République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed El Bachir Elibrahimi –Bordj BouArreridj
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département Sciences de la Matière

جامعة محمد البشيرالإبراهيمي « برج بوعريريج »
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم علوم المادة

Mémoire de fin d'études

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE: Master

Filière : Physique
Option : Physique des Matériaux

THÈME :

Le Modèle de Jaynes Cummings dépendant du temps

Préparé par : BOUACHRINE RAZIKA

Soutenu le

Devant le jury :

Président :	Khalfallah Farid	MCA	Université de BBA
Rapporteur :	Berrehail. Mounira	MCA	Université de BBA
Examinateur :	Maamri Samir	MCB	Université de BBA

Année Universitaire 2021-2022

Remerciements

Je tien tout d'abord à remercier dieu le tout puissant pour m'avoir donné de la force et de la patience.

Je tien remercier ma directrice de recherche **BERAHAIL MOUNIRA** pour leur précieux conseil et leur encouragement lors de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie aussi les membres de jury d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont participé de près ou le loin à la concrétisation de ce travail pur leurs conseils, leurs encouragements et leurs soutiens.

Dédicaces

Je remercie le Dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin

Insha Allah.

Je dédie ce travail à mes parents .mon père Rabi Yarhmou Insha Allah, ma mère pours ses encouragements et ses prières tout long de mes études.

Un grand merci également à mon mariée KHALIL SOUICI

JE dédie aussi ma sœur ZAHIA

A tout ma grande Famille BOUACHRINE

À ma 2éme Famille SOUICI

A tous mes amis sons exception

A tout qui aiment RAZIKA et ceux que RAZIKA amie،

Sommaire

Introduction générale :

Les problèmes dynamiques en mécanique quantique non relativiste et relativiste sont d'un intérêt capital dans différentes branches de la physique et la chimie quantiques. En mécanique quantique non relativiste, il faut résoudre l'équation de Schrödinger associée à un Hamiltonien comme premier pas pour comprendre le comportement quantique du système physique qu'il décrit. Pour les systèmes stationnaires [1], l'équation de Schrödinger se réduit à une équation aux valeurs propres après séparation des variables d'espace et du temps. Les solutions de l'équation de Schrödinger s'expriment alors comme des fonctions des variables d'espace multipliées par des phases dépendantes du temps.

Pour les Hamiltoniens dépendant explicitement du temps, la résolution du problème est souvent plus compliquée voire même impossible de façon exacte, il n'est en général pas possible de résoudre analytiquement l'équation de Schrödinger dépendante du temps. On est obligé de faire appel à des méthodes approximatives dont chacune peut être mieux adaptée pour certains types de potentiels. La théorie des perturbations, l'approximation adiabatique et l'approximation soudaine [2].

Parmi les méthodes alternatives, débouchant sur des solutions exactes, il y a la méthode des invariants qui a été initiée par Lewis et Riesenfeld [3]. Elle repose sur la résolution d'une équation aux valeurs propres relative à un opérateur dit invariant et satisfaisant certaines conditions requises. Il s'avère parfois que cette approche est plus convenable que la méthode directe reposant sur l'opérateur d'évolution.

Dans cette mémoire, nous allons nous pencher sur la méthode des invariants et la méthode des transformations unitaires pour résoudre exactement l'équation de Schrödinger relative au modèle de Jaynes-Cummings dépendant du temps [4].

Nous commençons, dans le chapitre 1, par une description détaillée sur l'équation de Schrödinger dépendant du temps et les différentes méthodes utilisées pour la résoudre.

Dans le chapitre 2, nous présentons les deux méthodes : la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld et les transformations unitaires qui nous servira dans le travail du chapitre 3.

Le chapitre 3, est consacré à la présentation détaillée de la résolution du problème du modèle de Jaynes-Cummings dépendant du temps.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion.

CHAPITRE 1 :

L'équation de Schrödinger dépendant du temps

1.1 Introduction

Dans le cadre de la mécanique classique, l'état d'un système physique est bien défini par la connaissance des variables dynamiques du système, solutions des équations de Newton ou celles de Hamilton et Lagrange, qui sont des quantités continues d'où la continuité des grandeurs qui déterminent l'état du système tel que l'énergie [5].

En mécanique quantique les phénomènes physiques sont décrits par la fonction d'onde, qui contient toutes les informations sur l'état du système et son comportement suit l'équation de Schrödinger. L'équation de Schrödinger [6] est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle fondateur que l'équation de Newton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle de l'état d'un objet quantique représenté par une fonction d'onde.

1.2 Équation de Schrödinger dépendante du temps

La mécanique quantique postule qu'à un instant t_0 fixé, l'état d'un système physique

est défini par la donnée d'un ket $|\psi(t_0)\rangle$ appartenant à l'espace des états de l'espace de Hilbert[1] .En outre l'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{1.1}$$

Où H(t) est l'observable associée à l'énergie totale du système (l'opérateur hamiltonien

du système). Celui-ci est la somme des opérateurs d'énergie cinétique et potentielle :

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}} + \mathrm{v}(\mathrm{r},\mathrm{t}) \tag{1.2}$$

Avec $p = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$, où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient et $\mathrm{v}(\mathrm{r},\mathrm{t})$ étant l'opérateur d'énergie potentielle associée au potentiel d'interaction, éventuellement dépendant du temps.

L'opérateur hamiltonien dépend donc du temps si les potentiels qui entrent en jeu dépendent eux-mêmes explicitement du temps. Lorsque l'opérateur H ne dépend pas du temps, on est ramené par séparation des variables spatiales et temporelle à une équation aux valeurs propres, appelée équation de Schrödinger stationnaire. Par contre si l'hamiltonien est fonction du temps, on est obligé de résoudre l'équation de Schrödinger dépendant du temps

1.3 Superposition d'états

Puisque l'équation de Schrödinger est linéaire, il est évident alors que la somme de deux solutions ou plus est aussi une solution. De la découle le principe de superposition [1], qui est l'un des principes fondamentaux de la mécanique quantique, qui stipule qu'un système quantique pouvant exister dans des états discrets $\psi_n(r,t)(n \in N)$, peut également occuper l'état superposé :

$$\psi(t) = \sum_n a_n \psi_n(t) \tag{1.3}$$

Ou les a_n sont des coefficients complexes indépendants du temps, pourvu que la condition de normalisation (1.3), qui s'écrit dans la notation de Dirac comme :

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1 \tag{1.4}$$

Soit satisfaite.

1.4 Évolution temporelle d'un système quantique

On postule que l'évolution temporelle d'un système quantique [1] est linéaire de sorte qu'il existe un opérateur $U(t, t_0)$ de l'espace de Hilbert H appelé opérateur d'évolution tel que :

$$\psi(\vec{r}, t) = U(t, t_0)\psi(\vec{r}, t_0) \tag{1.5}$$

Par ailleurs, afin d'assurer la normalisation de la fonction d'onde, l'opérateur d'évolution doit être unitaire

$$U^+(t, t_0)\, U(t, t_0) = I \tag{1.6}$$

OùI est l'opérateur identité.

La définition (1.5) permet de montrer que l'équation de Schrödinger est également satisfaite par l'opérateur d'évolution

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)\, U(t, t_0) \tag{1.7}$$

Le calcul exact de l'opérateur $U(t, t_0)$ dans le cas ou l'hamiltonien dépend du temps est en général impossible, hormis quelque cas simples mais exemplaires, et on recourt le plus souvent aux méthodes perturbation. En revanche. Si H est constant, on a

$$U(t, t_0) = e^{\frac{1}{i\hbar} H(t - t_0)} \tag{1.8}$$

1.5 Mesures d'un état quantique, Incertitudes

A chaque grandeur physique susceptible d'être mesurée est associée un opérateur linéaire hermitien A agissant dans l'espace de Hilbert et appelé observable. Les résultats possibles de la mesure de A sont les valeurs propres de l'observable [1]. La probabilité de trouver la valeur α lors d'une mesure de A effectuée sur un système dans l'état quelconque $|(t)\rangle$ est alors :

$$P(\alpha) = |\langle\alpha|\Psi(t)\rangle|^2 \tag{1.9}$$

D'après le principe d'incertitude de Heisenberg il existe des grandeurs qui ne peuvent pas être déterminées simultanément avec une précision fini, et leur mesure modifie l'état du système. C'est le cas de la position et de l'impulsion d'une particule, plus on augmente la précision sur la mesure de position, plus on perturbe la vitesse, et réciproquement. Plus précisément, si on définit les incertitudes sur ces mesures par les écart-types Δx et Δ, ils devront satisfaire l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta x.\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.10}$$

Et de même pour les composante sur les axes y et$z$, les Δ sont maintenant parfaitement définis, et désignent précisément les écarts- types

$$\Delta x = \sqrt{\langle x\rangle^2 - \langle x\rangle^2} \tag{1.11}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p\rangle^2 - \langle p\rangle^2} \tag{1.12}$$

Où $\langle\ \ \rangle$désigne la valeur moyenne dans un état du système. Par exemple, dans l'état $|\Psi(t)\rangle$, supposé normalisé , d'un système évoluant à une dimension, les valeurs moyennes des puissances de x et p, se calculent par :

$$\langle x\rangle = \int \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)dx \tag{1.13}$$

$$\langle p\rangle = \int \Psi^*(x,t)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t)dx \tag{1.14}$$

1.6 Méthodes de résolution

Différentes méthodes existent pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps exacts et approximatifs. Le choix d'une méthode particulière repose généralement sur la forme du potentiel et sur celle de la fonction d'onde recherchée ; pour cela on peut citer quelques méthodes intéressantes qui ont une relation directe avec ce qui va suivre de notre travail.

1.6.1 Les méthodes exactes

1. **Opérateur d'évolution**

En général, résoudre l'équation de Schrödinger (1.1) revient de trouver un opérateur linéaire, soit $U(t,t_0)$[7] qui vérifie :

$$U(t,t_0) = U^+(t,t_0) \tag{1.15}$$

Et qui est définit comme suit :

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \tag{1.16}$$

Avec $|\Psi(t_0)\rangle$ représente l'état initial du système.

Par définition, le rôle de cet opérateur est de déterminer l'évolution de l'état $|\Psi(t_0)\rangle$ à tout l'instant t,

En injectant (1.16) dans l'équation de Schrödinger (1.1), $U(t,t_0)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H(t)U(t,t_0) \tag{1.17}$$

Avec la condition initiale :

$$U(t_0,t_0) = I. \tag{1.18}$$

La méthode standard pour obtenir des solutions exactes de l'équation de Schrödinger repose essentiellement sur l'obtention de l'opérateur d'évolution, satisfaisant à l'équation (1.17).lorsque l'Hamiltonien dépend explicitement du temps, cette équuation peut etre intégrée formellement entre t_0 et t et mise sous la forme :

$$U(t,t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t0}^{t} H(t')U(t',t)dt'. \qquad (1.19)$$

2. **Les transformations unitaires**

En appliquant des transformations unitaire sur un système dépendant du temps on peut le rendre indépendant du temps [2]. Il est important de se rappeler que pour décrire l'évolution du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ dans l'espace de Hilbert, on doit choisir un système d'axes ou un référentiel. Le choix de référentiel n'a pas de raison d'être unique, c'est-à-dire que l'on est libre de passer à un autre système d'axes, chaque fois que l'on change de référentiel, on change de point de vue et par conséquent on observe le système physique sous un angle différent.

3. **La théorie des invariants :**

La théorie des invariants représente l'un des piliers fondamentaux dans l'étude des systèmes dépendant du temps [3]. Cette importance de la théorie des invariants relie au langage mathématique puissant qui l'a caractérisé, et sur sa souplesse dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. L'idée de base de la théorie des invariants est la dérivation d'une relation simple entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation Schrödinger.

L'utilisation de la théorie des invariants de Lewis-Riesenfeld dépendants explicitement du temps a été faite pour la première fois sur l'oscillateur harmonique de fréquence dépendante du temps et sur une particule chargée dans un champ électromagnétique. A cause de son importance dans ce travail, on va l'étudier avec plus de détails dans le chapitre 2.

1.6.2 Les méthodes approximatives :

Parfois, lorsqu'on ne peut pas trouver des résultats exacts [9], on fait appel aux méthodes d'approximation, ces méthodes sont généralement très puissantes et applicables à de nombreux systèmes physiques, elles sont beaucoup plus utilisées dans les domaines de la physique appliquée ; telles que la physique du solide, physique des plasmas, l'information quantique…etc. Parmi ces méthodes on a :

- La théorie des perturbations dépendant du temps.
- l'approximation soudaine.
- l'approximation adiabatique.

CHAPITRE 2:
La méthode des invariants et les Transformations unitaires

2.1 Introduction

Parmi les méthodes les plus puissantes et qui donnent des solutions exactes de l'équation de Schrödinger dépendante du temps, nous avons la méthode des invariants [3]. L'idée de base de la théorie des invariants est la dérivation de la relation entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation Schrödinger. On peut trouver une transformation de phase dépendante du temps pour chaque état propre d'un invariant telle que la fonction propre devient une solution de l'équation de Schrödinger, et la phase est déterminée en résolvant une simple équation différentielle du premier ordre.

L'autre technique, très utilisée dans la résolution de l'équation de Schrödinger, dépendant du temps, la méthode de transformation unitaire [8] qui a été utilisée avec succès pour résoudre une multitude de potentiels connus en physique. L'avantage de cette technique est qu'il est possible de choisir convenablement un opérateur unitaire de telle sorte que la nouvelle équation soit facile à résoudre.

Nous allons présenter dans cette section plus ou moins en détails les différentes étapes de ces deux méthodes.

2.2 La méthode des invariants

La théorie des invariants représente l'un des piliers fondamentaux dans l'étude des systèmes dépendant du temps. Cette importance de la théorie des invariants est reliée au langage mathématique puissant qui la caractérise, et à sa souplesse dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendant du temps. Dans cette partie de notre travail, on va donner quelques notions essentielles concernant la théorie des invariants telle qu'elle a été introduite par Lewis et Riesenfeld[3] dans le cas du spectre discret. Á travers ces notions on peut, au moins, donner aux lecteurs une idée sur l'importance de la théorie des invariants pour la résolution de l'équation de Schrödinger dépendant du temps.

2.2.1 Exposition de la méthode

La théorie des invariants pour Hamiltoniens Hermitiens a été introduite par Lewis et Riesenfeld(1969) [3], ou ils ont dérivé une simple relation entre les vecteurs propre de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger.

On considère l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle \tag{2.1}$$

Où H est l'hamiltonnien du système, c'est un opérateur hermétique explicitement dépendant du temps.

Supposons l'existence d'un autre opérateur hermitien dépend explicitement du temps qui vérifie la condition:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0 \tag{2.2}$$

Tel que :

$$I(t) = I^{+}(t) \tag{2.3}$$

En multipliant l'équation (2.2) par$|\Psi(t)\rangle$, utilisant l'équation de Schrödinger (2.1) nous permettra de déduire une relation importante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(I|\Psi(t)\rangle) = H(t)(I|\Psi(t)\rangle) \tag{2.4}$$

Ce qui implique que l'action de l'opérateur invariant sur le vecteur d'état de Schrödinger produit une autre solution de l'équation de Schrödinger. Ce résultat est valable quel que soit la forme de l'invariant.

Pour un opérateur hermétique quelconque, on peut espérer pouvoir trouver plusieurs invariants vérifiant (2.2). Tous ces invariants justifient certaines propriétés qu'on va introduire dans ce chapitre. Puis on va essayer dans certains cas de donner des invariants intéressants de point de vue pratique. En disant comment ces invariants peuvent être utile.

2.2.2. Valeurs propres de l'invariant $I(t)$

On suppose que l'invariant I(t) est un opérateur d'un ensemble complet d'opérateurs qui commutent (ECOC) [1], Donc il existe un ensemble complet des états propres de I(t). On note les valeurs propres de I(t) par λ[3], et les états propres orthonormés associés à λ par $|\lambda, k\rangle$où k signifie tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier les états propres de ce système. Cependant l'équation aux valeurs propres de cet invariant s'écrit :

$$\begin{aligned} I(t)|\lambda, k\rangle &= \lambda|\lambda, k\rangle \\ \langle \lambda, k|\lambda', k''\rangle &= \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Où est $\langle \lambda, k|\lambda' k'\rangle$le produit scalaire sur l'espace d'état.

Ces invariants I(t) ont un spectre constant au cours de temps. C'est à dire que les valeurs propres de ces opérateurs sont indépendantes de temps. Pour prouver cette indépendance en différentiant l'équation (2.5) par rapport à t on obtient:

$$\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,k\right\rangle+I\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,k\right\rangle=\frac{\partial\lambda}{\partial t}\left|\lambda,k\right\rangle+\lambda\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,k\rangle \tag{2.6}$$

En multipliant (2.2) à gauche par $|\lambda,k\rangle$ il vient

$$\frac{\partial I}{\partial t}\left|\lambda,k\right\rangle+\frac{1}{i\hbar}[I,H(t)]|\lambda,k\rangle=0 \tag{2.7}$$

Le produit scalaire de l'équation (2.7) par $\langle\lambda',k'|$ donne :

$$\left\langle\lambda',k'\left|i\hbar\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{t}}\right|\lambda,k\right\rangle+\langle\lambda',k'|IH|\lambda,k\rangle-\langle\lambda',k'|\lambda H|\lambda,k\rangle=0 \tag{2.8}$$

$$i\hbar\left\langle\lambda',k'\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle+(\lambda'-\lambda)\langle\lambda',k'|H|\lambda,k\rangle=0 \tag{2.9}$$

Pour :$\lambda'=\lambda$

$$\left\langle\lambda',k'\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle=0 \tag{2.10}$$

En prenant le produit scalaire de l'équation (2.6) avec l'état propre$\langle\lambda,k|$, on obtient :

$$\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,t\right\rangle+\left\langle\lambda,k\left|I\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle=\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle+\lambda\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \tag{2.11}$$

$$\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle+\lambda\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle=\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle+\lambda\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \tag{2.12}$$

$$\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle=\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \tag{2.13}$$

Alors :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \tag{2.14}$$

Ce qui implique :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\left\langle\lambda,k\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle=0 \tag{2.15}$$

2.2.3. Vecteurs propres de l'invariant $I(t)$

Notre but est biens sur de trouver la relation entre la solution de l'équation de Schrödinger et les états propres de l'opérateur invariant [3], pour ce faire, écrivons l'équation de mouvement pour le vecteur à partir de l'équation (2.6) et appliquons la formule (2.15) on obtient :

$$(\lambda-I)\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda,k\right\rangle=\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda,k\rangle \tag{2.16}$$

Le produit scalaire de l'équation avec le vecteur propre$\langle\lambda',k'|$est :

$$\left\langle\lambda',k'\left|(\lambda-I)\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle=\left\langle\lambda',k'\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \tag{2.17}$$

On obtient:

$$(\lambda-\lambda')\langle\lambda',k'|H|\lambda,k\rangle+I\hbar\left\langle\lambda',k'\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle=0 \tag{2.18}$$

Donc :

$$(\lambda-\lambda')\langle\lambda',k'|H|\lambda,k\rangle = I\hbar(\lambda-\lambda')\left\langle\lambda',k'\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \tag{2.19}$$

Pour $\lambda \neq \lambda'$on déduit :

$$\langle\lambda',k'|H|\lambda,k\rangle = I\hbar\left\langle\lambda',k'\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k\right\rangle \tag{2.20}$$

Si l'équation (2.19) est valable pour $\lambda = \lambda'$aussi bien que pour $\lambda \neq \lambda'$ alors on déduit immédiatement que$|\lambda,k\rangle$ satisfait l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire,$|\lambda,k\rangle$ est une solution particulière de l'équation de Schrödinger.

Alors :

$$|\lambda,k\rangle_a = e^{i\alpha(t)_{\lambda k}}|\lambda,k\rangle \tag{2.21}$$

2.2.4. La phase totale

Nous avons vu que la fonction d'onde du système, peut être cherché, à une phase globale prés sous la forme d'un produit de deux fonctions chacune est relative à une variable.

Dans l'approche de Reisenfeld[3], nous supposons que le vecteur $|\lambda,k\rangle$ est multiplié par un facteur arbitraire dépendant du temps. Alors, on peut défini un nouveau ensemble de vecteurs propres de l'invariant I(t) défini par:

$$|\lambda,k\rangle_a = e^{i\alpha(t)_{\lambda k}}|\lambda,k\rangle \tag{2.22}$$

Où $\alpha(t)_{\lambda k}$ est une fonction réelle de temps arbitrairement choisie. $|\lambda,k\rangle_a$Cesont des états propres orthonormales de I(t) associés àλ , aussi bien que les$|\lambda,k\rangle$. Si on choisit bien les phases $\alpha(t)_{\lambda k}$l'équation (2.20) sera vérifiée pour $\lambda = \lambda'$et donc l'objectif sera atteint. Il faut juste avoir:

$$\hbar\frac{\partial\alpha_{\lambda k}}{\partial t}\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{k'k} = \langle\lambda',k'|[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H]|\lambda,k\rangle \tag{2.23}$$

Donc on obtient :

$$\hbar\frac{\partial\alpha_{\lambda k}}{\partial t} = \langle\lambda,k|[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H]|\lambda,k\rangle \tag{2.24}$$

Mise à part ces changements de phase, on peut introduire la deuxième propriété importante de cet invariant : tous les états propres de ces invariants sont aussi les solutions particulières de l'équation du Schrödinger (2.1).

2.2.5. Solution général de l'équation de Schrödinger

Du fait que chacun de ces nouveaux états propres satisfait l'équation de Schrödinger [6], la solution générale est donnée par :

$$|\Psi(r,t)\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k}e^{i\alpha(t)_{\lambda k}}|\lambda,k\rangle \tag{2.25}$$

Où $C_{\lambda k}$ sont des coefficients indépendants du temps et correspondent $|\Psi(r,t_0)\rangle$.

$$|\Psi(r,t_0)\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k} e^{i\alpha(t_0)_{\lambda k}} |\lambda,k\rangle \tag{2.26}$$

Donc,$|\Psi(t)\rangle$ est la solution générale de l'équation générale de l'équation de Schrödinger et sont les états propres de l'invariant.

2.2.6 Comment trouver un invariant

Dans le cas d'un système de dimension finie, il y a un résultat due au [10]qui a confirmé qu'un système de la forme (1.3) soit exactement soluble, si et seulement si, l'algèbre de Lie engendrée par l'opérateur H(t) soit de dimension finie. Cependant, plusieurs exemples d'intérêt physique (comme l'oscillateur harmonique), ont une algèbre de Lie de dimension finie. Donc on se met là, dans le cas d'un système de dimension finie, sous l'hypothèse d'avoir une algèbre de Lie, engendrée par H(t),de dimension finie. On va voir, comment cette hypothèse peut nous aider à trouver l'ensemble des invariants de notre système de Schrödinger.

Supposons par exemple que l'algèbre de Lie engendrée par H(t) est donnée par l'ensemble des opérateurs hermitiens

$$\mathrm{E} = \{O_1, O_2, ...O_N\} \tag{2.27}$$

Avec l'opérateur hamiltonien H(t) s'écrit comme

$$H = \sum_{i=1}^{M} h_i O_i \tag{2.28}$$

Où les h_i sont des coefficients qui peuvent dépendre du temps. Et O_i sont des opérateurs. Maintenant on construit l'opérateur invariant :

$$I(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) 0_i \tag{2.29}$$

Où les paramètres$\{\alpha_i(t)\}$ sont des fonctions réelles dépendant du temps. On exige que l'ensemble des N opérateurs$\{O_i\}_N (N \geq M)$ satisfasse les équations :

$$[H, O_i] = \sum_{j=1}^{N} g_{ij} O_j, j = 1,2, \dots, N \tag{2.30}$$

C'est –à-dire qu'une quasi-algèbre est fermée avec des constantes de structure g_{ij}.en remplaçant l'équation (2.29) dans l'équation (2.2) et en utilisant les relations (2.28), l'opérateur$I(t)$ devient un invariant si l'ensemble suivant d'équations du premier ordre a une solution :

$$\alpha_i^{\cdot} + i\hbar^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_{ji} \alpha_i = 0, i = 1,2, \dots, N \tag{2.31}$$

2.3 Les transformations unitaires

Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'un problème physique décrit par l'hamiltonien Ĥ et le vecteur d'état $|\psi\rangle$admet de multiples représentations équivalentes [8], obtenues en changeant à la fois l'hamiltonien et le vecteur d'état.

Généralement, pour un hamiltonien dépendant du temps, on utilise des opérateurs unitaires dépendants du temps qui transforment le vecteur d'état de la façon suivante :

$$|\psi(t)\rangle = U|\overline{\psi}(t)\rangle \tag{2.32}$$

Du point de vue de la mécanique quantique, on dit que les états $|\psi(t)\rangle$ et $|\overline{\psi}(t)\rangle$ sont équivalents, et par conséquent décrivent le même phénomène physique, si $|\overline{\psi}(t)\rangle$satisfait aussi l'équation de Schrödinger pour un nouveau Hamiltonien Hermitien $\overline{H}$.

En fait, en dérivant (2.32) partiellement par rapport à t et utilisant (1.1), on vérifie que $|\overline{\psi}(t)\rangle$ satisfait l'équation :

$$i\hbar\frac{\partial|\overline{\psi}(t)\rangle}{\partial t} = \left[U^{-1}(t)H(t)U(t) + i\hbar\frac{\partial U^{-1}(t)}{\partial t}U(t)\right]|\overline{\psi}(t)\rangle \tag{2.33}$$

Qui est du type Schrödinger avec :

$$\overline{H}(t) = U^{-1}(t)H(t)U(t) + i\hbar\frac{\partial U^{-1}(t)}{\partial t}U(t) \tag{2.34}$$

Cependant, en imposant l'herméticité de $\overline{H}(t)$, on s'aperçoit que l'opérateur U (t) doit être unitaire, c'est-à-dire :

$$U^{+}(t) = U^{-1}(t) \tag{2.35}$$

Ou encore :

$$U^{+}(t)U(t) = U(t)U^{+}(t) = \mathrm{I} \tag{2.36}$$

Où I est l'opérateur identité.

On dit alors que l'opération (2.32) est une transformation unitaire. Elle assure la conservation du produit scalaire des déférents états. En effet, en considérant la transformation (2.32) sur deux états quelconques $|\psi_1(t)\rangle$ et $|\psi_2(t)\rangle$ de l'espace de Hilbert,

$$|\overline{\psi}_i(t)\rangle = U^{+}(t)|\psi_i(t)\rangle, \quad i = 1.2 \tag{2.37}$$

Et tenant compte de la propriété d'unitarité (2.35), on obtient

$$\langle\overline{\psi}_1(t)|\overline{\psi}_2(t)\rangle = \langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle \tag{2.38}$$

Qui signifie que le produit scalaire est conservé. Ainsi, l'interprétation probabiliste des vecteurs d'état de l'équation de Schrödinger est conservée dans une transformation unitaire.

Par ailleurs, pour que les deux systèmes d'états, c'est-à-dire les $|\psi_i(t)\rangle$ et leurs transformés $|\overline{\psi}_i(t)\rangle$; soient complètement équivalents, il doit y avoir conservation des valeurs moyennes des observables. Ainsi, partant de la définition de la valeur moyenne d'une observable A(t) (qui peut dépendre explicitement du temps) dans un état $|\overline{\psi}(t)\rangle$ quelconque d'une représentation et tenant compte de (2.37), on peut écrire

$$\langle\psi_i(t)|A(t)|\psi_i(t)\rangle = \langle\overline{\psi}_i(t)|U^+(t)A(t)U\{t\}|\overline{\psi}_i(t)\rangle \qquad (2.39)$$

Par conséquent, cette même observable doit être définie dans la nouvelle représentation comme

$$\overline{A}(t) = U^+(t)A(t)U(t) \qquad (2.40)$$

CHAPITRE 3 :
Le modèle de Jaynes- Cummings

3.1 Introduction

Le modèle standard de Jaynes-Cummings (JCM) [11] est considéré comme le modelé de référence le plus élémentaire pour décrire l'interaction des atomes à deux niveaux avec un champ électromagnétiques quantifiés dans l'approximation dipolaire.

Le but du travail de ce chapitre est de présenter la méthode des invariants conjointement avec les transformations unitaires, pour résoudre l'équation de Schrödinger du modèle de Jaynes-Cummings à deux niveaux d'énergie dépendant du temps avec un processus de photons imaginaires, ou on a présenté les valeurs propres de l'invariant et on a calculé aussi la phase à partir de l'article de XIAN [4],

3.2 Hamiltonien de JCM

L'hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings généralisé [4], donné par l'expression suivante :

$$H(t)=\hbar\omega(t)a^{+}a+\frac{1}{2}\hbar\omega_0(t)\sigma_z+\hbar\Omega_0(t)\left[a^{+}\sigma_{+}e^{2i\Gamma(t)}+a\sigma_{-}e^{-2i\Gamma(t)}\right] \tag{3.1}$$

On voie que l'hamiltonien de JCM à trois composantes qui sont :

$$\begin{aligned}H_0(t)&=\hbar\omega(t)a^{+}a+\frac{1}{2}\hbar\omega_0(t)\sigma_z\\ H_{\text{int}}(t)&=\hbar\Omega_0(t)\left[a^{+}\sigma_{+}e^{2i\Gamma(t)}+a\sigma_{-}e^{-2i\Gamma(t)}\right]\end{aligned} \tag{3.2}$$

Où $\omega(t)$ est la fréquence du mode du champ électromagnétique couplé à l'atome, $\omega_0(t)$ est la fréquence de transition atomique, $\Omega_0(t)$ est la constante de couplage, a et a^{+} sont les opérateurs de création et d'annihilation des photons du champ, les matrices $\{\sigma_{+},\sigma_{-},\sigma_z\}$ sont les matrices de Pauli standards qui décrivent le système à deux niveaux qui satisfaire les relations de commutation suivantes : $[\sigma_z,\sigma_{\pm}]=\pm\sigma_{\pm}$ et $[\sigma_{+},\sigma_{-}]=\sigma_z$, on pose : $\hbar=1$

Afin d'étudier le mouvement quantique de notre système nous devons résoudre l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=H|\psi(t)\rangle \tag{3.3}$$

Parce que l'Hamiltonien est dépendant du temps, il est nécessaire de simplifier cette équation afin de la résoudre. Pour cela .Nous allons présenter ici deux approches de résolutions qui consistent à procéder d'abord par des transformations unitaires adéquates pour transformer le problème en un autres problème plus simple, ensuite la méthode des invariants.

3.2.1 La transformation unitaire

Le but est d'utiliser une transformation unitaire appropriée de telle sorte à passer de l'Hamiltonien (3.1) à un autre hamiltonien plus simple à résoudre. Pour ce faire, considérons la transformation unitaire définie par :

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\hat{\psi}(t)\rangle \tag{3.4}$$

Avec :

$$U(t) = e^{i\mu(t)\sigma_z} \tag{3.5}$$

La nouvelle fonction $|\hat{\psi}(t)\rangle$ satisfait donc l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\hat{\psi}(t)\rangle = \hat{H}(t)|\hat{\psi}(t)\rangle \tag{3.6}$$

Avec :

$$\hat{H}(t) = U^+(t)H(t)U(t) - i\hbar U^+(t)\frac{\partial}{\partial t}U(t) \tag{3.7}$$

En utilisant les identités suivantes :

$$\begin{aligned} U^+(t)\sigma_+U(t) &= \sigma_+e^{-i\mu(t)} \\ U^+(t)\sigma_-U(t) &= \sigma_-e^{i\mu(t)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

On obtient :

$$\hat{H}(t) = \omega(t)a^+a + \left[\frac{1}{2}\omega_0(t) + \dot{\mu}\right]\sigma_z + \Omega_0(t)\left[a^+\sigma_+e^{-i\mu}e^{2i\Gamma(t)} + a\sigma_-e^{i\mu}e^{-2i\Gamma(t)}\right] \tag{3.9}$$

Pour que $\hat{H}(t)$ ayant la forme la plus simple possible, il convient de fixer :

$$\mu(t) = 2\Gamma(t) \quad et \quad \dot{\mu}(t) = \dot{\Gamma}(t) \tag{3.10}$$

Et par conséquent $\hat{H}(t)$ se réduit à la forme simple :

$$\hat{H}(t) = \omega(t)a^+a + \left[\frac{1}{2}\omega_0(t) + \dot{\Gamma}(t)\right]\sigma_z + \Omega_0(t)\left[a^+\sigma_+ + a\sigma_-\right] \tag{3.11}$$

Pour gérer ce hamiltonien dans une formule algébrique, nous introduisons des générateurs SU(2) de la forme :

$$\Sigma_1 = \frac{i}{2\sqrt{\Delta}}\left(a^+\sigma_+ - a\sigma_-\right), \tag{3.12}$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left(a^+\sigma_+ + a\sigma_-\right) \tag{3.13}$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{2}\sigma_z \tag{3.14}$$

Avec :

$$\Delta = a^+a + \frac{1}{2}(I - \sigma_z) \tag{3.15}$$

Satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[\Sigma_1, \Sigma_2] = i\,\Sigma_3 \tag{3.16}$$

$$[\Sigma_2, \Sigma_3] = i\,\Sigma_1 \tag{3.17}$$

$$[\Sigma_3, \Sigma_1] = i\,\Sigma_2 \tag{3.18}$$

$$[\Delta, \Sigma_i] = 0 \;, i = 1.2{,}3 \tag{3.19}$$

et par conséquent ils forment une algèbre de Lie fermée.

Alors, l'hamiltonien $\hat{H}(t)$ transformé est représenté comme une combinaison linéaire des opérateurs Σ_i, tel que :

$$\hat{H}(t) = \omega(t)\Delta + 2\Omega_0(t)\sqrt{\Delta}\,\Sigma_2 + \{[\omega_0(t) + \omega(t)] + 2\dot{\Gamma}(t)\}\Sigma_3 - \frac{\omega(t)}{2} \tag{3.20}$$

Il est facile de trouver que :

$$[\Delta, I(t)] = 0 \tag{3.21}$$

Cela signifie que l'opérateur Δ a les mêmes vecteurs propres que l'operateur invariant $I(t)$

Donc on peut remplacer (2.25) dans (3.3), on obtient l'opérateur hamiltonien :

$$\hat{H}(t) = \omega(t)n + 2\Omega_0(t)\sqrt{n}\,\Sigma_2 + \{[\omega_0(t) + \omega(t)] + 2\dot{\Gamma}(t)\}\Sigma_3 - \frac{\omega(t)}{2} \tag{3.22}$$

Avec les vecteurs et les valeurs propres de Δ sont :

$$\Delta\begin{pmatrix} |n\rangle \\ |n-1\rangle \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} |n\rangle \\ |n-1\rangle \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Ou $n \in \mathrm{N}$

3.2.2 L'operateur invariant

Puisque $\hat{H}(t)$ est une combinaison linéaire de $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$, on peut donc, selon la théorie présentée dans le chapitre 2, construire un opérateur invariant sous la forme :

$$I(t) = \alpha(t)\Sigma_1 + \beta(t)\Sigma_2 + \gamma(t)\Sigma_3 \tag{3.24}$$

où les fonctions $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ sont des fonctions réelles du temps qui seront choisies de telle sorte à satisfaire l'équation de l'invariant :

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = i[I(t), H(t)] \tag{3.25}$$

En tenant compte de les relations de commutation (3.16-3.19), il vient que :

$$i[I, H] = i\begin{Bmatrix} \left[\{[\omega_0(t) + \omega(t)] + 2\dot{\Gamma}(t)\} i\beta(t) - 2i\sqrt{n}\Omega_0(t)\gamma(t)\right]\Sigma_1 + \left[-i\{[\omega_0(t) + \omega(t)] + 2\dot{\Gamma}(t)\}\right]\Sigma_2 + \\ \left[2i\sqrt{n}\Omega_0(t)\gamma(t)\right]\Sigma_3 \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

Et par dérivation (3.24) par rapport à t nous avons encore :

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \dot{\alpha}(t)\Sigma_1 + \dot{\beta}(t)\Sigma_2 + \dot{\gamma}(t)\Sigma_3 \tag{3.27}$$

En insérant les deux équations (3.26) et (3.27) dans (3.25) et identifiant les termes semblables entre les deux membres, on obtient le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\dot{\alpha}(t) = -\{\hbar[\omega_0(t) + \omega(t)] + 2\dot{\Gamma}(t)\}\beta(t) + 2\sqrt{n}\hbar\Omega_0(t)\gamma(t) \tag{3.28a}$$

$$\dot{\beta}(t) = \{\hbar[\omega_0(t) + \omega(t)] + 2\dot{\Gamma}(t)\}\alpha(t) \tag{3.28b}$$

$$\dot{\gamma}(t) = -2\sqrt{n}\hbar\Omega_0(t)\alpha(t) \tag{3.28c}$$

Nous présentons maintenant de nouveaux opérateurs tell que :

$$\Sigma_x = \Sigma_1 + i\,\Sigma_2\,. \tag{3.29}$$

$$\Sigma_y = \Sigma_1 - i\,\Sigma_2 \tag{3.30}$$

$$\Sigma_z = \Sigma_3 \tag{3.31}$$

Satisfont les relations de commutation suivantes :

$$\left[\Sigma_x, \Sigma_y\right] = 2\,\Sigma_z \tag{3.32}$$

$$\left[\Sigma_z, \Sigma_{x,y}\right] = \pm \Sigma_{x,y} \tag{3.33}$$

L'expression de I(t) sera donnée par :

$$I(t) = A(t)\Sigma_x + A^*(t)\Sigma_y + \gamma(t)\Sigma_z \tag{3.34}$$

Avec :

$$A(t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(t) - i\beta(t)\right] = ke^{i\theta}, \tag{3.35}$$

$$A^*(t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(t) + i\beta(t)\right] = ke^{-i\theta} \tag{3.36}$$

Avec :

$$k = \frac{1}{2}\left[\alpha^2 + \beta^2\right] \tag{3.37}$$

$$\theta = \arctan\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \tag{3.38}$$

3.2.3 Valeurs propres et fonctions propres de l'invariant

On cherche les états propres de $I(t)$ correspondant à des valeurs propres réelles et indépendantes du temps :

$$I(t)|\lambda, t\rangle = \lambda|\lambda, t\rangle \tag{3.39}$$

Pour accomplir ce but, procédons par une transformation unitaire dont le but est de réduire l'équation (3.39) en une nouvelle équation complètement indépendante du temps. Considérons donc la transformation unitaire définie par :

$$V(t) = e^{\frac{c(t)}{2}\left[\Sigma_x e^{-i\theta(t)} - \Sigma_y e^{i\theta(t)}\right]} \tag{3.40}$$

Avec : $c = \arctan\frac{2k}{\gamma}$

En posant :

$$|\lambda, t\rangle = V(t)|\bar{\lambda}, t\rangle \tag{3.41}$$

En reportant (3.41) dans (3.39), il vient que :

$$\widehat{I}(t)\left|\bar{\lambda},t\right\rangle=\lambda\left|\bar{\lambda},t\right\rangle \tag{3.42}$$

Avec :

$$\widehat{I}(t)=V^{-1}(t)I(t)V(t) \tag{3.43}$$

On vérifie aisément que les transformées des opérateurs Σ_x , Σ_y et Σ_z sont données par :

$$V^{-1}(t)\Sigma_x V(t)=\Sigma_x \cos^2\frac{c}{2}-\Sigma_y e^{2ia}\sin^2\frac{c}{2}-\Sigma_z e^{ia}\sin c, \tag{3.44}$$

$$V^{-1}(t)\Sigma_y V(t)=\Sigma_y \cos^2\frac{c}{2}-\Sigma_x e^{-2ia}\sin^2\frac{c}{2}-\Sigma_z e^{-ia}\sin c, \tag{3.45}$$

$$V^{-1}(t)\Sigma_z V(t)=\Sigma_z \cos c+\frac{1}{2}\left(\Sigma_x e^{-ia}+\Sigma_y e^{ia}\right), \tag{3.46}$$

Ainsi, l'opérateur $\widehat{I}(t)$ sera donné par l'expression :

$$\widehat{I}(t)=\sigma_z \tag{3.47}$$

Par conséquent, les fonctions propres de l'opérateur σ_z correspondant aux valeurs propres[6]:

$\lambda_1=1 \quad et \quad \lambda_2=-1$ Sont donnes par : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Ainsi, par considérant les fonctions propres de l'opérateur Δ, on voit que les fonctions propres normalisées correspondantes de Ī(t) sont donnés par :

$$\lambda_1=1 \;,\; \left|\bar{\lambda},t\right\rangle=\begin{pmatrix}|n\rangle\\0\end{pmatrix} \tag{3.48}$$

$$\lambda_2=-1 \;,\; \left|\bar{\lambda},t\right\rangle=\begin{pmatrix}0\\|n-1\rangle\end{pmatrix} \tag{3.49}$$

Enfin, en utilisant (3.48) et (3.49) compte tenu de (3.40), les fonctions propres de l'opérateur invariant I(t) peuvent être mises sous la forme :

$$\lambda_1 = 1 \;, \left|\lambda, t\right\rangle = V(t)\begin{pmatrix} |n\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

$$\lambda_2 = -1 \; \left|\lambda, t\right\rangle = V(t)\begin{pmatrix} 0 \\ |n-1\rangle \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

3.2.4 Phases globales et solutions du système

Les phases globales peuvent être déterminées comme précédemment à partir de la relation qui s'écrit ici comme :

$$\hbar\dot{\mu}_\lambda(t)\left|\bar{\lambda}, t\right\rangle = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(t)\right)\left|\bar{\lambda}, t\right\rangle \tag{3.52}$$

Ou encore sous la forme :

$$\hbar\dot{\mu}_\lambda(t)\left|\lambda, t\right\rangle = V^+(t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(t)\right)V(t)\left|\lambda, t\right\rangle \tag{3.53}$$

On obtient finalement :

$$\mu_n(t) = -i\int_0^t \left[\sqrt{n}\Omega_0(\tau)4\lambda(\tau)\gamma(\tau) - \left\{\hbar\left[\omega_0(t) + \omega(t)\right] + 2\dot{\Gamma}(t)\right\}\gamma(\tau) + n\omega(\tau) - \dot{\theta}(\tau)c(\tau)\sin c(\tau)\right]d\tau \tag{3.54}$$

Pour : $\lambda_1 = 1$ les solutions $\psi(t)$ sont données par :

$$\left|\psi_n(t)\right\rangle = e^{\int_0^t \left[\sqrt{n}\Omega_0(\tau)4k(\tau)\gamma(\tau) - \left\{\hbar\left[\omega_0(t)+\omega(t)\right]+2\dot{\Gamma}(t)\right\}\gamma(\tau)+n\omega(\tau)-\dot{\theta}(\tau)c(\tau)\sin c(\tau)\right]d\tau} U(t)V(t)\begin{pmatrix} |n\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

Pour : $\lambda_1 = -1$

$$\left|\psi_n(t)\right\rangle = e^{\int_0^t \left[\sqrt{n}g(\tau)4\lambda(\tau)k(\tau)-2\rho(\tau)\gamma(\tau)+n\omega(\tau)-\dot{a}(\tau)c(\tau)\sin c(\tau)\right]d\tau} U(t)V(t)\begin{pmatrix} 0 \\ |n-1\rangle \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

Conclusion générale

Nous avons présenté dans cette mémoire un travail théorique qui consiste en la résolution de l'équation de Schrödinger pour un problème de mécanique quantique non stationnaire qui est bien connu dans l'optique quantique « Le Modèle de Jaynes-Cummings ». En effet, notre démarche consiste à utiliser la méthode des invariants conjointement avec les transformations unitaires. Par conséquent, dans toutes les étapes de calcul le problème est abordé toujours du point de vue quantique.

Dans le problème de Jaynes-Cummings dépendant du temps,nous avons utilisé la méthode des transformations unitaires pour ramener le problème à un problème simple à résoudre ensuite nous avons construire une algèbre de lie de l'operateur Hamiltonien , en utilisant une base composé par des générateurs de l'algèbre de SU(2) ce qui nous a conduit à un nouveau Hamiltonien simple et par la méthode des invariants de Lewis-Reisenfeld nous avons montré qu'il est possible de définir un opérateur invariant composé par les mêmes générateurs de l'algèbre de SU(2) ensuite, a l'aide d'une transformation unitaire approprié, nous avons transformé l'invariant I(t) a un autre operateur indépendant du temps dont ces valeurs propres sont ($\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$). Finalement nous avons systématiquement résolu l'équation aux valeurs propres correspondante et donc les solutions de l'équation de Schrödinger.

Bibliographie

1] C.C.Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Mécanique quantique (Collection Enseignement des sciences. Hermann, éditeur des sciences et des arts, Paris, 1996).

[2] S .Menouar, Thèse de Doctorat en sciences, (université de Sétif, 2009).

[3] H.R.Lewis and W.Riesenfeld. J. Mat Phys.10 1458(1969).

[4] G. Yu, Z. Xian, Y. Z. Yong, J.B. Hao, and X.S. Jin, lnt. J. Theor. Phys. 47(9), (2008).

[5] L. Landau, E.Lifchitz, Mécanique, traduit du russe par Claude Ligny, MIR, Moscou, quatrième édition complétée 1982, réimpression 1988 (1ére édition 1964).

[6] E. Schrödinger, "The non-relativistic equation of the de Broglie waves," Ann. Physis 79(1926)361-376.

[7] N.Chaabi, mémoire de Magister (université de Sétif, 2007).

[8] M. Wagner, Unitary transformations in solid-state physics, (Elsevier science Publisher, New _York, 1986).

[9]Y. Saadi, mémoire de Magister (université de Sétif, 2007).

[10] S. S. Mizrahi, Phys. Lett A 138. 465 (1989).

[11] Arno Rauschenbeutel, thèse de doctorat de Paris VI, Atome et cavité : préparation et manipulation d'état intriqués complexe (2001).

Résumé :

Dans ce travail, nous avons résolu l'équation de Schrödinger pour le modèle de Jaynes Cummings dépendant du temps. Nous avons appliqué la méthode des invariants conjointement avec les transformations unitaires pour réduire le problème à un problème simple à résoudre. Nous avons obtenu les valeurs propres et les vecteurs de l'invariant et la forme finale des fonctions d'onde.
Mots clés : Jaynes Cummings dépendant du temps, Schrödinger, La théorie des invariant

Abstract :

In this work, we solved the Schrödinger equation for the time dependent Jaynes Cummings model. We applied the method of invariants together with the unitary transformations
to reduce the problem to a simple problem to solve. We obtained the eigenvalues and vectors of the invariant and the final shape of the wave functions.
Keywords: Jaynes Cummings dependent on time, Schrödinger, the theory of invariant

ملخص

في هذا العمل، قمنا بحل معادلة شرود ينجر لنموذج جاينس كمين المتعلقة بالزمن، استعملنا طريقة الثوابت جنبا إلى جنب مع طريقة التحولات الأحادية من اجل جعل المعادلة سهلة للحل. حصلنا عل قيم الذاتية للثابت وفي الأخير شكل دالة الموجة لنهائي.
.الكلمات المفتاحية: نموذج جانس كامينغ المتعلق بالزمن- شرودينغر- طريقة الثبات.

.