Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Tabakhi Raniya

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : ***Mathématiques***

Spécialité : Système dynamique

Thème

Les groupes non hypercentraux-minimaux

Soutenu publiquement Juin 2022 devant le jury composé de

Dr. Sidhom Karima	Président
Dr. Azra Souad	Encadreur
Dr. Chbel Zoheir	Examinateur
Dr. Adimi Hadjer	Examinateur

Promotion 2021/2022

Table des matières

Notations

Soit G un groupe, n un entier positif, X, Y deux parties non vides de G et x, y, g des éléments de G. On utilisera les notations suivantes :

- $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$; où $x^y = y^{-1}xy$.
- $[x, y] = \langle [x, y] | x \in X, y \in Y \rangle$.
- $G^{(0)} = G, G^{(1)} = G'$ le sous-groupe dérivé de G.
- $G^{(n)}$ le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la série dérivé de G.
- $\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = g'$.
- $\gamma_n(G)$ le $n^{\text{ème}}$ terme de la série centrale inférieure de G.
- $Z_0(G) = 1, Z_1(G) = Z(G)$ le centre de G.
- $Z_n(G)$ le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la série centrale supérieure de G.
- $G^n = \langle x^n / x \in G \rangle$ le sous-groupe engendré par la $n^{\text{ème}}$ puissance des éléments de G.
- Si $\mathcal{X} et \mathcal{Y}$ sont deux classes de groupes, alors le produit $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ désigne la

classe des groupes G qui admettent un sous-groupe normal $N \in \mathcal{X}$ tel que $\frac{G}{N} \in \mathcal{Y}$.

- $C_G(X)$ le centralisateur de H dans G.
- $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G.
- N_G l'intérieur normal de N dans G.
- $H \sqsubset G$ le sous-groupe H est caractéristique dans G.
- $HsnG$ le sous-groupe H est sous-normal dans G.
- C_{p^∞} est le groupe quasicyclique.
- $HascG$ le sous-groupe H est ascendant dans G.
- $\mathcal{A}$ est la classe des groupes abéliens.
- $\mathcal{C}$ est la classe des groupes de Cernikov.
- $\mathcal{F}$ est la classe des groupes finis.
- $\mathcal{LN}$ est la classe des groupes localement nilpotents.
- $\mathcal{N}$ est la classe des groupes nilpotents.
- $\mathcal{LF}$ est la classe des groupes localement finis.
- $\mathcal{ZA}$ est la classe des groupes hypercentraux.
- $\mathcal{N_K}$ est la classe des groupes nilpotents de classe $\leq K$.

Introduction

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes. On dit qu'un groupe G est un non-$\mathfrak{X}$-groupe minimal, si tous sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}$-groupes et si G lui-même n'appartient pas à $\mathfrak{X}$.
L'objectif est de chercher la structure des non-$\mathfrak{X}$-groupes minimaux.
Plusieurs auteurs ont étudié ce problème dans le cas des groupes finis et les résultats les plus importants ont été obtenus par $G.A.$Miller et H.Moreno en 1903 [4].
Ensuite, en 1964 l'étude des groupes non-$\mathfrak{X}$-minimaux a été réalisée pour la première fois dans le cas des groupes infinis avec la parution de l'article de M.F.Newman et Wiegold [5] Cette dernière, et bien qu'elle ne fut pas complète, a incité plusieurs auteurs à étudier ce genre de problèmes et de nombreuses publications ont été faites dans ce sens et beaucoup de résultats sur les groupes infinis non-$\mathfrak{X}$-minimaux, pour diverses propriétés (ou classes) de groupes $\mathfrak{X}$, ont été obtenus. Et parmi les chercheurs qui ont étudié ce problème, en 2015 F.DE.Giovanni et M.Trombetti [3] ont étudié les groupes infinis de type infini minimaux non-hypercentraux.
Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des groupes dont tous les sous-groupes propres sont hypercentraux. Ces travaux ont quelque peu progressé, notamment dans le cas de type fini. De plus, on a obtenu quelques résultats dans le cas de type infini, on présente les résultats qu'ils ont obtenus. Ainsi S.Azra qui a étudiée cette classe a trouvé d'autre résultats. Ce mémoire se compose de trois chapitres.
Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions fondamentales à la théorie des groupes. On commence par la notion de condition maximale et minimale sur les sous-groupes. Après cela, nous intéresserons aux groupes, sous-groupes, sous-groupes normaux, les groupes de quotients,.....Puis on s'intéressera aux classes des groupes localement gradués, nilpotents, localement nilpotents,...On terminera le chapitre le sous-groupe de Fratini et les groupes hypercentraux.
Dans le deuxième chapitre, on présentera les résultats qui ce trouvent sur les groupes non-hypercentraux minimaux de type fini avec quelques résultats trouvés par S.Azra. Plus précisément, on établira que si G est un groupe non-hypercentral minimal, alors G est un groupe parfait de type fini n'admettant pas de sous-groupes propres d'indice fini et $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini.
Dans le troisième chapitre, on présentera les résultats qui se trouvent sur les groupes non-hypercentraux minimaux de type infini. Le résultat principal a été obtenu par F.De.Giovanni

et M.Trombrtti[3], ils ont étudié les groupes infinis localement gradués, avec quelques résultats trouvés par S.Azra.

Chapitre 1

Les notions fondamentales à la théorie des groupes

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques les notions principaux à la théorie des groupes. D'abord on va introduire notion fondamentale sur la condition maximale et minimale sur les sous groupes. Après cela, nous intéresserons aux groupes (sous groupes, sous groupes normaux, quotients, finis, abéliens, polycycliques), nilpotents et résolubles. Enfin, nous terminons par le sous-groupe de Fratini et les groupes localement gradués et hypercentraux .

1.1 Groupes

Dans cette section on va introduire les notions des groupes.

Définition 1.1. Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition définie par :

$$(x * y) \to x * y.$$

On dit que la loi " $*$ " définie sur G est un groupe si :

1) La loi " $*$ " est une loi de composition interne sur G c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in G : x * y \in G.$$

2) La loi " $*$ " associative, c'est-à-dire :

$$\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z).$$

3) G admet un élément neutre par rapport à " $*$ " (noté e) c'est-à-dire :

$$\exists e \in G, \forall x \in G : x * e = e * x = x.$$

4) Chaque x de G admet un élément symétrique x' de G c'est-à-dire :

$$\forall x \in G, \exists x' \in G : x * x' = x' * x = e.$$

Exemple 1.1.

(1) $(\mathbb{Q},+)$ *;* $(\mathbb{R},+)$ *;* $(\mathbb{C},+)$ *;* $(\mathbb{Z},+)$ *;* $(\mathbb{Q}/0,.)$ *;* $(\mathbb{R}/0,.)$ *;* $(\mathbb{C}/0,.)$ *sont des groupes.*

(2) $(Z^*,\times)$ *n'est pas un groupe car 2 n'a pas d'inverse* $(pour \times)$ *.*

(3) $(\mathbb{N},+)$ *n'est pas un groupe car 3 n'a pas d'inverse* $(pour+)$*.*

Remarque 1.1. *Le cardinal de l'ensemble* G *est appelé l'ordre du groupe* G *noté* $\mid G \mid$*.*

Définition 1.2. Un groupe est dit fini s'il possède un nombre fini d'élément dans ce cas, le cardinal de G s'appelle : l'ordre du groupe G, il est noté $O(G)(ou \mid G \mid)$.

Proposition 1.1. *Soit* $(E,*)$ *un groupe alors :*

1) *Si* e *et é sont deux éléments neutres pour* $"*"$ *dans* E*, alors* $e = e'$*.*

2) $\forall (x,y,z) \in E^3 : x*y = x*z \longrightarrow y = z$*.*

3) $\forall (x,y,z) \in E^3 : y*x = z*x \longrightarrow z = y$*.*

4) *Tout élément dans* E *admet un symétrique unique.*

5) $\forall (x,y) \in E^2 : (x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$*.*

6) $\forall x \in E : (x^{-1})^{-1} = x$*.*

Démonstration :

1) On a e *est l'élément neutre et* $e' \in E$*.*

$$\Rightarrow e'*e = e*e' = e'. \tag{1.1}$$

Puisque é est l'élément neutre et $e \in E$*.*

$$\Rightarrow e*e' = e'*e = e. \tag{1.2}$$

D'après (1.1) *et* (1.2) *:*

$$e = e'.$$

2) Soit $\forall x,y,z \in E$*,*

$$x*y = x*z \Rightarrow x^{-1}*(x*y) = x^{-1}*(x*z).$$

Par l'associativité on a :

$$(x^{-1}*x)*y = (x^{-1}*x)*z.$$

$$\Rightarrow e*y = e*z.$$

$$\Rightarrow y = z.$$

3) On pose que x admet deux symétriques x_1 et x_2 dans $(E,*)$ Alors :

$$\begin{cases} x_1 * x = e \\ x_2 * x = e \end{cases} \Leftrightarrow x_1 * x = x_2 * x = x \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(car x est régulier).

4) Soient x et y dans E , $y^{-1} * x^{-1}$ est l'inverse $x * y$

$$\begin{aligned}
(x*y)*(y^{-1}*x^{-1}) &= x*(y*y^{-1})*x^{-1} \\
&= x*e*x^{-1} \\
&= x*x^{-1} \\
&= e. \\
(y^{-1}*x^{-1})*(x*y) &= y^{-1}*(x^{-1}*x)*y \\
&= y^{-1}*e*y \\
&= y^{-1}*y \\
&= e.
\end{aligned}$$

Donc :

$$(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}.$$

5) Soit x dans E alors :$x^{-1} \in E$ alors,

$$\begin{aligned}
(x^{-1})^{-1} \in E &\Rightarrow x^{-1}*(x^{-1})^{-1} = e. \\
&\Rightarrow x*(x^{-1}*(x^{-1})^{-1}) = e*x. \\
&\Rightarrow (x*x^{-1})*(x^{-1})^{-1} = x. \\
&\Rightarrow e*(x^{-1})^{-1} = x. \\
&\Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x.
\end{aligned}$$

Définition 1.3. (Ordre d'un élément).
Soient G un groupe et a un élément de G, l'ordre du sous groupe engendré par a est aussi l'ordre de a, noté $|a| = |\langle a\rangle|$.

Remarque 1.2. *Si l'ordre de a est fini on dit que a est fini si non a est d'ordre infini .*

Théorème 1.2. *Soient G un groupe et a un élément de G alors :*

1) a est d'ordre fini si et seulement s'il existe m de $(\mathbb{N}^*)$ tel que $a^m = e$.

2) Si a est un élément de G d'ordre fini, alors $|a|$ est le plus petit entier positif n vérifiant $a^n = e$, i,e :

$$|a| = \min\{n \in (\mathbb{N}^*)/a^n = e\}.$$

Proposition 1.3. *Soit a un élément d'ordre fini n alors :*

$$\langle a \rangle = \{e, a, ..., a^n\}.$$

Remarque 1.3. *Soient G un groupe et a un élément de G ; les trois conditions suivantes sont équivalents :*

1) *a est d'ordre fini ;*
2) *a^{-1} est d'ordre fini ;*
3) *$\forall K \in (\mathbb{Z}), a^K$ est d'ordre fini .*

1.2 Sous-groupes

Définition 1.4. Soit $(G, *)$ un groupe, H une partie non vide de G .
On dit que H est un sous groupe de G si H est aussi un groupe par rapport a la loi induite par celle de G .

- La notation $H \leq G$ est utilisée pour exprimer le fait que H soit un sous-groupe de G.
- La notation $H < G$ est utilisée pour exprimer que H est un sous-groupe propre de G.

Comme " $*$ " est associative dans G alors sa restriction à H est aussi associative.

Proposition 1.4. *Soit $H \neq \emptyset$ est un groupe de $(G, *)$ s'il est stable par rapport à $*$ et à l'opération inversion, c'est-à-dire :*

$$\begin{cases} (i) & H \neq \emptyset \\ (ii) & \forall a, b \in H, a * b \in H \\ (iii) & \forall a \in H, a^{-1} \in H \end{cases}$$

Il est claire que si $(G, *)$ est un groupe, alors H est un sous groupe de G.

Exemple 1.2. *Soit $(G, *)$ un groupe et $H = \{x \in G; \forall y \in G, x * y = y * x\}$, alors H est un sous groupe de G .*
En effet,

i) Si e est l'élément neutre de " $*$ ", alors $e \in H$ car :

$$\forall y \in G, \quad e * y = y * e = y.$$

ii) Soient $x, y \in H$, alors :

$$\begin{aligned}
\forall z \in G, (x * y^{-1}) * z &= (x * y^{-1}) * (z^{-1})^{-1} \\
&= x * (y^{-1} * (z^{-1})^{-1}) \text{ car } * \text{ est associative} \\
&= x * (z^{-1} * y)^{-1} \\
&= x * (y * z^{-1})^{-1} \text{ car } y \in H \\
&= x * ((z^{-1})^{-1} * y^{-1}) \\
&= x * (z * y^{-1}) \\
&= (x * z) * y^{-1} \text{ car } * \text{ est associative} \\
&= (z * x) * z^{-1} \text{ car } x \in H \\
&= z * (x * y^{-1}) \text{ car } * \text{ est associative}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $x * y^{-1} \in H$.

*De **i)** et **ii)** on déduit que H est un sous groupe de G.*

Remarque 1.4. *Sachant que si "e" est l'élément neutre d'un groupe $(G, *)$, alors il commute avec tous les éléments de G, de l'exemple précédent on déduit que si e est l'élément neutre d'un groupe $(G, *)$ alors, $\{e\}$ est un sous-groupe de G .*

Définition 1.5. Soit $(G, *)$ un groupe, on dit que H est un sous groupe propre de G si $H \neq \{e\}$ et $H \neq G$.

Lemme 1.5. *Soit E un groupe et $\{H_i \setminus i \in I\}$ une famille de sous-groupe de E, alors $\cap_{i\in I} H_i$ est un sous groupe de E.*

Démonstration : $\forall i \in I, e \in H_i \Rightarrow e \in \cap_{i\in I} H_i$,

a) Soit $x, y \in \cap_{i\in I} H_i$, $\forall i \in I, x, y \in H_i$ alors :

$$x * y \in H_i \Rightarrow x * y \in \cap_{i\in I} H_i.$$

b)Soit $x \in \cap_{i\in I} H_i$, alors :

$$\forall i \in I, x \in H_i \Rightarrow x^{-1} \in H_i \forall i \in I \Rightarrow x^{-1} \in \cap_{i\in I} H_i.$$

Proposition 1.6. *Un sous-ensemble H d'un groupe G est dit sous groupe de G si et seulement si :*

- *H est non vide .*
- *$\forall g, h \in H \Rightarrow gh^{-1} \in H$.*

1.3 Classe à droite,classe à gauche modulo un sous-groupe

Soit G un groupe, H un sous groupe de G. Pour chaque élément $x \in G$, on peut associer un sous ensemble de G défini comme suit :

$xH = \{xh/h \in H\}$ et $Hx = \{hx/h \in H\}$ qui s'appelle classe à gauche et à droite modulo H d'un élément x .
L'ensemble de toutes les classes à gauche modulo H sera noté $(G/H)_g$, i,e :

$$(G/H)_g = \{xH/x \in G\}$$

L'ensemble de toutes classes à droite modulo H sera noté $(G/H)_d$, i,e :

$$(G/H)_d = \{Hx/x \in G\}$$

Théorème 1.7. *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G alors :*

i) $\forall x \in G : x \in H : (xH = H) \Leftrightarrow (x \in H)$.

ii) $\forall x, y \in G : (Hx = Hy) \Leftrightarrow (xy^{-1} \in H),$ *et* $(xH = yH) \Leftrightarrow (x^{-1}y \in H)$.

iii) $G = \cup_{x\in G}(xH) = \cup_{x\in G}(Hx)$.

Définition 1.6. (L'indice d'un sous-groupe)
Soit G un groupe, et H un sous groupe de G .
Le cardinal de l'ensemble des classes à gauche modulo H (qui est le même de celui de l'ensemble des classes à droite) est appelle l'indice de H dans G noté $|G : H|$ ou $\frac{G}{H}$.

Théorème 1.8. *Soit G un groupe, on a : $H \leq K \leq G$ alors : $|G : K| = |G : H|.|H : K|$.*

1.4 Sous-groupe normaux

Théorème 1.9. *Soient G un groupe et H un sous groupe de G alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\forall g \in G : gH = Hg$;

(2) $\forall g \in G; \forall h \in H \quad g^{-1}h \in H$;

(3) $\forall g \in G : g^{-1}hg \in H$;

(4) $\forall g \in G : g^{-1}Hg = H$.

Définition 1.7. Si H un sous-groupe de G qui vérifie l'une des condition (1),(2),(3),(4), alors H est dit sous-groupe normal de G et on note $H \trianglelefteq G$.

Exemple 1.3.

1) Soit G un groupe, alors $\{e\} \trianglelefteq G$ et $G \trianglelefteq G$.

2) Dans le groupe $(\mathbb{N}, +)$ tout sous-groupe est un sous-groupe normal.

Définition 1.8. (Normalisateur d'un groupe)
Soient G un groupe et H un sous-groupe de G .
L'ensemble $N_G(H) = \{g \in G/g^{-1}Hg = H\}$ s'appelle normalisateur de H dans G .
$N_G(H)$ est le plus grande sous groupe de G dans le quel H est normal .

Théorème 1.10. *Soit H un sous groupe d'un groupe G alors :*

$$H \trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(H) = G.$$

Définition 1.9. (Groupe simple).
Soit G un groupe différent de $\{e\}$, on dit que G simple s'il n'admet aucun sous-groupe propre normal.
Donc G est simple si et seulement si :

$$\forall H \quad (H \trianglelefteq G) \Leftrightarrow (H = \{e\} \quad ou \quad H = G).$$

1.5 Groupes quotients

Définition 1.10. Si N est un sous-groupe normal d'un groupe G, le groupe quotient (ou groupe facteur) de N dans G noté par :

$$G/N.$$

1.6 Groupe engendré par un ensemble, groupes de type finis

1.6.1 Groupe engendré par un ensemble

Définition 1.11. Soit G un groupe, X une partie non vide de G le plus petit sous groupe de G qui contient X est appelé sous-groupe engendré par X, il est noté par $\langle X \rangle$.

Remarque 1.5. *$\langle X \rangle$ est l'intersection de tous les sous groupes de G qui contient X .*

$$\langle X \rangle = \cap_{\{x \leq H \leq G\}} H.$$

Proposition 1.11. *X étant une partie non vide d'un groupe G :*

$$\langle X \rangle = \{x_1^{\epsilon_1}, x_2^{\epsilon_2}, ..., x_r^{\epsilon_r} / r \in (\mathbb{N}^*), x_i \in X, \epsilon_i \mp 1, \forall 1 \leq i \leq r\}.$$

1.6.2 Groupes de type fini

Définition 1.12. Un groupe G dit de type fini, s'il peut être engendré par un nombre fini d'éléments ; **i.e** s'il existe $x_1, ..., x_n \in G$ tel que $G = \langle x_1, ..., x_n \rangle$.

Remarque 1.6. *Un groupe fini est nécessairement de type fini mais la réciproque est fausse .*

Théorème 1.12. *Soit G un groupe alors :*

1) $\forall X \subseteq G$.

i) $(\langle X \rangle = \{e\}) \Longleftrightarrow X = \{e\} \vee X = \phi$.

ii) $(\langle X \rangle = X) \Longleftrightarrow (X \leq G)$.

iii) $\langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle$.

2) $\forall X, Y \subseteq G : (X \subset Y) \Leftrightarrow \langle X \rangle \leq \langle Y \rangle$.

1.7 Groupe périodiques, localement finis et d'exposent finis

Définition 1.13. Soit G un groupe multiplicatif :

i) G est dit périodique, si tous ses éléments sont d'ordre fini ; i.e $\forall x \in G\ \exists n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = 1$.

ii) G est dit localement fini, si tout sous-groupe de type fini est fini.

iii) G est dit d'exposent fini, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in G$, $x^n = 1$. Le plus petit entier qui vérifie cette condition est appellé l'exposent de G.

Théorème 1.13. *Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \triangleleft G$.*

i) Si G est périodique (resp, d'exposent finis, localement finis), alors il est de même pour H et $\frac{G}{N}$.

ii) Si N et $\frac{G}{N}$ sont périodiques (resp, d'exposent finis, localement finis), alors il est de même pour G.

Théorème 1.14.

i) Tout groupe fini est localement fini.

ii) Tout groupe résoluble périodique est localement fini.

Remarque 1.7. *Si G est localement fini, alors G est périodique.*

1.8 Groupes cycliques

Définition 1.14. On dit qu'un groupe G est cycliques s'il existe un élément a de G tel que $G = \langle a \rangle$.

Proposition 1.15. *G est cyclique si et seulement s'il existe un élément a de G tel que :*

$$G = \{a^n / n \in (\mathbb{Z})\}.$$

Exemple 1.4. $(\mathbb{Z})$ *est cyclique engendré par* $+1$ *ou* -1 *.*

Proposition 1.16. *Tout groupe cyclique est abélien.*

Remarque 1.8. *Tous sous groupe d'un groupe cyclique est cyclique .*

1.9 Morphisme d'un groupe

Définition 1.15. Soient G et H deux groupes, on appelle morphisme de groupe ou homomorphisme de groupes de G dans$H$ toute application $\varphi : G \longrightarrow H$ satisfait :

$$\forall g, g' \in G; \quad \varphi(gg') = \varphi(g).\varphi(g').$$

On dit que φ est un isomorphisme de groupes si de plus φ est bijective, un endomorphisme de G si $G = H$, et un automorphisme du groupe G si c'est un isomorphisme de G dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme bijective.

Définition 1.16. Soit $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes .

- On appelle image de φ le sous-ensemble .

$$Im\varphi = \varphi(G) = \{\varphi(g), g \in G\} \subset H.$$

- On appelle noyau de φ le sous-ensemble .

$$\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{e_H\}) = \{g \in G, \varphi(g) = e_H\} \subset G.$$

1.10 Théorèmes d'isomorphismes

Théorème 1.17. ***(Le premier théorème d'isomorphisme)***

i) Si $\alpha : G \to H$ est un homomorphisme de groupes, l'application $\theta : (Ker\alpha)X \mapsto X^{\alpha}$ est un isomorphisme de $G/Ker\alpha$ à $Im\alpha$.

ii) Si N est un sous groupe normal d'un groupe G, l'application $\nu : x \mapsto Nx$ est un homomorphisme de G à G/N avec le noyau N. (Ce ν est appelé homomorphisme naturel ou canonique).

Théorème 1.18. ***(Le deuxième théorème d'isomorphisme)*** *Soit H un sous-groupe et N un sous-groupe normal d'un groupe G. Alors $N \cap H \triangleleft H$ et $(N \cap H)x \mapsto Nx$ est un isomorphisme de $H/N \cap H$ à NH/N.*

Théorème 1.19. ***(La troisième théorème d'isomorphisme)*** *Soit M et N des sous-groupes normaux d'un groupe G et soit $N \leq M$. Alors*

$$M/N \triangleleft G/N \text{ et } (G/N)/(M/N) \simeq G/M.$$

1.11 Condition maximale et condition minimale sur les sous- groupes

Maintenant on va introduire les notions de condition maximale et minimale sur les sous-groupes. Ces notions sont très utilisé dans l'étude des groupes infini.

Définition 1.17.

(i) On dit que G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes s'il n'existe pas de chaine infinie strictement ascendante $H_1 < H_2 < .... < H_i < H_{i+1} < ....$ de sous-groupes de G .

(ii) On dit que G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes s'il n'existe pas de chaine infinie strictement descendante $H_1 > H_2 > .... > H_i > H_{i+1} > ...$ de sous-groupes de G . On notera max (resp min) la condition maximale (resp la condition minimale) sur les sous-groupes.

Proposition 1.20.

(i) Un groupe G vérifie max si, et seulement si, tout ensemble non vide de sous-groupe de G admet un élément maximal .

(ii) Un groupe G vérifie min si, et seulement si, tout ensemble non vide de sous-groupe de G admet un élément minimal .

Exemple 1.5.

(i) Tout groupe fini vérifie max et min.

(ii) Les groupes cycliques infinis vérifient max. En effet, On sait que $mZ \leq nZ$ si, et seulement si, n divis m ou $m, n \in (\mathbb{N}^*)$. comme les diviseurs de m sont en nombre fini, il en résulte qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes de Z contenant mZ. D'où le groupe cycliques infinis Z satisfait la condition maximale.

(iii) Les groupes cycliques infinis ne vérifient pas min. En effet, on a $Z > 2Z > 4Z > .... > 2^i Z > 2^{i+1} Z > .....$ est une chaine strictement descendante de Z. Le théorème suivant nous donne une caractérisation des groupes vérifiant max, qui montre que ces groupes jouent d'une importante propriété.

Théorème 1.21. *Un groupe G vérifie max si, et seulement si, tout sous-groupe de G est de type fini.*

Remarque 1.9. *Tout groupe vérifiant min est périodique. En effet, soit G un groupe vérifiant min. par l'absurde, supposons qu'il existe $1 \neq x \in G$ tel que $0(x) = \infty$, donc $< x >$ est cyclique infini, d' ou toutes les puissances de x sont distinctes. Par suite on obtient*

$G > \langle x \rangle > \langle x^2 \rangle > \langle x^4 \rangle > ... > \langle n x_2^i \rangle > \langle x_{i+1}^2 \rangle > ...$ est une chaine infinis strictement descendante de sous-groupes de G, $0(x) < \infty$ et G est donc périodique.
Le théorème suivant nous donne quelque propriétés des groupes vérifiant max ou min.

Théorème 1.22. *soit G un groupe, $H \leqslant G$ et $N \triangleleft G$.*

(i) Si G vérifie max (resp min), alors H vérifie max (resp min).

(ii) Si G vérifie max (resp min), alors G/H vérifie max (resp min).

(iii) Si N et G/N vérifie max (resp min), alors N vérifie max (resp min).

1.12 Groupes abéliens

Définition 1.18. On dit qu 'un groupe $(G, *)$ est abélien ou commutatif lorsque la loi de composition interne de groupe est commutative c'est-à-dire :

$$\textit{Pour tout } (a, b) \in G^2, a * b = b * a.$$

Exemple 1.6.

- *Le sous groupe d'un groupe G engendré par élément est abélien.*
- *Le groupe $G \ln(k)$ n'est pas abélien. Si $n \geq 2$*
- $(\mathbb{Z}, +); (\mathbb{Q}, +); (\mathbb{R}, +)$ *sont des groupes commutatifs l'élément neutre est* 0 *et l'inverse de x et $-x$.*
- $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *muni du produit sont des groupes commutatifs l'élément neutre est* 1, *l'inverse de x est $\frac{1}{x}$.*
- *L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de l'addition est un groupe abélien .*

Remarque 1.10. *Tout sous-groupe d'un groupe abélien est lui-même abélien mais un groupe non abélien peut contenir des sous-groupes abéliens aussi bien que des sous-groupes abéliens .*

1.13 Groupes abéliens de type fini

Les groupes abéliens de type fini ont une structure assez simple comme dans les résultats suivants.

Théorème 1.23.

(i) Si G est un groupe abélien de type fini, alors G max.

(ii) Un groupe abélien G est de type fini si, et seulement si, G est produit direct d'un nombre fini de groupes cycliques d'ordre infini ou une puissance d'un nombre premier.

(iii) Tout groupe abélien périodique et type fini.

1.14 Groupe divisible

Dans cette sous-section on introduit une classe importante de groupes abéliens.

Définition 1.19. Un groupe abélien G est dit divisble si pour tout élément g de G et tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un élément x de G tel que $x^n = g$; i,e $\quad G^n = G$.

Exemple 1.7.

(i) Le groupe additif des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est un groupe divisible.

(ii) Le groupe quasicyclique C_{p^∞} est un groupe divisible.

(iii) Les groupes cycliques et les groupes d'exposant finis ne sont pas divisibles.
Dans ce qui suit on a une caractérisation des groupes abéliens divisible.

Théorème 1.24. *Soit G un groupe abélien. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G divisible,

(ii) G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini,

(iii) $G = G^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

(iv) $G = G^p$ pour tout nombre premier p.

Théorème 1.25. *Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \trianglelefteq G$.*

(i) Si G est divisible, alors G/N est divisible.

(ii) Si G est divisible ; alors H n'est pas nécessairement divisible (les sous-groupes des groupes quasicycliques ne sont pas divisibles).

1.15 Groupe quasicyclique

H.Prufer a défini un type important de groupes abéliens qui jouent un role fondamentale dans la théorie des groupes abéliens. Ces groupes s'appellent groupes de Pufer, ou groupes de type P^∞, ou encore groupes quasicycliques.

Définition 1.20. Soit P un nombre premier. On appelle groupe quasicyclique tout groupe G engendré par des éléments $a_1, a_2, a_3, ...$ vérifiant $a_1^P = 1, a_{i+1}^P = a_i$ et $a_i a_j = a_i a_j$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$; i,e

$$G = \langle a_1, a_2, a_3, ... | a_1^P = 1, a_{i+1}^P = a_i \text{ et } a_i a_j = a_j a_i \rangle$$

.
Le groupe quasicyclique sera noté C_{P^∞} .

Remarque 1.11.

(i) Il est clair que le groupe quasicyclique est un p-groupe abélien infini.

(ii) L'ordre de tout élément a^i du groupe quasicyclique est p^i.

(iii) Tout sous-groupe propre d'un groupe quasicyclique est cyclique d'ordre une puissance de p.

(iv) Tout groupe quasicyclique vérifie min car tous ses sous-groupe sont finis. Mais ne vérifie pas max car il est la réunion d'une chaine infinie strictement ascendant de sous-groupe cyclique d'ordre $p, p^2, p^3, ...$

Le théorème suivant nous montre l'importance des groupes quasicycliques pour les groupes abéliens.

Théorème 1.26. *Un groupe abélien G vérifie min si, et seulement si, G est produit direct d'un nombre fini de groupes quasicyclique ou de groupes cycliques d'ordre une puissance d'un nombre.*

1.16 Groupes nilpotents

Définition 1.21. Un groupe G est dit nilpotent s'il admet une série centrale finie, i,e une série finie de sous-groupes normaux

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$$

telle que $G_{i+1} \setminus G_i \leq Z(G \setminus G_i)$ pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$. La longueur de plus coure série centrale de G est appelée "classe de nilpotence de G".

Remarque 1.12.

(i) Toute série centrale est une série abélienne donc tout groupe nilpotent est résoluble.

(ii) Tout groupe nilpotent non trivial admet un centre non trivial, i,e si $G \neq 1$ est nilpotent, alors $Z(G) \neq 1$.

Exemple 1.8.

(i) Si $G = 1$, alors G est nilpotent de classe 0.

(ii) Si $G \neq 1$ est abélien, alors G est nilpotent de classe 1. En effet $\sum : 1 = G_1 \lhd G = G$ est une série dont le quotient $G \setminus 1 \simeq G = Z(G) \simeq Z(G \setminus 1)$, donc $\sum$ est centrale.

(iii) Si G est un p-groupe fini ; i,e $|G| = p^n$ ou $n \in N$ et p premier, alors G est nilpotent.

En effet, il suffit d'utiliser une récurrence sur $|G|$. si $n = 1$, alors $|G| = p$ donc G est cyclique, d'où G nilpotent. Supposons que $n \geq 2$ et que tout p-groupe fini d'ordre strictement inférieure à $|G| = p^n$ est nilpotent. Comme $|G| = p^n$, alors $Z(G) = 1$, donc $|G \setminus Z(G)| < |G|$. Par l'hypothèse de récurrence G $Z(G)$ est nilpotent et admet la série centrale $\sum : Z(G) \setminus Z(G) = G_1 \setminus Z(G) \lhd G_2$ $Z(G) \lhd .... \lhd G_c \setminus Z(G) = G$ $Z(G)$. Donc G admet la série centrale $\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_c = G$, ce qui implique que G est nilpotent.

1.17 Groupe résoluble

Définition 1.22. On dit qu'un groupe G est résoluble s'il admet une série abélienne fini de sous-groupe, i,e s'il existe

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ....G_n = G$$

tel que G_{i+1}/G_i est un groupe abélien pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

Exemple 1.9. *Si G est un groupe abélien, alors G résoluble car $\sum : 1 \lhd G$ est une série abélienne de G .*
Notons que les groupes résolubles de longueur dérivée au plus égale à 1 sont exacte-ment les groupes abéliens, et les groupes résolubles de longueur dérivée au plus à 2 sont appelés les groupes métabéliens.

Théorème 1.27. *Soit G un groupe résoluble, alors :*

(i) Si $H \leq G$. alors H résoluble.

(ii) Si $N \lhd G$, alors G/N est résoluble.

(iii) Si $N \lhd G$. si N et G/N sont résoluble alors G est résoluble.

Lemme 1.28.

(i) Soient G un groupe, H et K deux sous groupes normaux et résolubles de G. Alors HK est un sous-groupe normale et résoluble de G.

(ii) Le produit direct de deux groupes résoluble est résoluble.

1.18 Sous-groupe de Fratini

Définition 1.23. Soit G Un groupe. Le sous-groupe de Fratini, qu'on note $Frat(G)$, est défini comme l'intersection de touts les sous-groupes maximaux de G. Si G n'admet pas de sous-groupes maximaux, alors $Frat(G) = G$.

Exemple 1.10.

(i) Si G est un groupe quasicyclique, alors $Frat(G) = G$.

(ii) On a $Frat(Z) = \{0\}$ car les sous-groupes maximaux de $(\mathbb{Z})$ sont de la forme $p_i(\mathbb{Z})$ où les p_i sont des nombres premiers, donc $Frat((\mathbb{Z})) = \cap_{p_i \in p} p_i(\mathbb{Z})$, où p est l'ensemble de tous les nombres premiers. Si $n \in \cap_{p_i \in p} p_i(\mathbb{Z})$, alors $n \in p_i(\mathbb{Z}) \forall P_i \in p$, ce qui implique que p_i divise n pour tout $p_i \in p$, ce qui contradictoire. D'où $Frat(\mathbb{Z}) = \{0\}$.
Rappelons qu'un élément g est dit un élément non-générateur de G si l'égalité $G = \langle g, s \rangle$ implique $G = \langle s \rangle$, où S est une partie de G.
A partir de ce rappel, on peut donner autre définition d'un sous-groupe de Fratini comme le montre le théorème suivante.

Théorème 1.29. *Le sous-groupe de Fratini d'un groupe G, est l'ensemble des éléments non-générateurs de G.*

Lemme 1.30. *Si N est un sous-groupe normal d'un groupe G, alors $Frat(G/N) \geq Frat(G)N/N$. On a l'égalité si $N \leq Frat(G)$.*
Dans ce qui suite on a quelques propriétés du sous-groupe de Fratini dans sous-groupe fini.

Théorème 1.31. *Soit G un groupe fini.*

(i) Si $N \lhd G, H \leq G$ et $N \leq Frat(H)$, alors $N \leq Frat(G)$.

(ii) Si $K \lhd G$, alors $Frat(K) \leq Frat(G)$.

(iii) Si A est un sous-groupe abélien normal de G tel que $Frat(G) \cap A = 1$ alors, il existe un sous-groupe H tel que $G = HA$ et $H \cap A = 1$.

Remarque 1.13.

(i) Si G est de type fini, alors $Frat(G) \neq G$.

(ii) $Frat(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G.

Théorème 1.32. ***(Wielandt)*** *Soit G un groupe fini. Alors G est nilpotent si, et seulement si $G' \leq Frat(G)$.*

Lemme 1.33. ***(Argument de Fratini).*** *Soit H un sous-groupe normal fini d'un groupe G. Si P est un p-sous-groupe de sylow de H alors, $G = HN_G(P)$.*

Proposition 1.34. *Si un groupe G possède un sous-groupe de fratini $Frat(G)$ fini, alors $Frat(G)$ est nilpotent. En particulier, le sous-groupe de Fratini d'un groupe fini est toujours nilpotent.*

1.19 Groupe nilpotent généralisée

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes. Par classe de $\mathfrak{X}$-groupe généralisée nous entendons une classe de groupe Ω telle que tout $\mathfrak{X}$-groupe est un Ω-groupe et tout Ω-groupe fini est un $\mathfrak{X}$-groupe, i,e $F \cap \Omega \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \Omega$. Dans cette section, on prend $\mathfrak{X} = \nu$ la classe des groupes nilpotents.
La propriété de nilpotence admet un certain nombre de généralisations.On en présente ici quelques unes.

1.20 Groupe localement nilpotent

Définition 1.24. Un groupe G est dit localement nilpotent si, et seulement si, tous ses sous-groupes de type fini sont nilpotents. La classe des groupes nilpotent sera notée .
Il est clair que la classe des groupes localement nilpotents est une classe de groupes nilpotents généralisée car

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{LN} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{LN}.$$

Proposition 1.35. *La classe des groupes localement nilpotents est stable par passage aux sous-groupe et aux quotients.*
On sait que le produit de deux sous-groupe normaux nilpotents d'un groupe est nilpotent, c'est le Théorème de Fitting. Un résultat analogue a été démontré par Hirsch-Plotkin pour les sous-groupe normaux localement nilpotents d'un groupe.

Théorème 1.36. ***(Hirsch-Plotkin).***
Si H et K sont deux sous-groupe normaux localement nilpotents d'un groupe normal localement nilpotents d'un groupe G, alors HK est localement nilpotent.

Proposition 1.37.

i) Tout sous-groupe maximal d'un groupe localement nilpotent est normal.

ii) Tout sous-groupe normal minimal d'un groupe localement nilpotent est central.

1.21 Groupe polycyclique

Définition 1.25. Un groupe G est polycyclique s'il existe une suite décroissante finie $(H_k)_{k=0,1...n}$ de sous-groupe de G telle que :

$$\{1\} = H_0 \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_n$$

Les quotients H_k/H_{k+1} étant cycliques $(pour k = 0, 1, ..., n-1)$ si n est strictement positif.

Lemme 1.38. *Les cycliques sont polycycliques.*

Proposition 1.39. *Tout groupe abélien de type fini est polycyclique.*

1.22 Groupe localement gradué

Définition 1.26. Un groupe G est dit " localement gradués ", si tout sous groupe non trivial de type fini de G admet une image finie non triviale ; c'est-à-dire, si $\forall 1 \neq H \leq G$ où H est de type fini, $\exists N_1 H$ telle que : $N \neq H$ et H/N soit fini .

Exemple 1.11.
• *Tout groupe localement fini est localement gradué ; en effet si G est un groupe localement fini, alors $\forall 1 \neq H \leq G$ où H est de type fini, on a $H/1 \simeq H$ est fini.*
• *Tout groupe cyclique infini est localement gradué, car le groupe $\mathbb{Z}$ est localement gradué ; en effet ; on a $n\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est fini, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Théorème 1.40. *Soit G un groupe localement gradué.*
Si chaque sous-groupe propre de G est localement nilpotent, alors G est localement nilpotent.

1.23 Groupes hypercentral :

Définition 1.27.

(i) On appelle " série ascendante" dans un groupe G, un ensemble de sous groupe $\{H_\beta \setminus \beta \leq \alpha\}$ indexé par des ordinaux inférieurs ou égaux à un ordinal } .
Telle que :

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \quad et \quad H_\alpha = G. \\ H_{\beta_1} &\leq H_{\beta_2}, \quad si \quad \beta_1 \leq \beta_2 \\ H_\beta &\lhd H_{\beta+1} \end{aligned}$$

- Si λ est un ordinal limite, alors $H_\lambda = \cup_{\beta<\lambda} H_\beta$ on note :

$$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd .... \lhd H_\beta \lhd H_{\beta+1} .... H_\alpha = G$$

De plus, si $H_\alpha \lhd G$. Pour tout ordinal $\beta \leq \alpha$, la série précédente est appelée " série normal ascendante".

(ii) Un sous-groupe H d'un groupe G est dit ascendant s'il est un terme d'une série ascendante dans G.
Dans ce qui suit, on donne une généralisation de la série centrale finie, et on introduit une généralisation de la classe des groupes nilpotents .

Définition 1.28.

i) Une série ascendante $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ....G_\alpha = G$ est dite centrale si elle est normale et si $G_{\beta+1}/G_\beta \leq \mathbb{Z}(G/G_\beta)$ pour tout ordinal $\beta < \alpha$.

ii) Tout groupe admettant une série centrale ascendante est dit hypercentral .

iii) La série centrale supérieur d'un groupe G, peut s'étendre de manière transfinie comme suit :

$$\mathbb{Z}_0(G) = 1; \quad \mathbb{Z}_1(G) = \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_{\alpha+1}(G)/\mathbb{Z}_\alpha(G) = \mathbb{Z}(G/\mathbb{Z}_\alpha(G)$$

est $\mathbb{Z}_\lambda(G) = \cup_{\alpha<\lambda} \mathbb{Z}_\alpha(G)$ ou α est un ordinal et λ est un ordinal limite .

iv) Il existe toujours un ordinal τ telle que $\mathbb{Z}_\tau(G) = \mathbb{Z}_{\tau+1}(G)$ ce terme de la série centrale supérieure est appelé l'hypercentre de G. Il est clair que tout groupe nilpotent est hypercentral, et aussi tout groupe hypercentral et fini est nilpotent ; donc la classe des groupes hypercentraux est une classe de groupes nilpotents généralisées.

Remarque 1.14. *Il est clair que tout groupe nilpotent est hypercentral, et aussi tout groupe hypercentral et fini est nilpotente, donc la classe des groupes hypercentraux est une classe des groupes nilpotents généralisée.*
La proposition suivante fourni une deuxième définition des groupes hypercentraux.

Proposition 1.41. *Un groupe est hypercentral si, et seulement si, il est égal à son hypercentre. Le théorème suivant montre la relation entre un groupe hypercentral et un groupe localement nilpotent.*

Théorème 1.42. *Tout groupe hypercentral est localement nilpotent.*

Lemme 1.43. *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe localement nilpotent G. Si N est hypercentral et soit $\frac{G}{N}$ de type fini, alors G est hypercentral.*

Proposition 1.44.

i) Un groupe G est hypercentral si, et seulement si, il est égal à son hypercentre.

ii) Un groupe G est hypercentral si, et seulement si, chaque image homomorphe non-trivial de G a un centre non-trivial.

Proposition 1.45. *Soit G un groupe hypercentral.*

i) Si $1 \neq N \trianglelefteq G$, alors $N \cap Z(G) \neq 1$.

ii) Chaque sous-groupe de G est ascendant.

Théorème 1.46. *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G.*

i) Si G est de type fini, alors il en est de même pour $\frac{G}{N}$.

ii) Si N et $\frac{G}{N}$ sont de types finis, alors G est de type fini.

Remarque 1.15. ***(Higman et H.Newmann et B.H Newmann)*** *Si G est un groupe de type fini et si $H \leq G$, alors H n'est pas nécessairement de type fini.*

Théorème 1.47. *Soit G un groupe de type fini et soit $H \leq G$. Si $|G : H|$ est fini, alors H est de type fini.*

Définition 1.29. Soit G un groupe.Un sous-groupe M de G est dit maximal, s'il $\exists H < G$ et $M < G$, alors $H = M$, ou bien $H = G$.

Théorème 1.48. *Tout groupe de type fini admet un sous-groupe maximal.*

Chapitre 2

Groupes non-hypercentraux minimaux de type fini

2.1 Introduction

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes, On dit qu'un groupe G est un non-$\mathfrak{X}$ groupe minimal, si tous ses sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}$ groupes, mais G lui même n'est pas un $\mathfrak{X}$-groupe.
Les groupes non-$\mathfrak{X}$ minimaux seront notés $MN\mathfrak{X}$.
L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultat qui se trouvent sur les non-hypercentraux groupes minimaux localement gradués .

2.2 Non-$\mathfrak{X}$-groupes minimaux

Dans cette section on donne quelques résultat sur les non-$\mathfrak{X}$-groupes minimaux de type finis et de type infinis.

2.2.1 Groupes infinis de type fini

Avant de présenter les deux théorèmes du Newman et Wiegold sur les $MN\mathcal{N}$- groupe et $MN\mathcal{N}_K$- groupe infini de type fini, on donne la définition suivante :

Théorème 2.1. *Si G est un $MN\mathcal{N}$- groupe ou $MN\mathcal{N}_K$- groupe infini de type fini, alors $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini.*

Théorème 2.2. *Soit G un $MN\mathcal{N}$-groupe ou $MN\mathcal{N}_K$-groupe simple de type fini, alors :*

i) L'intersection de toute paire de sous-groupes maximaux est triviale.

ii) Pour tout élément $1 \neq x$ de G, il existe un élément g de G tel que $G = \langle x, x^g \rangle$.

iii) G n'admet pas d'élément d'ordre 2.

2.2.2 Groupes infinis de type infini

M.F.Newman et J.Wieglod [5] ont trouve ce résultat.

Théorème 2.3. *Si G est un groupe dont toute paire de sous-groupes normaux propres engendre un sous-groupe propre, alors $\frac{G}{G'}$ est soit un p-groupe cyclique, soit un p-groupe quasicyclique ; donc c'est un p-groupe localement cyclique ; et $G' = \cap_{i>2}\gamma_i(G)$.*
M.F.Newman et J.Wiegold [5] ont obtenu une description complète des groupes non-nilpotents localement nilpotents possédant des sous-groupes maximaux et dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents.
Soient p un nombre premier, n un entier positif et $r = 0, 1$. Notons B l'ensemble des groupes $B(p, n, r)$ où $B(p, n, r)$ est le groupe engendré par l'ensemble $\{b, h_1, h_2, ...\}$ tel que ces éléments vérifient les relations suivantes :
$[h_i, h_j] = [h_i, b^p] = 1, \quad$ où $\quad i, j = 1, 2, ...$
$[h_{i+1}, b] = h_i, \quad$ où $\quad i = 1, 2, ...$
$[h_1, b] = 1; \quad b^{p^n} = h_1^r.$

Théorème 2.4.

i) Tout $MN\mathcal{N}$- groupe localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux est isomorphe à un groupe de B .

ii) Tout groupe de B est un $MN\mathcal{N}$-groupe localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux.

iii) Deux groupes de B ne peuvent pas être isomorphes.

M.F.Newman et J.Wiegold n'ont pas traité le cas des $\mathcal{AN}$-groupes n'admettant pas de sous-groupes maximaux. Mais en 1997 Howard Smith a étudié ce type de groupes. Il a démontré les résultats suivants :

Théorème 2.5. *Soit G un groupe résoluble non-nilpotent dont les sous-groupes propres sont nilpotents, et supposons que G n'admet pas de sous-groupes maximaux, alors :*

i) G est un p-groupe dénombrable et $\frac{G}{G'} \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p.

ii) Tout sous-groupe de G est sous-normal.

iii) $(G')^p \neq G'$, et toute image hypercentrale de G est abélienne ; en particulier, $G' = \gamma_n(G)$ pour tout $n \geq 2$.

iv) Tout sous-groupe radicable de G est central.

v) Le centralisateur de G' est abélien et G' est omissible (i.e si $H \leq G$ tel que $G = HG'$ alors $H = G$) ; en particulier, G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.

vi) G' n'est pas la clôture normale d'un sous-groupe fini de G.

vii) L'hypercentre de G coïncide avec le centre de G.

B.Bruno et R.E.Phillips ont classifié les groupes infinis dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathcal{FN}_k$ en se restreignant aux groupes localement gradué.

Théorème 2.6. *Soit $K \geq 0$ un entier. Les conditions suivantes dans un groupe localement gradué G sont équivalentes :*

i) G est un groupe minimal non-$\mathcal{FN}_k$.

ii) G est un groupe minimal non-$\mathcal{FA}$.

iii) G est de Cernikov, $G \notin \mathcal{FA}$ et tout sous-groupe propre est soit fini soit abélien.

2.3 Groupes infinis de type fini non-hypercentraux minimaux

Lemme 2.7. *Soit G un groupe localement gradué non-périodique dont tous les sous-groupes propres sont hypercentraux, alors G est hypecentral.*

D'après le lemme précédent, il est facile de montrer le corollaire suivant :

Corollaire 2.8. *Si G est un groupe minimal non-hypercentral localement gradué, alors il est périodique.*

Théorème 2.9. ***"S.Azra"*** *Si G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe infini de type fini,alors :*

i) G ne possède aucun sous-groupe propre d'indice fini.

ii) G est parfait.

Démonstration : *Supposons que G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe infini de type fini.*

i) montrons par l'absurde, donc soit N un sous-groupe propre normal dans G, qui est d'indice fini, et comme il est hypercentral, on déduit qu'il est nilpotent. D'ou G est nilpotent-par-fini, il est localement gradué et non-périodique car les groupes nilpotent-par-fini de type fini périodique sont finis. Donc (d'après lemme 2.7) on a G est hypercentral ; contradiction.

ii) Soit G un groupe de type fini, Supposons que G soit non-parfait ($G \neq G'$) comme $\frac{G}{G'}$ est abélien donc il est localement gradué donc $\frac{G}{G'}$ admet une image finie non-triviale.
i.e il existe $\frac{H}{G'} \lhd \frac{G}{G'}$ tel que $\frac{\frac{G}{G'}}{\frac{H}{G'}}$ soit fini, et comme

$$\frac{\frac{G}{G'}}{\frac{H}{G'}} \simeq \frac{G}{H}$$

donc il est fini.
On en déduit que G admet un sous-groupe propre d'indice fini.D'après le résultat précédent G est hypercentral ; Contradiction.

Lemme 2.10. *Si G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe infini de type fini, alors G ne possède aucun groupe de quotient hypercentral non-trivial.*

Démonstration : *Supposons que G soit un groupe minimal non-hypercentral infini de type fini, qui admet un sous-groupe propre $N \lhd G$, tel que $\frac{G}{N}$ est hypercentral, donc il est de type fini, nilpotent, localement gradué, par la suite il admet une image finie non-triviale.*
i.e il existe

$$\frac{H}{N} \lhd \frac{G}{N} \text{ et } \frac{\frac{G}{N}}{\frac{H}{N}}$$

soit fini.
D'autre part :

$$\frac{\frac{G}{N}}{\frac{H}{N}} \simeq \frac{G}{H}$$

donc $\frac{G}{H}$ est fini, on déduit que G admet un sous-groupe propre d'indice fini ; contradiction (d'après théorème 2.9(i)).
Rappelons qu'un groupe G est dit non-parfait, s'il est différent à son sous-groupe dérivé ; i.e $G \neq G'$.

Théorème 2.11. ***"S.Azra"*** *Si G est un $MNZA$-groupe infini de type fini, alors $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini.*

Démonstration : *Soit G un groupe infini de type fini minimal non-hypercentral. Montrons que $\frac{G}{Frat(G)}$ est infini et simple. Comme G est de type fini alors il admet un sous-groupe maximal, donc $G \neq Frat(G)$, et (d'après théorème 2.9(i)), on déduit que $\frac{G}{Frat(G)}$ est infini.*
Maintenant il reste de montrer que $\frac{G}{Frat(G)}$ n'admet aucun sous-groupe propre normal. Supposons qu'il existe $\frac{N}{Frat(G)}$ est un sous-groupe normal dans $\frac{G}{Frat(G)}$.Comme N est un sous-groupe propre normal dans G alors il est hypercentral.
On a $Frat(G) < N$, donc il existe un sous-groupe M maximal dans G tel que :

$$N \subsetneq M$$

Or M est propre dans G donc M est hypercentral.
De plus, On a :

$$M < NM < G$$

par la maximalité de M. On a $G = MN$, et on a :

$$\frac{G}{N} \simeq \frac{MN}{N} \simeq \frac{M}{N \cap M}$$

par suite,

$$\frac{M}{N \cap M}$$

est hypercentral et par conséquent :

$$\frac{G}{N} \text{ est hypercentral.}$$

Contradiction(d'après lemme 2.10 (i))

Corollaire 2.12. *Soit G un groupe infini de type fini minimal non-hypercentral, alors G est minimal non-(hypercentral-par-fini).*

Démonstration : *Soit G un groupe infini de type fini qu'est minimal non-hypercentral.*
On montre que G est hypercentral-par-fini, on a chaque sous-groupe propre dans G est hypercentral, alors il est hypercentral-par-fini, et(d'après théorème 2.9 (i)) c'est une Contradiction. D'où G n'est pas hypercentral-par-fini.

Corollaire 2.13. *Soit G un groupe infini de type fini minimal non-hypercentral, alors G est minimal non-(fini-par-hypercentral).*

Démonstration : *Soit G un groupe infini de type fini minimal non-hypercentral. On a chaque sous-groupe propre dans G est hypercentral, alors il est fini-par-hypercentral.*
Maintenant supposons que G est fini-par-hypercentral, il existe donc un sous-groupe normal N tel que N soit fini $\frac{G}{N}$ soit hypercentral ; Contradiction (d'après lemme 2.10).

Chapitre 3

Groupe infinis de type infinis non-hypercentraux minimaux

Dans cette partie, on présente les résultats qui se trouvent sur les groupes non-hypercentraux minimaux de type infinis. Certains résultats ont été trouvés par de Giovanni et Marco Trombitti et d'autre ont été trouver par Souad Azra.

Lemme 3.1. *Soit G un groupe infini de type infini localement gradué, si G est minimal non-hypercentral, alors il n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini.*

Démonstration : *Soit G un groupe infini de type infini $MN\mathcal{ZA}$.Supposons que G admet un sous-groupe normal propre qu'est d'indice fini, soit N.*

D'après (définition 1.24) on a G localement nilpotent. Donc N est un sous-groupe normal d'un groupe localement nilpotent et $\frac{G}{N}$ de type fini, alors G est hypercentral ; Contradiction (d'après lemme 1.43)

D'après le lemme précédent on peut conséquer le corollaire suivant :

Corollaire 3.2. *Soit G un groupe infini $MN\mathcal{ZA}$. Si G est localement gradué, alors il est de type infini.*

Démonstration : *Soit G un groupe infini $MN\mathcal{ZA}$, localement gradué. Supposons que G est type fini, donc il possède un sous-groupe propre d'indice fini ; Contradiction (d'après théorème 2.9(i))*

Lemme 3.3. *Si H et K sont deux sous-groupes normaux hypercentraux d'un groupe G, alors HK est hypercentral.*

Démonstration : *Pour montrer que G est hypercentral, on utilise (la proposition 1.44(ii)), i.e on montre que $Z(\frac{G}{N}) \neq \{1\}$ où N est un sous-groupe normal propre dans G. Comme $G = HK$, alors :*

$$\frac{G}{N} = \frac{HK}{N} = \frac{HN}{N} . \frac{KN}{N}$$

il est clair que :

$$\frac{HN}{N} \text{ et } \frac{KN}{N} \text{ sont hypercentraux,}$$

donc $\frac{G}{N}$ *est un produit direct de deux groupes normaux hypercentraux.*
On pose :

$$\overline{G} = \frac{G}{N} = \frac{HN}{N}.\frac{KN}{N}$$

tel que :

$$\overline{H} = \frac{HN}{N} \text{ et } \overline{K} = \frac{KN}{N}$$

Si

$$\overline{H} = \{\bar{1}\} \text{ ou } \overline{K} = \{\bar{1}\}$$

donc :

$$\overline{G} = \overline{K} \text{ ou } \overline{G} = \overline{H}$$

ça implique que $\overline{G}$ *est hypercentral d'où :*

$$Z(\overline{G}) \neq \{\bar{1}\}$$

Maintenant, supposons que :

$$\bar{H} \neq \{\bar{1}\} \text{ et } \overline{K} \neq \{\bar{1}\}$$

comme $\overline{H}, \overline{K}$ *sont hypercentraux alors,*

$$Z(\overline{H}) \neq \{\bar{1}\} \text{ et } Z(\overline{K} \neq \{\bar{1}\}$$

puis il est clair que :

$$Z(\overline{H}) \cap Z(\overline{K}) \leq Z(\overline{G})$$

- Si :

$$Z(\overline{K}) \cap Z(\overline{K}) = \{\bar{1}\}$$

On a :

$$Z(\overline{H}) \cap \overline{K} \triangleleft \overline{K}$$

supposons que :

$$Z(\overline{H}) \cap \overline{K} \neq \{\bar{1}\}$$

(d'après proposition 1.45(i))

$$Z(\overline{H}) \leq \overline{K} \cap Z(\overline{K}) \neq \{\bar{1}\}$$

alors,

$$Z(\overline{H}) \cap \overline{K} \neq \{\bar{1}\}$$

Contradiction.
D'où :

$$Z(\overline{H}) \cap \overline{K} = \{\bar{1}\}$$

d'autre part on a :

$$[Z(\overline{H}, \overline{K}] \leq Z(\overline{H}) \cap \overline{K} = \{\bar{1}\}$$

donc :

$$[Z(\overline{H}), \overline{K}] = \{\bar{1}\}$$

alors,

$$Z(\overline{H}) \leq Z(\overline{K})$$

ça implique que,

$$Z(\overline{H}) \leq Z(\overline{H}) \cap Z(\overline{K})$$

Contradiction. Alors,

$$Z(\overline{H}) \cap Z(\overline{K} \neq \{\bar{1}\}$$

et comme

$$Z(\overline{H}) \neq \{\bar{1}\}$$

alors,

$$Z(\overline{G}) \text{ contient un sous-groupe non-trivial.}$$

D'où :

$$Z(\overline{G}) \neq \bar{1}$$

En 2015 F.De.Giovanni et M.Trombetti ont publié quelque propriétés sur les groupes minimaux non-hypercentraux dans l'article [3] pour démontrer l'équivalence entre les groupes minimaux non-hypercentraux et les groupes minimaux non-hypercyclique, nous mentionnerons les caractéristiques qu'ils ont étudiées sur les groupes infini de type infini minimal non-hypercentraux.

Lemme 3.4. *Soit G un groupe périodique tel que $\frac{G}{G'}$ est divisible, alors :*

i) Le centre $Z(G)$ est le dernier terme de la série centrale supérieure de G.

ii) Chaque image homomorphe hypercentrale de G est abélienne.En particulier G' est le dernier terme de la série centrale inférieure de G.

Démonstration :

i) Supposons que $Z(G) \neq Z_2(G)$, soit $z \in Z_2(G)$ et $z \notin Z(G)$. On a

$\theta : G \longrightarrow G$

$g \longrightarrow [g, z] \in Z(G)$

est un homomorphisme. d'après le premier théorème d'isomorphisme

$$\frac{G}{Ker\theta} \neq Im\theta = [G, z] \text{ avec } [G, z] \leq Z(G)$$

est un sous-groupe abélien d'exposant fini n tel que n l'ordre de z, donc :

$$\frac{G}{Ker\theta}$$

est abélien d'exposant fini mais,

$$\frac{G}{Ker\theta}$$

est aussi divisible car :

$$G' \leq Ker\theta \text{ et } \frac{G}{Ker\theta} \simeq \frac{\frac{G}{G'}}{\frac{Ker\theta}{G'}}$$

c'est une contradiction. D'où :

$$Z(G) = Z_2(G)$$

ii) Soit $\overline{G}$ une image homomorphe hypercentral de G. Comme

$$\frac{G}{G'}$$

est divisible, alors,

$$\frac{\overline{G}}{\overline{G'}}$$

l'est aussi ; et comme

$$\overline{\overline{G}}$$

est périodique, alors d'après [6, Partie 2 , théorème 9.23]$\bar{G}$ est abélien.

Maintenant on passe au résultat principal de ce travail, le théorème a été obtenu par M.De Giovanni et M.Trombitti et S.Azra.

Théorème 3.5. *Soit G un groupe infini localement gradué et minimal non-hypercentral, alors :*

i) G est un p-groupe localement fini pour m certain nombre premier p.

ii) G est hyperabélien.

iii) Si $G' \neq G$, alors $\frac{G}{G'}$ est un groupe de type p^∞.

iv) $Z(G) = Z_n(G)$ et $G' = \gamma_n(G) \forall n > 1$.

v) $C_G(G')$ *est abélien.*

vi) Chaque sous-groupe de G *est ascendant.*

vii) Si N *est un sous-groupe propre normal de* G*, alors* $XN \neq G \quad \forall X < G$.

viii) G' *n'est pas la clôture normale d'un sous-groupe fini de* G.

Démonstration :

i) D'après théorème1.40 et lemme2.7 , G *est un groupe localement nilpotent périodique, il est un p-groupe car* G *impossible d'écrire le produit de deux sous-groupes propres normaux.*

ii) Pour montrer que G *est hyperabélien, montrons que chaque image homomorphe non-trivial contient un sous-groupe normal abélien non-trivial. Soit* $\overline{G}$ *une image homomorphe non-abélienne de* G*. Comme* G *est localement nilpotent,* $\overline{G}$*l'est aussi. Si* $\overline{G}$ *n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini, alors il est abélien fini, c'est une contradiction. D'où* $\overline{G}$ *admet un sous-groupe propre normal d'indice fini, soit* $\overline{H}$*,* $\overline{H}$ *est hypercentral, donc* $Z(\overline{H}) \neq 1$ *est un sous-groupe abélien normal non trivial de* $\overline{G}$*. D'où* G *est hyperabélien.*

iii) Soit G *un groupe infini* $MN\mathcal{ZA}$*, on a d'après (lemme 3.3) et (théorème 2.3)* $\frac{G}{G'}$ *est un p-groupe localement cyclique, donc* $\frac{G}{G'}$ *soit cyclique ou bien quasicyclique, Si* $\frac{G}{G'}$ *est cyclique alors il admet un sous-groupe propre d'indice fini ; Contradiction.*
D'où $\frac{G}{G'}$ *est quasicyclique.*

iv) D'après (3) et lemme précédent.

v) Soit $x, y \in C_G(G')$ *; comme* $\frac{G}{G'}$ *est un groupe quasicyclique, alors,*

$$\frac{G}{G'} = \cup_{i\in\mathbb{N}}\langle a_i G'\rangle$$

On a :

$$xG', yG' \in \frac{G}{G'}$$

donc :

$$\exists k, l \in \mathbb{N}^* \text{ lorsque, } \langle xG'\rangle = \langle a_k G'\rangle \text{ et } \langle yG'\rangle = \langle a_l G'\rangle$$

supposons que :

$$k \leq l$$

donc :

$$\langle yG'\rangle \leq \langle xG'\rangle$$

ce qui implique qu'il existe $n \in IN^*$ *et il existe* $g \in G'$ *tel que :*

$$y = x^n g$$

donc :

$$[x, y] = [x, x^n g] = [x, g]\,[x, x^n]^g = 1 \text{ et } C_G(G')$$

est abélien.

vi) Soit X un sous-groupe propre de G. Si X est maximal, il est normal car G est localement nilpotent. Maintenant supposons l'inverse, donc X est contenu dans un sous-groupe propre Y de G. Comme Y est hypercentral, alors,

$$X < N_Y(X) \leq N_G(X)$$

ça implique que,

$$X < N_G(X)$$

d'où chaque sous-groupe de G est ascendant.

vii) Supposons qu'il existe un sous-groupe propre X dans G tel que $G = XN$. Comme le produit de deux sous-groupes normaux hypercentraux il est hypercentral, on déduit que $NZ(G)$, et on a $XZ(G)$ est propre dans G, car si $G = XZ(G)$ donc :

$$\tfrac{G}{Z(G)} \simeq \tfrac{x}{X \cap Z(G)}$$

est hypercentral. Donc :

$$\tfrac{G}{Z(G)} \text{ est abélien.}$$

Alors,

$$G' \leq Z(G) \Rightarrow G \text{ est nilpotent.}$$

Contradiction.
Supposons que $Z \leq X \cap N$ et remplaçons G par :

$$\tfrac{G}{Z(G)}$$

On pose :

$$G = \tfrac{G}{Z(G)}$$

donc :

$$Z(G) = \{1\}$$

D'après (4) X est ascendent dans G. donc X impossible contenu dans un sous-groupe propre normal, donc l'ascendiaté de X dans G dépendre d'un ordinal limité λ. Soit

$$X = X_0 < X_1 < ... < X_\lambda = G$$

la série ascendente. Alors,

$$G = \cup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$$

et comme N est hypercentral, il existe $\beta < \lambda$ tel que :

$$X_\beta \cap z(N) \neq \{1\}$$

On a $X \cap Z(N)$ *est un sous-groupe normale hypercentral dans* X_β *donc :*

$$Z(X_\beta) \cap Z(N) \neq \{1\}$$

mais ;

$$G = X_\beta N \text{ et } Z(X_\beta) \cap Z(N) \leq Z(G)$$

mais ;

$$Z(G) = \{1\}$$

c'est une contradiction.

viii) Supposons qu'il existe un sous-groupe fini de G*, soit* H *tel que* $G' = H^G$*. On a :*

$$\frac{G'}{[H,G]} = \frac{H^G}{[H,G]} = \frac{H[H,G]}{[H,G]} \simeq \frac{H}{H \cap [H,G]}$$

donc :

$$\frac{G'}{[H,G]}$$

est un groupe fini, alors,

$$\frac{G}{[H,G]}$$

est fini-par-abélien, il est nilpotent-par fini, (d'après le lemme 3.1),

$$\frac{G}{[H,G]}$$

est nilpotent c'est une contradiction avec (iv), d'où :

$$G' = [H, G]$$

Ce qui donne ;

$$H\,[H, G] = [H, G]$$

ça implique que,

$$H \leq [H, G]$$

donc il existe un sous-groupe fini K *de* G *tel que :*

$$H \leq [H, K]$$

on déduit que :

$$H \leq [H_r, K] = 1$$

pour chaque entier positif r*, mais ;*

$$\langle H, K \rangle$$

est hypercentral fini, il est nilpotent, d'où :

$$H = \{1\}$$

c'est une contradiction. Les résultats suivants ont été montrés par S.Azra

Lemme 3.6. *Soit G un groupe infini de type infini $MN\mathcal{ZA}$, alors G est minimal non-(fini-par-hypercentral).*

Démonstration : *Soit G un groupe infini de type infini $MN\mathcal{ZA}$, supposons que G est fini-par-hypercentral i.e $\exists N \triangleleft G$ tel que N est fini et $\frac{G}{N}$ est hypercentral. Comme $\frac{G}{N}$ est hypercentral, périodique et F-parfait donc il est abélien, alors il est nilpotent puis il est fini-par-nilpotent ; d'où G est nilpotent-par-fini(car il est fini-par-nilpotent) par suite il est nilpotent d'où G est hypercentral ; Contradiction.*

Proposition 3.7.

i) Soit G un groupe infini de type infini minimal non-hypercentral.
Si $F \triangleleft G$ tel que F est fini, alors $\frac{G}{F}$ est minimal non-hypercentral et $F \leq Z(G)$.

ii) Soit G un groupe minimal non-hypercentral, alors G n'admet pas de sous-groupe maximale.

Démonstration :

i) Soit G un groupe infini de type infini minimal non-hypercentral, supposons que $\frac{G}{F}$ soit hypercentral, comme F est un sous-groupe normal fini, alors G est fini-par-hypercentral ; Contradiction donc $\frac{G}{F}$ est minimal non-hypercentral. On sait que :

$$\frac{G}{C_G(F)} = \frac{N_G(F)}{C_G(F)} \simeq \tau \leq Aut(F)$$

où $Aut(F)$ est le groupe des automorphismes de F. Comme F est fini, alors,

$$Aut(F)$$

est fini aussi ; d'où :

$$\frac{G}{C_G(F)}$$

est fini, on a G est minimal non-hypercentral donc G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini, donc :

$$G = C_G(F)$$

donc tous les éléments de G sont commites avec les éléments de F, donc :

$$F \leq Z(G)$$

ii) Soit G un groupe minimal non-hypercentral. On suppose que G admet un sous-groupe maximal N ; d'après (la proposition 1.37 (i)), il est normal dans G. Alors,

$$NG' = G \text{ ou } NG' = N$$

d'après (théorème 3.5 (vii)), on déduit que ;

$$NG' = N$$

ça implique que ;

$$G' \leq N$$

d'où ;

$$\frac{G}{N} \text{ est abélien.}$$

Comme N est maximal, $\frac{G}{N}$ est simple donc on déduit que

$$\frac{G}{N} \text{ est un groupe cyclique fini.}$$

C'est une contradiction avec (théorème 3.5(iii)).

Conclusion

De ce que nous avons vu dans le premier et le deuxième chapitre, nous concluons que les propriétés qui caractérisent les groupes nilpotents presque les même que celles des groupes hypercentraux, qui sont considérés comme des groupes généralisés. La question qui se pose est de savoir si tous les groupes généralisés de les groupes nilpotents vérifies les même ?

Bibliographie

[1] **B. Bruno and R.E.Phillips :** On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 691 (1983) 153-168.

[2] **C. Casolo :** Groups with all subgroups subnormal, Note di Matematica. Note Mat. 28 (2009), n.2, 1-154.

[3] **F. De Giovanni, and M. Trombetti :** Infinite minimal non-hypercyclic groups. J. Algebra App. 14, no. 10, 1550143, 15 pp (2015).

[4] **G. A. Miller, H. Moreno :** Non-abelian groups wich every subgroup is abelian. Trans. Amer. Math. Soc. 4, 389-404 (1903).

[5] **M.F. Newman and J. Wiegold :** Groupes with many nilpotent subgroups, Arch. Math. 15 (1664), 241-250.

[6] **D.J.S. Robinson** : Finiteness condition and generalized soluble groups, (Springer-verlage, Berlin, Heidelberg, New York 1972).

[7] **D.J.S. Robinson :** A course in the théory of groups, (Springer-verlage, Berlin, Heidelberg, New York 1982).

[8] **O.Yu. Schmidt :** The groups, all subgroups of which are special. Math. Sbornok **31**, 366-372 (1924).

[9] **H. Smith :** Groups with few non-nilpotent subgroups, Glasgow Math. J. 39 (1997), 141-151.