

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj Faculté des  
Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



Mémoire

Présenté par

HAMIDI SARA

GHODBANE HANANE

Pour l'obtention du diplôme de

**Master**

Filière : Mathématiques

Spécialité : Systèmes Dynamiques

---

Thème

**synthèse sur les lois de comportement en mécanique des solides déformables**

---

Soutenu publiquement le ... septembre 2020 devant le jury composé de

Président : SMAIL ADDOUNE  
Encadreur : DEBBACHA LAIFA  
Examineur : BENAÏSSA SORIA

Promotion 2019/2020

*Dédicace*

**Je dédie ce modeste travail :**

**A ma maman et papa qui se sont tenus à mes cotés jusqu'à la fin et a :**

**A mon marie.**

**A mes enfants(taki et radhouane).**

**A mes frères.**

**A mes soeurs.**

**A toute la famille.**

**Enfin je dédie ce mémoire à tous ceux qui me sont chers.**

*Dédicace*

*À mes très chers parents ma mère et mon père*

*Pour leurs patience, leur amour, leurs encouragements.*

*À mes chers frères "Ramzi, Ayoub, Wassime", source de joie et de bonheur.*

*À toute ma famille.*

*À mes amies et mes camarades.*

*Sans oublier tous les professeurs.*

*HANANE*

## **REMERCIEMENT**

**Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce projet.**

**la première personne que nous tenons à remercier est notre encadreur (DEBBACHA LAIFA).  
pour l'orientation, l'encouragement, la patience qui a constitué un apport considérable sans  
lequel ce travail**

**n'aurait pas pu être menée au bon port.**

**Mes remerciements vont également aux Messieurs les membres de jurys, d'avoir accepté d'être  
examineurs de ce mémoire.**

**Et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.**

**paix, la miséricorde et les bénédictions de Dieu.**

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Quelques définitions de base</b>	<b>9</b>
1.1 Déformation : . . . . .	9
1.1.1 Déformation longitudinale ( $\delta$ ) : . . . . .	9
1.1.2 Déformation unitaire ( $\varepsilon$ ) : . . . . .	10
1.1.3 Déformations élastiques . . . . .	10
1.1.4 Déformations visqueuses . . . . .	10
1.2 Géométrie de la déformation . . . . .	11
1.2.1 Définition d'un solide déformable . . . . .	11
1.2.2 Définition d'un milieu continu . . . . .	11
1.3 Notations de la déformation . . . . .	11
1.4 Description analytique de la déformable . . . . .	11
1.5 Équation du mouvement . . . . .	12
1.5.1 Dilatation thermique . . . . .	13
1.6 Notion de module de young en 1807 : . . . . .	14
1.6.1 Élasticité : . . . . .	15
1.6.2 Limite d' élasticité : . . . . .	15
1.6.3 Plasticité : . . . . .	15
1.6.4 Module de young (élasticité) : . . . . .	15
1.7 Les briques de base. . . . .	15
1.8 Loi de comportement . . . . .	16
1.8.1 Loi de comportement élastique . . . . .	16
1.8.2 Loi de comportement an élastique. . . . .	17
<b>2 Lois de comportement de base</b>	<b>18</b>
2.1 Loi de comportement unidimensionnelle Historique . . . . .	19
2.1.1 Essais expérimentaux . . . . .	19
2.1.2 Exemples d'essais . . . . .	19
2.2 Loi de comportement élastique linéaire en dimension 1 . . . . .	20
2.3 Loi de comportement visqueuse linéaire en dimension 1 . . . . .	21
2.4 Loi de comportement plastique linéaire en dimension 1 . . . . .	21

<b>3</b>	<b>Lois de comportement associables</b>	<b>23</b>
3.1	Modelés analogique . . . . .	23
3.2	Lois de comportement Viscoélastiques (viscosité+ élasticité) . . . . .	24
3.2.1	Modèles à deux éléments . . . . .	24
3.2.2	Modèles à trois éléments . . . . .	28
3.2.3	Modèles à quatre éléments . . . . .	28
3.3	Lois de comportement viscoplastiques(Viscosité +Plasticité) . . . . .	29
3.4	Lois de comportement élastoplastiques(Elastique + Plastique) . . . . .	29
	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>32</b>
A.1	Rappels sur les espaces de Hilbert . . . . .	32
A.2	Définition des espaces $H$ et $\mathcal{H}$ . . . . .	32
A.3	Espace lié à l'opérateur de déformation $\varepsilon$ . . . . .	32
A.4	Espace Lié à l'opérateur divergence . . . . .	33
A.5	Quelques propriétés sur les espaces considérés . . . . .	33
A.6	Les application traces . . . . .	34
A.7	Quelques théorèmes d'existence . . . . .	35

---

# INTRODUCTION

On se donne un corps de forme initiale connue  $\Omega_0$ . On le soumet à des efforts extérieures (chargement mécanique : efforts appliqués sur le corps ou déplacements imposés et/ ou thermique : une variation de température); il en résulte un changement de son mouvement et de son état thermodynamique.

Dans cette mémoire, nous étudions états solide et d' autres états déformable et les lois comportement mécanique.

les lois de comportement de la matière, étudiées en science des matériaux et notamment en mécanique des milieux continus, visent à modéliser le comportement des fluides ou solide par des lois empiriques lors de leur déformable.

## **Problématique :**

On se donne un corps de forme initiale connue  $\Omega_0$  . On veut une autre pièce plus solide de forme géométrique différente (soit  $\Omega_t$ ).

Si la loi de comportement(constituants du corps) connue ; on se pose les questions suivantes :

- Sous quels changement, on peut calcule l'objet  $\Omega_t$  ?
- Quelles sont les contraintes, les déformation, les déplacements engendrés par ces changements. ?
- Ces changement sont ils supportables par le corps  $\Omega_t$  ?
- Comment déterminer ces lois de comportement ?

**L'objet du problème :** est d'établir le modèle mathématique correspondant au problème mécanique. De plus, nous considérons des hypothèses simplification supplémentaires (au problème mécanique) :

- (H.P.T) ayant pour conséquence de rendre les équation différentielles linéaire.
- Efforts purement mécanique(étude en évolution isotherme).

Le mémoire est devisé en trois chapitres et structure comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux quelques définition de base (les types de déformation ).

Le deuxième chapitre est consacré aux lois de comportement de base (élasticité, viscosité, plasticité).

Le troisième chapitre est consacré aux lois de comportement associable(viscoélasticité, viscoplasticité, élastoplasticité).

Finalement, ce mémoire se termine par une conclusions.

---

# TABLE DES NOTATIONS

$p$  : Déformation plastique cumulée.

$T$  : Température.

$A$  : Opérateur d'élasticité.

$\sigma$  : La contrainte.

$\sigma_0$  : Contrainte à la limite d'élasticité.

$S$  : Surface du solide.

$\dot{u}, \ddot{u}$  : Dérivée première et seconde de  $u$  par rapport aux temps.

$\Gamma$  : La frontière de  $\Omega$ .

$D$  : L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans  $\Omega$ .

$\mathcal{D}$  : Espace de distribution.

$S_n$  : Espace de tenseur.

$$H = L^2(\Omega)^d.$$

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega)_S^{dd}.$$

$$H_1 = H^1(\Omega)^d.$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div}\sigma \in H\}.$$

$H'$  : L'espace dual de  $H$ .

$H'_\Gamma$  : L'espace dual de  $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .

$$w = \{\zeta \in H^1(\Omega) \mid \zeta = 0 \text{ sur } a\}.$$

$\gamma$  : Application trace pour les fonctions vectorielles.

$t$  : Le temps.

$\rho$  : Masse volumique.

$F$  : Effort.

$H$  : Module tangent.

$I$  : Intensité lumineuse.

$N$  : Fonction cout.

$K$  :Module d'écrouissage.

$p.p$  : Presque partout.

$c$  : Une constante générique strictement positive.

$v$  :Volume du solide.

$\varepsilon_0$  :La déformation constante.

$\eta$  :Viscosité.

$\sigma(t)$  :Contrainte totale.

$\varepsilon(t)$  :Déformation totale.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## QUELQUES DÉFINITIONS DE BASE

Avant d'entrer dans les autre chapitre, nous allons présenter d'abord quelques définitions fondamentales qui nous utiles par la suite.

### 1.1 Déformation :

C'est la modification qui subit un corps sous l'effet de la force qui il subit.

#### 1.1.1 Déformation longitudinale ( $\delta$ ) :

C'est l' allongement ou le raccourcissement que subit une pièce sous l'effet d' un effort de traction ou de compression.

$$\delta = L - L_0[m] \quad (1.1)$$

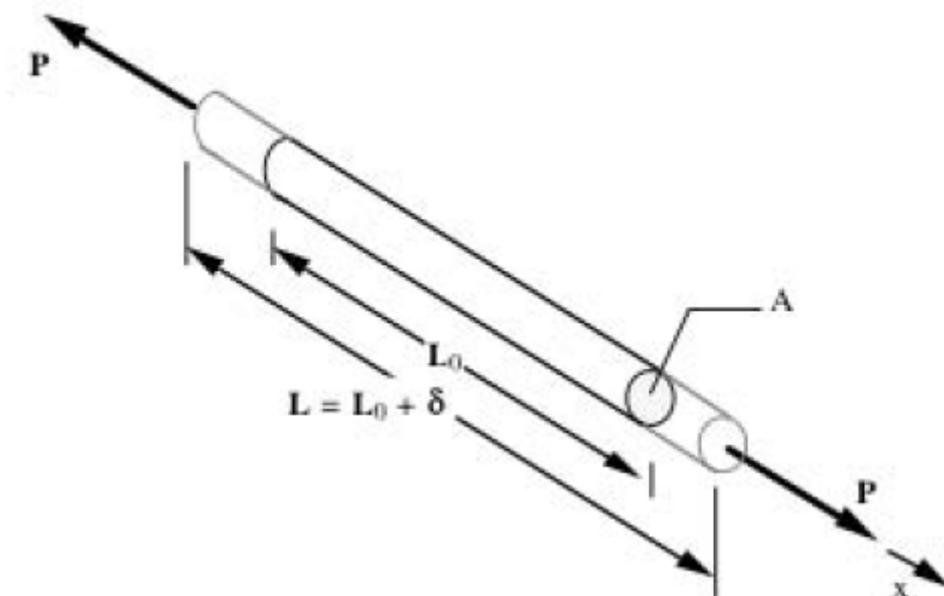


FIGURE 1.1

### 1.1.2 Déformation unitaire ( $\varepsilon$ ) :

C'est déformation par unité de longueur. la déformation n'a pas d'unité[m/m].

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (1.2)$$

ou

$L_0$  :longueur de la tige sans charge.

$L$  :longueur de la tige supportant une charge  $p$ .

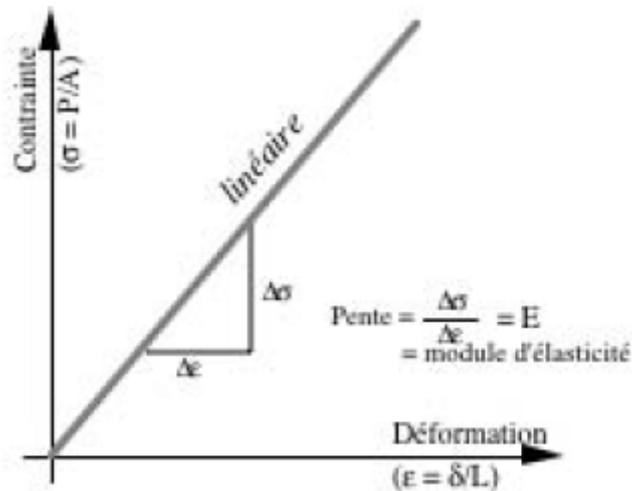


FIGURE 1.2

### Exemple

quel est la déformation unitaire Que subit une pièce de 5 m de long qui s'étire de 2 mm sous l'action d'une charge de 150 k N ?.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} = \frac{0.002m}{5m} = 0.0004 = 410^{-4}$$

### 1.1.3 Déformations élastiques

Elles correspondent à des variation des espaces inter atomiques et à des mouvements réversibles de dislocation. Ces déformation sont essentiellement réversibles et la configuration initiale est retrouvée après décharge.

### 1.1.4 Déformations visqueuses

Elles correspondent à la poursuite de la déformation alors que la charge est constante il n'y a plus d'équilibre le temps et les vitesses de déformation jouent un rôle important dans les loi de comportement d'un matériau visqueux, lors de ce phénomène favorisé par l'activation thermique, on parle d'écoulement de fluage.

## 1.2 Géométrie de la déformation

### 1.2.1 Définition d'un solide déformable

Un solide déformable est un corps qui change de forme géométrique à Cause des efforts extérieurs (mécanique, thermique ou couplés).

### 1.2.2 Définition d'un milieu continu

Un milieu continu est un corps qui occupe à chaque instant un ouvert borné connexe de  $R^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ). En respectant la continuité de la matière (ni interpénétration, ni formation de cavités).

## 1.3 Notations de la déformation

On s'intéresse à l'état final du solide lorsque l'application des efforts extérieurs est terminée et que le solide à atteint son état d'équilibre. On désigne par  $\Omega$  le domaine occupé par le corps à l'instant  $t = 0$ . ( $\Omega$  s'appelle la configuration de référence), et par  $\Omega_t$  le domaine occupé par le même corps à l'instant  $t > 0$  ( $\Omega_t$  s'appelle la) configuration déformée.

$X = (X_i)$  désigne les composantes de la position d'une particule  $p$  du corps l'instant  $t = 0$ .

$x = (x_i)$  désigne les composantes de la position de la même particule  $p$  l'instant  $t > 0$ .

l'objet du problème, du point de vue mécanique est d'étudier le nouvel état d'équilibre du corps résultant de l'application des forces volumiques sur  $\Omega$  et des forces surfaciques sur une partie de la frontière  $\Gamma$ .

Les inconnues du problème sont donc :

Le champ de déplacement  $u : \Omega \rightarrow R^N$

Le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \rightarrow S_N$

## 1.4 Description analytique de la déformable

Le lien entre  $X \in \Omega$ , et  $x \in \Omega_t$  est donné par une application vectorielle

$$\begin{aligned} \phi(., t) : \Omega &\longrightarrow \Omega_t, \forall t > 0 \\ X &\longrightarrow \phi(X, t) \end{aligned}$$

$$x = \phi(X, t) = X + u(X, t) \forall t > 0, x \in \Omega \quad (1.3)$$

avec  $u(X, t)$  le vecteur de déplacement.  $\phi(., t)$  est appelée application de la déformation.

En particulier la vitesse et l'accélération sont définies respectivement par :

$$v = \frac{d(\phi(X, t))}{dt} = \dot{u}. \quad (1.4)$$

$$a = \frac{d^2(\phi(X, t))}{dt^2} = \ddot{u}. \quad (1.5)$$

Nous introduisons les notation suivantes :

$$F = \nabla_X \phi = I_N + H \quad (\text{avec} \quad H = \nabla_X u). \quad (1.6)$$

$$C = F^T F = (I_N + H + H^T + H^T H). \quad (1.7)$$

$$G = \frac{1}{2}(C - I_N) = \frac{1}{2}(H + H^T + H^T H). \quad (1.8)$$

où  $\nabla_{x\phi}$  désigne le gradient de par rapport aux coordonnées de la variable  $X$ ,  $H^T$  est la transposée de  $H$ ,  $F^T$  est la transposée de  $F$  est  $I_N$  est la matrice unité d'ordre  $N$ , le tenseur  $F^T$  est le tenseur gradient de la déformation,  $C$  est le tenseur des dilatation ou tenseur des déformation de Cauchy tandis que le tenseur  $G$  est le tenseur des déformations ;  
en composantes :

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (1.9)$$

On remarque que le tenseur des déformation  $G$  s'exprime d'une façon non linéaire par rapport aux composantes du vecteur déplacement  $u$ . Précisons maintenant un peu plus le cadre de étude a fin d'apporter quelques simplification aux notions introduites récemment.

**Remarque :** nous intéressons aux mouvements qui ont un vecteur de déplacement  $u(X, t)$  qui varie lentement avec  $X$ . Alors les dérivées partielles  $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$  sont petites, On dit alors que on est dans l'hypothèse des petites transformation (H.P.T) Dans ce, les terme  $\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_j}$  sont négliges et l'expression de  $G$  se linéarise en  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (H + H^T). \quad (1.10)$$

Où en composantes

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.11)$$

Le tenseur  $\varepsilon$  s'appelle tenseur des déformation linéarisée. Nous allons maintenant établir l'équation du mouvement du système matériel.

## 1.5 Équation du mouvement

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence du tenseur des forces extérieures et du tenseurs accélération pour un système quelconque conduit aux équations du mouvement suivantes :

$$\text{Div} \sigma + f = \rho \ddot{u} \quad (1.12)$$

$f$  : représente la densité des forces volumiques dans  $\Omega$

$\text{Div} \sigma$  : est divergence de la tenseur des contraintes  $\sigma$

$$\text{Div} \sigma = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} \right)_i, \forall_i \quad (1.13)$$

Où  $\partial_j$  représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport  $x_j$

$\rho(., t) : \Omega_t \rightarrow R_+$  est la densité du masse dans la configuration déformée  $\ddot{u}$  est champ des accélérations. Dans le cas statique; les distances entre des points quelconques restent invariantes au cours du temps c'est à dire  $\ddot{u} = 0$  ou dans le cas quasi-statique

c'est à dire  $\ddot{u}$  est négligeable lorsque  $u$  varie lentement par rapport au temps l'équation devient :

$$\text{Div}\sigma + f = 0 \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \quad (1.14)$$

l'équation(1.12) est appelée équation du mouvement et le d'évolution modelé par cette équation est le processus et (1.14) équation d'équilibre et il s'agit d'un processus statique.

### 1.5.1 Dilatation thermique

La dilatation et la contraction des solides sont mises à profit dans diverses applications : rivetage à chaud, rivetage à froid, thermostat, ... Par contre, la dilatation et la contraction des solides peuvent causer des dégâts sérieux si l'on n'en tient pas compte. On doit entre autres prévoir des joints d'expansion dans les rails de chemin de fer, dans les tuyaux de vapeur, dans les structures métalliques des édifices, des ponts, ...

La dilatation thermique :

- Dépend du matériau (sa nature).
- Est proportionnelle à la longueur du corps.
- Est proportionnelle à la variation de la température.

Plus précisément,

$$\varepsilon = \alpha \Delta T = \alpha(T - T_0)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique (propre au matériau)

et  $\Delta T = T - T_0$  la variation de température (finale - initiale)

## Définition de la contrainte

La contrainte détermine avec quelle intensité les atomes du matériau sont écartés les uns des autres ou comprimés les uns sur les autres. Cette contrainte est, pour une traction simple, la force qui agit sur une unité de surface du matériau.

$$\sigma = F/S$$

Elle se mesure en Pascal (Pa).

### Loi de Hooke

Lorsque on charge un matériau, si la contrainte produite demeure inférieure à sa limite élastique, sa déformation est proportionnelle à la contrainte qui il subit.

$$\sigma = E\varepsilon [N/m^2] \text{ ou } [p_a] \quad (1.15)$$

Où

$E$  : est la constante de proportionnalité appelée module d'élasticité ou module de **Young**.

## Exemple

une barre d'acier (module d'élasticité  $E = 200\text{GPa}$ ) de 3 m de section carrée ayant 12,5 mm de côté est sollicitée par une tension de 21360 N, quel est son allongement total ?  
on a :

$$A = (12,5\text{mm})^2 = (12,5 \cdot 10^{-3}\text{m})^2 = 1,5610^{-4}\text{m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{21360\text{N}}{1,5610^{-4}\text{m}^2} = 13670400\text{Pa} = 136,7\text{ MPa}$$

et

$$\sigma = E\varepsilon$$

d'ou

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{136,710^6\text{Pa}}{20010^9\text{Pa}} = 0,00068352$$

et soit

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

Alors

$$\delta = \varepsilon L_0 = 0,00683523\text{m} = 0,00205\text{m} = 2,05\text{mm}$$

## 1.6 Notion de module de young en 1807 :

Le module de young ou module d'élasticité ou encore module de traction est la constante qui relie la contrainte de traction (ou de compression) et la déformation pour un matériau élastique. Le physicien britannique **thomes young** (1773-1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant, tant que cette déformation reste petite et que la **limite d'élasticité** du matériau n'est pas atteinte la loi **d'élasticité linéaire** est la **loi de Hooke** :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.16)$$

Un matériau dont le module de young est très élevé est dit rigide. l'acier, **l'iridium**, **le diamant**, sont des matériaux très rigides, **l'aluminium** et le **plomb** le sont moins, les matières plastiques et organiques sont généralement peu rigides. Il ne faut cependant pas confondre élasticité et rigidité puisque la raideur d'une poutre par exemple dépend de son module de young mais aussi du moment d'inertie de sa section.

- Lorsque l'on augmente la température, une éprouvette de métal s'allonge (**dilatation**), donc son module de young diminue, tandis que l'éprouvette en polymère se raccourcit donc son module de young augmente.

- Lorsque l'on diminue la température, on observe le phénomène inverse :

L'éprouvette de métal se raccourcit (contraction) donc son module de young augmente, tandis que l'éprouvette de polymère s'allonge (les chaînes sont moins agitées et se laissent étirer) donc son module de young diminue.

Et dans le suivant un tableau qui représente quelques matériaux avec leurs coefficients d'élasticité (tableau de young) :

matériau	valeur de E en
Acier	$(1,87 - 2,16) \cdot 10^5$
Fonte	$(0,88 - 1,47) \cdot 10^5$
Cuivre	$(0,98 - 1,28) \cdot 10^5$
Aluminium	$(0,69 - 0,71) \cdot 10^5$
Caoutchouc	$(3,00 - 7,80) \cdot 10^5$

### 1.6.1 Élasticité :

Propriété qu'a un corps, après avoir été déformé par une charge, de reprendre sa forme initiale lorsque la charge est enlevée.

### 1.6.2 Limite d'élasticité :

C'est la contrainte maximum que peut supporter sans danger de déformation permanente.

### 1.6.3 Plasticité :

Propriété qu'a un corps de conserver partiellement les déformations produites par une charge lorsque celle-ci est enlevée. La déformation plastique se produit quand la contrainte dépasse la limite d'élasticité.

### 1.6.4 Module de young (élasticité) :

C'est la constante de proportionnalité entre la contrainte qu'un matériau subit et sa déformation unitaire c'est un constant propre à chaque matériau.

## 1.7 Les briques de base.

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements de base, qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité, les éléments les plus courants sont, en Figure 2.2 :

- Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (Figure 2.2a).
- l'amortisseur, qui schématise la viscosité, linéaire (Figure 2.2b) ou non linéaire (Figure 2.2c). La viscosité est dite pure s'ils existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.
- Le patin, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (Figure 2.2d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide parfaitement plastique.

## 1.8 Loi de comportement

D'une façon générale, les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes, et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. En voici quelques exemples :

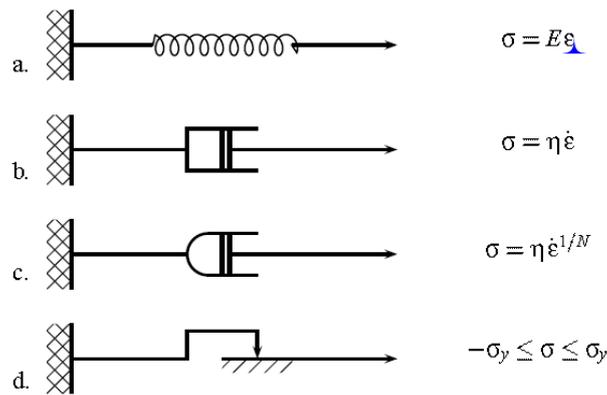


Figure 2.2. Les « briques de base » pour la représentation des comportements.

### 1.8.1 Loi de comportement élastique

En l'absence de déformations inélastiques, deux barres constituées du même matériau, soumises à la même force de traction / compression, mais des sections différentes, subiront des déformations différentes. La barre ayant la section la plus grande se rétrécira ou s'allongera beaucoup moins que celle ayant la section la plus petite. Autrement dit, si l'on désigne pas  $S$  l'aire de la section de la barre, la déformation dépend de la contrainte de traction définie par

$$\sigma = \frac{N}{S} \tag{1.17}$$

C'est à dire la densité surfacique de force normale de traction / compression sur la section. En élasticité linéaire, la loi de comportement est :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES} \tag{1.18}$$

(la déformation est proportionnelle à la contrainte normale)  $E$  est le module d'Young et est caractéristique du matériau, de même dimension que la contrainte (puisque les déformations sont des grandeurs sans dimension), il se mesure donc en Pascal (Pa). Le module d'Young est toujours positif (quand on tire, l'éprouvette s'allonge). Le module de rigidité à la traction ( $ES$ ) est caractéristique de la barre. La barre sort de son domaine élastique lorsque la contrainte de traction / compression atteint une valeur  $\sigma_T^+$  ou  $-\sigma_C^+$  caractéristique du matériau.

### 1.8.2 Loi de comportement an élastique.

Nous ne retiendrons que trois sources an "élasticité" :

- défauts de construction ou d'usinage  $\rightarrow \varepsilon^d$
- effets thermiques  $\rightarrow \varepsilon^t$
- plasticité  $\rightarrow \varepsilon^p$

Nous admettrons chacune de ces trois contributions s'ajoutent :

$$\varepsilon^d + \varepsilon^t + \varepsilon^p = \varepsilon^a \tag{1.19}$$

---



---

# CHAPITRE 2

---

## LOIS DE COMPORTEMENT DE BASE

En partant du problème mécanique du solide déformable, on établira le système d'E.D.P défini par : les équations du mouvement, les conditions aux limites et la considération des deux hypothèses simplificative(H.P.T)et efforts purement mécanique.

Du point de vue mathématique, le problème soumis à des efforts extérieurs est gouverné par :  
équation de mouvement d'équilibre

$$(H.P.T) \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

conditions aux limites

**Concernant les équations et les inconnues dans  $\mathbb{R}^3$ .**

équations	nombre	inconnues	nombre
$\text{Div} \sigma + f = 0$ dans $\Omega \dots (1)$	3	$u = (u_1, u_2, u_3)$	3
$u = g$ sur $\Gamma_1 \dots (2)$	2	$\sigma = \sigma_{ij}$	6
$\sigma \nu = h$ sur $\Gamma_2 \dots (3)$	2	$\sigma^t = \sigma$	
$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots (4)$	6	$\varepsilon = \varepsilon_{ij}$	6
total	13	total	15

Nous avons treize équation avec quinze inconnues, il est bien évident que du point de vue mathématique il est improbable de résoudre ce problème (manque deux équation liant  $u$ ,  $\sigma$  et  $\varepsilon$ ). Du point de vue physique ; cela signifie que les d'ivres milieux déformables auraient des comportement identique ce qui est absurde.

Donc, les équations (1),(2),(3)et (4) sont insuffisantes à décrire le mouvement des milieux déformable, elles doivent complétées par d'autres relations liant  $u$ ,  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , sont "**les lois comportements de base**".

Les loi de comportement caractérisent le comportement de chaque type de matériau (ce sont des relations entre le tenseur de contraint et le tenseur de déformation ). Leur origine est souvent expérimentale et c'est tout une série d'essais qu'il faut réaliser pour établir une loi de comportement .

Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportements.

### 2.1 Loi de comportement unidimensionnelle Historique

Le point de départ des lois de comportement était en dim 1, ensuite la généralisation en dim 2 et en dim  $n$ .

### 2.1.1 Essais expérimentaux

#### Expérience de Robert Hook en 1675

Expérience sur un ressort soumis à **faibles déformation**, Robert Hook a dit la phrase suivante : "**telle force, telle extension**" a réglé le majeur des lois de comportement, de cette phrase, on tire deux aspects importants :

- a) la linéarité.
- b) l'élasticité.

Ces deux aspects ne pas identiques :

**la linéarité** : exprime que l'allongement à la force.

**l'élasticité** : exprime que cet effet est réversible et permet donc de revenir à l'état initial tel qu'un ressort soumis à des faible déformations.

Donc l'élasticité a une limite qui est indépendant de la notion de linéarité.

Hook n'a considéré que la phrase élastique et linéaire, donc proportionnelle et réversible. C'est en quelque sorte une analogie avec allongement  $(l - l_0)$  d'un ressort de raideur  $K$  soumis à une force  $F$  :  
 $l$  : longueur du ressort étiré ou comprimé.

$l_0$  : longueur du ressort initial.

Pour un ressort, on a :  $F = k(l - l_0)$ .

**Remarque 1.1.1** la loi de Hook s'exprime alors sous la forme.

$$\sigma = E\varepsilon$$

### Expérience de liebniz en 1690

Une première expérience pour les solide déformable a été fait par liebniz en 1690, dans un labo sur une tige métallique (acier-doux) de section  $S = 150\text{mm}^2$ .

### 2.1.2 Exemples d'essais

On considéré une barre de section  $S$  et de longueur  $l_0$ , on lui applique une force  $F(t)$  à une extrémité, tandis que l'autre est maintenue fixée. On définit  $\sigma$  et  $\varepsilon$  par :

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{S}, \text{ et } \varepsilon(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0},$$

On représente la courbe  $\sigma = \sigma(t)$  en fonction de  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ .

- a) **Essai de charge-décharge** on augmente progressivement la force  $F(t)$ , puis on la ramené à 0. Cet essai permet d'étudier la variation des contraintes  $\sigma$  en fonction de la déformation  $\varepsilon$ .
  - **L' élasticité** : si les courbes charge-décharge coïncident, le milieu est élastique ; sinon plastique.
  - **L'inélasticité (plasticité)** : dans le cas contraire de l' élasticité, le milieu est inélastique et après la décharge complété ; Il subsiste une déformation résiduelle :

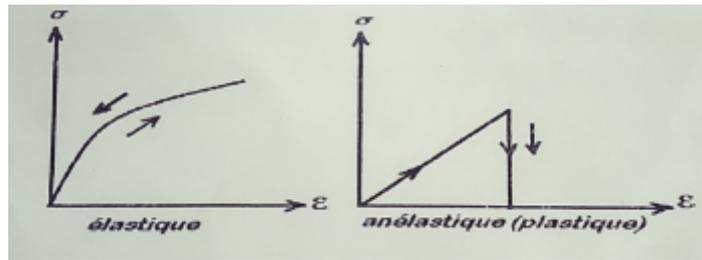


FIGURE 2.1: Essai de charge-décharge.

b) **Essai de fluage**

On commence par un essai de changement monotone tel que à l'instant  $t = 0$  on a  $\sigma(0) = \sigma_0$ ,  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$  et on maintient la force  $F$  constante en cours du temps, la contrainte  $\sigma$  reste donc constante pour  $t > 0$  et on regarde les variations de  $\varepsilon$  en fonction du temps  $t$  :

- Si les contraintes  $\varepsilon(t)$  restent limités c'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) < \infty$ , le corps est du type solide.
- Si les contraintes  $\varepsilon(t)$  se relâchent (restent illimités) c'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$ , le corps est du type fluide.

**Exemple** ; Étagère d'armoire fléchit après quelques années sous un poids constant.

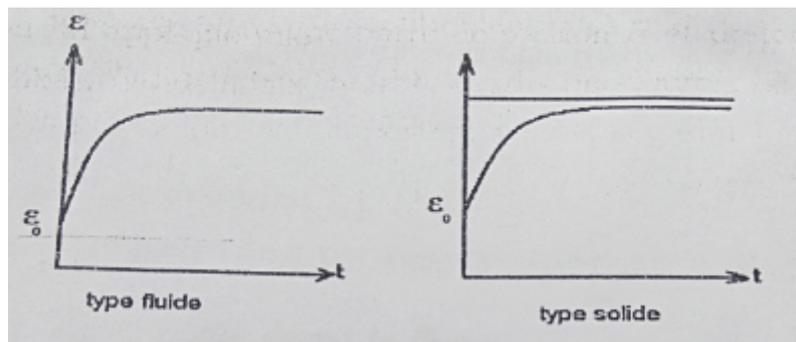


FIGURE 2.2: Essai de Fluage.

## 2.2 Loi de comportement élastique linéaire en dimension 1

La loi de comportement élastique linéaire donnée par  $\sigma = \varepsilon E$  qui exprime une dépendance linéaire dans la relation contrainte-déformation ou :

$\sigma$  : est la contrainte.

$E$  : est le module de young.

$\varepsilon$  : est l'allongement relatif.

**Remarque 1.2.1** les lois élastique ne décrivent pas le fluage.

### Déformation élastique :

Déformation-instantanée, mais la configuration initiale est retrouvée après décharge.

## 2.3 Loi de comportement visqueuse linéaire en dimension 1

La loi de comportement visqueuse linéaire est de la forme :

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}.$$

Qui suppose l'existence d'une relation entre contrainte et vitesse de déformation, où :  $\sigma$  : est la contrainte.

$\eta$  : est la viscosité du matériau.

$\dot{\varepsilon}$  : est la dérivée première de  $\varepsilon$  par rapport au temps,  $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ .

**Remarque 1.3.1** la viscosité décrit le fluage :

$$\text{on a : } \sigma = \eta \dot{\varepsilon} \implies \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$$

on impose :  $\sigma(t) = \sigma_0; \forall t \geq 0$ , ce que entraîne :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \sigma_0.$$

Donc, il y a le fluage.

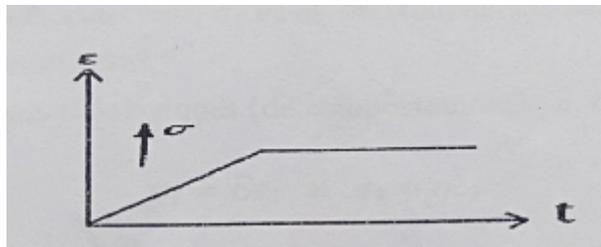


FIGURE 2.3: Fluage de viscosité.

**Déformation visqueuse** : poursuit de déformation alors que la charge est constante. Le temps et les vitesses de déformation jouent un rôle important dans les lois de comportement d'un matériau visqueux.

## 2.4 Loi de comportement plastique linéaire en dimension 1

La loi de comportement plastique linéaire est de la forme :

$$\begin{cases} |\sigma| \leq \sigma_s \\ \dot{\varepsilon} = 0 \text{ si } |\sigma| < \sigma_s \\ \dot{\varepsilon} = \text{sign}(\sigma) \text{ si } |\sigma| = \sigma_s \end{cases}$$

qui suppose l'existence d'une relation entre contrainte et vitesse de déformation où :

$\sigma$  : est la contrainte.

$\dot{\varepsilon}$  : est la dérivée première de  $\varepsilon$  par rapport au temps,  $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ .

$\sigma_s$  : est le seuil de plasticité.

**Remarque 1.4.1** La plasticité décrit le fluage.

**Remarque 1.4.2** Tous les solides présentent d'abord une phase élastique. A partir d'un certain seuil appelé limits d'élasticité, il peut se produire trois cas possibles :

- rupture brutale (exemple verre).
- rupture progressive (exemple béton).

— plasticité.

**Remarque 1.4.3** Certains matériaux ne présentent pas de plasticité : verre, céramiques. Ils sont élastiques fragiles.

limite élastique est seuil de plasticité.

**Remarque 1.4.4** La viscosité et la plasticité dépendent du temps (car le fluage) ; par contre l'élasticité ne dépend pas du temps.

Ces trois lois de comportement sont les lois de base. Les grandes lois peuvent être associées à ces lois utilisant les modèles mécaniques analogiques des comportements de base ; ça sera le but du chapitre suivant.

---

---

## CHAPITRE 3

---

# LOIS DE COMPORTEMENT ASSOCIABLES

Les essais expérimentaux cités dans le chapitre 2 fournissent à l'ingénieur les propriétés des matériaux (modules et limites d'élasticité, charge maximal avant rupture, viscosité, dureté, résistance (fatigue, usure,...))

Ces trois lois de comportement de base peuvent être associables utilisant des modèles mécaniques analogiques des comportements de base en les associant en série ou en parallèle.

Nous allons utiliser ces lois d'association afin d'obtenir des modèles dont les lois de comportement sont importantes.

Différentes modèles peuvent être proposés. Les deux plus simples sont constitués d'un montage en série ou en parallèle.

**En série**, la loi d'association est :

- La contrainte imposée à l'ensemble est supportée en totalité par chaque élément.
- La déformation totale est la somme des déformation subies par chaque élément.

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

**En parallèle**, la loi d'association est :

- La contrainte imposées à l'ensemble est la somme des contraintes imposées à chaque branche.
- La déformation subie est identique dans chaque branche et égale à la déformation subie par l'ensemble

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

### 3.1 Modelés analogique

les lois de comportement de base peuvent être représentées par des systèmes mécaniques élémentaires.

Les élément les plus courants sont :

**Le ressort** : Qui symbolise l'élasticité linéaire.

**L'amortisseur** : Qui schématise la viscosité linéaire.

**Le patin** : Qui modélise la plasticité linéaire.

## 3.2 Lois de comportement Viscoélastiques (viscosité+ élasticité)

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les huiles, a mis en évidence que certains phénomènes tels que le fluage, ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastiques C'est pour cela que la viscoplastique ont été introduite. Dans les matériaux viscoélastiques les contraintes dépendant à la fois des déformation et de leur variation temporelle telle que la loi de comportement est de la forme :

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

les différents modèles associant en série ou en parallèle d'un ressort de complaisance élastique  $E$ , et d'un amortisseur de coefficient de viscosité  $\eta$

### 3.2.1 Modèles à deux éléments

#### Modèle de Maxwell

Il est constitué par l'association en série d'un ressort de complaisance élastique  $E$ ; et d'un amortisseur de coefficient de viscosité  $\eta$

soient  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les déformations,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les contraintes, respectivement dans le ressort et dans

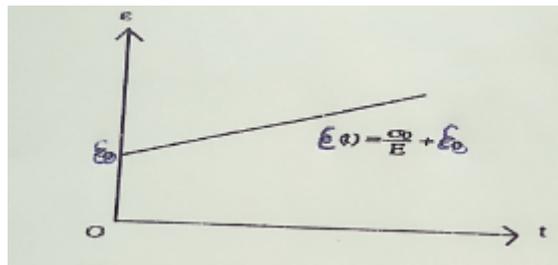


FIGURE 3.1: Modèle de Maxwell.

l'amortisseur. D'après les équations rhéologiques (de comportement); il vient :

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \text{ et } \sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2$$

D'après les lois d'association en série, la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$ , totales sont :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases}$$

et bien que

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \\ \Rightarrow \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}_1}{E} + \frac{\sigma_2}{\eta} \\ \Rightarrow \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Telle est l'équation rhéologique du modèle Maxwell.

Lorsqu'on suppose connu le trajet  $\varepsilon(t)$ , s'intègre de la façon suivante :  
l'équation homogène

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = 0 \implies \sigma(t) = Ke^{-\frac{E}{\eta}t}$$

on cherche la constante  $K$  ; de la manière suivante :

$$\dot{\sigma}(t) = k(t)e^{-\frac{E}{\eta}t} - \frac{E}{\eta}k(t)e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

on remplace afin d'obtenir

$$k(t) = E \int_{-\infty}^t \dot{\varepsilon}(s)e^{\frac{E}{\eta}s} ds$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{\frac{E}{\eta}s} \implies du = \frac{E}{\eta}e^{\frac{E}{\eta}s} \\ dv = \dot{\varepsilon}(s)ds \implies v = \varepsilon(s) \end{array} \right.$$

$$k(t) = E \left[ \varepsilon(s)e^{\frac{E}{\eta}s} \Big|_{-\infty}^t - \frac{E}{\eta} \int_{-\infty}^t \varepsilon(s)e^{\frac{E}{\eta}s} ds \right]$$

$$\implies k(t) = E\varepsilon(s)e^{\frac{E}{\eta}s} - \frac{E^2}{\eta} \int_{-\infty}^t \varepsilon(s)e^{-\frac{E}{\eta}(t-s)} ds$$

donc

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \frac{E^2}{\eta} \int_{-\infty}^t \varepsilon(s)e^{-\frac{E}{\eta}(t-s)} ds.$$

puisque la valeur de  $\varepsilon$  à l'instant  $t$ , dépend des valeurs du  $\sigma$  aux instants passés, donc le milieu de *Maxwell* à une mémoire.

## Essai de fluage

On impose brusquement une contrainte constante  $\sigma(t) = \sigma_0; \forall t \geq 0$ , et on étudie l'évolution de la déformation  $\varepsilon$  au cours du temps avec les conditions initiales  $t > 0; \sigma(t) = \varepsilon(t) = 0$  d'après (3.1), il vient :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\implies \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta}$$

$$\implies \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta}t + \varepsilon_0$$

comme

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0 \implies \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta}t + \frac{\sigma_0}{E} \quad \text{"fonction de fluage"}$$

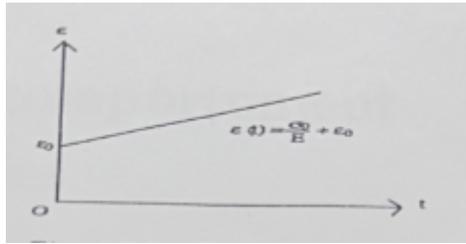


FIGURE 3.2: Fluage de Maxwell.

## Modèle de Kelvin-Voight

Il est constitué par l'association en parallèle d'un ressort de complaisance élastique  $E$ ; et d'un amortisseur de coefficient de viscosité  $\eta$ .

Soient  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les déformations,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les contraintes, respectivement dans le ressort et dans

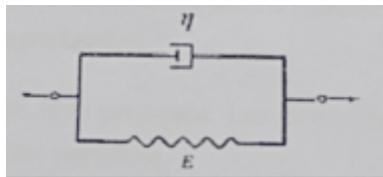


FIGURE 3.3: Modèle de Kelvin-Voight.

l'amortisseur. D'après les équations rhéologique (de comportement); il vient :

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \text{ et } \sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2$$

D'après les lois d'association en parallèle, la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$ , totales s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \end{cases}$$

$$\sigma = E\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_2$$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

telle est l'équation rhéologique du modèle *Kelvin-Voight*.

**Cette relation est une** :équation différentielle à coefficients constants avec second membre, qui s'intègre facilement en supposant connu le trajet de chargement  $\sigma(t)$  de la manière suivante :

L'équation homogène

$$\begin{aligned} E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} &= 0 \\ \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} &= -\frac{E}{\eta} \\ \implies \varepsilon(t) &= ke^{-\frac{E}{\eta}t} \end{aligned}$$

par la méthode de variation des constants, on obtient ( $k$ ) :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= k(t)e^{-\frac{E}{\eta}t} \\
\Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) &= \dot{k}(t)e^{-\frac{E}{\eta}t} - \frac{E}{\eta}K(t)e^{-\frac{E}{\eta}t} \\
&\Rightarrow \eta\dot{k}(t)e^{-\frac{E}{\eta}t} = \sigma(t) \\
&\Rightarrow \dot{k}(t) = \frac{1}{\eta}\sigma(t)e^{\frac{E}{\eta}t} \\
&\Rightarrow k(t) = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(s)e^{\frac{E}{\eta}s} ds \\
&\Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(s)e^{-\frac{E}{\eta}(t-s)} ds \tag{3.2}
\end{aligned}$$

De même, Puisque la valeur de  $\varepsilon$  à l'instant  $t$ , dépend des valeurs du  $\sigma$  aux instants passés, donc le milieu à mémoire qui est évanescence a cause de l'exponentielle décroissante (Elle se relâchée avec le temps).

## Essai de fluage

On impose brusquement une contrainte constante  $\sigma(t) = \sigma_0; \forall t \geq 0$ , et on étudie l'évolution de la déformation  $\varepsilon$  au cours du temps avec les condition initiales  $t > 0; \sigma(t) = \varepsilon(t) = 0$  d'après (3.2), il vient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}(t-s)} ds \\
\Rightarrow \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{\eta} \left[ \frac{\eta}{E} e^{-\frac{E}{\eta}(t-s)} \right]_0^t \\
\Rightarrow \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})
\end{aligned}$$

donc

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) \quad \text{"fonction de fluage"}$$

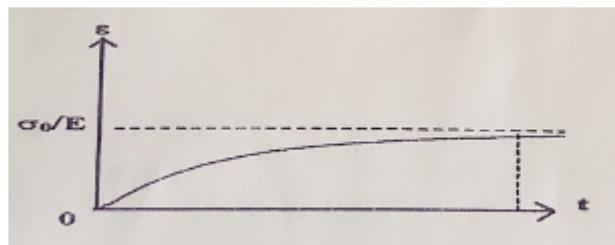


FIGURE 3.4: Fluage de Kelvin-Voigt.

### 3.2.2 Modèles à trois éléments

Il est constitué par l'association en parallèle d'un amortisseur de coefficient de viscosité  $\eta_2$  et d'un ressort de complaisance élastique  $E$ , et les deux sont associés en série avec un amortisseur de coefficient de viscosité  $\eta_1$ .

l'équation différentielle de ce modèle est donnée par :

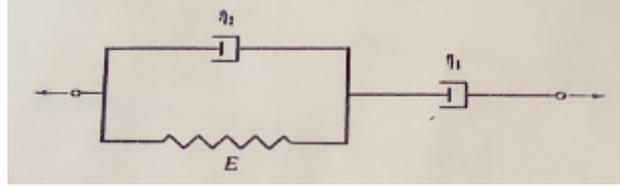


FIGURE 3.5: Modèles à trois éléments.

$$(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt})\sigma = \eta_1(1 + \lambda_2 \frac{d}{dt})\dot{\epsilon}$$

tel que

$$\lambda_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{E}, \quad \lambda_2 = \frac{\eta_2}{E}$$

### 3.2.3 Modèles à quatre éléments

Il est constitué par l'association en série d'un élément de *Maxwell* et d'un élément de *Kelvin-Voigt*.

l'équation différentielle de ce modèle est données par :

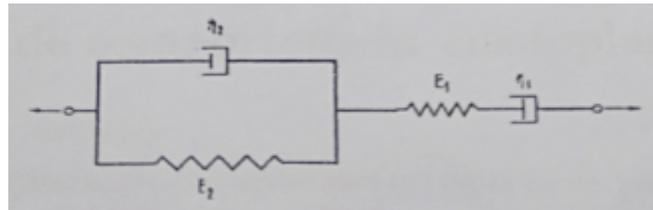


FIGURE 3.6: Modèles à quatre éléments.

$$\dot{\sigma} + (\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2})\dot{\sigma} + \frac{E_1 E_2}{\eta_1 \eta_2}\sigma = E_1 \dot{\epsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_2}\epsilon$$

l'équation de fluage du modèle est la somme des équation de fluage des modèles de *Maxwell* et de *Kelvin-Voigt* :

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta_1}t + \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{\eta_2}(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_1}t}) \quad \text{"fonction de fluage"}$$

### 3.3 Lois de comportement viscoplastiques(Viscosité +Plasticité)

La lois de comportement de viscoplastique est de la forme :

$$\dot{\sigma} = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}).$$

Les différents modèles associant en série ou en parallèle d'un amortisseur de coefficient de viscosité  $\eta$ , et d'un patin de seuil de plasticité  $\sigma_s$ .

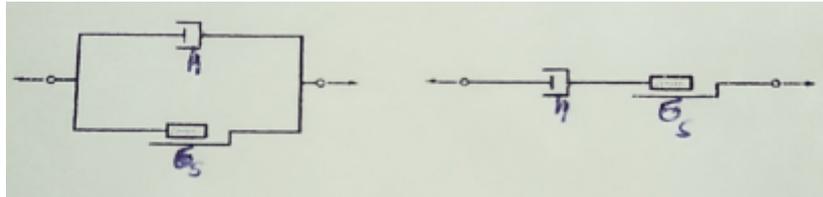


FIGURE 3.7: Modèles viscoplastiques .

### 3.4 Lois de comportement élastoplastiques(Elastique + Plastique)

La lois de comportement de élastoplastique est de la forme :

$$\dot{\sigma} = D.\dot{\varepsilon}$$

où

- $\dot{\sigma}$  : la dérivée première de  $\sigma$  par rapport au temps,  $\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ .
- $D$  : la matrice d'élasticité dans le cas de d'élasticité linéaire.
- $\dot{\varepsilon}$  : la dérivée première de  $\varepsilon$  par rapport au temps,  $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ .

Les différents modèles associant en série ou en parallèle d'un ressort de complaisance élastique  $E$ , et d'un patin de seuil de plasticité  $\sigma_s$ .

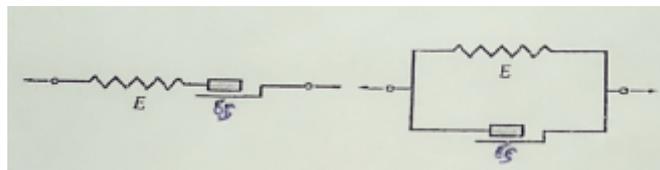


FIGURE 3.8: Modèle elasto-plastique.

---

## Résumé

Dans ce mémoire, on a présente une synthèse sur les lois de comportement ;à savoir :

- Lois de comportement de base (élasticité, viscosité, plasticité ).
- Lois de comportement associables (viscoélasticité, viscoplasticité, élastoplasticité)

**Mots clés :** Elasticité, viscosité, plasticité.

---

## Abstract

In this memorandum, we presented a synthesis of the laws of behavior ; to be known :

- Laws basic behavior (elasticity, viscosity, plasticity ).
- Laws assignable behavior (viscoelasticity, viscoplasticité, elastoplasticity).

**key words :** Elasticity, viscosity, plasticity

---

## ملخص

في هذا البحث قدمنا ملخصا لقوانين السلوك وهي:

— قوانين السلوك الاساسية (المرونة ، اللزوجة ، اللدونة)

— قوانين السلوك المشتركة (لزج، مرن لزج لدن ،مرن لدن)

كلمات مفتاحية: مرن ،لزج، لدن

---

# CONCLUSION

Ce mémoire a permis de présenter deux types de loi de comportement représentée dans (loi de comportement de base, loi de comportement associable).

Loi de comportements base existe trois types :comportement élastique, comportement visqueuse et comportement plastique.

Loi de comportements associable résultent de la composition de comportements base tel que il existe des comportements composés de deux comportement de base :viscoélastique,viscoplastique,élastoplastique,

a la fois, il a permis de présenter plusieurs aspects concernant les matériaux qui sont utilisés dans tous les secteurs de l'ingénierie et des systèmes mécanique.

## Annexe A

Cette partie est destinée à faciliter la lecture de l'exposer et elle comprend des rappels sur des notions supposées connues et quelques théorèmes d'existence.

### A.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit  $X$  un espace vectoriel et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  un produit scalaire sur  $X$  c'est à dire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_x : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire symétrique et définie positive on note par  $|\cdot|_x$  l'application de  $X$  dans  $\mathbb{R}_+$ , définie par :

$$|u|_x = \langle u, u \rangle_x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.3})$$

$|\cdot|_x$  s'appelle la norme sur  $X$ . On dit que  $X$  est un espace de Hilbert si  $X$  est complet pour la norme définie par A.3.

### A.2 Définition des espaces $H$ et $\mathcal{H}$

A partir de  $L^2(\Omega)$ , on a :

$$H = [L^2(\Omega)]^3, \mathcal{H} = [L^2(\Omega)]_s^3 \quad (\text{A.4})$$

sont des espaces de Hilbert munis respectivement des produits scalaires suivants :

$$\langle u, v \rangle_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H. \quad (\text{A.5})$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}. \quad (\text{A.6})$$

Leurs normes sont définies de la façon suivante :

$$|u|_H^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx \quad \forall u \in H, \quad |\sigma|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\Omega} |\sigma|^2 dx \quad \forall \sigma \in \mathcal{H} \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Espace lié à l'opérateur de déformation $\varepsilon$

Soit  $\varepsilon$  l'opérateur de la déformation qui est définie en (1.11), on définit l'espace lié à cet opérateur par :

$$H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} \quad (\text{A.8})$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (\text{A.9})$$

et la norme associée est définie par :

$$|u|_{H_1}^2 = |u|_H^2 + |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall u \in H_1 \quad (\text{A.10})$$

## A.4 Espace Lié à l'opérateur divergence

L'opérateur de divergence est définie par :

$$\text{div} : \mathcal{D} \rightarrow D \quad \text{ou} \quad \text{div} : \mathcal{H} \rightarrow H.$$

tel que

$$\text{div}\Phi = (\partial_i \Phi_{ij}), \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}$$

L'espace lié à cet opérateur est définie par :

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / \text{div}\sigma \in H\}. \quad (\text{A.11})$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{div}(\sigma), \text{div}(\tau) \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (\text{A.12})$$

et la norme associée est définie par :

$$|\sigma|_{\mathcal{H}_1}^2 = |\sigma|_{\mathcal{H}}^2 + |\text{div}\sigma|_H^2 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1. \quad (\text{A.13})$$

## A.5 Quelques propriétés sur les espaces considérés

Pour espace X de Hilbert nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_X &\leq |f|_X |g|_X, & \forall f, g \in X. \\ |f|_X - |g|_X &\leq |f + g|_X \leq |f|_X + |g|_X, & \forall f, g \in X. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

d'après (A.10) et (A.12) on a :

$$|u|_H \leq |u|_{H_1}, \quad |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \leq |u|_{H_1} \quad \forall u \in H_1 \quad (\text{A.15})$$

$$|\sigma|_{\mathcal{H}} \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1}, \quad |\text{div}\sigma|_H \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1 \quad (\text{A.16})$$

$$\langle \text{div}\sigma, \varphi \rangle_H + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \quad \varphi \in D$$

## A.6 Les application traces

### Application trace associée à $H_1$

Il existe une application linéaire continue et surjective  $\gamma$  et une constante  $c > 0$ , qui dépend de  $\Omega$  telle que :

$$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3. \quad (\text{A.17})$$

Tel que  $\gamma u = u|_\Gamma \quad \forall u \in H_1$ ,

$$|\gamma u|_{H_\Gamma} \leq c|u|_{H_1} \quad (\text{A.18})$$

et une application inverse linéaire continue  $Z : H_\Gamma \rightarrow H_1$  tel que :

$$\gamma(Z(\zeta)) = \zeta, \quad \forall \zeta \in H_\Gamma$$

$$|Z(\zeta)|_{H_1} \leq c|\zeta|_{H_\Gamma} \quad \forall \zeta \in H_\Gamma \quad c > 0. \quad (\text{A.19})$$

### Application trace associée à $\mathcal{H}_1$

et une application inverse linéaire continue et surjective  $\gamma_v$

$$\gamma_v : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}'_\Gamma \quad \text{tel que} \quad \gamma_v \sigma = \sigma v, \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1.$$

et une application inverse linéaire continue

$Z_v : \mathcal{H}'_\Gamma \rightarrow H_1$  tel que

$$\gamma_v(Z_v(\Sigma)) = \Sigma, \quad \forall \Sigma \in \mathcal{H}'_\Gamma$$

$\gamma_v$  vérifier la formule de base :

$$\langle \gamma_v \sigma, \gamma u \rangle_{\dot{H}_1 + H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{div} \sigma, u \rangle_H \quad \forall u \in H_1 \quad \sigma \in \mathcal{H}_1 \quad (\text{A.20})$$

On définit les espaces suivants :

$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_1\}$ ,  $\mathcal{V} = \{\sigma \in H_1 / \text{div} \sigma = 0, \sigma v = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_2\} \subset \mathcal{H}_1$ .

$$W = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 / \sigma v = 0 \text{ sur } \Gamma_2\} \subset \mathcal{H}_1.$$

La formule de base devient :

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{div} \sigma, u \rangle_H &= 0, \quad \forall u \in V, \quad \sigma \in W. \\ \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} &= 0, \quad \forall u \in V, \quad \sigma \in \mathcal{V}, \end{aligned}$$

### **Théorème 1 (L'inégalité de korn)**

Soit mes  $(\Gamma_1) > 0$ , alors il existe une constante  $C > 0$  qui dépend de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  tel que

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C|u|_{H_1}, \quad \forall u \in V.$$

## A.7 Quelques théorèmes d'existence

### **Théorème 2 (Lax-Milgram)**

Soit  $X$  un espace de Hilbert, soit  $a : XX \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout  $f \in X'$  il existe  $u \in X$  unique tel que

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in X.$$

### **Théorème 3 (Point fixe de Banach)**

Soit  $X$  un espace de Banach, soit  $G : E \rightarrow E'$  une application contractante c'est à dire

$$\|Gu_1 - Gu_2\|_E \leq k\|u_1 - u_2\|_E \quad \forall u_1, u_2 \in E \text{ avec } 0 < k \leq 1.$$

Alors  $G$  admet un point fixe unique,  $Gu = u$

### **Théorème 4 (Minty-Browder)**

Soit  $E$  espace de Banach. Soit  $A : E \rightarrow E'$  une application non linéaire fortement monotone et de Lipschitz, alors pour tout  $f \in E'$  il existe  $u \in E$  unique tel que  $Au = f$ .

**Théorème 5** Si  $A$  est un opérateur linéaire, continue et défini positif et  $K$  est un convexe fermé non vide de  $H$ , alors l'inéquation variationnelle elliptique :

$$u \in K, \quad \langle Au, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in H \tag{A.21}$$

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.Besson,G.Cailletaud, s.Forest :Lois de comportement non linéaires des matériaux.
- [2] S.Djabi.Méthodes fonctionnelle et numériques en mécanique des solides déformables, cours de Master 2 de Mathématiques Appliquées, université de sétif 1 (2012-2013).
- [3] S.Latreche. Technique de point fixe en élasticité-viscoplasticité.Mémoire de Master 2 soutenu à l'Université de Sétif 1(2012-2013).
- [4] J.Lecomte-Beckera. Physique des matériaux :partie polymères.
- [5] H.Kahoul.Mémoire de master intitulé :Synthèse et étude complète d'un problème en élasticité non linéaire par morceaux.Mémoire soutenu à l'Université de Sétif 1(2011-2012).
- [6] B.Teion.Étude fonctionnelle des problème elasto-viscoplastiques de contact.Thèse de doctorat d'état,Université Mentouri de constantine(2000).