), v_2(t)) - j(g_1(t), v_1(t)) \tag{3.52}$$

$$+j(g_2(t), v_1(t)) - j(g_2(t), v_2(t)), \forall\ t \in [0, T]$$

Encore , nous utilisons (3.38) et fonction j, nous obtenons

$$(\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t) - v_2(t)))_{\mathcal{H}}$$

$$\leq C_0^2 \mid \beta \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} (\mid \mu \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} +1)$$

$$\mid g_1(t) - g_2(t) \mid_V \mid v_1(t) - v_2(t) \mid_V$$

D'après la notation $v_i = g_i$ *pour* $i = 1, 2$,*nous trouvons que*

$$(\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t) - v_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq C_0^2 \mid \beta \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} (\mid \mu \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} +1) \mid v_1(t) - v_2(t) \mid_V^2 \quad \forall t \in [0, T]$$

de (3.51),(3.8) et (3.9) nous obtenons

$$(m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \mid \alpha \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} (\mid \mu \mid_{L^\infty(\Gamma_3)} +1)) \mid v_1(t) - v_2(t) \mid_V^2 \leq \mid \eta_1(t) - \eta_2(t) \mid_{\mathcal{H}} \quad \forall t \in [0, T]$$

Nous utilisons les trois inégalités précédentes pour trouver

$$\mid v_1(t) - v_2(t) \mid_V^2 \leq C \mid \eta_1(t) - \eta_2(t) \mid_V^2 \tag{3.53}$$

Il résulte de (3.49) et (3.53) que

$$\mid \Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t) \mid_{\mathcal{H}}^2 \leq \ (C \textstyle\int_0^t \mid \eta_1(s) - \eta_2(s) \mid_V^2 .ds)$$

Maintenant on peut démontrer le théorème (3.1)
Démonstration de l'existence :
Soit $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$ est point fixe de Λ défini par(3.48) et $\{v, \sigma\}$ sont des solutions des problèmes $PV_{\eta g}$ pour $\eta = \eta^*$ et $g = g^*_{\eta^*}$ c'est à dire $u = u_{\eta^*}$.
Pour $\eta = \eta^*$
Les équation $\Lambda^1(\eta^*)(t) = \eta^*$ se combinent avec (3.48)montrent que(3.22)-(3.23)sont satisfaites.
Ensuite (3.24)et la régularités(3.26)-(3.27) résulte de lemme (3.1).
unicité :
la solution unique est la conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ définie par (3.48) et l'unicité de la solution des problèmes $PV_{\eta g}$

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudie théoriquement un problème de contact sans et avec frottement et usure entre deux corps viscoélastiques.On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème.On a montré l'existence et l'unicité de la solution faible de problème précédent par l'utilisation des arguments suivants ;équation variationnelle, equation différentielle,le lemme de Gronwall et point fixe .En fin ,ce problème peut être approché numériquement en utilisant les méthodes itératives des éléments finis et des différences finies.

Bibliographie

[1] A. Djabi, A. Merouani and A. Aissaoui, A frictional contact problem with wear involving elastic-viscoplastic materials with damage and thermal effects, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2015, No. 27, 1-18 ;

[2] G. Duvaut and J.L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, SpringerVerlag, Berlin (1976).

[3] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application, Masson (1987).

[4] H.Brézis, Equations et Inequations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, 18 (1968), 115-175.

[5] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis and Numerical Simulations of A Dynamic Contact Problem with Adhesion, Math. Comput Modelling 37 (2003),13171333.

[6] K.Chadi ,Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites en viscoélasticité avec mémoire longue,Mémoire de magister, Université Ferhat Abbas - Setif ,(2013).

[7] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, A Viscoelastic Bilateral Frictionless Contact Problem with Adhesion, Applic. Anal. 80 (2001), 233-255.

[8] L. Selmani, M. Selmani, Analysis of A Viscoelastic Contact Problem with Normal Damped Reponse and Damage, Bulletin of the Belgian Mathematical Society- Simon Stevin.

[9] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Quasistatic Nonlinear Viscoelastic Contact with Normal Compliance and Friction, Journal of Elastcity, 51(1998), 105-126.

[10] N.Dechoucha ,Etude Mathématique d'un problèmes de contact en mécanique du contact,Mémoire de magister, Université Ferhat Abbas - Setif ,(2010).

[11] R.S.Adams, Sobolev espace, Academic Press, London (1975).

[12] W. Han, K.L. Kuttler, M. Sillor and M. Sofonea, Elasti Beam in Adhésive Contact,Int. J. Solides Structures 39 (2002), 1145-1164

[13] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and Numerical Analysis of A Quasistic Viscoelastic Problem with Normal Compliance, Frictionand Damage, J.Comput.Appl. Math(2001)

[14] Z.Lerguet, Analyse de quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion,Thèse de Université de Sétif, (2008)

ملخص:

نحن نعتبر مشكلة شبه ثابتة تتمثل في انزلاق التلامس مع التآكل بين الجسم اللزج و المرن و الجزء السفلي المتحرك الصلب . نعتبر في نفس الوقت الحالات بدون ومع الاحتكاك ونقوم بنمذجة التآكل بنسخة من قانون اتشارد.
نعطي نتائج الوجود و التفرد في الحل لكل مشكلةبإستخدام نظرية النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية:

تآكل، فسكومرن ، متباينة تغايرية ، حل ضعيف ، شبه ساكن ، نقطة صامدة.

Résumé :

Nous considèrent un problème quasi-statique de contact glissant avec l'usure entre le corps viscoélastique et la bas mobile rigide . Nous considérons à la fois les cas sans et avec frottement , et nous modélisons l'usure avec une version de la lois d'Archard . On donne des résultats d'éxistance et d'unicité de la solution pour chaque problème en utilisant le théorème du point fixe.

Mots-clés :

usure , viscoélastique , equation d'evolution , solution faible , quasi-statique , point fixe

Abstract:

We consider a quasi-statique problem of sliding contact with the wear between the viscoelastic body and the rigid mobile bottom . We consider at the same time the cases without and with friction , and we model the wear with version of th law from Archard .
We give results of existence and uniqueness of the solution for each problem using the fixed piont theorem .

Key words:

wear , viscoelastic , evolution equation , weak solution , quasi-static , fixed piont .