Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Lounici Zineb & Zeghloul Asma

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse mathématique et applications

Thème

La solution de l'équation de Yang-Baxter

Soutenu publiquement le 05 juillet 2021 devant le jury composé de

Dr-Adimi Hadjer	Président
Dr-Chebel Zoheir	Encadreur
Dr-Azra Souad	Examinateur

Promotion 2020/2021

Remerciements

Si nous péchons, c'est de nous-mêmes et de Satan, et si nous avons tort, on doit reconnaitre notre tore. Donc, Nous remercions ALLAH tout puissant de nous avoir donné la foie, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin des personnes braves et nous sommes tombées dans de bonnes mains.

Nous remercions Dr-Zoheir Chebel pour son aide, ses conseils et ses pensées ;nous vous accorderons ce crédit dans toutes notre vie.

Il n'était pas seulement un Encadreur, mais il a été notre professeur pendent des années, et il était notre monteur et notre père enseignant, merci pour ses conseils qui nous ont été d'une grande utilité et qui nous a appris à programmer LaTeX, et également le prof TOUWATI.

Nous témoignons toute notre gratitude à tout les membres du département de Mathématiques et notamment aux enseignants (Dr-Ben said, Dr-Zaghdan, Dr-Addoun, ...) qui ont contribué à notre formation et qui nous ont permis de travailler dans de bonnes conditions.

Dédicace

- ma chère grand-mère, que dieu ait pitié d'elle ... **SAADA**
- A mes chers parents,**Zeghloul youcef** et **Hamraoui wahiba** pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.
- A mes chères sœurs :**Sarah** et **Chaima** pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.
- mon petit frère :**El-Hocein** que je l'aime trop.
- A mes grands parents : **Hamraoui Belkacem** et **Malika**
- A mon âme sœur, mon compagnon, mon bonheur et mon sourire : ⋆ **RAZIKA** ⋆
- A toute mes oncles et mes tantes (**Hicham et sa femme Nadia, Rahim, Amel, Leila, Tasaadit, Aicha**
- A mes cousines spéciaux : **(Messaouda, Yamina, Fatima el zohra ;)**
- A ma cousine : **marwa, Iman, Malak**
- Toute la famille MEBAREK MANSOURI **(Amel,Youssra,Aya,houda,Hadil,Sabrina)**
- Ma amie SARA et ses deux filles jumelles : RAHAF et ASIL.
- A toute mes amies : **Iman, Youssra, Fatima, Kahina**
- Sans oublier ma chère : **BADIET EL DHJAMEL NEDJMA**
  pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.
  Que ce travail soit accomplissement de vos vœux tant allégués,
  et le fuit de votre soutien infaillible,
  Merci d'être toujours là pour moi.
  En fin de compte, je ne peux pas terminer cette dédicace sans
  remercier ma collègue **Zineb**, le travaille avec elle est magnifique donc merci beaucoup

De Asma

Dédicace

A mes chers parents,

♡ **Ali lounici** ♡ ***et*** ♡ **Abi Messouda** ♡

pour tous leurs sacrifices,

leur amour, leur tendresse,

leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mes chères sœurs :**Saliha, Marwa et safa**

pour leurs encouragements permanents,

et leur soutien moral.
A mes chers frères :**Abdraouf et Djaafar**

pour leur appui et leur encouragement.

A toute ma famille

A mon âme sœur, mon compagnon, mon bonheur et mon sourire :
♡ **Khababa Rayane** ♡

A toute mes amies : **Amani, Rania, Meriem, Sofia, Houda**

pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués,

et le fuit de votre soutien infaillible,

Merci d'être toujours là pour moi.

En fin de compte, je ne peux pas terminer cette dédicace sans remercier ma collègue Asma, le travaille avec elle est magnifique donc merci beaucoup

De Zineb

Résumé

Dans ce mémoire, nous discutons et caractérisons plusieurs ensembles des solutions théories de l'équation de Yang-Baxter obtenues par les treillis asymétrique,
c'est une autre approche autre que les espaces vectoriels liée à la recherche de la solution de l'équation de Yang-Baxter, de telles solutions sont dégénérées en général. Ces résultats ont été tirés de l'article•

Abstract

In this memory we discuss and characterize several set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation obtained using skew lattices, an algebraic structure that has not yet been related to the Yang-Baxter equation. Such solutions are degenerate in general, and thus different from solutions obtained from braces and other algebraic structures.

Our main result concerns a description of a set-theoretic solution of the Yang-Baxter equation, obtained from an arbitrary skew lattice. We also provide a construction of a cancellative and distributive skew lattice on a given family of pairwise disjoint sets.

Table des matières

Introduction

L'équation de Yang-Baxter provient des articles de Yang et Baxter sur la mécanique quantique et statistique, et la recherche de solutions a attiré de nombreuses études à la fois en physique mathématique et en mathématiques pures. Comme l'étude des solutions arbitraires est complexe, Drinfeld a proposé en 1992 de se concentrer sur la classe des ensemble des solutions. Le but est de trouver des ensembles qui permettent de trouver des applications qui sont solutions à l'équation de Yang-Baxter.

Les solutions de l'équation de Yang-Baxter jouent un rôle essentiel dans la construction des algèbres de Hopf semi-simples et fournissent des exemples d'invariants de coloration dans la théorie des nœuds. Plus récemment, la solution de Yang-Baxter est apparue dans la théorie de l'informatique quantique, où les solutions de l'équation de Yang-Baxter fournissent des portes dites universelles. L'un des principaux problèmes ouverts est de trouver toutes les solutions de l'équation de Yang-Baxter.

Parmi les solutions connues en théorie ensembliste de l'équation de Yang-Baxter est le Twist, donné par : (X, r) où X est un ensemble non vide définie par : $r : X \times X \longrightarrow X \times X ; r(x, y) \longmapsto (y, x)$ cette application satisfait à la condition suivante :

$$(r \times id) \circ (id \times r) \circ (r \times id) = (id \times r) \circ (r \times id) \circ (id \times r).$$

Dans cette mémoire on va chercher plusieurs solution de l'équation de Yang-Baxter, En utilisant les treillis asymétrique.
En algèbre abstraite, un treillis asymétrique est une structure algébrique qui est une généralisation non commutative d'un treillis, alors que le terme treillis asymétrique peut être utilisé pour désigner toute généralisation non commutative d'un treillis, ceci est depuis 1989. Un treillis asymétrique est un ensemble S muni de deux opérations binaires associatives, idempotentes $\wedge$ et $\vee$, qui valident la condition d'absorption suivante :

$$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y),$$

$$(x \wedge y) \vee y = y = (x \vee y) \wedge y.$$

La mémoire est organisée comme suit :

- **Dans le premier chapitre**, nous rappelons quelques notions de base, ensembles des parties d'un ensemble, les relations(relation binaire, relation d'ordre ...), Maximum, Minimum, Majorants, Minorants, Borne supérieure, Borne inférieure, lemme de Zorn, Diagramme de Hasse et L'axiome du choix.

- **Dans le deuxième chapitre**, nous présentons des généralités sur les treillis, qu'est-ce que un treillis, une demi treillis, un treillis distributive, morphisme et isomorphisme de treillis... et nous présentons aussi, c'est quoi une algèbre de Boole ? et ses propriétés.

- **Le troisième chapitre** contient quelques préliminaires sur les treillis asymétriques tirés de l'article •. Nous incluons des connaissances de base sur les treillis asymétriques qui sont nécessaires pour notre étude. En essayant de présenter des solutions qui figurent dans l'article [**?**], en utilisant des treillis asymétriques et comme déjà fait, en proposant une construction d'un treillis asymétrique avec une famille donnée d'ensembles disjoints deux à deux.

- **Dans le dernier chapitre** contient le résultat principal de cet mémoire qui figure dans l'article •, à savoir, la description d'une solution théorique idempotente de l'équation de Yang-Baxter associée à un treillis arbitraire asymétrique.
  Comme l'auteur de l'article propose des solutions distributives fortes de l'équation de Yang-Baxter, ceci est décrit dans notre mémoire. Ce sont des treillis asymétriques $(S, \wedge, \vee)$ tels que l'application $r : S \times S \longrightarrow S \times S; (x, y) \longmapsto (x \wedge y, x \vee y)$ est une solution. Nous finissons comme l'auteur de l'article, par décrire les treillis fortement distributifs, et co-fortement distributifs qui sont toujours distributives , ainsi que les distributives de gauche, de droite et faiblement distributive.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Ensembles des parties d'un ensemble

Soit A un ensemble. Les sous ensembles de A forment un ensemble appelé ensembles des parties de A notée P(A).

Ainsi $E \in P(A)$ signifie que $E \subset A$.

L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.
Un ensemble constitué des ensembles est appelé une famille d'ensembles. Par exemple, une famille d'ensemble contenant des ensembles $A_1, A_2...$ est représenté par : $\{A_i/i \in I\}$ où i est un indice et I l'ensemble des indices.

1.2 Généralités sur les relations

Dans ce qui suit, E désigne un ensemble quelconque.

Définition 1.2.1. ***(Relation binaire)***
Une relation binaire définie sur E est une propriété que chaque couple (x, y) d'éléments de E est susceptible d'avoir ou non.

Si $\mathcal{R}$ désigne une relation binaire définie sur E on note $x\mathcal{R}y$ pour signifier que x et y sont en relation par $\mathcal{R}$.

Définition 1.2.2. ***(Relation d'ordre)***
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur E. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsque :

- *$\mathcal{R}$ est réflexive, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E : x\mathcal{R}x$$

- *$\mathcal{R}$ est transitive, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y, z \in E : x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z \Rightarrow xRz$$

- *$\mathcal{R}$ est antisymétrique, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

Définition 1.2.3. ***(Ordre total, Ordre partiel)***
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre total sur E lorsque deux éléments de E sont toujours comparables pour $\mathcal{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y \quad ou \quad yRx$$

Dans le contraire, on parle d'ordre partiel.

Exemple 1. • $\leqslant$ *définit un ordre total sur* $\mathbb{R}$*(et sur* $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$*...)*
- $|$ *définit un ordre partiel sur* $\mathbb{N}$
- $\subset$ *définit un ordre partiel sur* $P(\Omega)$

1.3 Vocabulaire dans un ensemble ordonné

Dans tout ce paragraphe, $\leqslant$ désigne une relation d'ordre quelconque sur E.

1.3.1 Maximum, Minimum

Soit A une partie de E. S'il existe un élément a de A tel que : $\forall x \in A : x \leqslant a$

alors il n'en existe qu'un seul, et on l'appelle le maximum de A(ou le plus grand élément de A), noté **max(A)**.

- La Définition est analogue pour le minimum(ou plus petit élément).

- Il n'y a pas nécessairement d'existence.

Exemple 2. *- Pour la relation usuelle dans* $\mathbb{R}$*,* $]0,1[$ *et* $\mathbb{N}$ *n'ont pas de maximum.*
- Pour la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$*,* $\{1, 2, ..., 10\}$ *non plus.*

1.3.2 Majorants, Minorants

Définition 1.3.1. *Soit A une partie de E et soit $z \in E$ on dit que Z. On dit que zest un majorant de A dans E lorsque :*

$$\forall x \in A : x \leqslant z$$

-La définition est analogue pour le minorant.

-Il n'y a pas toujours d'existence, ni d'unicité.

-D'ailleurs, si z majore A, alors tout élément z' de E tel que $z \leqslant z'$ majore aussi A.

1.3.3 Borne supérieure, Borne inférieure

Définition 1.3.2. *Soit A une partie de E. Si l'ensemble des majorants d'une partie A admet un plus petit élément M on dit que M est la borne supérieure de A et on note* $\boldsymbol{M = sup(A)}$*. Si l'ensemble des minorants d'une partie A de E admet un plus grand élément m, on dit que m est la borne inférieure de A et on note* $\boldsymbol{m = inf(A)}$*.*

1.3.4 Lemme de Zorn

est un théorème de la théorie des ensembles qui affirme que si un ensemble ordonné est tel que toute chaîne (sous-ensemble totalement ordonné) possède un majorant, alors il possède un élément maximal.

1.4 Diagramme de Hasse

Définition 1.4.1. *Les ordres partiels peuvent se présenter par un diagramme de Hasse en appliquant la règle suivante :*

- *Les éléments sont représentés par des sommets.*
- *a et b sont joints par une arrêt si et seulement si :*

$$a \leqslant b \quad et \quad \nexists z \in A, a \leqslant z \quad et \quad z \leqslant b.$$

Exemple 3. *Soit* $E = \{e_1, e_2, e_3\}$

On fait le diagramme de Hasse de $(P(E), \subset)$ *:*

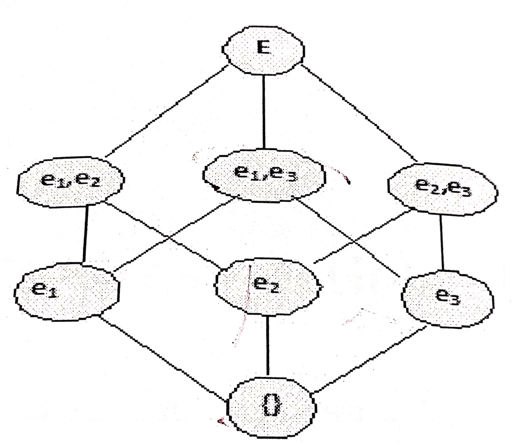

FIGURE 1.1 – Diagramme de Hasse de l'exemple

- $\forall X \in P(E)$, $\emptyset \subset X$ *donc* $\emptyset$ *est le minimum de* $P(E)$.
- $\forall X \in P(E)$, $X \subset E$ *donc* X *est le maximum de P(E).*
D'où le diagramme de Hasse.

1.5 L'axiome du choix

Définition 1.5.1. *L'axiome du choix peut s'énoncer comme suit :*

Pour tout ensemble X *d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur* X*, appelée fonction de choix, qui à chaque ensemble* A *appartenant à* X *associe un élément de cet ensemble* A*.*

Ce qui s'écrit formellement :

$$\forall X \left[\varnothing \notin X \Longrightarrow \exists f : X \to \bigcup X \; \forall A \in X \; (f(A) \in A)\right]$$

Autres formulation :

On trouve d'autres formulations de l'axiome du choix, très proches de la précédente, dont les suivantes :

- Pour tout ensemble E, il existe une fonction qui à chaque partie non vide de E associe un élément de cette partie.
- Pour toute relation d'équivalence R, il existe un système de représentants des classes de R.
- Toute surjection possède une section.
- Le produit $\prod_{i\in I} X_i$ d'une famille $(Xi)_{i\in I}$ d'ensembles non vides est non vide.

Chapitre 2

Généralité sur les treillis

2.1 Treillis

2.1.1 Définition d'un treillis

Définition 2.1.1. ***(Demi-treillis)***

Un ensemble ordonné X est :

- Un inf-demi-treillis si toute paire (x,y) de ses éléments admet un infimum $x \wedge y$.

- Un sup-demi-treillis si toute paire de ses éléments admet un supermum $x \vee y$.

- Un treillis si toute paire de ses éléments admet un supermum et un infimum donc s'il est à la fois inf- et sup-demi treillis.

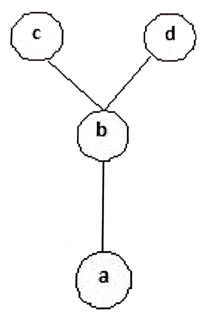

FIGURE 2.1 – Inf-demi-treillis

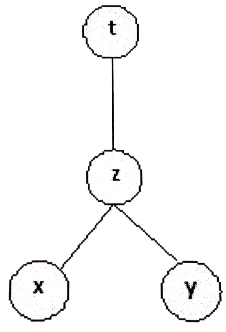

FIGURE 2.2 – Sup-demi-treillis

Un treillis sera souvent noté $T = (X, \leq, \wedge, \vee)$.

Définition 2.1.2. ***(Treillis)***

Un treillis est un ensemble ordonné $(T, \leqslant)$ dans lequel tout pair d'éléments (x, y) admet une borne supérieure noté $x \vee y$ et une borne inférieure noté $x \wedge y$:
$\forall x, y \in T \ sup\{x, y\}$ *et* $inf\{x, y\}$ *existent.*

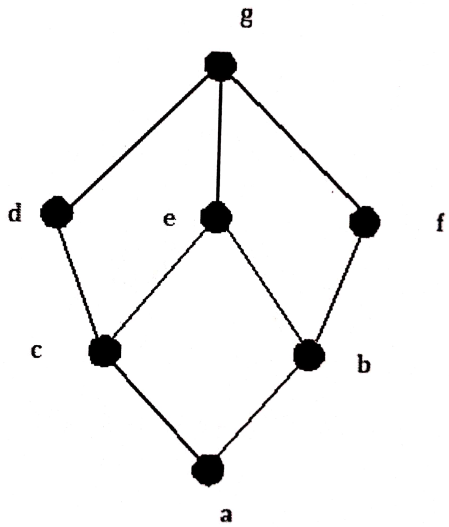

Figure 2.3 – Treillis

Exemple 4.
- *Soit $(P(E), \subseteq)$ l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble E. L'ensemble partiellement ordonné $(P(E), \subseteq)$ forme un treillis.*
  -Pour tous $A, B \in P(E)$, $inf(A, B) = A \cap B$ et $sup(A, B) = A \cup B$
  -L'ensemble vide est contenu dans tous les éléments de $P(E)$, et ils sont tous contenu dans E.
- *L'ensemble des entiers naturels différente zéro muni de relation "divise" forme un treillis, où la borne supérieure est* ***PPCM*** *et la borne inférieur est* ***PGCD****.*
  *C'est un treillis borné (****l'élément minimum est 1, et l'élément maximum est 0****)*

Remarque 1. *Soit X un ensemble non vide, alors $P(X)$ est un treillis.*

Proposition 1. *Si $(T, \leqslant)$ un treillis fini, alors T admet un plus grand et un plus petit élément.*

Proposition 2. *[1]*

Dans un treillis quelconque $(T, \leqslant)$: $\forall x, y \in T$

- $x \leqslant y \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x \wedge y \\ y = x \vee y \end{cases}$
- *Idempotence :*
  $x \vee x = x$ *et* $x \wedge x = x$
- *Commutativité :*
  $x \vee y = y \vee x$ *et* $x \wedge y = y \wedge x$
- *L'associativité :*
  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *et* $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$
- *L'absorption :*
  $x \vee (x \wedge y) = x$ *et* $x \wedge (x \vee y) = x.$

Définition 2.1.3. ***(Treillis fermé)***

Un treillis T est dit fermé s'il possède un plus petit élément noté (0) et un plus grande éléments noté (1).

Remarque 2. - *Chaque treillis finie est fermé, le contraire n'est pas vrai.* - $(P(\mathbb{R}), \subseteq)$ *n'est pas finie mais fermé (0=$\varnothing$, 1=$\mathbb{R}$).*

Exemple 5.
- *Le treillis* $D(30) = \{$*L'ensemble de diviseur de 30*$\}$ *est fermé (0) = 1 et (1) = 30 .*
- $(P(E), \subseteq)$ *est fermé* $(0) = \phi$ *et* $(1) = E$.

2.2 Morphismes et isomorphisme de treillis

Définition 2.2.1. *Soient E et T deux treillis f est une application de E dans T. On dit que f est un morphisme de treillis si :*

$$\forall x, y \in E \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \end{cases}$$

Définition 2.2.2. *Soient E et T deux treillis et la fonction $f : E \to T$. On dit que f est un isomorphisme de treillis si f est un morphisme de treillis bijectif et si son inverse est aussi un morphisme de treillis.*

Théorème 2.2.1. *Si un ensemble T est muni de deux opérations notées $\perp$ et $*$ qui ont les propriétés suivantes :*
- $x \perp y = y \perp x$ *et* $x * y = y * x$
- $x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z$ *et* $x * (y * z) = (x * y) * z$
- $x \perp x = x$ *et* $x * x = x$
- $x \perp (x * y) = x$ *et* $x \perp (x * y) = x$

Alors, il existe sur T une seule relation d'ordre qui fait de celui ci un treillis dans lequel les opérations ($\perp$ et $*$) donnent respectivement le plus petit des majorants (ppM) et le plus grand des minorants (pGm).

2.3 Treillis remarquables

2.3.1 Treillis distributif

Définition 2.3.1. [2]

Un treillis T est distributif si $\forall x, y, z \in T$ on a :

(P1) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(P2) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

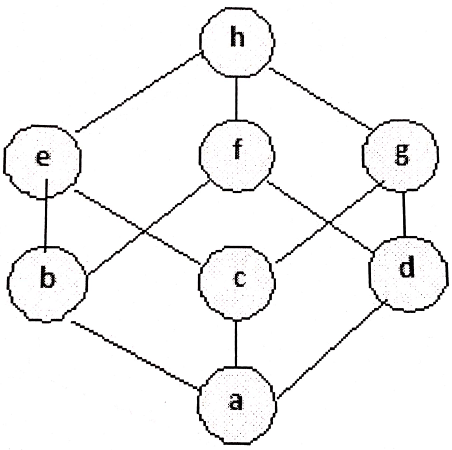

FIGURE 2.4 – Treillis distributif

Remarque 3. *Les conditions* $(P1)$ *et* $(P2)$ *sont équivalentes. En effet, supposons que* $(P1)$ *soit vérifiée, on peut écrire :*

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) =&((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z)\\ =&x \vee ((x \vee y) \wedge z) \qquad \textit{(loi d'absorption)}\\ =&x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)\\ =&x \vee (y \wedge z) \qquad \textit{(loi d'absorption)}\end{aligned}$$

et $(P2)$ *est aussi vérifiée.*

La réciproque, supposons que $(P2)$ *soit vérifiée, on peut écrire :*

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (x \wedge z) =&((x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z)\\ =&x \wedge ((x \wedge y) \vee z) \qquad \textit{(loi d'absorption)}\\ =&x \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)\\ =&x \wedge (y \vee z) \qquad \textit{(loi d'absorption)}\end{aligned}$$

Exemple 6. ***a)*** *Toute chaine* C *est un treillis distributif*
En effet, soient $x, y, z \in \mathbb{C}$,

$$min(x, max(y, z)) = max(min(x, y), min(x, z))(P_2).$$

b) *Considérons le treillis* $\mathbb{E} = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ *ordonné par divisibilité* $x \vee y = ppmc(x, y)$ *et* $x \wedge y = pgcd(x, y)$. *Ce treillis n'est pas distributif, car par exemple :* $2 \wedge (3 \vee 5)6 \neq (2 \wedge 3)_(2 \wedge 5)$. *En effet,* $2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 30 = 2$ *et* $(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 = 1$, *donc* $(\mathbb{E}, |)$ *n'est pas distributif.*

Théorème 2.3.1. *[3]*
Pour qu'un treillis E *soit distributif il faut et suffit qu'il vérifie :* $\forall x, y, z$,

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y.$$

Preuve :

$$((x \wedge z = y \wedge z \quad et \quad x \vee z = y \vee z) \Longrightarrow (x = y)).$$

$$\begin{aligned}x =&x \vee (x \wedge z)\\ =&x \vee (y \wedge z)\\ =&(x \vee y) \wedge (x \vee z)\\ =&(x \vee y) \wedge (y \vee z)\\ =&(x \wedge z) \vee y\\ =&(y \wedge z) \vee y\\ =&y.\end{aligned}$$

2.3.2 Treillis complimenté

Définition 2.3.2. *C'est un treillis fermé $\boldsymbol{T}$ tel que pour chaque $x \in \boldsymbol{T}$ il existe au moins*

$$x' \in T : \begin{cases} x \vee x' = 1 \\ x \wedge x' = 0 \end{cases} \text{ dit complément de } x.$$

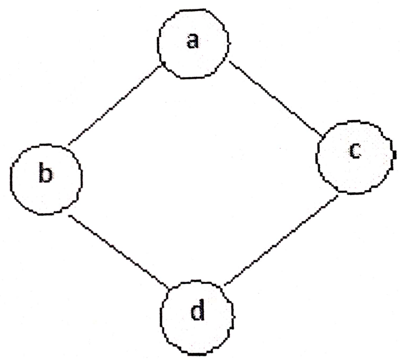

Figure 2.5 – Treillis complimenté

Remarque 4. *Dans un treillis distributif le complément s'il existe est unique.*
En effet $\left.\begin{array}{l} x \vee x' = x \vee x'' = 1 \\ x \wedge x' = x \wedge x'' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x' = x''.$

Exemple 7.
- *Tout treillis $(P(E), \subseteq)$ est complimenté, si $X \subseteq E$ son complément (unique) n'est autre que le complémentaire de X.*
- *$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ est complimenté.*

2.3.3 Treillis modulaires

Définition 2.3.3. *Un treillis E est dit un treillis modulaire s'il vérifie, $\forall x, y, z$ la condition : $x \leq y \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. (Une propriété plus faible que la distributivité).*

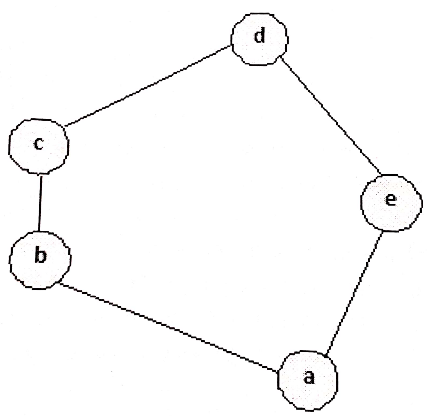

Figure 2.6 – Treillis modulaire

Remarque 5. *Tout treillis distributif est modulaire.*

2.3.4 Treillis de Boole

Définition 2.3.4. *[4]*
Un treillis de Boole est un treillis distributif fermé et complimenté.

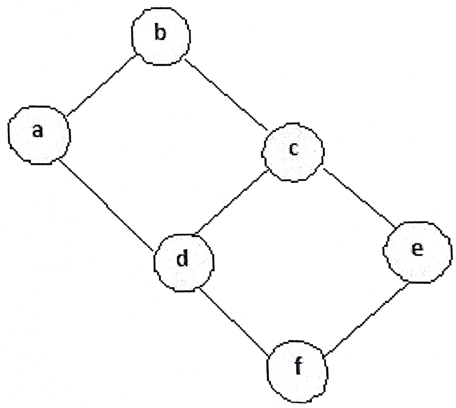

FIGURE 2.7 – Treillis de Boole

Exemple 8.
- $(P(E), \subset, \cup, \cap)$ *est un treillis de Boole.*
- *La chaine* $U = \{0; 1\}$ *est un treillis de Boole.*
- $(D(6), |) = \{1, 2, 3, 6\}$ *est un treillis de Boole.*

2.4 Filtres et idéaux dans un treillis

Définition 2.4.1. *(**Filtres**)*
Soit T un treillis, on appelle filtre toute partie non vide F de T :
(a) Si $x \in F$ et $x \leqslant y$ alors $y \in F$.
(b) Si $x \in F$ et $y \in F$ alors $x \bigwedge y \in F$.

Exemple 9. $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ $F_1 = \{2, 6, 10, 30\}$ *est un filtres et* $F_2 = \{2; 10; 30\}$ *n'est pas un filtre car* $2 \leqslant 6$ *et* $6 \notin 2F_2$.

Définition 2.4.2. *(**Ultrafiltre**)*
Un ultrafiltre est un filtre maximale pour l'ordre d'inclusion entre filtres propres.

Proposition 3. *Soit F un filtre propre, les deux assertions suivantes sont équivalent :*
1. *F est un ultrafiltre.*
2. *Pour tout $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \bigwedge y = 0$.*

Exemple 10. $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
(i) *Les filtres propres sont :* $\{2, 6, 10, 30\}; \{10, 30\}; \{6, 30\}; \{5, 10, 15, 30\}; \{15; 30\}; \{3; 6; 15; 30\}; \{30\}$
(ii) *Les ultrafiltres sont* $\{2, 6, 10, 30\}; \{5, 10, 15, 30\}; \{3, 6, 15, 30\}$ *on constate que tout les filtres propres sont inclus dans des ultrafiltres.*

Définition 2.4.3. *(**Idéal**)*
On appelle idéale d'un treillis E toute partie non vide I de E vérifiant :
a) *Si $x \in I$ et $x \geqslant y$ alors $y \in I$.*
b) *Si $x \in I$ et $y \in I$ alors $x \vee y \in I$.*
L'idéal I est dit propre si $I \neq T$, et impropre dans le cas contraire.

2.5 Algèbre de Boole

Définition 2.5.1. *Une algèbre de Boole est un treillis distributif fermé et complémenté.*

Exemple 11.
- *Le treillis* $(P(E), \subseteq)$ *est une algèbre de Boole.*
- $(D(6), |)$ *est une algèbre de Boole.*

Définition 2.5.2. *Soient* B_1 *et* B_2 *deux algèbres de Boole. On appelle morphisme d'algèbre de Boole de* B_1 *Dans* B_2 *toute fonction* $f : B_1 \longrightarrow B_2$ *telle que pour tout* $x, y \in B_1$ *on a :*
- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
- $f(0) = 0$.
- $f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$.

(Ces égalités impliquent également que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ *et* $f(1) = 1$*)*

Proposition 4. *Dans une algèbre de Boole on a :*

1. $\rceil 0 = 1,\ \rceil 1 = 0.$
2. $\rceil\rceil x = x.$
3. $\rceil(x \wedge y) = \rceil x \vee \rceil y \quad et \quad \rceil(x \vee y) = \rceil x \wedge \rceil y$ *(Lois de De Morgan).*

Preuve :

1.
$$\left.\begin{array}{l} 1 \vee 0 = 1 \\ 1 \wedge 0 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \rceil 0 = 1 \quad et \quad \rceil 1 = 0.$$

2.
$$\left.\begin{array}{l} \rceil x \wedge \rceil(\rceil x) = 0 \\ \rceil x \vee \rceil(\rceil x) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \rceil(\rceil x).$$

3. **a)** $(x \wedge y) \wedge (\rceil x \vee \rceil y) = (x \wedge y \wedge \rceil x) \vee (x \wedge y \wedge \rceil y) = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0$
$(x \wedge y) \vee (\rceil x \vee \rceil y) = (x \vee \rceil x \vee y) \wedge (y \vee \rceil x \vee \rceil y) = (\rceil y \vee 1) \wedge (\rceil x \vee 1) = 1 \wedge 1.$
Donc $\rceil(x \wedge y) = \rceil x \vee \rceil y$

b) $(x \vee y) \vee (\rceil x \vee \rceil y) = (x \vee y \vee \rceil x) \wedge (x \vee y \vee \rceil y) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1.$
$(x \vee y) \wedge (\rceil x \wedge \rceil y) = (x \wedge \rceil x \wedge y) \vee (y \wedge \rceil x \wedge \rceil y) = (\rceil y \wedge 0) \vee (\rceil x \wedge 0) = 0 \vee 0.$
Donc $\rceil(x \vee y) = \rceil x \wedge \rceil y$

Définition 2.5.3. *Soient* $x, y \in T$*, on définit la somme* $x + y$ *par :*
- $x + y = (x \wedge \rceil y) \vee (\rceil x \wedge y)$.
- $x + y = (\rceil x \vee \rceil y) \wedge (x \vee y)$.
- $\rceil(x + y) = (x \wedge y) \vee (\rceil x \wedge \rceil y)$.
- $\rceil(x + y) = (\rceil x \vee y) \wedge (x \vee \rceil y)$.

2.5.1 Propriétés des algèbres de Boole

- **Involution**
  Le complément du complément de x est x, c'est-à-dire :
$$\overline{\overline{x}} = x.$$

- **Formules de De Morgan**
$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$
$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

Preuve : Soit $u = x \vee y$ et $v = x \wedge y$: Pour montrer que $\overline{u} = v$ on va montrer que $u \wedge v = 0$ et que $u \vee v = 1$.

$$\begin{aligned} u \wedge v =& (x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) \\ =& (x \wedge (x\overline{x} \wedge \overline{y})) \vee (y \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y})) \\ =& ((x \wedge \overline{x}) \wedge \overline{y}) \vee ((y \wedge \overline{y}) \wedge \overline{x}) \\ =& (0 \wedge \overline{y}) \vee (0 \wedge \overline{x}) \\ =& 0 \vee 0 = 0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u \vee v =& (x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \\ =& (\overline{x} \vee (x \vee y) \wedge (\overline{y} \vee (x \vee y)) \\ =& ((\overline{x} \vee x) \vee y) \wedge ((\overline{y} \vee y) \vee x) \\ =& (1 \vee_y) \wedge (1 \vee x) \\ =& 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

La deuxième formule se démontre de la même façon, en posant :

$$u = x \wedge y \quad et \quad v = \overline{x} \vee \overline{y}$$

et en montrant que $u \wedge v = 0$ et $u \vee v = 1$.

Chapitre 3

Treillis asymétrique

3.1 Les treillis asymétriques

En algèbre, un treillis asymétrique est une structure algébrique qui est une généralisation non-commutative d'un treillis. Bien que le terme "skew lattice" puisse être utilisé pour désigner toute généralisation non-commutative d'un treillis, depuis 1989, il a été utilisé principalement de la manière suivante :

Définition 3.1.1. ***(Treillis asymétrique)***
Un treillis asymétrique est un ensemble S doté d'une paire de structures idempotentes et les opérations associatives $\wedge$ et $\vee$ qui satisfont aux lois d'absorption :

$$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y),$$

$$(x \wedge y) \vee y = y = (x \vee y) \wedge y.$$

Proposition 5. *[17] Les paires de dualités suivantes s'appliquent à tout treillis asymétrique :*

$$x \wedge y = x \quad si \quad x \vee y = y$$

$$x \wedge y = y \quad si \quad x \vee y = x$$

Définition 3.1.2. ***(Une bande)***
Est un semi-groupe d'idempotents.

Une bande est dite régulière si elle satisfait à l'identité $axaya = axya$.

Une liste complète des variétés de bandes peut être trouvée dans [21]. Leech [17] a prouvé qu'avec un treillis asymétrique$S$, les deux semi-groupes $(S, \wedge)$ et $(S, \vee)$ sont des bandes régulières, c'est-à-dire que les identités :

$$a \wedge x \wedge a \wedge y \wedge a = a \wedge x \wedge y \wedge a, \tag{3.1}$$

$$a \vee x \vee a \vee y \vee a = a \vee x \vee y \vee a, \tag{3.2}$$

sont toujours satisfaites.

3.1.1 Propriétés de base (Les relations de Green)

Les relations d'équivalence de Green $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{J}$ sont des outils fondamentaux de la théorie de semi-groupes. Seuls les trois premiers sont pertinents dans l'étude des bandes, comme pour les bandes $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ et $\mathcal{H}$ est la relation diagonale. Nous renvoyons le lecteur à [14] pour la définition de Green's relation pour les semi-groupes généraux. Par [23] dans le cas des bandes les définitions simplifier comme suit :

$$x\mathcal{L}y \quad ssi \quad xy = x, yx = y,$$
$$x\mathcal{R}y \quad ssi \quad xy = y, yx = x,$$
$$x\mathcal{D}y \quad ssi \quad xyx = x, yxy = y.$$

Sur tout semi-groupe S,

- La relation $\mathcal{L}$ est une congruence droite :

$$a\mathcal{L}b \Longrightarrow ac\mathcal{L}bc \quad \forall c \in S.$$

- La relation $\mathcal{R}$ est une congruence gauche :

$$a\mathcal{R}b \Longrightarrow ca\mathcal{R}cb \quad \forall c \in S.$$

voir [14].

De plus,

- Chaque $\mathcal{D}$-classe est une union de $\mathcal{L}$-classes et de $\mathcal{R}$-classes($\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$, donc $\mathcal{D}$ est la plus petite relation d'équivalence contenant $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$).

- L'intersection d'une $\mathcal{L}$-classe avec une $\mathcal{R}$-classe est soit vide, soit il s'agit d'une $\mathcal{H}$-classe ($\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$, donc $a\mathcal{H}b$ si et seulement si $a\mathcal{L}b$ et $a\mathcal{R}b$) .

À cause de cette propriété une $\mathcal{D}$-classe est parfois visualisée comme une "boîte à œufs", avec des lignes correspondantes aux $\mathcal{R}$-classes, aux colonnes correspondant aux $\mathcal{L}$-classes et aux intersections de lignes et de colonne correspondant aux $\mathcal{H}$-classes (ces dernières étant des singletons dans le cas des bandes). Une semi-groupe satisfaisant l'identité $x \wedge y = x$ est appelé un semi-groupe à gauche zéro, et un semi-groupe satisfaire $x \wedge y = y$ est appelé un demi-groupe à zéro droit.

3.1.2 Treillis asymétriques rectangulaires

Un treillis asymétrique $(S, \wedge, \vee)$ est donné par une paire de bandes $(S, \wedge)$ et $(S, \vee)$. Nous dénotons les relations de Green correspondantes par $\mathcal{L}_\wedge, \mathcal{R}_\wedge, \mathcal{D}_\wedge$ et $\mathcal{L}_\vee, \mathcal{R}_\vee, \mathcal{D}_\vee$, respectivement. Par Premier théorème de décomposition de Leech [17], relations de Green $\mathcal{D}_\wedge$ et $\mathcal{D}_\vee$ sur tout treillis asymétrique S coïncident (et sont donc notés simplement $\mathcal{D}$), cette relation $\mathcal{D}$ est une congruence, $S \setminus \mathcal{D}$ est l'image de treillis maximale de S.

Définition 3.1.3. *(**Un Treillis rectangulaire asymétrique**)*
Est un $\mathcal{D}$-classe est ce qui signifie qu'il s'agit d'un treillis asymétrique satisfaisant les identités supplémentaires :

$$x \wedge y \wedge z = x \wedge z \quad et \quad x \vee y = y \wedge x$$

.

Remarque 6.
- *En général, la relation $\mathcal{D}$ de Green sur un semi-groupe n'a pas besoin d'être une congruence.*
- *Cependant, selon le théorème de Clifford-McLean, la relation $\mathcal{D}$ est une congruence sur n'importe quelle bande, et bande factorisée comme un demi-treillis (bande commutative) de bandes rectangulaires (caractérisé par l'identité $xyz = xz$), voir [7] et [20].*
- *Dans ce qui suit, nous notons $\mathcal{D}_x = t \in S \mid x\mathcal{D}t$ la $\mathcal{D}-$classe d'un élément x de S.*
- *De plus, sur un treillis asymétrique S on obtient $\mathcal{R}_\wedge = \mathcal{L}_\vee$ (qui est noté $\mathcal{R}$), $\mathcal{R}_\vee = \mathcal{L}_\wedge$ (qui est noté $\mathcal{L}$).*

Définition 3.1.4. *Un treillis asymétrique est appelé gaucher si $\mathcal{L} = \mathcal{D}$, et il est appelé droitier si $\mathcal{R} = \mathcal{D}$.*

Donc un treillis asymétrique est à gauche si et seulement s'il satisfait le identité $x \wedge y \wedge x = x \wedge y$, ou de manière équivalente $x \vee y \vee x = y \vee x$, et il est à droite si et seulement s'il satisfait $x \wedge y \wedge x = y \wedge x$, ou de manière équivalente $x \vee y \vee x = x \vee y$.

Par Leech's Deuxième théorème de décomposition pour les treillis asymétriques [17], relations de Green $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ sont des congruences sur tout treillis asymétrique S, et les facteurs S en tant que produit fibreux d'un treillis asymétrique gauche $S \setminus \mathcal{R}$ (appelé le facteur gauche de S) par un treillis asymétrique droitier $S \setminus \mathcal{L}$ (appelé le bon facteur de S) sur leur image de treillis maximale commune. Sangsue Le deuxième théorème de décomposition est une version en treillis asymétrique du théorème de Kimura pour bandes régulières [15]. En particulier, si S est **un treillis asymétrique rectangulaire** (qui est équivalent à S ayant exactement une $\mathcal{D}$-classe), alors les facteurs S comme produit direct $S \cong \mathcal{L} \times \mathcal{R}$ d'un demi-groupe $\mathcal{L}$ zéro gauche (satisfaisant $x \wedge y = x$) par un demi-groupe zéro droit $\mathcal{R}$ (satisfaisant $x \wedge y = y$).

3.1.3 Le pré-ordre naturel sur un treillis asymétrique

Définition 3.1.5. ***Le pré-ordre*** *sur un treillis asymétrique S est donné par $x \preceq y$ si et seulement si $x \wedge y \wedge x = x$, ou de manière équivalentey $\vee x \vee y = y$.*

Propriété 3.1.

- *$x \preceq y$ avec $y \preceq x$ équivaut à $x\mathcal{D}y$.*
- *$x \preceq y$ tient dans S si et seulement si $\mathcal{D}_x \leq \mathcal{D}_y$ tient dans le treillis $S \setminus D$.*
- *L'ordre partiel naturel est donné par $x \leq y$ si et seulement si $x \wedge y = x = y \wedge x$, ou de manière équivalente,$x \vee y = y = y \vee x$.*
- *$x \leq y$ implique $x \preceq y$.*

Le résultat suivant de [9] est fréquemment utilisé dans cet chapitre.

Théorème 3.1.1. *Un treillis asymétrique satisfait à une identité ou à une implication équationnelle si et seulement si son facteur gauche et son facteur droit satisfont tous deux à cette identité ou implication équationnelle.*

Ainsi, pour prouver un résultat pour un treillis asymétrique S, il suffit de le prouver en supposant d'abord que S est un treillis asymétrique gaucher(c'est-à-dire pour tout $x, y \in S, x \wedge y \wedge x = x \wedge y$, ou de manière équivalente, $x \vee y \vee x = y \vee x$) et ensuite en supposant que S est droitier (c'est-à-dire pour tout $x, y \in S, x \wedge y \wedge x = y \wedge x$, ou de manière équivalente, $x \vee y \vee x = x \vee y$).

3.2 Variétés de treillis asymétrique

Définition 3.2.1. ***(Variété)***

Une classe d'algèbres est appelée variété si elle est fermée sous des images homomorphes, des sous-structures et des produits directs.

Par le théorème de Birkhoff [6] une classe d'algèbres est une variété si et seulement si elle est équationnellement définie, c'est-à-dire si elle est définie par un ensemble d'identités.

Définition 3.2.2. ***(Treillis asymétrique symétrique)***

Un treillis asymétrique est dit symétrique si pour tout $x, y \in S, x \wedge y = y \wedge x$ si et seulement si $x \vee y = y \vee x$.

Remarque 7. *Parmi toutes les propriétés des treillis asymétriques, la symétrie est très fondamentale.*

Proposition 6. *Les treillis asymétriques symétriques forment une variété par un résultat dans [17].*

3.3 Treillis asymétrique dans les anneaux

Définition 3.3.1. *Soit R un anneau et $E(R) = \{e \in R; e^2 = e\}$ l'ensemble de tous les idempotents dans R. Nous disons qu'un sous-ensemble $S \subset E(R)$ est un bande multiplicative si :*

$$\forall x, y \in E(R) : xy \in E(R).$$

Étant donné une bande multiplicative R dans un anneau R, il y a deux façons naturelles de définir l'opération de jointure sur $E(R)$ (en laissant la rencontre être une multiplication) :

(i) La relation quadratique :$x \circ y$=$x + y - xy$.

(ii) La relation cubique : $x\nabla y$=$(x \circ y)^2$=$x + y + yx - xyx - yxy$.

En général, étant donné que $x, y \in E(R)$, $x \circ y$ n'ont pas besoin d'être idempotents. D'autre part, lorsque $E(R)$ est multiplicatif, on obtient $x\nabla y \in E(R)$ pour tous les $x, y \in E(R)$. Toutefois, ∇ n'a pas besoin d'être associatif. Notez que si $x \circ y \in E(R)$, alors $x\nabla y = x \circ y$.

Remarque 8.
- *Si $(S, \cdot)$ est une bande multiplicative qui est fermée sous $\circ$, alors S est un treillis asymétrique, appelé treillis asymétrique quadratique.*
- *Si $(S, \cdot)$ est une bande multiplicative qui est également fermée sous ∇, avec ∇ étant associatif sur S S est un treillis asymétrique, appelé treillis asymétrique cubique.*

  De plus, ce qui suit a été prouvé dans [17] et [18].

- *Chaque bande régulière maximale droite [gauche] d'un anneau forme un treillis asymétrique quadratique. Chaque bande régulière droite [gauche] d'un anneau génère un treillis d'obliquité quadratique. (Une bande est appelée régulière droite si elle satisfait à l'identité $xyx = yx$; elle est appelée régulière gauche si elle satisfait à l'identité $xyx = xy$).*
- *Chaque bande normale maximale d'un anneau forme un treillis d'obliquité cubique normal. Chaque bande normale dans un anneau génère un treillis cubique normal.*
- *Les treillis asymétriques quadratiques et cubiques dans les anneaux sont distributifs et annulatifs [17].*

3.4 Construction

Dans cette section, nous montrons une construction d'une classe de treillis asymétriques qui ne sont pas des treillis (c'est-à-dire un treillis asymétrique où les deux opérations $\wedge$ et $\vee$ sont commutatives). En particulier, nous construisons un treillis d'obliquité sur une famille arbitraire d'ensembles disjoints par paires. Le treillis asymétrique construit est distributif et annullatif.

Définition 3.4.1. *Un treillis asymétrique est appelé annulatif s'il satisfait la paire d'implications suivante :*

$$x \vee y = x \vee z, x \wedge y = x \wedge z \Rightarrow y = z \tag{3.3}$$

$$x \vee z = y \vee z, x \wedge z = y \wedge z \Rightarrow x = y \tag{3.4}$$

Les treillis asymétriques annulatifs forment une variété par une résultat dans (3.6) ,suivons Leech [17]

Définition 3.4.2. ***(un treillis asymétrique distributif)***
Un treillis asymétrique est appelé distributif s'il satisfait la paire d'identités suivante :

$$x \wedge (y \vee z) \wedge x = (x \wedge y \wedge x) \vee (x \wedge z \wedge x) \tag{3.5}$$

$$x \vee (y \wedge z) \vee x = (x \vee y \vee x) \wedge (x \vee z \vee x) \tag{3.6}$$

Remarque 9.
- *Contrairement à la situation des treillis, les identités (3.5) et (3.6) sont en général indépendantes.*
- *Cependant, selon le théorème de Spinks , (3.5) et (3.6) sont équivalents pour les treillis symétriques de biais. Notez que pour les treillis, la distributivité est définie différemment.*
- *En fait, comme nous le verrons plus tard, il y a plusieurs façons de généraliser la notion de distributivité au cadre non commutatif.*

Proposition 7. *Soit $(I, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et $S = \cup_{i \in I} A_i$ une union disjointe d'une famille d'ensembles disjoints par paires. Ensuite, $(S; \wedge, \vee)$ est un treillis asymétrique distributif et annulatif. Où $\wedge$ et $\vee$ sont définis comme ci-dessus : $\forall x, y \in S$, $\forall i, j \in I$ tel que $x \in A_i$, $y \in A_j$:*

$$x \wedge y = \begin{cases} x & Si \quad i < j \\ y & Si \quad j \leq i \end{cases} \qquad x \vee y = \begin{cases} y & Si \quad i < j \\ x & Si \quad j \leq i \end{cases}$$

Preuve :

Notez que $x \wedge (y \wedge z)$ et $(x \wedge y) \wedge z$ se réduisent tous deux à l'élément minimal de $\{x, y, z\}$ qui apparaît le plus à droite dans l'expression $x \wedge y \wedge z$.

De même, $x \vee (y \vee z)$ et $(x \vee y) \vee z$ tous deux se réduisent à l'élément maximal de $\{x, y, z\}$ qui apparaît le plus à gauche dans l'expression $x \vee y \vee z$.

Par conséquent, $\wedge$ et $\vee$ sont des opérations associatives.
Pour prouver les lois d'absorption, soit $x \in A_i, y \in A_j$.Supposons d'abord que $i < j$. Puis $x \wedge (x \vee y) = x \wedge y = x$.

Par contre, si $i \geq j$ alors $x \wedge (x \vee y) = x \wedge x = x$. Le reste de les lois d'absorption sont prouvées de manière similaire.

Notez que étant donné $x \in A_i$ et $y \in A_j$, $x\mathcal{D}y$ est équivalent à $i = j$. De plus, $x \in A_i$ commute avec $y \in A_j$ pour l'une ou l'autre des opérations $\wedge$, $\vee$, si et seulement si $i \neq j$.

Par construction, S est une chaîne asymétrique, ce qui signifie que son image de treillis maximale $S \setminus \mathcal{D}$ est totalement ordonnée (en notre cas est isomorphe à I). Les chaînes asymétriques sont toujours annulables par [8].
Il reste à prouver que S est distributif.

Prenons tout $x, y, z \in S$ avec $i, j, k \in I$ tel que $x \in A_i, y \in A_j$ et $z \in A_k$, et considérons les éléments $\alpha = x \wedge (y \vee z) \wedge x$, $\beta = (x \wedge y \wedge x) \vee (x \wedge z \wedge x)$. Nous considérons les cas suivants :
- Supposons que $j = k$. Alors $y\mathcal{D}z$ et donc $(x \wedge y \wedge x)\mathcal{D}(x \wedge z \wedge x)$, ce qui signifie qu'il y a existe $l \in I$ tel que $x \wedge y \wedge x, x \wedge z \wedge x$ se trouvent tous deux dans A_l. Il s'ensuit que $\alpha = x \wedge y \wedge x$ et de même $\beta = x \wedge y \wedge x$.
- Supposons que $j \neq k$. Ensuite, $y \quad et \quad z$ font la navette pour l'une ou l'autre des opérations $\wedge$, $\vee$, avec soit $y \wedge z = z \wedge y = yety \vee z = z \vee y = z$, ou $y \wedge z = z \wedge y = z$

et $y \vee z = z \vee y = y$. Ainsi par la définition de l'ordre partiel naturel, on a soit $y < z$ soit $z < y$. Si $y < z$ alors également $x \wedge y \wedge x < x \wedge z \wedge x$. (Par régularité (3.1), $x \wedge y \wedge x \wedge x \wedge z \wedge x = x \wedge y \wedge z \wedge x = x \wedge y \wedge x$.)
Il s'ensuit que $\alpha = x \wedge z \wedge x = \beta$. De même, si $z < y$ alors $\alpha = x \wedge y \wedge x = \beta$.

Chapitre 4

Solutions de l'équation de Yang-Baxter

L'étude de l'équation de Yang-Baxter est un sujet fondamental en physique théorique et en mathématiques fondamentales. Il a jeté les bases de la théorie des groupes quantiques et est utilisé dans de nombreux autres domaines comme les algèbres de Hopf et la mécanique statistique. La recherche de solutions arbitraires étant relativement compliquée, Drinfeld [12] a proposé de se concentrer sur un plus petit ensemble de solutions, les solutions dites théoriques des ensembles de l'équation de Yang-Baxter. Une solution théorique d'ensemble de l'équation de Yang-Baxter est une paire (X, r) où X est un ensemble non vide et $r : X \times X \to X \times X : (x, y) \mapsto (\lambda_x(y), \rho_y(x))$ est une application satisfaisant

$$(r \times id) \circ (id \times r) \circ (r \times id) = (id \times r) \circ (r \times id) \circ (id \times r). \tag{4.1}$$

Nous appelons cela brièvement une solution. Un exemple simple de solution est le twist, définie comme $r(x, y) = (y, x)$, pour tout $x, y \in X$.
en effet

$$\begin{aligned}(r \times id) \circ (id \times r) \circ (r \times id)(x, y, z) =&(id \times r) \circ (r \times id)(y, x, z)\\ =&(r \times id)(y, z, x)\\ =&(z, y, x)\end{aligned}$$

De la même façon, on calcule la deuxième côté de l'équation, on trouve :

$$(id \times r) \circ (r \times id) \circ (id \times r) = (z, y, x)$$

Donc on a prouvé que le twist est une solution de l'équation de Yang-Baxter.

De plus, cette solution est involutive (i.e. $r^2 = id_{X^2}$) et non dégénéré, ce qui signifie que la solution est à la fois laissée non dégénérée (c'est-à-dire $\lambda_x : X \to X$ est bijectif, pour tout $x \in X$) et non dégénéré à droite (i.e. $\rho_x : X \to X$ est bijectif, pour tout $x \in X$). Si une solution n'est ni gauche ni droite non dégénérée, alors elle est appelée dégénérée.

À côté de la classe importante des solutions involutives, il existe une autre classe pertinente de solutions théoriques des ensembles où l'application r est idempotente (c'est-à-dire $r^2 = r$). Ces solutions sont appelé idempotent. Une solution de la théorie des ensembles (X, r) est dite cubique si $r^3 = r$. Noter que la classe des solutions cubiques contient la classe des solutions idempotentes et la classe des solutions involutives.

Dans treillis distributive, on a des solutions de la forme suivantes :

Théorème 4.0.1. *Soit S un treillis distributive, on définie l'application qui va de $S \times S \longrightarrow S \times S$ définit par :*

$$r(x, y) = ((x \wedge y) \vee x, y)$$

est une solution théorique idempotente de l'équation Yang-Baxter.

Preuve :
Ona S est un treillis distributive c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee x =& (x \vee x) \wedge (y \vee x)\\ =& x \wedge y\\ =& x\end{aligned}$$

car :

$$x \wedge y = x \quad si \quad x \vee y = y$$

$$x \wedge y = y \quad si \quad x \vee y = x$$

donc ona trouvé que : $r(x, y) = ((x \wedge y) \vee x, y) = (x, y)$ c'est l'application de Twiste qui ona déjà montré que est une solution de l'équation de Yang-Baxter

4.1 Solutions obtenues à partir de réseaux asymétriques généraux

Dans cette section, nous utilisons des treillis asymétrique arbitraires pour produire de nouvelles solutions théoriques de l'équation Yang-Baxter. Ces solutions sont de type idempotent, et donc d'une grande importance comme le montre [16]. Étant donné les éléments x, y dans un treillis asymétrique S, nous définissons la mise à jour inférieure de x par y comme :

$$x\lfloor y\rfloor = (y \wedge x \wedge y) \vee x \vee (y \wedge x \wedge y)$$

Dénoter$A = \mathcal{D}_x$, $B = \mathcal{D}_y$ et $M = A \wedge B$.

Proposition 8. *Les propriétés suivantes de $x\lfloor y\rfloor$ ont été prouvées dans [13] :*
- *$x\lfloor y\rfloor \in A$.*
- *$x\lfloor y\rfloor$ est l'unique élément du co-ensemble $M \vee x \vee M$ tel que $y \wedge x \wedge y \leq x\lfloor y\rfloor$.*
- *$x\lfloor y\rfloor \wedge y = y \wedge x \wedge y = y \wedge x\lfloor y\rfloor$.*

En outre, si S est gaucher, alors $x\lfloor y\rfloor = x \vee (y \wedge x)$;et si S est droitier, alors $x\lfloor y\rfloor = (x \wedge y) \vee x$.
Afin de pouvoir prouver le Lemme 1 ci-dessous, nous devons rappeler quelques autres définitions de la théorie des treillis asymétriques dans la remarque suivante.

Remarque 10.
- *La structure géométrique des treillis asymétriques a été étudiée dans [19]. Étant donné des $\mathcal{D}$-classes comparables A, B dans un treillis asymétrique S tel que $A \leq B$ se tient dans le treillis $S \setminus \mathcal{D}$, un co-ensemble de A en B est un sous-ensemble $A \wedge b \wedge A = \{a \wedge b \wedge a' | a, a' \in A\} \subseteq B$, où $b \in B$.*
- *De même, un co-ensemble de B dans A est un sous-ensemble $B \vee a \vee B = \{b \vee a \vee b' | b, b' \in B\} \subseteq A$, où $a \in A$.*
- *De plus, étant donné tout co-ensemble B_j de A dans B et tout co-ensemble A_i de B dans A, il existe un bijection $\varphi_{ij} : A_i \to B_j$ qui fait correspondre un élément $x \in A_i$ à l'élément unique $y \in B_j$ avec la propriété $y \leq x$ w.r.t. ordre partiel naturel.*

- *Afin de prouver qu'une paire d'éléments de A sont égales, il suffit donc de montrer qu'elles se trouvent dans le même co-ensemble de B en A et sont tous deux au-dessus du même élément de l'ordre partiel naturel de la T.W.R.B. De même, une paire de les éléments de B sont égaux si et seulement s'ils se trouvent dans le même co-ensemble de A dans B et s'ils sont tous deux en dessous du même élément de l'ordre partiel naturel de la T.R.O.*

Nous appliquerons la technique de la remarque 10 dans la preuve du lemme 1 ci-dessous.

Lemme 1. *Soit S un treillis asymétrique et considérons $x, y, z \in S$. Alors,*

$$(x\lfloor y\rfloor)\lfloor y\lfloor z\rfloor\rfloor = x\lfloor y\lfloor z\rfloor\rfloor. \tag{4.2}$$

Preuve :

Notons $A = \mathcal{D}_x$, $B = \mathcal{D}_y$ *et* $M = A \wedge B$. Considérons d'abord l'élément $(x\lfloor y\rfloor)\lfloor y\lfloor z\rfloor\rfloor$.

Étant une mise à jour (multiple) de x, elle doit se trouver dans A. En fait, c'est l'élément unique de le coset $M \vee x \vee M$ dans A qui est au-dessus de $y\lfloor z\rfloor \wedge x\lfloor y\rfloor \wedge y\lfloor z\rfloor$ w.r.t. ordre partiel naturel.

De même, $x\lfloor y\lfloor z\rfloor\rfloor$ se trouve également dans A, et c'est l'unique élément de $M \vee x \vee M$ qui est au-dessus $y\lfloor z\rfloor \wedge x \wedge y\lfloor z\rfloor$.

Pour prouver (4.2) il suffit de montrer que $u = v$, où $u = y\lfloor z\rfloor \wedge x\lfloor y\rfloor \wedge y\lfloor z\rfloor$ et $v = y\lfloor z\rfloor \wedge x \wedge y\lfloor z\rfloor$.

Les deux u et v sont des éléments de M. Nous affirmons qu'ils se trouvent dans un coset commun de B dans M, c'est-à-dire que $B \wedge u \wedge B = B \wedge v \wedge B$ est vrai. Le coset $B \wedge u \wedge B$ contient l'élément $y \wedge u \wedge y = y \wedge y\lfloor z\rfloor \wedge x\lfloor y\rfloor \wedge y\lfloor z\rfloor \wedge y$.

En utilisant la régularité (3.1), cela équivaut à $y \wedge y\lfloor z\rfloor \wedge y \wedge x\lfloor y\rfloor \wedge y \wedge y\lfloor z\rfloor \wedge y$.

En utilisant $x\lfloor y\rfloor \wedge y = y \wedge x\lfloor y\rfloor = y \wedge x \wedge y$, ce qui précède est égal à $y \wedge y\lfloor z\rfloor \wedge y \wedge x \wedge y \wedge y\lfloor z\rfloor \wedge y$, ce qui par régularité (3.1) se simplifie en $y \wedge y\lfloor z\rfloor \wedge x \wedge y\lfloor z\rfloor \wedge y = y \wedge v \wedge y$, qui est un élément de le coset $B \wedge v \wedge B$. Il suit les cosets $B \wedge u \wedge B$ et $B \wedge v \wedge B$ se coupent, et sont donc égal.

Enfin, observez que u et v sont tous deux inférieurs à $y\lfloor z\rfloor$, c'est-à-dire $y\lfloor z\rfloor \wedge u = u = u \wedge y\lfloor z\rfloor$ et $y\lfloor z\rfloor \wedge v = v = v \wedge y\lfloor z\rfloor$. Il s'ensuit que $u = v$.

Théorème 4.1.1. *Soit $(S, \wedge, \vee)$,un treillis asymétrique. Alors l'application définie par $r(x, y) = ((x \wedge y) \vee x, y)$ est une solution théorique idempotente de l'équation Yang-Baxter.*

Preuve : Soit $x, y, z \in S$. Alors

$$\begin{aligned}(r \times id)(id \times r)(r \times id)(x, y, z) =& (r \times id)(id \times r)((x \wedge y) \vee x, y, z)\\ =& (r \times id)((x \wedge y) \vee x, (y \wedge z) \vee y, z)\\ =& ((((x \wedge y) \vee x) \wedge ((y \wedge z) \vee y)) \vee ((x \wedge y) \vee x), (y \wedge z) \vee y, z)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(r \times id)(id \times r)(r \times id)(x, y, z) =& (id \times r)(r \times id)(x, (y \wedge z) \vee y, z)\\ =& (id \times r)((x \wedge ((y \wedge z) \vee y)) \vee x, (y \wedge z) \vee y, z)\\ =& ((x \wedge ((y \wedge z) \vee y)) \vee x, (((y \wedge z) \vee y) \wedge z) \vee ((y \wedge z) veey), z).\end{aligned}$$

Nous devons prouver

$$(((x \wedge y) \vee x) \wedge ((y \wedge z) \vee y)) \vee ((x \wedge y) \vee x) = (x \wedge ((y \wedge z) \vee y)) \vee x, \tag{4.3}$$

et

$$(y \wedge z) \vee y = (((y \wedge z) \vee y) \wedge z) \vee ((y \wedge z) \vee y). \tag{4.4}$$

Supposons d'abord que S est gaucher. Ensuite, en utilisant l'absorption, (4.3) se simplifie en $(x \wedge y) \vee x = (x \wedge y) \vee x$ (et même à $x = x$). De même, (4.4) se simplifie en $y = y$.

Supposons ensuite que S soit droitier. Notons $A = \mathcal{D}_x$, $B = \mathcal{D}_y$ *et* $M = A \wedge B$.

Remarquerez que (4.3) se simplifie en (4.2), ce qui est vrai par le lemme 1. Si S est droitier, alors (4.4) se simplifie en $y\lfloor z\rfloor = y\lfloor z\rfloor \wedge z) \vee ((y \wedge z) \vee y)$.

Remarquerez que $(y\lfloor z\rfloor \wedge z) \vee ((y \wedge z) \vee y)$ se simplifie en $(z \wedge y \wedge z) \vee ((y \wedge z) \vee y)$.

Utiliser la droitier ce dernier se simplifie encore plus en $(y\wedge z)\vee((y\wedge z)\vee y) = (y\wedge z)\vee y = y\lfloor z\rfloor$.

Nous avons prouvé que tous les treillis asymétriques pour gauchers et droitiers satisfont les identités (4.3) et (4.4).

D'après le théorème 3.1.1, tous les treillis asymétriques satisfont ces identités. Reste à prouver que la solution est idempotente. Encore une fois, selon le théorème 3.1.1, il est assez pour le prouver séparément pour les treillis asymétriques gauchers et droitiers.

Soit S gaucher. Alors $(x\wedge y)\vee x = (x\wedge y\wedge x)\vee x$, qui se simplifie en x par absorption Ainsi : $r(x, y) = (x, y) = r^2(x, y)$. Si S est droitier, alors $r(x, y) = (x\lfloor y\rfloor, y)$ et $r^2(x, y) = ((x\lfloor y\rfloor)\lfloor y\rfloor, y)$.

cependant, $(x\lfloor y\rfloor)\lfloor y\rfloor$ est égal à $x\lfloor y\rfloor$ car ils représentent tous les deux l'élément unique du coset $M \vee x \vee M$ c'est-à-dire au-dessus de $y \wedge x \wedge y$ w.r.t d'ordre partiel naturel.

Corollaire 1. *Soit* $(S, \wedge, \vee)$ *un treillis asymétrique. l'application* $r(x, y) = (x\lfloor y\rfloor, y)$ *est un idempotent solution théorique de l'équation Yang-Baxter*

Preuve : On obtient

$$(r \times id)(id \times r)(r \times id)(x, y, z) = ((x\lfloor y\rfloor)\lfloor y\lfloor z\rfloor\rfloor, y\lfloor z\rfloor, z),$$

et

$$(id \times r)(r \times id)(id \times r)(x, y, z) = (x\lfloor y\lfloor z\rfloor\rfloor, (y\lfloor z\rfloor)\lfloor z\rfloor, z).$$

L'égalité des premières composantes suit le lemme 1. L'égalité de la seconde les composantes sont vérifiées car $y\lfloor z\rfloor$ *et* $(y\lfloor z\rfloor)\lfloor z\rfloor$ sont tous deux des éléments du coset $M \vee y \vee M$ (où $M = \mathcal{D}_y \wedge z$), qui se trouvent au-dessus de $z \wedge y \wedge z$.

Étant donné que ces éléments sont uniques, il suit que $y\lfloor z\rfloor = (y\lfloor z\rfloor)y\lfloor z\rfloor$.

Dually à la notion de mise à jour inférieure, la notion d'opération de mise à jour supérieure a été défini dans [13].

En utilisant la mise à jour supérieure, nous obtenons des résultats analogiques au lemme 1, Théorème 4.1.1 et corollaire 1, donnant des solutions supplémentaires.

4.2 Solutions fortes de l'équation de Yang-Baxter

Dans la section précédente, nous avons fourni une solution théorique idempotente de l'équation de Yang-Baxter, en utilisant un treillis asymétrique arbitraire. Dans cette section, nous étudions une autre application r, défini par :

$$r(x, y) = (x \wedge y, x \vee y) \tag{4.5}$$

pour tous les éléments x, y d'un treillis asymétrique donné $(S, \wedge, \vee)$. L'inspiration pour la définition de cette application r provient des éléments bien connus suivants résultat. A chaque treillis $(L, \wedge, \vee)$ on peut associer une applications idempotente $r : L \times L \to L \times L$ défini comme : $r(x, y) = (x \wedge y, x \vee y)$.

De plus, (L, r) est une solution de l'équation Yang-Baxter, c'est-à-dire

$$(r \times id) \circ (id \times r) \circ (r \times id) = (id \times r) \circ (r \times id) \circ (id \times r) \tag{4.6}$$

si et seulement si L est un treillis distributif, ce qui signifie que pour tout

$$x, y, z \in L, \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad et \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Nous disons qu'un treillis asymétrique S est une forte solution distributive du Yang-Baxter si l'application $r : S \times S \to S \times S$ définie par (4.5) est une solution théorique de l'Équation Yang-Baxter (4.6)

Théorème 4.2.1. *La classe des treillis asymétriques qui forment des solutions distributives fortes de l'équation de Yang-Baxter est une variété. De plus, cette variété est définie par les identités suivantes :*

$$x \wedge y \wedge ((x \vee y) \wedge z) = x \wedge y \wedge z, \tag{4.7}$$

$$(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z), \tag{4.8}$$

$$x \vee y \vee z = x \vee (y \wedge z) \vee y \vee z. \tag{4.9}$$

Preuve : Soit $x, y, z \in S$. Alors

$$\begin{aligned}(r \times id)(id \times r)(r \times id)(x, y, z) =& (r \times id)(id \times r)(x \wedge y, x \vee y, z)\\ =& (r \times id)(x \wedge y, (x \vee y) \wedge z, (x \vee y) \vee z)\\ =& ((x \wedge y) \wedge ((x \vee y) \wedge z), (x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z), (x \vee y) \vee z).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(id \times r)(r \times id)(id \times r)(x, y, z) =& (id \times r)(r \times id)(x, y \wedge z, y \vee z)\\ =& (id \times r)(x \wedge (y \wedge z), x \vee (y \wedge z), y \vee z)\\ =& (x \wedge (y \wedge z), (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z), (x \vee (y \wedge z)) \vee (y \vee z)).\end{aligned}$$

Par conséquent, un treillis asymétrique S est une solution distributive forte de l'équation de Yang-Baxter si et seulement si cela satisfait :

$$(x \wedge y) \wedge ((x \vee y) \wedge z) = x \wedge (y \wedge z).$$

$$(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z).$$

$$(x \vee y) \vee z = (x \vee (y \wedge z)) \vee (y \vee z).$$

Dans la section 3.4, nous avons mentionné qu'il existe plusieurs façons de généraliser la notion de distributivité pour les treillis. Le plus faible d'entre eux est la notion de quasi-distributivité qui est défini comme ayant une image de treillis distributive maximale. En particulier, cela signifie que son image de treillis maximale $S \setminus \mathcal{D}$ est un treillis distributif, [17]. Si S est un treillis asymétrique distributif, alors il est toujours quasi-distributif. Pour les treillis, la notion d'annulation équivaut à distributivité. En conséquence, les treillis asymétriques annulatifs sont toujours quasi-distributifs.

Corollaire 2. *Soit S un treillis asymétrique. Si S est une solution fortement distributive de l'équation de Yang-Baxter* (4.6) *alors,*

(i) L'image en treillis maximale $S \setminus \mathcal{D}$ est également une solution fortement distributive de (4.6)*.*

(ii) S est quasi-distributif.

Preuve :

(i) D'après le théorème 4.2.1, les solutions distributives fortes de (4.6) forment une variété. Par conséquent toutes les images homomorphes de solutions distributives fortes sont à nouveau distributives fortes solutions. L'image de treillis maximale $S \setminus \mathcal{D}$ est l'image homomorphe de S sous le projection naturelle $\pi : S \to S \setminus \mathcal{D}$ qui associe chaque élément à sa classe $\mathcal{D}$.

(ii) Par définition, S est quasi-distributif si et seulement si $S \setminus \mathcal{D}$ est distributif. Par (i), le treillis $S \setminus \mathcal{D}$ est une solution distributive forte. Mais alors $S \setminus \mathcal{D}$ doit être un treillis distributif puisque les treillis sont distributifs si et seulement s'ils sont des solutions distributives fortes si et seulement si l'application (4.5) satisfait l'équation (4.6).

Afin d'énoncer et de prouver notre prochain théorème, nous devons introduire plusieurs variétés de treillis asymétriques.

Définition 4.2.1. ***(Treillis asymétrique normal, conormal, binormal)***

- *Un treillis asymétrique est dit* ***normal*** *s'il satisfait l'identité :*

$$x \wedge y \wedge z \wedge x = x \wedge z \wedge y \wedge x.$$

- *On dit qu'il est* ***conormal*** *s'il satisfait l'identité :*

$$x \vee y \vee z \vee x = x \vee z \vee y \vee x.$$

  C'est un exercice facile pour prouver que la condition de normalité (resp. De conormalité) est équivalent à $x \wedge y \wedge z \wedge w = x \wedge z \wedge y \wedge w$ *(resp.* $x \vee y \vee z \vee w = x \vee z \vee y \vee w$*.)*

- *Un treillis asymétrique est appelé* ***binormal*** *s'il est à la fois normal et conormal. Par un résultat de Schein [24], un facteurs de treillis asymétriques binormaux en tant que produit direct d'un treillis avec une algèbre rectangulaire.*

Définition 4.2.2. ***(Treillis asymétrique fortement distributif, co-fortement distributif)***

- *Un treillis asymétrique est dit* ***fortement distributif*** *s'il satisfait les identités :*

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad \text{et} \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

- *Un treillis asymétrique est dit* ***co-fortement distributif*** *s'il satisfait les identités*

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad \text{et} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Proposition 9.

- *Un treillis asymétrique qui est fortement distributif et co-fortement distributif est distributif.*
  Leech [18] a prouvé qu'un treillis asymétrique S *est fortement distributive si et seulement si elle est symétrique, quasi-distributive et normale.*
- *Par dualité,* S *est co-fortement distributive si et seulement si elle est symétrique, quasi-distributive et conormale.*

Théorème 4.2.2. *Soit* $(S, \wedge, \vee)$ *un treillis asymétrique qui est à la fois fortement et* $co-distributif$*. Alors* S *est une solution fortement distributive de l'équation Yang-Baxter. De plus, cette solution est cubique, c'est-à-dire* $r^3 = r$*.*

Preuve :

Par le théorème 4.2.1, nous devons prouver que S satisfait les identités 4.7-4.9. Laisser $x, y, z \in S$.

Rappelez-vous qu'une forte distributivité implique une normalité et qu'une co-forte distributivité implique conormalité.

En utilisant une distributivité et une normalité fortes, nous en déduisons

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \wedge ((x \vee y) \wedge z) =& ((x \wedge y \wedge x) \vee (x \wedge y)) \wedge z \\
=& (x \wedge y \wedge x \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \\
=& (x \wedge x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \\
=& (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \\
=& x \wedge (y \wedge z).
\end{aligned}$$

En utilisant co-fortement distributivité et conormalité, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(x \vee (y \wedge z)) \vee (y \vee z) =& x \vee ((y \vee z) \wedge (z \vee y \vee z)) \\ =& (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee z \vee y \vee z) \\ =& (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z \vee z) \\ =& (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \\ =& (x \vee y) \vee z.\end{aligned}$$

Il nous reste donc à prouver que :

$$(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z). \tag{4.10}$$

Le côté gauche de cette équation est égal à :

$$(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z),$$

où nous avons utilisé que le treillis asymétrique est fortement distributif. Le côté droit de l'équation 4.10 peut être réécrite comme suit, en utilisant une forte distributivité, conormalité et les règles d'absorption.

$$\begin{aligned}(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) =& (x \wedge (y \vee z)) \vee ((y \wedge z) \wedge (y \vee z)) \\ =& (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge y) \vee (y \wedge z) \\ =& (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z) \\ =& (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge y) \vee (y \wedge z) \\ =& (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z) \\ =& (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z).\end{aligned}$$

Soit $x, y \in S$. Alors,

$$\begin{aligned}r^3(x, y) =& r^2(x \wedge y, x \vee y) \\ =& r((x \wedge y) \wedge (x \vee y), (x \wedge y) \vee (x \vee y)) \\ =& (((x \wedge y) \wedge (x \vee y)) \wedge ((x \wedge y) \vee (x \vee y)), ((x \wedge y) \wedge (x \vee y)) \vee ((x \wedge y) \vee (x \vee y))).\end{aligned}$$

En utilisant la normalité et la règle d'absorption, nous en déduisons

$$\begin{aligned}((x \wedge y) \wedge (x \vee y)) \wedge ((x \wedge y) \vee (x \vee y)) =& (x \wedge y) \wedge (x \vee y) \wedge (x \wedge y) \wedge ((x \wedge y) \vee (x \vee y)) \\ =& (x \wedge y) \wedge (x \vee y) \wedge (x \wedge y) \\ =& x \wedge y \wedge x \wedge (x \vee y) \wedge x \wedge y \\ =& x \wedge y \wedge x \wedge x \wedge y \\ =& x \wedge y.\end{aligned}$$

De même, en utilisant la conormalité et la règle d'absorption,

$$\begin{aligned}((x \wedge y) \wedge (x \vee y)) \vee ((x \wedge y) \vee (x \vee y)) =&((x \wedge y) \wedge (x \vee y)) \vee (x \vee y) \vee (x \wedge y) \vee (x \vee y)\\ =&(x \vee y) \vee (x \wedge y) \vee (x \vee y)\\ =&x \vee y \vee x \vee (x \wedge y) \vee x \vee y\\ =&x \vee y \vee x \vee x \vee y\\ =&x \vee y.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$r^3(x, y) = (x \wedge y, x \vee y) = r(x, y).$$

En général, nous ne pouvons omettre ni la distributivité forte ni la distributivité co-forte de les hypothèses du théorème 4.2.2, comme cela est vérifié par la paire d'exemples suivants.

Exemple 12. *Soit* $3^{R,0}$ *un treillis asymétrique à* $3-$ *éléments donné par la paire de Cayley suivante tables :*

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	2	2

Il est facile de vérifier que le $3^{R,0}$ *est un treillis asymétrique à droite avec deux* $\mathcal{D}$*-classes* $\{1, 2\} > \{0\}$*, et elle est fortement distributive (mais pas* $co-distributive$*)par un résultat de Leech [18].*

Nous affirmons que les $3^{R,0}$ *ne sont pas une solution distributive forte, En particulier, elle ne satisfait pas l'identité 4.8.*

Prenons $x = 0, y = 1$ *et* $z = 2$*.*

Ensuite,$(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (0 \wedge 1) \vee ((0 \vee 1) \wedge 2) = 0 \vee (1 \wedge 2) = 0 \vee 2 = 2$*, tandis que* $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) = (0 \vee (1 \wedge 2)) \wedge (1 \vee 2) = (0 \vee 2) \wedge 1 = 2 \wedge 1 = 1$.

Exemple 13. *Soit* $3^{R,1}$ *un treillis asymétrique à* $3-$ *éléments donné par la paire de Cayley suivante tables :*

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	2	1	2

Une argumentation similaire à celle de l'exemple 12 montre que les $3^{R,1}$ *sont un facteur de distribution* $co-fortement$ *(mais pas fortement distributif), qui n'est pas une solution fortement distributive. On peut en dire plus dans le cas des treillis d'obliquité gauchers.*

Proposition 10. *Soit* S *un treillis incliné à gauche. Alors* S *satisfait les identités 4.7 et 4.9. Si en plus d'être gaucher,* S *est soit fortement distributif, soit* $co-fortement$ *distributive, alors elle satisfait aussi 4.8 et est donc une solution distributive forte.*

Preuve :

Nous montrons d'abord que S satisfait 4.7. En utilisant la main gauche, nous obtenons $(x \wedge y) \wedge ((x \vee y) \wedge z) = x \wedge y \wedge x \wedge (x \vee y) \wedge z$, qui par absorption se simplifie en $x \wedge y \wedge x \wedge z$, et alors par gaucher suite à $x \wedge y \wedge z$.

Ensuite, nous montrons que S satisfait 4.9. En utilisant la gaucherie, nous obtenons $x \vee (y \wedge z) \vee y \vee z = x \vee (y \wedge z) \vee z \vee y \vee z$. Avec l'aide de l'absorption et de la gaucherie, cette dernière se simplifie en $x \vee z \vee y \vee z$, puis en $x \vee y \vee z$.

Supposons maintenant que S est fortement distributif. (Le cas où S est co-fortement dis tributif est traité de manière double.) Nous affirmons que S satisfait 4.8. On obtient $(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, *et* $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z \wedge (y \vee z))$.

En utilisant une forte distributivité et une gaucherie se développe en $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge y \wedge (y \vee z))$.

Utilisation de l'absorption et de la gaucherie cela se simplifie en $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Il s'avère que tous les treillis asymétriques gauchers, distributifs et annulant ne sont pas solutions distributives fortes. Le programme Mace4 [22] a peut trouver un 16 éléments exemple d'un treillis asymétrique gaucher, distributif et annulable, qui n'est pas un solution distributive.

La solution de la théorie des ensembles 4.5 obtenue à partir d'un réseau de distorsion distributive forte est dégénèrent en général. Néanmoins, il existe des exemples où la solution n'est pas dégénérée.

Exemple 14. *Soit S un ensemble non vide et définissons les opérations de treillis asymétrique sur S par $x \wedge y = y$ et $x \vee y = x$, pour tout $x, y \in S$.*

Alors, on peut vérifier qu'il s'agit d'un treillis asymétrique fortement et $co - fortement$ distributif, et donc une solution distributive forte par le théorème 4.2.2 En fait, xRy est valable pour tout $x, y \in S$, et donc $(S, \wedge)$ est un zéro droit semi-groupe (c'est-à-dire qu'il satisfait $x \wedge y = y$), ce qui signifie que S est un treillis asymétrique à droite avec une $\mathcal{D}$-classe.

L'application associée 4.5 est l'application de twiste $r(x, y) = (y, x)$. Cette solution est non dégénérée car les deux

$$\lambda_x : X \to X; t \mapsto x \wedge t = t \quad et \quad \rho_y : X \to X; t \mapsto t \vee y = t$$

sont cartes bijectives, pour tout $x, y \in S$.

En fait, les treillis asymétriques donnés par l'exemple 14 ci-dessus sont les seuls solutions qui donnent des solutions théoriques des ensembles non dégénérées de l'équation de Yang-Baxter.

Proposition 11. *Soit $(S, \wedge, \vee)$ un treillis asymétrique qui est une solution distributive forte, où la solution associée est non dégénérée gauche ou droite. Alors, $(S, \wedge, \vee)$ est le treillis asymétrique de l'exemple 14.*

Preuve :

Supposons d'abord que S est une solution distributive forte et que la solution obtenue de l'application 4.5 est laissé non dégénéré. Soit $x, y \in S$ arbitraire. Nous affirmons que $x \wedge y = y \quad et \quad x \vee y = x$. Par l'hypothèse, l'application $\lambda x : t \mapsto x \wedge t$, est une bijection. Alors, il existe $t \in S$ tel que $y = x \wedge t$, et donc $x \wedge y = x \wedge (x \wedge t) = x \wedge t = y$. De plus, en utilisant absorption, $x \vee y = x \vee (x \wedge y) = x$. Ainsi, nous obtenons un treillis asymétrique comme dans l'exemple 14. Le cas non dégénéré droit est similaire au cas non dégénéré gauche.

4.3 Des solutions plus distributives

Dans cette section, nous montrons que pour fausser les treillis, on peut naturellement associer des solutions plus puissantes idem. Pour ce faire, nous avons besoin de la terminologie suivante.

4.3.1 Solutions distributives à gauche

Soit S un treillis asymétrique. Considérons l'application

$$r_L : S \times S \to S \times S \quad \textit{définie par} \quad r_L(x, y) = (x \wedge y, y \vee x). \tag{4.11}$$

On dit qu'un treillis asymétrique S est une solution distributive gauche de l'équation de Yang-Baxter, si (S, r_L) est une solution théorique d'ensemble de l'équation de Yang-Baxter 4.6.

Proposition 12. *Soit S un treillis asymétrique. Si S est une solution distributive de gauche de l'équation de Yang Baxter, alors (S, r_L) est une solution idempotente.*

Preuve :
Pour tout $x, y \in S$, en utilisant les lois d'absorption on obtient

$$\begin{aligned} r_L^2(x, y) =& r_L(x \wedge y, y \vee x) \\ =& ((x \wedge y) \wedge (y \vee x), (y \vee x) \vee (x \wedge y)) \\ =& (x \wedge y, y \vee x) \\ =& r_L(x, y). \end{aligned}$$

Théorème 4.3.1. *La classe des solutions distributives de gauche de l'équation de Yang-Baxter est une variété. De plus, cette variété est définie par l'identité :*

$$((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (z \vee y). \tag{4.12}$$

Preuve :
Notons $r = r_L$. Un treillis asymétrique S est une solution distributive gauche du Yang-Baxter équation si et seulement si elle satisfait :

$$(r \times id)(id \times r)(r \times id)(x, y, z) = (id \times r)(r \times id)(id \times r)(x, y, z). \tag{4.13}$$

En calculant le côté gauche de l'équation 4.13 on obtient :

$$\begin{aligned} (r \times id)(id \times r)(r \times id)(x, y, z) =& (r \times id)(id \times r)(x \wedge y, y \vee x, z) \\ =& (r \times id)(x \wedge y, (y \vee x) \wedge z, z \vee y \vee x) \\ =& (x \wedge y \wedge (y \vee x) \wedge z), ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y), z \vee y \vee x). \end{aligned}$$

D'autre part, le côté droit de 4.13 se développe comme suit :

$$\begin{aligned} (id \times r)(r \times id)(id \times r)(x, y, z) =& (id \times r)(r \times id)(x, y \wedge z, z \vee y) \\ =& (id \times r)(x \wedge y \wedge z, (y \wedge z) \vee x, z \vee y) \\ =& (x \wedge y \wedge z, ((y \wedge z) \vee x) \wedge (z \vee y), z \vee y \vee (y \wedge z) \vee x). \end{aligned}$$

Par absorption, $x \wedge y \wedge (y \vee x) \wedge z$ se réduit à $x \wedge y \wedge z$.
De même,$z \vee y \vee (y \wedge z) \vee x$ réduit à $z \vee y \vee x$.
Par conséquent, S est une solution distributive de gauche si et seulement si elle satisfait l'identité :

$$((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (z \vee y).$$

Corollaire 3. *Soit S un treillis asymétrique. Si S est une solution distributive à gauche du Yang-Baxter équation, alors l'image de treillis maximale $S \setminus \mathcal{D}$ est également une solution distributive à gauche, et donc S est quasi-distributif.*

Dans la section précédente, nous avons obtenu que les treillis asymétriques fortement et co-fortement distributifs sont une solution distributive forte. Le résultat suivant montre que ces treillis asymétriques sont également laissées des solutions distributives.

Définition 4.3.1. *Un treillis asymétrique est appelé fortement distributif s'il satisfait les identités :*

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad et \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

et co-fortement distributive si elle satisfait les identités :

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad et \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Proposition 13. *Soit S un treillis asymétrique fortement distributif ou co-fortement distributif. Alors S est une solution distributive de gauche de l'équation de Yang-Baxter.*

Preuve :

Nous donnons une preuve pour le cas des treillis asymétrique fortement distributifs. L'affaire de Les treillis asymétriques co-fortement distributifs sont traités de manière double. D'après le théorème 4.3.1, il faut prouver que S satisfait l'identité :

$$((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (z \vee y).$$

Soit $x, y, z \in S$ arbitraire. L'utilisation d'une distributivité forte $((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y)$ simplifie à $(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$.

Par contre, $((y \wedge z) \vee x) \wedge (z \vee y)$ se simplifie en $(y \wedge z \wedge (z \vee y)) \vee (x \wedge (z \vee y))$, qui en utilisant l'absorption et la forte distributivité se simplifie en $(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$.

En fait, le résultat de la proposition 13 peut être renforcé à une classe plus générale de incliner les treillis.

Pour prouver le lemme 1, nous utilisons la technique de la remarque 10.

De plus, d'après [10], les éléments a, a' de A se trouvent dans un coset commun de B dans A si et seulement si $b \vee a \vee b = b \vee a' \vee b$ pour tout $b \in B$, ce qui équivaut en outre à $b \vee a \vee b = b \vee a' \vee b$ pour certains $b \in B$.

Par dualité, les éléments $b, b' \in B$ se trouvent dans un coset commun de A dans B si et seulement si $a \wedge b \wedge a = a \wedge b' \wedge a$ pour tout $a \in A$, ce qui équivaut en outre à $a \wedge b \wedge a = a \wedge b' \wedge a$ pour certains $a \in A$.

Un losange asymétrique $\{J > A, B > M\}$ est un treillis sous-asymétrique d'un treillis asymétrique S avec quatre $\mathcal{D}$-classes A, B, M, J, telles que $M = A \wedge B$ et $J = A \vee B$. $\{J > A, B > M\}$, les cosets de A dans J sont donnés par $A \vee b \vee A$, où $b \in B$. De même, les cosets de A dans M sont donnés par $A \wedge b \wedge A$, où $b \in B$.

Enfin, nous définissons d'autres variétés de treillis asymétriques qui sont utilisées dans ce qui suit résultats.

Rappelons qu'un treillis asymétrique est appelé symétrique si pour tout $x, y \in S, x \wedge y = y \wedge x \iff x \vee y = y \vee x$.

De plus, un treillis asymétrique est dit symétrique supérieur si $x \wedge y = y \wedge x \Longrightarrow x \vee y = y \vee x$; et on l'appelle symétrique inférieure si $x \vee y = y \vee x \Longrightarrow x \wedge y = y \wedge x$.

Enfin, un treillis asymétrique est appelé simplement annulable s'il satisfait à ce qui suit implication :

$$z \vee x \vee z = z \vee y \vee z, z \wedge x \wedge z = z \wedge y \wedge z \Rightarrow x = y.$$

Un treillis asymétrique est annulant si et seulement s'il est simplement annulatif et symétrique [11].

Théorème 4.3.2. *Soit S un treillis asymétrique. Alors, S est distributif et annulatif à gauche si et seulement si S est une solution distributive à gauche de l'équation de Yang-Baxter.*

4.3.2 Solutions distributives à droite

Soit S un treillis asymétrique. Considérons l'application $r_R : S \times S \longrightarrow S \times S$ définie par :

$$r_R(x, y) = (y \wedge x, x \vee y). \tag{4.14}$$

Nous disons qu'un treillis asymétrique S est une solution distributive à droite de l'équation de Yang-Baxter, si (S, r_R) est une solution théorique de l'équation de Yang-Baxter (4.6). Notons que $r_R = r_L \circ r'$, où r' est l'aplication de Twiste $r'(x, y) = (y, x)$.

Le théorème suivant est prouvé de la même manière que les résultats correspondants pour les solutions distributives à gauche. Ce dernier utilisait des treillis asymétriques à annulation à gauche. Donc, pour le théorème suivant, nous avons besoin de la définition d'un treillis asymétrique à annulation à droite, qui est un treillis asymétrique implication satisfaisante (3.4) :

$$x \vee z = y \vee z, x \wedge z = y \wedge z \Longrightarrow x = y.$$

Théorème 4.3.3. *(i) La classe des solutions distributives à droites de l'équation de Yang-Baxter est une variété. De plus, cette variété est définie par l'identité :*

$$(y \wedge x) \vee (z \wedge (x \vee y)) = (y \vee z) \wedge (x \vee (z \wedge y)). \tag{4.15}$$

(ii) Les solutions distributives à droite sont toujours idempotentes, c'est-à-dire $r_R^2 = r_R$.
(iii) Toute solution distributive forte est aussi une solution distributive juste.
(iv) Chaque treillis, distributif à gauche, simplement annulatif et symétrique supérieur est une solution distributive à droite.
(v) Chaque treillis, distributif droit, simplement annulatif et symétrique inférieur est une solution distributive à droite.
(vi) Tout treillis asymétrique distributif et annulation à droite est une solution distributive à droite.
(vii) Un treillis asymétrique est une solution distributive à droite si et seulement si elle est distributive et annulative à droite.

Comme pour les solutions distributives fortes, la solution théorique ensembliste obtenue à partir d'une solution distributive droite sera dégénérée en général. Néanmoins, il existe des exemples où la solution est non dégénérée à droite, et donc non dégénérée. Prenons à nouveau le treillis asymétrique de l'exemple 14 Ce treillis asymétrique S est une solution distributive à droite et on peut voir que $r_R(x, y) = (x, x)$, pour tout $x, y \in S$. Par conséquent, (S, r_R) est une solution non dégénérée droite.

4.3.3 Solutions distributives faibles

Soit S un treillis asymétrique. Considérons la carte $r_W : S \times S \longrightarrow S \times S$ définie par :

$$r_W(x, y) = (x \wedge y \wedge x, x \vee y \vee x). \tag{4.16}$$

Nous disons qu'un treillis asymétrique S est une solution distributive faible de l'équation de Yang-Baxter, si (S, r_W) est une solution théorique de l'équation de Yang-Baxter (4.6).

Théorème 4.3.4. *La classe des solutions distributives faibles de l'équation de Yang-Baxter est une variété. De plus, cette variété est définie par l'identité :*

$$\begin{aligned}&(x \wedge y \wedge x) \vee ((x \vee y \vee x) \wedge z \wedge (x \vee y \vee x)) \vee (x \wedge y \wedge x)\\ &= (x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x) \wedge (y \vee z \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x).\end{aligned}$$

Preuve :
Notez $r = r_W$ et soit $x, y, z \in S$. Alors

$$\begin{aligned}
&(r \times id)(id \times r)(r \times id)(x, y, z) \\
=&(r \times id)(id \times r)(x \wedge y \wedge x, x \vee y \vee x, z) \\
=&(r \times id)(x \wedge y \wedge x, (x \vee y \vee x) \wedge z \wedge (x \vee y \vee x), (x \vee y \vee x) \vee z \vee (x \vee y \vee x)) \\
=&((x \wedge y \wedge x) \wedge ((x \vee y \vee x) \wedge z \wedge (x \vee y \vee x)) \wedge (x \wedge y \wedge x), \\
&(x \wedge y \wedge x) \vee ((x \vee y \vee x) \wedge z \wedge (x \vee y \vee x)) \vee (x \wedge y \wedge x), \\
&(x \vee y \vee x) \vee z \vee (x \vee y \vee x))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(id \times r)(r \times id)(id \times r)(x, y, z) \\
=&(id \times r)(r \times id)(x, y \wedge z \wedge y, y \vee z \vee y) \\
=&(id \times r)(x \wedge (y \wedge z \wedge y) \wedge x, x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x, y \vee z \vee y) \\
=&(x \wedge (y \wedge z \wedge y) \wedge x, \\
&(x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x) \wedge (y \vee z \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x), \\
&(x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x) \vee (y \vee z \vee y) \vee (x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x)).
\end{aligned}$$

En utilisant l'absorption et la régularité (3.1), nous déduisons :

$$(x \wedge y \wedge x) \wedge ((x \vee y \vee x) \wedge z \wedge (x \vee y \vee x)) \wedge (x \wedge y \wedge x) = x \wedge y \wedge z \wedge y \wedge x.$$

De même, en utilisant la régularité (3.2), nous déduisons :

$$(x \vee y \vee x) \vee z \vee (x \vee y \vee x) = x \vee y \vee z \vee y \vee x,$$

et en utilisant l'absorption et la régularité (3.2),

$$(x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x) \vee (y \vee z \vee y) \vee (x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x) = x \vee y \vee z \vee y \vee x.$$

Ainsi, la classe des solutions distributives faibles est définie par l'identité :

$$(x \wedge y \wedge x) \vee ((x \vee y \vee x) \wedge z \wedge (x \vee y \vee x)) \vee (x \wedge y \wedge x)$$

$$= (x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x) \wedge (y \vee z \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge z \wedge y) \vee x).$$

Lemme 2. *(i) Soit S un treillis asymétrique à gauche. Alors, pour tout $x, y \in S, r_W(x, y) = r_L(x, y)$.*
(ii) Soit S un treillis asymétrique à droite. Alors, pour tout $x, y \in S, r_W(x, y) = r_R(x, y)$.

Théorème 4.3.5. *(i) Les solutions distributives faibles sont toujours idempotentes, c'est-à-dire que $r_W^2 = r_W$.*
*(ii) Toute solution distributive **forte** est une solution distributive **faible**.*
(iii) Tout treillis asymétrique distributif, simplement annulatif et symétrique inférieure est une solution distributive faible.
(iv) Un treillis asymétrique est une solution distributive faible si et seulement s'il est distributive, simplement annulative et symétrique inférieure.

Preuve :

Notez par S_L et S_R le facteur gauche et le facteur droit de S, respectivement.

(i) et (ii) sont valables car ils sont valables pour S_L (où par le lemme 2 r_W se réduit à r_L) et pour S_R (où r_W se réduit à r_R). et pour S_R (où r_W se réduit à r_R).

(iii) Soit S un treillis asymétrique distributif, simplement annulatif et symétrique inférieur. Par Théorème 3.1.1, il suffit de prouver que S_L et S_R sont des solutions distributives faibles. Puisque S_L est gauchère, il découle du lemme 2 que S_L est une solution distributive faible si et seulement si elle est une solution distributive faible. Si et seulement si elle est une solution distributive gauche ; de même, S_R est une solution distributive faible si et seulement si elle est une solution distributive gauche. Si et seulement si elle est une solution distributive droite. Par [11], un treillis asymétrique gauche est un treillis annulaire gauche. gauche est cancellatif à gauche si et seulement s'il est symétrique inférieur et simplement cancellatif. annulatif ; de même, un treillis asymétrique droit est annulatif droit si et seulement s'il est symétrique inférieure et simplement annulative.

Par conséquent, S_L est distributive et annulative à gauche, et donc une solution distributive gauche par le théorème 4.3.2. De même, S_R est distributive et annulative à droite, et donc une solution distributive à droite par le théorème 4.3.3.

Prover9 a pu dériver une preuve de (iv).

4.3.4 Solutions en anneaux

Les treillis asymétrique quadratiques dans les anneaux sont annulatifs et distributifs par [17]. Les treillis asymétriques cubiques dans les anneaux sont annulatifs et distributifs par [9]. Les deux résultats suivants sont des corollaires immédiats du théorème 4.3.2

Corollaire 4. *Soit R un anneau et $S \subseteq E(R)$ une bande multiplicative fermée par l'opération $\circ$. Alors $(S, \cdot, \circ)$ est une solution distributive à gauche, à droite et faible de l'équation de Yang-Baxter.*

Corollaire 5. *Soit R un anneau et $S \subseteq E(R)$ une bande multiplicative telle que l'opération $\bigtriangledown$ est fermée et associative sur S. Alors $(S, \cdot, \bigtriangledown)$ est une solution distributive gauche, droite et faible de l'équation de Yang-Baxter.*

conclusion

Ce mémoire, conçu en vue de l'obtention du diplôme de Master en

Mathématiques qui présente la solution de l'équation de Yang-Baxter.

Dans ce mémoire on a étudié l'ensemble théorique du solutions de l'équation de Yang-Baxter,

qui vient de la physique quantiques et théorie des opérateurs.

On a utilise les treillis asymétrique, qui sont des structure algébrique distributive non-commutative

et qui n'a pas encore été reliée à l'équation de Yang-Baxter.

Nous avons discuté de plusieurs exemples de solutions obtenues à partir de treillis asymétrique.

Bibliographie

[1] GARRETT BIRKHOFF, Lattice theory, American Mathematical Society,1948.

[2] B.A.Davey, H.A.Priestley, Introduction to lattices and order, Second edi- tion, Cambridge University Press, Combridge, 2002.

[3] D.Ponasse, J.C.CARREGA, Algèbre et topologie booléennes, MASSON, 1979.

[4] D.M.MILLER and M.A.THORNTON, Multiples valued logique : concepts and représentations, University of Victoria, Canada, Southern Medhodist University, USA.

[5] J. Jordan, P. Uber Nichtkommutative Verbände, Arch. Math. 2 (1949), 56–59.

[6] S. Burris, H.P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, Grad. Texts in Math., vol. 78, Springer-Verlag, New York, 1981.

[7] A.H. Clifford, Bands of semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 499–504.

[8] K. Cvetko-Vah, A new proof of Spinks' theorem, Semigroup Forum 73 (2006) 267–272.

[9] K. Cvetko-Vah, Internal decompositions of skew lattices, Comm. Algebra 35 (2007) 243–247.

[10] K. Cvetko-Vah, J. Pita Costa, On the coset laws for skew lattices, Semigroup Forum 83 (2011) 395–411.

[11] [7] K. Cvetko-Vah, M. Kinyon, J. Leech, M. Spinks, Cancellation in skew lattices, Order 28 (2011) 9–23.

[12] V.G. Drinfeld, On some unsolved problems in quantum group theory, in : Quantum Groups, Leningrad, 1990, in : Lecture Notes in Math., vol. 1510, Springer, Berlin, 1992, pp. 1–8.

[13] K. Cvetko-Vah, J. Pita Costa, On the update operation in skew lattices, J. Appl. Logics, IfCoLog J. Log. Appl. 5 (2018) 1765–1774.

[14] J.M. Howie, An Introduction to Semigroup Theory, L.M.S. Monographs, vol. 7, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1976.

[15] N. Kimura, The structure of idempotent semigroups, Pacific J. Math. 8 (1958) 257–275.

[16] V. Lebed, Cohomology of idempotent braidings with applications to factorizable monoids, Internat. J. Algebra Comput. 27 (4) (2017) 421–454.

[17] J. Leech, Skew lattices in rings, Algebra Universalis 26 (1989) 48–72.

[18] J. Leech, Normal skew lattices, Semigroup Forum 44 (1992) 1–8.

[19] J. Leech, The geometric structure of skew lattices, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993) 823–842.

[20] D. McLean, Idempotent semigroups, Amer. Math. Monthly 61 (1954) 110–113.

[21] M. Petrich, A construction and a classification of bands, Math. Nachr. 48 (1971) 263–274.

[22] W.W. McCune, Mace4, version Dec-2007, http ://www.cs.unm.edu/ mccune/Mace4, 2007.

[23] M. Petrich, N.R. Reilly, Completely Regular Semigroups, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts vol. 23, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley Sons, Inc., New York, 1999.

[24] B.M. Schein, Pseudosemilattices and pseudolattices, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 199 (1983) 1–16.