Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Amrouche Meriem
Khalfa Soumia

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Système Dynamique

Thème

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES DISTRIBUTIONS

Soutenu publiquement le 01 Octobre 2020 devant le jury composé de

GUERMOUL Bilal	Président
DERBAZI Ammar	Encadreur
SIDHOUM Karima	Examinateur

Promotion 2019/2020

Résumé

Dans ce mémoire on a donné la définition de distribution et les propriétés élémentaires en se basant sur les fonctions localement sommables .

On a introduit la convolution de fonction puis de distribution et quelques propriétés en citant l'équation de convolution .

On a vu comment utiliser la notion de distribution tempéré pour la transformation de Fourier avec quelques exemples important .

Remerciements

Nous tenons à remercier en tout premier dieu Allah tout puissant de nous avoir donner la volonté et la puissance pour élaborer ce travail.

Nous adressons nos profonds remerciements à notre promoteur Mr DERBAZI Ammar pour ses encouragements ses conseils et pour avoir mis à notre disposition tous les moyens dont nous avions besoin .

Tenons également à remercier les membres de jury qui ont bien voulu accepter de porter leur jugement sur ce modeste travail que nous souhaitons à la mesure de leur satisfaction .

Nous voudrions exprimer nous plus vifs remerciements à tous nos professeurs qui ont contribué à nous transmettre l'inestimable trésor qui est le savoir .

Nos remerciement s'étendent aussi à monsieur BENSAID Fares pour l'aide qu'il nous a apportée dans notre travail .

Dédicace

Je dédié ce modeste travail en signe de reconnaissance et de respect à

La mémoire de mon père que Dieu lui accorde sa miséricorde

Â ma Mère pour tous les sacrifices qu'elle a consentis à mon égard

Â mes sœurs "OUARDIA" , "LINDA" , et "ZAHRA"

Â toute la famille AMROUCHE et MOHAMMEDI en particulier ma chère cousine "FARIZA"

Â mes amis "LINA" , "CHAIMA", "ZINEB" ,"ABIR" ,"IMEN" ,"ZOUBIR" et à tous ceux qui me sont chers .

De MERIEM

Dédicace

C'est avec une grande gratitude et des mots sincères que je dédie ce modeste travail de fin d'étude à mes chers parents qui ont sacrifié leur vie pour ma réussite .

Â mon père pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices .

Â ma Mère pour son soutien et ses encouragements .

Je dédie aussi ce travail à mes sœurs "YASMINE" ,"MANEL" ,"ICHRAK" et "SIRINE" ,mes amis "BOUCHRA" ,"IMEN" ,"LAMIA" ,"DOUNIA" ,"KELTHOUM" , et "WAFA" et à tous ceux qui me sont chers .

De SOUMIA

Table des matières

Introduction

La théorie des distributions fut formalisée par le mathématicien français **Laurent Schwartz** entre **1944** et **1950**. Une distribution est un objet qui généralise la notion de fonction. la théorie des distributions ajoute la notion de dérivée à toute les fonctions localement intégrables , elle est utilisée pour formuler des solutions à certaines équations aux dérivées partielle elles sont importantes en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement à des equations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires .

• La Transformation de Fourier est un exemple d'outil mathématique créé pour les besoins de la physique .
Les physiciens ont été souvent en avance sur les mathématiciens .Dès **1889 Rayleigh** utilisait ,dans une étude de rayonnement ,la formule dite de **Plancherel** dont les conditions de validité n'ont été énoncées par ce dernier qu'en **1910**.

• Depuis longtemps également les physiciens ont failler attendre **Sobolev (1936)** et surtout **L.Schwartz (1950)** pour disposer d'une théorie mathématique rigoureuse des distributions ,il nous a semblé nécessaire de donner ici au moins une idée élémentaire de cette théorie .
Grâce aux distributions ,la convolution et la transformation de Fourier deviennent des outils mathématiques d'une puissance insoupçonnée .D'abord limitée à la physique théorique ,l'utilisation symétrique des distributions se répond de plus en plus dans des disciplines expérimentales comme l'électronique ou l'optique .

• L'objectif de cette étude est de résoudre quelconque problème de physique qui en était difficile à résoudre par les fonction usuelle ainsi la convolution et la transformation de Fourier .

1. **Dans le premier chapitre** on a mentionner beaucoup de détails sur les propriétés les plus importantes comme la dérivé de dirac et Heaviside, et nous allons discuter des opérations effectuer sur les distribution.

2. **Dans le deuxième chapitre** on a étudier la notion de produit tensoriel de deux fonctions sommables et par suite on a bouté à la convolution de deux

distribution et en particulier la convolution de distribution de dirac avec une distribution quelconque .

3. **Le troisième chapitre** est consacré à l'étude de transformé de Fourier aux sens de distribution et en particulier les fonctions périodique telle que cosinus et sinus .

Chapitre 1

Fonctionnelle et espace $\mathcal{D}$ des fonctions tests

1.1 Espace Vectoriel Des fonctions $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.1. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions de $\varphi(\Omega)$ à support compact contenu dans Ω*
Ω peut être $\mathbb{R}^N$ lui-même.

1.2 fonctionnelle

Définition 1.2. *On dit que l'on a une fonctionnelle T sur l'ensemble de fonctions de tests, si à chaque fonction φ de $D(\Omega)$ on peut associer un nombre complexe notée $\langle T, \varphi \rangle$ et on écrit :*

$$T : \begin{cases} D(\Omega) \longrightarrow C \\ \varphi \mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \end{cases}$$

Exemple 1.3.

$$T : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ f \to \langle T, f \rangle = \int f(x) d\mu(x) \end{cases}$$

1.3 Espace des fonctions tests D :

Définition 1.4. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ le support d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ par l'adhérence de l'ensemble des x telle que $f(x)$ est non identiquement nulle. Autrement dit, c'est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel f est identiquement nulle.*

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

Définition 1.5. *On désigne par $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivable à support borné*

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in C^\infty : \mathrm{supp} f \textit{ borné}\}$$

Cet ensemble s'appelle espace de base et ses éléments fonctions de base (ou fonctions tests).

Exemple 1.6. *La fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe : C^∞ *si* $x < 0$*, toutes les dérivées de* f *sont nulles.*
si $x = 0$ *les dérivées à gauche de* f *sont nulles si* $x > 0$ *on a :*

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, f"(x) = \frac{4 - 6x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}}, \cdots, f^{(k)}(x) = \frac{p(x)}{x^{3k}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

où $p(x)$ *est un polynôme dès lors :*

$$\lim_{x \to 0^+} f^{(k)}(x) = p(0) \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k}} = p(0) \lim_{u \to \infty} \frac{u^{\frac{3k}{2}}}{e^u} = 0$$

Il suffit d'appliquer plusieurs fois la règle de l'Hôpital. enfin si $x = 0$*, les dérivées a droite de* f *sont nulle :*
$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$*. En effet, procédons par récurrence sur* k *pour* $k = 0$ *, c'est évident. Supposons que* $f^{(k)}(0) = 0$ *et montrons que :* $f^{(k+1)}(0) = 0$ *on a :*

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} p(x) \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}} = p(0) \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}} = 0$$

ainsi $f(x)$ *est indéfiniment dérivable.*

Exemple 1.7. *La fonction* φ *défini par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & si \quad |x| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{x^2-1}} & si \quad |x| < 1 \end{cases}$$

est une fonction de $\mathcal{D}$ *ayant sur support* $[-1, 1]$.

1.4 Topologie de $\mathcal{D}$

Définition 1.8. *Une suite* $(\varphi_n)_{n>0}$ *de fonction de* $\mathcal{D}$ *converge vers une fonction* φ *lorsque* n *tend vers l'infini si :*

1. *il existe une ensemble borné* B *(indépendant de* n*) de* R *tel que pour* $n > 0$ *,* $supp(\varphi_n) \subset B$.

2. *pour tout entier* $k \geq 0$*, la suite des dérivées* $(\varphi_n^{(k)})_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* $\varphi^{(k)}$.

1.5 Définition de distribution

On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire continue T sur l'espace D dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire pour toute φ de D
$\varphi \to \langle T, \varphi \rangle$.

Exemple 1.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(ou \mathbb{C})$ une fonction localement sommable*
Montrer que $f(x)$ engendre une distribution dans $\mathbb{R}$: T_f définit par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \forall T \in P(\mathbb{R}).$$

1. ***Linéarité :***

$$\begin{aligned}
\langle T_f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle &= \int f(x)(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)dx \\
&= \int f(x)\alpha\varphi_1 dx + \int f(x)\beta\varphi_2 dx \\
&= \alpha \int f(x)\varphi_1 dx + \beta \int f(x)\varphi_2 dx \\
&= \alpha\langle T_f, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T_f, \varphi_2 \rangle.
\end{aligned}$$

2. ***Continuité :***
   $\varphi_k^{(j)} \to \varphi^j$
   $\lim_{k\to\infty} \sup_{[0,t]} |\varphi_k^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}| = 0$
   $\varphi_k \to \varphi \Rightarrow \langle T_f, \varphi_k \rangle \to \langle T_f, \varphi \rangle$
   $\langle T_f, \varphi_k - \varphi \rangle \to 0$

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi_k - \varphi \rangle| &= |\int_a^b f(x)(\varphi_k - \varphi)(x)dx| \\
&\leq \int_a^b |f(x)\ \varphi_k(x) - \varphi(x)|dx \\
&\leq \int_a^b f(x)\ dx\ sup_{[a,b]}|\varphi_k(x) - \varphi(x)| = 0
\end{aligned}$$

1.6 L'espace $\mathcal{D}'$ des distribution :

Définition 1.10. *L'ensemble des distribution sur Ω sera noté $\mathcal{D}'$ qui n'est autre que le dual de l'espace vectoriel topologique $D(\Omega)$.*
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
la valeur de T en φ sera notée :
$T(\varphi)$ ou $\langle T, \varphi \rangle$

1.6.1 Propriété :

Les distributions forment un espace vectoriel noté D' c'est-à-dire on va définir la somme de distributions par :

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$$

et

$$\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$$

où : T, T_1 *et* $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$
$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$

1.7 Fonctions localement sommables :

Définition 1.11. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite localement sommable si elle sommable sur tout ensemble borné K de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire si :*

$$\int_k |f(x)|\, dx < +\infty$$

on dit aussi qu'elle est localement intégrable.

Proposition 1. *Deux fonctions localement sommables définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout.*

1.8 Distribution régulière

Définition 1.12. *De toute fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est localement sommable on associe une distribution noté T_f définis par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Toute distribution qui n'est pas régulière est dite ***singulière****.*

Exemple 1.13. *La fonction de Heaviside est localement sommable et on peut lui associer une distribution régulière noté T_H :*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \int_k \varphi(x)\, dx$$

est une distribution régulière

Exemple 1.14. *L'exemple le plus usuel de distribution singulière est la distribution de Dirac noté δ et définit par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Généralement, on définit la distribution de Dirac au point a et on note δ_a la distribution définit par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

1.9 Support d'une distribution

Définition 1.15. *Les ensembles ouverts pour lesquels une distribution T est nulle, telle que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout φ à support dans un de ces ouverts. La réunion de tous ces ouverts forme un ouvert. C'est le plus grand ouvert où T est nulle . Son complémentaire, qui est fermé est appelé support de la distribution T.*

Exemple 1.16. *soit $a \in \mathbb{R}^n$, donc :*
$O(\delta_a) = \mathbb{R}^n - \{a\}$
d'où : $\operatorname{supp}(\delta_a) = \{a\}$
soit $\omega = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$
on a donc $\varphi(a) = a$*,donc* $\quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = 0$
donc $\delta(a)$ *n'est pas nulle sur* $\mathbb{R}$ *car il existe des fonctions* $\varphi \in \mathcal{D}(R)$ *telles que :*

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle \neq 0$$

donc $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ *est le plus grand ouvert sur lequel* δ_a *est nulle. donc* $\operatorname{supp}(\delta_a) = \{a\}$ *et* φ_a *a support compact.*

Proposition 2. *soit $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\operatorname{supp}(T_a) = \operatorname{supp}(a)$$

1.10 opérations sur les distributions

1.10.1 Translation

soit f une fonction sommable et f la distribution qui lui est associée. on veut déterminer la distribution associées à $f(x-a)$ où a est une constante. Posons par définition
$(T_a f)(x) = f(x-a)$ on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle T_a f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (T_a f)(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\, \varphi(x)\, dx$$

En posant $y = x - a$ on obtient :

$$\begin{aligned}\langle T_a f, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y+a)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)(T_a\varphi)(y)dy \\ &= \langle f, T_a\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Et généralement, pour une distribution T ou a : $\langle T_aT, \varphi\rangle = \langle T, T_a\varphi\rangle$ soit explicitement :

$$\langle T(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x-a)\rangle.$$

Exemple 1.17. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :*

$$\begin{aligned}\langle T_a\delta, \varphi\rangle &= \langle \delta, T_{-a}\varphi\rangle \\ &= T_{-a}\varphi(0) = \varphi(h) = \langle \delta_a, \varphi\rangle\end{aligned}$$

d'où :

$$T_a\delta = \delta_a$$

1.10.2 Transposition :

f localement sommable $\widetilde{f} : x \to f(-x)$ transposée de f distribution associée à $\widetilde{f}$. on a :

$$\langle T_{\widetilde{f}}, \varphi\rangle = \int f(-x)\varphi(x)dx = \int f(y)\varphi(-y)dy = \langle T_f, \widetilde{\varphi}\rangle$$

Définition 1.18. *La transposée d'une distribution T. noté $\widetilde{T}$ est la distribution définie par :*

$$\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widetilde{\varphi}\rangle$$

Remarque 1. *Ceci permet de définir des distributions paires et impaires comme pour les fonctions.*

1.10.3 multiplication des distributions

Le produit de deux distributions arbitraires n'est pas toujours défini. si une distribution est définie par une fonction localement sommable $f(x)$, le produit $f^2(x)$ n'est pas forcément sommable. par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est localement sommable mais $f^2(x) = \frac{1}{|x|}$ n'est pas sommable à l'origine. dans ce qui suit, nous allons définir le produit d'une distribution T par une fonction g de classe C^∞ supposons tout d'abord que cette distribution soit associée à une fonction $f(x)$ localement sommable. on a pour $\varphi \in D$

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, \varphi(x)\, dx = \langle f, g\varphi \rangle$$

Rappelons que $g\varphi \in \mathcal{D}$.

Définition 1.19. *Le produit d'une distribution quelconque T par une fonction g de classe C^∞ est défini par :*

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

le produit gT définit une distribution . En effet soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a :

$$\langle gT, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle gT, \varphi_1 \rangle + \beta \langle gT, \varphi_2 \rangle$$

Donc gT est linéaire pour la continuité on a par hypothèse
$\varphi_k \to \varphi$ Donc $g\varphi_k \to g\varphi$ et dès lors

$$\lim_{k\to\infty} \langle gT, \varphi_k \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle T, g\varphi_k \rangle = \langle T, g\varphi \rangle = \langle gT, \varphi \rangle$$

Lemme 1. *soit g une fonction indéfiniment dérivable. On a :*

$$g\, \delta = g(0)\, \delta$$

Démonstration. $\forall \varphi \in D$, $\langle g\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, g\varphi \rangle = g(0)\, \varphi(0) = g(0)\, \langle \delta, \varphi \rangle = \langle g(0)\delta, \varphi \rangle$
d'où le résultat :
En particulier, $x\delta = 0$, l'équation x T =0, de distribution inconnue T, a pour solutions les multiples de la distribution de Dirac. □

Exemple 1.20. *Si δ est la distribution de Dirac à l'origine et $g \in C^1$ alors :*

$$g\, \delta = g(0)\, \delta\ ,\ g\delta' = g(0)\, \delta' - g'(0)\, \delta$$

en effet, soit $\varphi \in D$, on a :
$\langle g\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, g\varphi \rangle = g(0)\, \varphi(0) = g(0)\langle \delta, \varphi \rangle$
De même,on a :
$\langle g\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', g\varphi \rangle = -\langle \delta, g'\varphi + g\varphi' \rangle = -\langle \delta, g'\varphi \rangle - \langle \delta, g\varphi' \rangle$
d'où :
$\langle g\delta', \varphi \rangle = -g'(0)\, \varphi(0) - g(0)\, \varphi'(0) = -g'(0)\, \langle \delta, \varphi \rangle + g(0)\, \langle \delta', \varphi \rangle$.

1.10.4 Dérivation des distributions

Définition 1.21. *On appelle dérivé T' d'une distribution T, la fonctionnelle définie par la relation*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \varphi \in D$$

Proposition 3. *Toute distribution admet des dérivées de tout ordre qui sont aussi des distributions .*

Démonstration. Soients T une distribution et $\varphi \in \mathcal{D}$.on a par définition ,

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle , \varphi' \rangle, \langle T'', \varphi \rangle = -\langle T', \varphi' \rangle = \langle T, \varphi'' \rangle, \cdots \langle T^j, \varphi \rangle = (-1)^j \langle T, \varphi^{(j)},$$

où $\varphi', \varphi'', \cdots, \varphi^{(j)}$ existent car $\varphi \in C^\infty$. On montre que $T^{(j)}$ est une distribution . Elle est linéaire : soient φ_1 , $\varphi_2 \in \mathcal{D}$et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle T^{(j)}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle T^{(j)}, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T^{(j)}, \varphi_2 \rangle$$

Pour établir la continuité de $T^{(j)}$,on suppose que la suite (φk) converge dans $\mathcal{D}$ vers φ .Alors, par définition $\left(\varphi_k^{(j)}\right)$ converge uniformément vers $\varphi^{(j)}$ et par conséquent

$$\langle T^j, \varphi_k \rangle = (-1)^j \langle T, \varphi_k^j \rangle.$$

converge vers

$$(-1)^j \langle T, \varphi^{(j)} \rangle = \langle T^{(j)}, \varphi \rangle$$

. □

Exemple 1.22. *La fonction de Heaviside est définie par :*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

et détermine une distribution notée H .Au sens des fonctions, la dérivée de $H(x)$ n'existe pas au point $x = 0$. Mais au sens des distributions, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

car $\varphi(+\infty) = 0$. Par conséquent , $H' = \delta$, donc la distribution H a pour dérivée la distribution de Dirac. remarquons qu'il n'est pas nécessaire de préciser la valeur de $H(x)$ pou $x = 0$, qui est un ensemble de mesure nulle .
Par réitérations, on obtient

$$H^{(m+1)} = \delta^{(m)}, m \in \mathbb{N}$$

.

Exemple 1.23. *soit $sgn(x) = \frac{|x|}{x}$.*

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle & (1.1)\\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{x} \varphi'(x)dx & (1.2)\\
&= -[\int_{\infty}^{0} \frac{-x}{x} \varphi'(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x} \varphi'(x)dx] & (1.3)\\
&= -[\int_{-\infty}^{0} -\varphi'(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx] & (1.4)\\
&= -[-[\varphi(x)]]_{-\infty}^{0} + [\varphi(x)]_{0}^{+\infty} & (1.5)\\
&= -[-\varphi(0) - \varphi(0)] = 2\varphi(0) & (1.6)\\
&= 2\langle \delta, \varphi' \rangle = (sgn)' = 2\delta & (1.7)
\end{aligned}$$

1.10.5 convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

On définira la convergence des suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.24. *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distribution sur Ω et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on dit que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T quand $n \to +\infty$ au sens des distributions si et seulement si :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle T_n, \varphi \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle$$

cette notion de convergence est donc une convergence simple on écrira dans cette situation : $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$ ou $T_n \to T$ quand $n \to +\infty$ dans $\mathcal{D}'$.

Théorème 1.25. *Si $(T_n)_{n>0}$ est une suite de distribution sur Ω tel que :*
$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\lim_{n\to+\infty}\langle T_n, \varphi \rangle$ existe
Alors la forme linéaire T sur Ω définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle T, \varphi \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$$

est une distribution sur Ω et $T_n \to T$ quand $n \to +\infty$.

Exemple 1.26. *Soit $f_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ alors la suite $\{f_n(x)\} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et qui converge simplement vers 1 si et seulement si $x = 2k\pi$*
$k \in \mathbb{Z}$; mais elle converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
En effet pour $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, une intégration par parties nous donne :

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx} \varphi(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{in} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx} \varphi'(x)dx = 0$$

1.11 Distributions tempérées :

Définition 1.27. *UNe fonction est dite à décroissance rapide si et seulement si*

$$\forall\ k\ et\ i\ entier\ x^k \varphi^{(i)}(x) \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi par exemple $exp(-x^2) \in S$ *mais* $\frac{1}{1+x^2} \notin S$ *.*

Définition 1.28. *On appelle distribution tempérée toute application linéaire continue définie sur S et à valeur dans* $\mathbb{C}$ *.Cet ensemble est le dual de S et on le note donc S'.*

Remarque 2. *on a remarqué précédemment que pour une suite de* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$*, la convergence dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *implique la convergence dans* $\varphi(\mathbb{R})$ *alors si* T *appartient à* $\varphi'(\mathbb{R})$ *on a, à plus forte raison,* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$*. on a donc :* $\varphi'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
Inversement, on peut se demander à quelle condition une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *peut se prolonger en une distribution tempérée.*

Proposition 4. *pour qu'une distribution définie sur* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *puisse se prolonger une distribution sur* $\varphi(\mathbb{R})$ *il faut et il suffit que* T *soit une forme linéaire continue sur* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *pour la convergence de* $\varphi(\mathbb{R})$*.*
ce qui signifie que, pour que $T \in \mathcal{D}'$ *se prolonge en une distribution tempérée, il faut et il suffit que pour toute suite* $\{\varphi_n\}_n dans \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *qui converge vers* 0 *dans* $\varphi(\mathbb{R})$
soit : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \lim_{n\to+\infty} sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p \varphi_n^{(q)}| = 0$
on doit avoir $\langle T, \varphi_n \rangle \to 0$
quand cette condition est nécessaire. pour démontrer qu'elle suffit, on s'appuie sur la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *dans* $\varphi(\mathbb{R})$ *car alors* T *se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur* $\varphi(\mathbb{R})$*.*

1.12 Distribution à plusieurs dimensions

Définition 1.29. *D'une façon analogue, on peut définir des distributions à n dimensions comme fonctionnelles sur l'espace* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *des fonctions de* $\mathbb{R}^n$ *dans C indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}^n$ *et à support borné.*

Exemple 1.30. *la distribution régulière associée à une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *localement sommable est définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n); \langle T_f, \varphi \rangle = \int \cdots \int f(x_1 \cdots x_n)\varphi(x_1 \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Chapitre 2

Convolution

2.1 Produit tensoriel :

2.1.1 Produit tensoriel de deux fonctions :

Définition 2.1. *soient f et g deux fonctions localement sommable respectivement sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$*
Le produit tensoriel (ou direct) de f et g est une application notée $f \otimes g$ définie par :

$$f \otimes g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ (x, y) \longrightarrow (f \otimes g)(x, y) = f(x)\, g(y)$$

On prouve que $f \otimes g$ est localement sommable sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. En effet, soit k un borné de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ on a :

$$\int_k |(f \otimes g)(x, y)| dx\, dy \leq \left(\int_k |f(x)| dx\right) \left(\int_k |g(y)| dy\right) < +\infty$$

donc $f \otimes g$ détermine une distribution et on a, pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\langle f \otimes g, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} (f \otimes g)(x, y)\varphi(x, y) dxdy && (2.1)\\
&= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x, y) dxdy && (2.2)\\
&= \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(x, y) dy && (2.3)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x, y) dx && (2.4)\\
& && (2.5)
\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini, ces relations s'écrivent encore sous la forme.

$$\begin{aligned}
\langle f \otimes g, \varphi\rangle &= \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y)\rangle\rangle\\
&= \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y)\rangle\rangle
\end{aligned}$$

En particulier, si $\varphi(x,y)$ est de la forme :

$$\varphi(x,y) = u(x)v(y) \; avec \, u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \; et \; v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

alors :

$$\begin{aligned}
\langle f \otimes g, u \otimes v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x)g(y)u(x)v(y)dxdy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x)u(x)dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)v(y)dy \right) \\
&= \langle f, u \rangle \, \langle g, v \rangle
\end{aligned}$$

Exemple 2.2. *Le produit tensoriel des fonctions :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 1 & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y < 0 \end{cases}$$

est donné par :

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \quad et \quad y > 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \quad et \quad y < 0 \end{cases}$$

Considérons deux distributions

$$S \equiv S_x \in D'(\mathbb{R}^m) \quad et \quad T \equiv T_y \in D'(\mathbb{R}^n)$$

2.1.2 Produit tensoriel de deux distributions :

On a deux fonctions localement sommable f et g :

$$h = f \otimes g$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ (indéfiniment dérivable, à support borné sur $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}
\langle T_{f\otimes g}, \varphi \rangle &= \int \int f(x)\, g(y)\, \varphi(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int f(x) \left(\int g(y)\, \varphi(x,y) \right) dx \\
&= \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle
\end{aligned}$$

Définition 2.3. *Soient S et T deux distributions sur $\mathbb{R}$, on appelle produit tensoriel (ou produit direct) de S par T la distribution notée $S \otimes T$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par :*

$$\langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x,y) \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

Exemple 2.4. *Produit tensoriel des distributions* ξ *,* $\psi \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned}\langle \xi(x) \otimes \psi(y), \varphi(x,y) \rangle &= \langle \xi(x), \langle \psi(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle \\ &= \langle \xi(x), \int_0^{+\infty} \varphi(x,y)dy \rangle \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(0,y)dy\end{aligned}$$

Lemme 2. *Le produit tensoriel de deux distributions est commutatif continu, associatif. de plus si* S *et* T *sont deux distributions sur* $\mathbb{R}$*, pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$\partial_x^i \left(S(x) \otimes T(y)\right) = \left(\partial_x^i S(x)\right) \otimes T(y)$$
$$\partial_y^i \left(S(x) \otimes T(y)\right) = S(x) \otimes \left(\partial_y^i T(y)\right)$$

2.2 Produit de convolution :

2.2.1 Produit de convolution de deux fonctions :

Définition 2.5. *Le produit de convolution de deux fonctions localement sommable* f *et* g *est définit par* h *noté :*

$$h(x) = \int f(x)g(x-t)dt$$

Symboliquement : $h(x) = f(x) * g(x)$ *Le mot "produit" se justifie aisément si l'on remarque que :*

i) l'opération est commutative, car en posant $\theta = x - t$ *il vient :*

$$h(x) = \int f(x-\theta)g(\theta)d(\theta) = g(x) * f(x)$$

ii) l'opération est distributive par rapport à l'addition (linéarité de l'intégrale) :

$$f(x) * [g_1(x) + g_2(x)] = f(x) * g_1(x) + f(x) * g_2(x)$$

2.2.2 Produit de convolution de deux distributions :

Définition 2.6. *Soit* f *et* g *deux fonctions localement sommable on aura :*

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int [f * g]\, \varphi(t)dt = \int \varphi(t) \int f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt$$

Soit, si $f * g$ *existe :*

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int \int f(\tau)g(t-\tau)\varphi(t)dtd\tau$$

ou encore, en posant $x = \tau$ et $y = t - \tau$:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int\int f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy$$

on est ainsi amené à définir le produit de convolution de deux distribution S et T par :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x) \cdot T(y), \varphi(x+y) \rangle$$

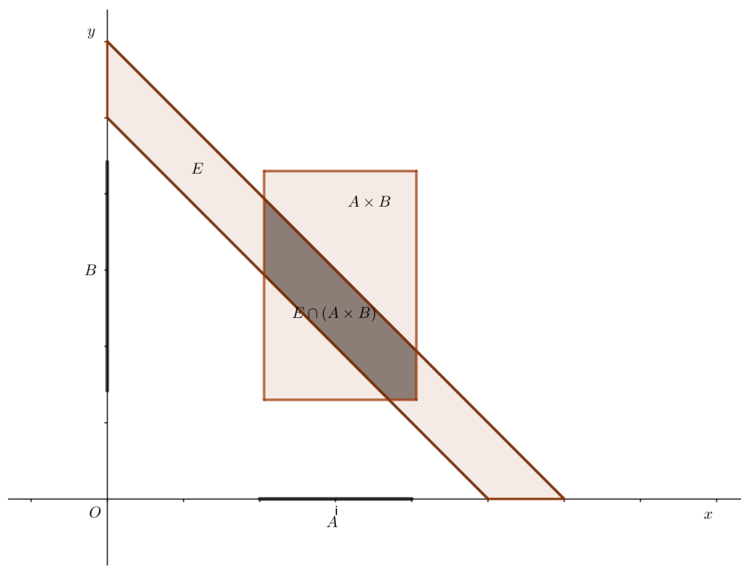
où $S(x) \cdot T(y)$ est le produit direct des distributions S et T.

Théorème 2.7. *Le produit de convolution d'une distribution $S(x)$ de support A par une distribution $T(y)$ de support B a un sens si pour $x \in A$ et $y \in B$, $x + y$ borné entraine que x et y sont séparément borné.*

Théorème 2.8. *Le produit de deux distributions est défini si l'une des deux est à support compact .*
Si les deux sont à support compact, leur produits de convolutions l'est aussi.

Exemple 2.9.

i) Pour que le produit de convolution de deux distributions $S * T$ ait un sens, il suffit que l'une des deux distributions soit à support borné.



Le produit de convolution d'une distribution $s(x)$ de support A par une distribution $T(y)$ de support B a un sens si, quelle que soit la bande E parallèle à la 2ème bissection $E \cap A \times B$ est borné.

ii) Les distributions à support borné forment un espace vectoriel S' dans lequel la convolution à toujours un sens.

iii) Les distributions à support "borné à gauche" (respectivement borné à droite) forment un espace vectoriel que l'on notera $\mathcal{D}'_+$ (respectivement $\mathcal{D}'_-$) dans lequel la convolution à toujours un sens .

2.3 Convolution et distribution de Dirac :

Soit T une distribution quelconque et δ la distribution de Dirac à l'origine ; par définition :

$$\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle \delta(x)T(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T(y) \langle \delta(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \langle T(y), \varphi(y) \rangle$$

d'où : $\delta * T = T$ de même on peut montrer que :$T * \delta = T$

Théorème 2.10. *La distribution de Dirac δ à l'origine joue le rôle d'unité pour le produit de convolution.*

2.4 commutativité et distributivité :

Définition 2.11. *Le produit de convolution est commutatif. cela découle immédiatement de la définition :*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x)T(y), \varphi(x+y) \rangle$$

et de la commutativité du produit direct
De même, le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition par suite de la distributivité du produit direct.

Définition 2.12. *on peut définir le produit de convolution de trois distributions R, S et T par :*

$$\langle R * S * T, \varphi \rangle = \langle R(x)S(y)T(z), \varphi(x+y+z) \rangle$$

Ce produit n'a un sens que si $x+y+z$ borné entraîne que séparément x, y, y sont bornés . Dans ce cas l'associativité du produit direct entraîne l'associativité du produit de convolution

Remarque 3. *Si cette condition n'est pas vérifiée, il se peut cependant que $(R*S)*T$ avec des résultats différents pratiquement on pourra utiliser le théorème suivant*

Théorème 2.13. *Le produit de convolution est associatif si tous les produits deux à deux ont un sens.*

2.5 Dérivée d'un produit de convolution :

Définition 2.14. *δ' étant la dérivée de la distribution δ, par définition :*

$$\langle \delta' * T, \varphi \rangle = \langle \delta' T(y), \varphi(x+y) \rangle$$

$$= \langle T(y) \langle \delta'(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= -\langle T(y), \varphi'(y) \rangle = \langle T', \varphi \rangle$$

d'où le résultat :

$$\delta' * T = T'$$

On démontrerait de même , pour la dérivée d'ordre m :

$$\delta^{(m)} * T = T^{(m)}$$

Théorème 2.15. *Pour dériver m fois une distribution, il suffit de la convoler par la dérivée d'ordre m de la distribution de Dirac δ*

supposons encore que T soit de la forme $T = R * S$ dans ce cas :

$$T' = \delta' * T = \delta' * R * S$$

le double produit ayant un sens s'écrit :

$$T' = [\delta' * R] * S = R' * S$$

ou bien :

$$T' = R * [\delta' * S] = R * S'$$

Corollaire 2.16. *Pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver un des facteurs*

Définition 2.17. *(**Algèbre de convolution**) : On appelle algèbre de convolution, tout espace vectoriel de distributions contenant δ et sur lequel on peut définir le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distributions*

2.6 Résolution d'un équation de convolution

Soient A et B deux distributions données appartenant à une algèbre de convolution $\mathcal{A}$.

Définition 2.18.

a) On appelle équation de convolution , toute équation de la forme $A * X = B$, où X est une distribution inconnue appartenant à $\mathcal{A}$.

b) On appelle inverse A^{-1} de A dans $\mathcal{A}$, toute solution X de l'équation $A * X = \delta$, où δ est la distribution de Dirac. on dit que A^{-1} est une élémentaire de l'équation $A * X = B$.
le problème consiste à étudier l'existence et l'unicité de la solution X dans l'algèbre de convolution $\mathcal{A}$.

Proposition 5. *Si A possède un inverse A^{-1} dans une algèbre de convolution $\mathcal{A}$, alors cet inverse est unique et l'équation $A * X = B$, $B \in \mathcal{A}$, a une solution unique donnée par $X = A^{-1} * B$.*

Démonstration. En effet, A admet un inverse unique car si $A*X=\delta$ avait une autre solution Y dans A , on aurait $A*Y=\delta$ ou on compte tenu de la commutativité, $Y*A=\delta$. dès lors,

$$Y=Y*\delta=Y*(A*X)=(Y*A)*X=\delta*X=X$$

On déduit par convolution des deux membres de l'équation

$$A*X=BparA^{-1}que : A^{-1}*A*X=A^{-1}*B$$

c'est-à-dire :

$$X=A^{-1}*B$$

□

Exemple 2.19. *Montrons que :*

$$(\delta'-c\delta)^{-1}=H(t)e^{ct}$$

où $c\in CetH(t)$ est la fonction Heaviside . en effet, on a :

$$\begin{aligned}(\delta'-c\delta)*H(t)e^{ct} &= \delta'*H(t)e^{ct}-c\delta*H(t)e^{ct}\\ &= \left(H(t)e^{ct}\right)'-cH(t)e^{ct}\\ &= H'(t)e^{ct}\\ &= \delta e^{ct}\\ &= \delta\end{aligned}$$

Chapitre 3

Transformé de Fourier

3.1 Transformé de Fourier des fonctions :

Définition 3.1. *La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie par :*

$$\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{(-2\pi i v t)}dt$$

On écrira symboliquement

$$\widehat{f} = [\mathcal{F}] ou \widehat{f}(v) = \mathcal{F}[f(x)]$$

L'intégrale existe puisque $\mid e^{(-2i\pi vt)} \mid = 1$ .La transformation est évidemment linéaire .
La transformation conjuguée est définie par :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{(2i\pi vt)}dt = \tilde{f}(t)$$

Table De transformées de Fourier usuelles :

Fonctions	Transformée De Fourier	Remarque(s)
$\pi(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} sinc\left(\frac{\zeta}{a}\right)$	
$e^{-ax}H(x)$	$\frac{1}{a+2i\pi\zeta}$	$Re(a) > 0$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\zeta^2}$	$Re(a) > 0$
$e^{-a\lvert x\rvert} sign(x)$	$\dfrac{-4i\pi\zeta}{a^2+4\pi^2\zeta^2}$	$Re(a) > 0$

Remarque 4. $\|\tilde{f}\|_\infty \leqslant |f\|_1$ *Ce qui montre la continuité de $\mathcal{F}$ si $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(\mathbb{R})$(au sens de $\|\|_1$),$\widehat{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (au sens de $\|\|_\infty$ norme de la convergence uniforme). De même pour $\overline{\mathcal{F}}$.*

Théorème 3.2. *Toute fonction intégrable (au sens de Lebesgue) possède une transformé de Fourier qui est une fonction continue ,bornée et tendant vers* 0 *lorsque* $| v |$ *tend vers l'infini .*

Exemple 3.3. *La fonction "porte" notée* Π *est défini par :*

$$\begin{cases} si\ t \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] & \Pi(t) = 1 \\ si\ t \notin [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] & \Pi(t) = 0 \end{cases}$$

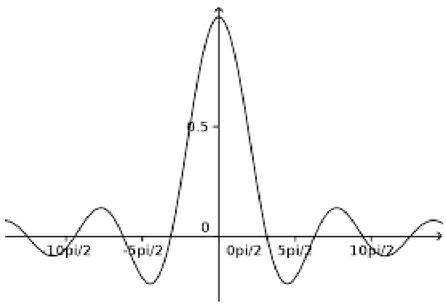
comme f *est paire , si* $v \neq 0$*, on a :*

$$\mathcal{F}(\Pi)(v) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \Pi(t) \cos(2\pi vt) dt = 2 \left[\frac{\sin(2\pi vt)}{2\pi v} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} \tag{3.1}$$

si $v = 0$ *alors* $\mathcal{F}(\Pi)(0) = 1$ *.La fonction* $\mathcal{F}(\Pi)$ *est donc prolongeable par continuité en* 0.
En conclusion :
La transformée de Fourier de la fonction "porte" Π *est la fonction définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\mathcal{F}(\Pi) : v \longrightarrow \frac{\sin \pi v}{\pi v}$$

Cette fonction s'appelle ***sinus cardinal****. Sa représentation graphique est donné par :*



Exemple 3.4. *Soit* $a > 0$ $f : t \longrightarrow e^{-a|t|}$
la fonction f *est paire :*

$$\mathcal{F}(f)(v) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos 2\pi vt\, dt$$

une double intégration par partie conduit à :

$$\mathcal{F}(f)(v) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 v^2}$$

3.2 Inversion :

Définition 3.5. *Soit f une fonction intégrable admettant une transformée de Fourier $\widehat{f}$ elle-même intégrable. Alors ,en tout point x où f est continue on a :*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(v) e^{2i\pi vx} dv$$

Cette transformation est appelée transformée de Fourier inverse .On écrira symboliquement
$f(x) = \overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}(v)] = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(v)]$ si f est continue en x et de manière générale ,si f est continue :
$f = \overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}] = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}]$.
si f est continue par morceaux ,on peut donc obtenir $f(x)$ à partir de $\widehat{f}(v)$ presque partout . si f n'est pas continue en x .on a plus généralement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(v) e^{(2i\pi vx)} dv = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

Théorème 3.6. *Formule D'inversion si f et $\mathcal{F}f$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ Alors :*

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)(t)) = \frac{1}{2}\left[f(t+0) + f(t-0)\right]$$

où $f(t+0)$ et $f(t-0)$ représentent la limite à droite et à gauche en t .
si f est continue en t alors :

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)(t)) = f(t)$$

on peut écrire :

$$\mathcal{F}(f)(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi vt} f(t)\, dt \Longleftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi vt} \mathcal{F}(f)(v)\, dv.$$

Exemple 3.7. *on choisit $f : t \longrightarrow e^{-a|t|}$ on a vu que :*

$$\mathcal{F}(f)(v) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 v^2}$$

donc ,comme :

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F})(t) = f(t) = e^{-a|t|}$$

on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi vt} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 v^2}\, dv = e^{-a|t|} = \frac{2a}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi vt} \frac{1}{\frac{a^2}{4\pi^2} + v^2}\, dv$$

posant $u = -v$ *et multipliant par* $\frac{4\pi^2}{2a}$ *on obtient :*

$$\frac{4\pi^2}{2a} e^{-a|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ut} \frac{1}{\frac{a^2}{4\pi^2} + u^2}\, du$$

ce qui signifie que la fonction $t \longrightarrow \frac{4\pi^2}{2a}e^{-a|t|}$ *est la transformée de la fonction* h *:*

$$h : u \longrightarrow \frac{1}{\frac{a^2}{4\pi^2} + u^2}$$

choisissons : $\alpha = \frac{a}{2\pi}$ *on a donc :*

$$h(u) = \frac{1}{\alpha^2 + u^2} \text{ et } \mathcal{F}(h) : t \longrightarrow \frac{\pi}{\alpha}e^{-2\pi\alpha t}$$

si nous choisissons $\alpha = 1$ *,nous obtenons la transformée de Fourier de la fonction* $t \longrightarrow \frac{1}{1+t^2}$ *qui est :*

$$s \longrightarrow \pi e^{-2\pi s}$$

3.3 Transformée de Fourier en cosinus et sinus :

Définition 3.8. *Soit* f *une fonction de la variable réelle à valeur réelles ou complexe . Il est comme que* f *peut se décomposer en somme d'une fonction pair* $\boldsymbol{p}$ *et d'une fonction impair* $\boldsymbol{q}$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \; f(x) = p(x) + q(x)$$

Avec :

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \; q(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

On a alors :

$$\widehat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p(x) + q(x))\left(\cos(2\pi vx) - i\sin(2\pi vx)\right) dx$$

d'où :

$$\widehat{f}(v) = 2\int_{0}^{+\infty} p(x)\cos(2\pi vx)dx - 2i\int_{0}^{+\infty} q(x)\sin(2\pi vx)dx$$

on écrit alors :

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}_{\cos}[p(x)] - i\mathcal{F}_{\sin}[q(x)]$$

où $\mathcal{F}_{\cos}$ *et* $\mathcal{F}_{\sin}$ *sont les transformées de Fourier respectivement en* ***cosinus*** *et* ***sinus*** *définies par :*

$$\mathcal{F}_{\cos}[f(x)] = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi vx)dx \; ; \; \mathcal{F}_{\sin}[f(x)] = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi vx)dx$$

lorsque la fonction f *est à valeur complexe , il faut décomposer* $\boldsymbol{p}$ *et* $\boldsymbol{q}$ *en parties réelles et imaginaires .*
On Obtient alors la correspondance :
$f(x)$ *= partie réelle paire + imaginaire paire + réelle impaire + imaginaire impaire*
$\widehat{f}(v)$ *= partie réelle paire + imaginaire paire + imaginaire impaire + réelle impaire*

Quelques propriétés :
$f(x)$ paire $\longrightarrow \widehat{f}(v)$ *paire* .
$f(x)$ impaire $\longrightarrow \widehat{f}(v)$ *impaire* .
$f(x)$ réelle paire $\longrightarrow \widehat{f}(v)$ réelle paire .
$f(x)$ réelle impaire $\longrightarrow \widehat{f}(v)$ imaginaire impaire.
$f(x)$ imaginaire paire $\longrightarrow \widehat{f}(v)$ imaginaire paire .

3.4 Propriétés :

3.4.1 Linéarité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\lambda f(x) + \mu g(x)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) e^{(-2i\pi vx)} dx \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{(-2i\pi vx)} dx + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{(-2i\pi vx)} dx \\
&= \lambda \mathcal{F}[f(x)] + \mu \mathcal{F}[g(x)]
\end{aligned}$$

3.4.2 Transposition :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(-x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{(-2i\pi vx)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{(2i\pi vy)} dy \\
&= \widehat{f}(-v)
\end{aligned}$$

3.4.3 Conjugais :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\overline{f(x)}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{-2i\pi vx} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x) e^{2i\pi vx}} dx \\
&= \overline{\widehat{f}(-v)}
\end{aligned}$$

3.4.4 Changement D'échelle :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)e^{-2i\pi vx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{\frac{-2i\pi vy}{a}}\frac{1}{\mid a \mid}dy \\ &= \frac{1}{\mid a \mid}\widehat{f}\left(\frac{v}{a}\right), a \neq 0.\end{aligned}$$

En d'autre termes, une dilatation dans le monde réel entraine une compression dans le monde de Fourier et inversement .

3.4.5 Translation :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x-a)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{-2i\pi vx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-2i\pi v(y+a)}dy \\ &= e^{(-2i\pi va)}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{(-2i\pi vy}dy \\ &= e^{(-2i\pi va)}\widehat{f}(v)\end{aligned}$$

En d'autre termes , une translation dans le monde réel correspond à une déphasage (proportionnel à la fréquence v) dans le monde de Fourier .

3.4.6 Modulation :

$$\mathcal{F}[e^{(2i\pi v_0 x)}f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2i\pi v_0 x)}f(x)e^{(-2i\pi vx)}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{(-2i\pi(v-v_0)x)}dx$$

$$= \widehat{f}(v - v_0).$$

Moduler la fonction f par une exponentielle imaginaire revient à translater sa transformée de Fourier .

3.5 Dérivation :

3.5.1 Par rapport à x :

Supposons f sommable , dérivable et à dérivée sommable par intégration par partie , il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(x)] &= \int f'(x)e^{-2i\pi vx}dx \\ &= \left[f(x)e^{(-2i\pi vx)}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi v\int f(x)e^{(-2i\pi vx)}dx \\ &= (2i\pi v)\widehat{f}(v) \end{aligned}$$

plus généralement , on obtient :

$$\mathcal{F}[f^{(m)}] = (2i\pi v)^m\widehat{f}(v).$$

De cette formule on tire (on prenant des modules)

$$|\ 2\pi v\ |^m|\ \widehat{f}(v)\ | \leqslant \int |\ f^{(m)}(x)\ |\ dx.$$

et on conclut que plus f est dérivable , à dérivés sommables , plus $\widehat{f}$ décroît rapidement à l'infini .
En effet ,si f est m fois dérivable et à dérivés m-ème sommable , $\widehat{f}$ décroît au moins.

3.5.2 Par rapport à v :

$$\begin{gathered} \left(\widehat{f}(v)\right)' = \int f(x)e^{(-2i\pi vx)'}dx \\ = \int (-2i\pi x)f(x)e^{(-2i\pi vx)}dx \\ = \mathcal{F}[(-2i\pi x)f(x)]. \end{gathered}$$

De manière générale , on obtient :

$$\widehat{f}^{(m)}(v) = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)].$$

Ce résultat conduit aussi à une majoration :

$$|\ \widehat{f}^{(m)}(v)\ | \leqslant \int |\ 2\pi x\ |^m|\ f(x)\ |\ dx$$

et donc : plus f décroît à l'infini , plus $\widehat{f}$ est dérivable (avec ses dérivées bornées).En effet , si f décroît en $\frac{1}{x^m}$ à l'infini ,alors $\widehat{f}$ est **m** fois dérivable (car $|\ 2\pi x\ |^m|\ f(x)\ |$ est alors sommable) et sa dérivée m-ème est bornée.

3.6 Transformée de Fourier d'un produit de convolution :

Théorème 3.9. *Lors d'une transformation de Fourier un produit de convolution est changé en un produit ordinaire :*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

Il existe le résultat analogue pour la transformation de Fourier inverse :

$$\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} * \widehat{g}) = 2\pi\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})\overline{\mathcal{F}}(\widehat{g}).$$

3.6.1 Preuve de Théorème :

Supposons f et g sommable telle que $f * g$ existe.
On a alors :

$$\mathcal{F}[f * g] = \int e^{(-2i\pi vx)} \int f(t)g(x-t)dxdt$$

Le théorème de Fubini donne alors :

$$\mathcal{F}[f * g] = \int f(t)dt \int g(x-t)e^{-2i\pi vx)}dx$$

et après le changement de variable $y = x - t$ dans la seconde intégrale ,il vient :

$$\{[f * g] = \int f(t)e^{-2i\pi vx)}dx \int g(y)e^{(-2i\pi vx)}dy$$

d'où :

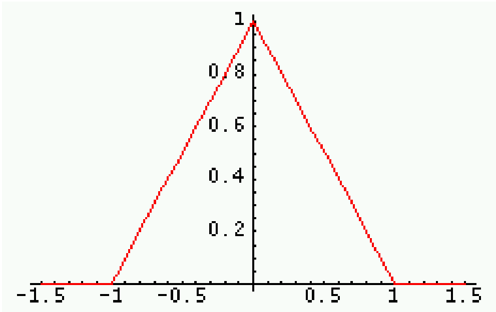
$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

3.6.2 Lemme :

La fonction Λ Définie par :

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 + x \quad pour \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x \quad pour \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad pour \quad | x | \geq 1 \end{cases}$$

ayant le graphe suivant :



On peut montrer aisément que $\Lambda(x) = (\Pi * \Pi)(x)$ et par suite on a :

$$\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \mathcal{F}[\Pi(x)]^2 = \left(\frac{\sin(\pi v)}{\pi v}\right)^2$$

on aura le résultat suivant :

$$\mathcal{F}[f.g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

3.7 Formule de Perseval-Plancherel :

La relation suivante à été établie par Perseval et généralisée par Plancherel aux transformées de Fourier :

Théorème 3.10. *Soient f et g deux fonctions de carré sommable .On a alors :*

$$\int f(x)\overline{g}(x)dx = \int \widehat{f}(v)\overline{\widehat{g}(v)}dv$$

En cas particulier important est le cas $f = g$ c'est-à-dire :

$$\int \mid f(x) \mid^2 dx = \int \mid \widehat{f}(v) \mid^2 dv$$

3.7.1 Preuve de théorème :

on a :

$$\begin{aligned}
\int f(x)\overline{g}(x)dx &= \mathcal{F}[f\overline{g}]_{v=0} \\
&= \left[\widehat{f}(v) * \overline{\widehat{g}(-v)}\right]_{v=0} \\
&= \left[\int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t-v)}dt\right]_{v=0} \\
&= \int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t)}dt
\end{aligned}$$

En physique ,si **f** est une onde ou une vibration et si la variable **x** est temporelle $(x = t)$ alors $\int \mid f(x) \mid^2 dx$ peut représenter la puissance (ou l'énergie) totale dans le domaine temporel et $\int \mid \widehat{f}(v) \mid^2 dv$ représente la puissance totale dans le domaine fréquentiel .

3.8 Transformée De Fourier Des Distributions :

Définition 3.11. *On va d'abord essayer de définir la transformée de Fourier pour les distributions régulières. Soit donc f une fonction intégrable qui définit une distribution régulière T_f est intéressons nous à la distribution régulière associée à $\widehat{f}$:*
On a :

$$\forall\varphi \in D, \langle T_f, \varphi\rangle = \int \widehat{f}(t)\varphi(t)dt$$
$$= \int \left(\int f(x)e^{-2i\pi xt)}dx\right)\varphi(t)dt$$

Et on utilisant le théorème de Fubini pour intervertir les deux intégrales :

$$\forall\varphi \in \langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int f(x)\left(\int e^{(-2i\pi xt)}\varphi(t)dt\right)dx$$
$$= \int f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \langle T_f, \widehat{\varphi}\rangle$$

*Le problème ici est que si φ appartient à **D** ,il n'y a raison pour que sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ appartienne à **D** et donc $\langle T_f\ , \widehat{\varphi}\rangle$ n'a en généralement pas le sens . pour obtenir une définition satisfaisante de la transformée de Fourier des distributions , on doit donc se placer sur un espace plus grand que **D** .*

3.9 Espace S et transformée de Fourier :

3.9.1 Définition de l'espace S :

Définition 3.12. *L'espace de Schwartz des fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide est défini par :*

$$S = \left\{\varphi \in C^\infty, \forall m, n \in \mathbb{N}, Supp_{x\in\mathbb{R}} \mid x^m\varphi^{(n)}(x) \mid < \infty\right\}$$

Autrement dit :

$$S = \left\{\varphi \in C^\infty, \forall m, n \in \mathbb{N}, \lim_{|x|\to+\infty} \mid x^m\varphi^n(x) \mid = 0\right\}$$

*ou ce qui revient au même , **S** est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivable telle que φ et toute ses dérivées décroissent plus rapidement que toute puissance de $\frac{1}{|x|}$ quand $\mid x \mid \longrightarrow +\infty$ Notons que **s** est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (si $\varphi_1, \varphi_2 \in$*

*s et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in S$).Il est clair que :$D \subset S \subset \varphi$ l'espace **S** est une algèbre pour la convolution si $f.g \in s$.*
*Soit φ une fonction de **S** on a :*
$\forall m \in \mathbb{N}, \widehat{\varphi}^m(v) = \int(-2i\pi x)^m e^{(-2i\pi vx)}\varphi(x)dx$ *et on en déduit que $\widehat{\varphi}$ ainsi que toute ses dériver sont aussi à décroissances rapides. et donc on a :*

Théorème 3.13. *La transformation de Fourier est une application (linéaire et continue) de **S** dans **S**.*

3.10 Transformation De Fourier Des Distributions Tempérées :

Définition 3.14. *On appelle distribution tempérée ,toute fonctionnelle linéaire continue définie sur **S** et à valeurs dans $\mathbb{C}$ .Les distributions tempérées forment un espace vectoriel que l'on note **S'**(espace dual de **S**).On vérifie que : **S'** $\subset$ **D'** . Une fonctionnelle linéaire T sur S est une distribution tempérée si et seulement s'il existe c¿0 et $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\varphi \in S$ on dit :*

$$\mid \langle T, \varphi \rangle \mid \leqslant c \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \varphi(x) \mid^n dx$$

Proposition 6. *L'ensemble des distribution tempérées contient toutes les distributions à support bornée (E').*

Exemple 3.15. ♢ *les distributions de Dirac et ces dérivées*
♢ *les distributions régulières associées aux fonctions à croissance lente comme les polynômes.*
♢ *les fonctions périodique localement sommables .*

Remarque 5. *La distribution régulière $\boldsymbol{T}_{exp}$ n'est pas tempérées puisque la fonction exponentielle croit trop rapidement à l'infini.*

Théorème 3.16. *Toute distribution tempérée **T** admet une transformée de Fourier ,notée $\mathcal{F}[T]$ où $\widehat{\boldsymbol{T}}$ qui est également une distribution tempérée , définie par :*

$$\forall \varphi \in S, \langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

Exemple 3.17. $\diamondsuit \mathcal{F}[T_1] = \delta \langle \widehat{T_1}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(v)dv = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$. *(formule de la transformée de Fourier inverse)*
$\diamondsuit \mathcal{F}[\delta] = T_1 \langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \rangle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \langle T_1, \varphi \rangle$

Définition 3.18. *On peut définir une transformée de Fourier inverse comme pour les fonctions*
On a :

$$\forall \varphi \in S, \langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Proposition 7. *Soit T une distribution tempérée on a alors :*

$$\blacklozenge \mathcal{F}[T^m] = (2i\pi v)^m \mathcal{F}[T].$$

$$\blacklozenge \mathcal{F}[T(x-a)] = e^{(-2i\pi va)} \mathcal{F}[T].$$

$$\blacklozenge \mathcal{F}[T(ax)] = \frac{1}{\mid a \mid} \widehat{T}\left(\frac{v}{a}\right).$$

$$\blacklozenge \mathcal{F}[e^{(2i\pi ax)}T] = \widehat{T}(v-a).$$

Théorème 3.19. *Si* $\boldsymbol{T}$ *est une distribution tempérée à support bornée (* ***E'****) alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}[T]$ est une distribution régulière associée à une fonction indéfiniment dérivable .*

Conclusion

• Dans ce travail ,on a définis les opérations sur les distributions on commençons tout d'abord par les définir sur les fonctions localement sommable et en suite on a généralisé les définitions obtenue à l'ensemble des distributions .

• On a chercher à résoudre des équations différentielles en utilisant les distributions opérateur différentiel et la convolution ,enfin on a abordé en particulier la convergence des séries de Fourier .

Bibliographie

[1] Ahmed LESFARI, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace* , **France,2012**.

[2] François RODDIER , *Distributions et transformation de Fourier (à l'usage des physiciens et des ingénieurs)* ,*Université de Nice* , **Paris,1983**.

[3] VO-KHAC Khoan , *Distributions Analyse de Fourier Opérateurs aux Dérivées partielles* , **Saint-Germain ,PARIS ,1972**.

[4] F.Golse ,*Distributions, analyse de Fourier, Equations aux dérivées partielles* ,**France,2012**.

[5] Thomas Cluzeau ,*Mathématiques pour l'Ingénieur ,École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges* ,**France**.

[6] Claude ZUILY ,*éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles* , **L'université de paris XI-Orsay ,2002**.

[7] Michel DOISY , *Distributions, convolution et transformée de Fourier* ,**institut national Polytechnique de Toulouse, France** .

[8] Thomas LACHAND-ROBERT , *Analyse harmonique ,distributions ,convolution* **,Université de paris VI ,France**.

[9] J-P.CONZE ,*Analyse de Fourier et applications 2ème cycle de mathématiques* , **Université de Rennes I, France 2007**.