Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de master

En vue de l'obtention du diplôme de Master en mathématique appliquée

Filière :

Mathématique

Spécialité :

Analyse mathématique et applications

Thème

Polynômes et fonctions de Bessel avec quelque applications

présentée par :

Hamda Meriem

Soutenu le juin 2023

Devant le jury :

A.Mani	MAA	Université de BBA	**Encadreur**
R.Benterki	MCA	Université de BBA	**Président**
A.Guechi	MCB	Université de BBA	**Examinateur**

Promotion : 2022-2023

REMERCIEMENT

La réalisation de ce mémoire a été possible grace au concours de plusieurs personnes a que je voudrais témoigner tous ma reconnaissance .

Je remercie tout d'abord Allah de m'avoir donné la volonté, la santé et le courage pour mener à rédiger ce mémoire .

Je voudrais aussi adresser toute ma gratitude a mon encadreur de ce mémoire Mani Abd El Ouaheb pour le partage de ses connaissances, sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué a alimenter ma réflexion.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuelle tout au long de ma démarche.

Dédication

J*e dédice ce mémoire*

A *mes chers parents ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs* encouragements

A *mes amies et mes camarades*

Bouthaina, Besma, khawla, Asia, Najet

S*ans oublier tout les professeur que ce soit du*

primaire,de moyen, du secondaire ou de

l'enseignement supérieur

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

INTRODUCTION

Les fonctions spéciales sont des fonctions mathématiques particulières qui ont des noms et des notations plus ou moins établis en raison de leur importance dans l'analyse mathématique, l'analyse fonctionnelle, la géométrie, la physique ou d'autres applications. Les fonctions spéciales sont toutes considérées comme des solutions particulières de l'équation différentielle du second ordre a cofecient variables d'un certain type apparaissant dans plusieures problèmes de physiques théoriques et mathématiques de la forme générale :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

Il y a différents types des fonctions spéciales comme la fonction Bêta et la fonction d'Euler qui sont utilisée en calcule des probabilités en physique statistique . On a aussi la fonction sinus cardinal, sinus intégral, les fonction de Heun pour les systèmes ayant des masses variables, la fonction de Jacobi pour le potentiel de Poschl-Teller, la fonction de Bessel pour l'équation de la diffusion de la chaleur dans les cylindres, l'équation des ondes, équation de pendule et enfin la fonction d'Airy pour le potentiel linéaire.

Dans ce mémoire on s'intéresse aux fonctions et polynômes de Bessel qui sont un cas particulier de la grande famille des fonctions spéciales. Les fonctions de Bessel jouent un rôle très important en mathématique ou elles inviennement dans des problèmes de conduction de la chaleur d'électromagnétisme et de diffraction. Ces fonctions découvert par le mathématicien Daniel Bernoulli en 1817 et prenant le nom de Bessel qui intégrait ces fonction en 1824 dans le cadre de ces études perturbations planétre. En 1878 Lord Rayleigh démontre que l'équation de Bessel est un cas particulier de l'équation de Laplace.

Alors ce mémoire s'articule principalement de trois chapitres.

En premier chapitre on va donner quelque notion de base et définition qui nous utilisons par la suite. Dans le deuxième chapitre on va s'intéresse à les fonctions et polynômes de Bessel, ce chapitre doit être diviser en deux parties : pour la première partie on va définir les polynômes de Bessel avec quelque relation de récurrence et propriété, et pour la deuxième partie on va consacré au fonction de Bessel. Enfin on termine notre travail par donner quelque applications sur les fonctions et polynômes de Bessel dans différent domaines tel que l'interpolation, résolution de l'équation intégral, résolution de l'équation harmonique, et calcule certain intégrales.

CHAPITRE 1

Préliminaire

Dans ce chapitre on va donner quelque notions de base à savoir les fonctions spéciales comme la fonction Gamma, Bêta et préciser quelque propriété d'orthogonalité ainsi la méthode de Frobenius et problème de Sturm Liouville.

1.1 Quelque fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma notée par $\Gamma(x)$ est une fonction réelle, considérer Également comme une fonction spéciale. Elle definit comme suit :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \ x > 0.$$

Propriétés 1.1.1. On introduit ici quelques propriétés de la fonction Gamma :

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. $\Gamma(x+1) = x!$, pour x est un entier .
4. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n} n!}$.
5. $\Gamma(\frac{-1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2})$.

Démonstration. voir [2]

1.1.2 Fonction Bêta

La fonction bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres réels x et y strictement positifs par l'expression suivante :

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ \forall x,y>0\ ;$$

Propriétés 1.1.2. La fonction Bêta a les propriété suivant :

- $\beta(x,y)=\beta(y,x)$.
- $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
- $\beta(x,y+1)=\frac{y}{x+y}\beta(x,y)$.
- $\beta(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

Démonstration. voir [2]

1.2 Notion d'orthogonalité

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace pré-hilbertien ,on dit que deux vecteur $\vec{u},\vec{v}$ sont orthogonaux si $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$ et on note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

1.3 Polynôme orthogonaux

Une suite de polynômes orthogonaux est une suite infinie de polynômes $p_0(x)$ $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... à coefficients réels, dans laquelle chaque $p_n(x)$ est de degré n, et tel que que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux pour un produit scalaire de fonction donné.

$$\langle p_i(x),p_j(x)\rangle=\begin{cases}0 & si\ \ i\neq j\\ c & si\ \ i=j.\end{cases}$$

Définition 1.3.1. *Soit* ρ une fonction définit sur l'intervalle $[a,b]$, on dit que ρ est une fonction de poids si elle vérifie les conditions suivant :

1. La positivité : $\rho(x)>0$.

2. $\int\limits_a^b \rho(x)dx < \infty.$

Définition 1.3.2. *On dit que $\{y_n(x)\}_n$ est une suite des polynômes orthogonaux si et seulement si :*

$$\langle y_n, y_m\rangle_\rho = \int\limits_a^b y_n(x)y_m(x)\rho(x)dx = 0 \text{ si } m \neq n.$$

voir [5]

1.4 Formule Rodrigue

On considère l'équation différentielle suivante :

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda y = 0, \tag{1.1}$$

ou $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes tel que $deg(A(x)) \leq 2$ et $deg(B(x)) \leq 1$ et λ est une constante,

La solution de l'équation (1.1) est dite formule Rodrigue, elle définit par l'expression suivant :

$$y_n(x) = \frac{c_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}(w(x)(A(x))^n,$$

ou c_n est une constant de normalisation qu'on peut déterminer par la relation suivante :

$$\|y_n\|_w^2 = \int\limits_b^a y_n(x)y_n(x)w(x)dx = 1 \;;$$

et la fonction $w(x)$ par

$$w(x) = \frac{1}{A(x)}exp\left(\int\limits_{x_0}^x \frac{B(t)}{A(t)}dt\right).$$

1.5 Problème de Sturm-Liouville

L'équation différentielle de 2éme ordre sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + q(x)y = \lambda\rho(x)y \quad avec \quad x \in [a, b], \tag{1.2}$$

avec $\rho(x)$ est la fonction de poids, $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues, est appelé équation de Sturm-Liouville .

Condition aux limite

$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 \frac{dy}{dx}(a) = 0.$

$\beta_1 y(b) + \beta_2 \frac{dy}{dx}(b) = 0.$

voir [8]

l'équation (1.2) avec les conditions aux limites forme un problem de sturm-Liouville

chaque valeur propre λ a unique solution y_n vérifier les conditions aux limits le tableau suivant saisit les déférentes types des équations selon la valeur de λ :

$p(x)$	$q(x)$	λ	fonction de poids	polynôme
$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$	1	Legendre
$1 - x^2$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	Jacobi
x	$\alpha + 1 - x$	λ	e^{-x}	Laguerre
1	$-2x$	λ	e^{-x^2}	Hermite
x^2	$2(x+1)$	$-n(n+1)$	$e^{\frac{-2}{x}}$	Bessel

1.5.1 Sturm-Liouville pour une équation homogène

Considérons l'équation homogène suivante :

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

on peut écrire cette équation sous forme Sturm-Liouville par divisé l'équation sur A(x) tel que A(x) $\neq 0$ on trouve :

$$y''(x) + \frac{B(x)}{A(x)}y'(x) + \frac{C(x)}{A(x)}y(x) = 0,$$

alors il s'agit de trouver p(x) qui permette de la mettre sous la forme Sturm-Liouville

$p(x)y'' + p(x)\frac{B(x)}{A(x)}y' + p(x)\frac{C(x)}{A(x)} = 0$

$p'(x) = p(x)\frac{B(x)}{A(x)}$

ce qui implique que $p(x) = exp\left(\int \frac{B(x)}{A(x)}\right)$.

1.6 Méthode de Frobenius

C'est une technique d'obtention développement en série des solutions d'une équation différentielle homogène de la forme suivante :

$$x^2y'' + xA(x)y' + B(x)y = 0,$$

La méthode de Frobenius consiste à chercher une solution de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}.$$

Le principe sera de substituer cette expression dans l'équation différentielle, et par identification terme à terme de déterminer s puis une expression des coefficients a_n, qui fait généralement intervenir une relation de récurrence liant entre ceux-ci [2].

2 CHAPITRE Polynôme et fonction de Bessel

Dans ce chapitre on va s'intéresse a les fonctions et polynômes de Bessel. Il est divisée en deux partie :

Dans la première partie on doit étudier les polynômes de Bessel en résolvant l'équation de polynôme de Bessel avec la méthode de Frobenius et donnant quelque propriété et theorem. Dans la deuxième on va consacré a les fonctions de Bessel en donnant les différents types des fonctions de Bessel avec leurs graphe et certains relations de récurrence .

2.1 Polynôme de Bessel

Les polynômes de Bessel sont des suites des polynômes orthogonaux. Il en existe plusieurs définitions, mais toutes liées.
Ce sont la solution de l'équation différentielle suivante :

$$x^2\frac{d^2y}{dx}+2(x+1)\frac{dy}{dx}-n(n+1)y=0, \tag{2.1}$$

on peut résoudre par poser

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{k+m}, \tag{2.2}$$

avec $a_0 \neq 0$

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{n}(k+m)a_kx^{k+m-1}. \tag{2.3}$$

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{n}(k+m-1)(k+m)a_kx^{k+m-2}. \tag{2.4}$$

on remplace (2.2), (2.3) et (2.4) dans (2.1) on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+m-1)(k+m)a_kx^{m+k}+2\sum_{k=0}^{n}(m+k)a_kx^{m+k}+2\sum_{k=0}^{n}(m+k)a_kx^{m+k-1}\dots$$
$$-n(n+1)\sum_{k=0}^{n}a_kx^{m+k}=0,$$

pour k=0 ,on obtient $m=0$ et y(x) doit étre s'écrit sous forme suivant :

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \tag{2.5}$$

remplaceons (2.5) dans (2.1) on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n}(k-1)ka_kx^k+2\sum_{k=0}^{n}ka_kx^k+2\sum_{k=0}^{n}ka_kx^{k-1}-n(n+1)\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=0,$$
$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)k-n(n+1))a_kx^k+2\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}=0,$$

après simplification on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)k-n(n+1))a_kx^k+2\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}x^k=0,$$

$$((k+1)k-n(n+1))a_k+2(k+1)a_{k+1}=0,$$

$$a_{k+1}=-a_k\tfrac{((k+1)k-n(n+1))}{2(k+1)},$$

pour déterminer la solution générale de (2.1), on doit calculer les coefficients
$a_1=a_0\frac{n(n+1)}{2}$,
$a_2=a_0\frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8}$,
alors le terme générale s'écrit sous forme :

$$a_{k+1}=a_0\tfrac{(n+k)!}{k!(n-k)!2^k},$$

d'où la solution est :

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{(n-k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

2.1.1 Relation de récurrence sur polynôme de Bessel

Propriétés 2.1.1. Soit les relations de récurrence suivante :

1. $y_{n+1} = (2n-1)xy_n + y_{n-1}$.
2. $x^2 y'_n = (nx-1)y_n + y_{n-1}$.
3. $x^2 y'_{n-1} = y_n - (nx-1)y_{n-1}y_{n-1}$.
4. $x(y'_n + y_{n-1}) = n(y_n - y_{n-1})$.
5. $(nx+1)y'_n + y'_{n-1} = n^2 y_n$.

les quatre premiers polynômes de Bessel :

- $y_0 = 1$.
- $y_1 = x + 1$.
- $y_2 = 3x^2 + 3x + 2$.
- $y_3 = 15x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

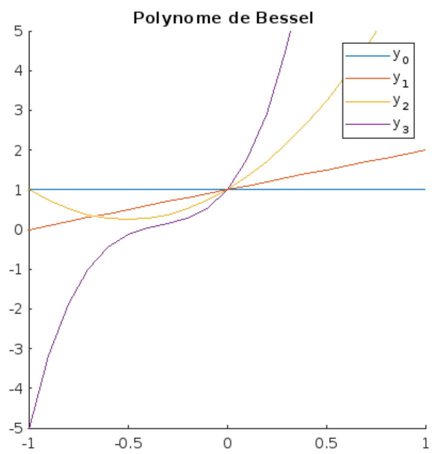


Figure 2.1: Les quatre premiers polynômes de Bessel

2.1.2 Polynôme de Bessel inverse

Il est donné par l'expression suivante :

$$\theta_n(x) = x^n y_n(\tfrac{1}{x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x^{n-k}}{2^k} \right),$$

Les coefficients de cette définition sont les mêmes que les coefficients de polynôme de Bessel mais l'ordre des monômes est inversé.

Relation de récurrence :

$\theta_{n+1} = (2n-1)\theta_n(x) + x^2\theta_{n-1},$

avec $\theta_0 = 1$.

les quatre premiers polynômes de Bessel inverse :

- $\theta_1 = x + 1.$
- $\theta_2 = x^2 + 3x + 3.$
- $\theta_3 = x^3 + 6x^2 + 15x + 15.$
- $\theta_4 = x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 105x + 105.$

2.1.3 Formule Rodrigue pour les polynômes de Bessel

La Formule Rodrigue est donné par :

$$y_n(x) = 2^n e^{\frac{-2}{x}} \tfrac{d^n}{dx^n}(e^{\frac{-2}{x}} x^{2n}).$$

pour plus d'information voir [3]

2.1.4 Polynôme de Bessel orthogonaux

Il est bien connu que les polynômes de Bessel satisfont la propriété d'orthogonalité.

Théorème 2.1.1. *Les polynômes de Bessel sont orthogonaux deux a deux pour le poids $e^{\frac{-2}{x}}$ sur le cercle unité du plan complexe ($z = e^{i\theta}$)*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} y_m(z)y_n(z)\rho(z)dz = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ (-1)^{n+1}\frac{2}{2n+1} & si \quad m = n. \end{cases}$$

ou y_m sont les polynômes de Bessel et ρ fonction de poids

Démonstration 2.1.1. *Pour* $n \neq m$

$z = e^{i\theta}$ *cercle de centre 0 et de rayon 1,* $0 < \theta < 2\pi$

$dz = ie^{i\theta}d\theta,$

$$\begin{aligned} alors\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} y_m(z)y_n(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta})dz &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} y_m(e^{i\theta})y_n(e^{i\theta})\rho(z)ie^{i\theta}d\theta \\ &= i\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} y_m(e^{i\theta})y_n(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta \\ &= i\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} y_m(e^{i\theta})y_n(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} y_m(e^{i\theta})y_n(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0 \end{aligned}$$

(calcule MATLAB).

pour $m = n$ *: voir [3]*

pour plus détaille voir [3] .

2.2 Polynômes de Bessel généralisée

Ce sont les solutions de l'équation suivante :

$$x^2y'' + (ax+b)y' - n(n+a-1)y = 0,$$

elles sont définit par :

$$y_n^{(a,b)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n+a-2)!}\frac{(n+m+a-2)!}{m!(n-m)!}\left(\frac{x}{b}\right)^m, \text{ avec } a \geq 2.$$

Remarque 2.2.1. pour $a = b = 2$ on trouve l'équation de polynôme de Bessel.

2.2.1 Fonction de poids pour les polynômes de Bessel généralise

Elle est definit par :

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(n+a-1)} \left(\frac{-b}{x}\right)^n,$$

tel que n est un entier et $a \geq 2$.

2.3 Fonction de Bessel

Les fonctions de Bessel (appelées aussi fonctions cylindriques ou d'harmoniques cylindriques) ont été introduites par Bernoulli, et l'analyse de ses fonctions a été développée par Bessel en 1860. Les fonctions de Bessel sont les solutions de l'équation de Bessel suivante :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \tag{2.6}$$

ou v est un paramètre réel (pouvant éventuellement être complexe ou entier), x est le variable et $y(x)$ est la fonction inconnue [1].

Pour résoudre l'équation (2.6) on utilise la méthode de Frobenius, on trouve deux solutions indépendantes $J_v(x)$ et $Y_v(x)$.

on pose

$$y(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^{s+m}, \tag{2.7}$$

$$y'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (s+m) a_s x^{s+m-1}, \tag{2.8}$$

$$y''(x) = \sum_{s}^{\infty} (s+m)(s+m-1) a_s x^{s+m-2}, \tag{2.9}$$

remplaçons (2.7) , (2.8) et (2.9) , dans (2.6) on trouve :

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s \left[(s+m)(s+m-1) + (s+m) - v^2\right] x^{s+m} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^{m+s+2} = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s \left[(s+m)(s+m-1) + (s+m) - v^2\right] x^{s+m} + \sum_{s=2}^{\infty} a_{s-2} x^{m+s} = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s \left[(s+m)^2 - v^2\right] x^{s+m} + \sum_{s=2}^{\infty} a_{s-2} x^{m+s} = 0,$$

$a_0\left[(m)^2-v^2\right]x^m+a_1\left[(m+1)^2-v^2\right]x^{m+1}+\sum_{s=2}^{\infty}a_s\left[(s+m)^2-v^2\right]x^{s+m}+\sum_{s=2}^{\infty}a_{s-2}x^{m+s}=0,$

pour $a_0\left[(m)^2-v^2\right]$ on trouve :

$v=m$ et $v=-m$

et pour $a_1\left[(m+1)^2-v^2\right]=0 \Rightarrow a_1=0$

pour $m=v$

$\left[(s+m)^2-v^2\right]a_s+a_{s-2}=0$

$(s^2+2v)a_s=-a_{s-2}$

$a_s=\frac{-a_{s-2}}{s(s+2v)}$ avec $a_0\neq 0$

puisque $a_1=0$ alors tous les coefficients impaires égale 0, donc

$a_2=\frac{-a_0}{2^2(1+v)}$.

$a_4=\frac{-a_0}{2^4 2!(1+v)(2+v)}$.

$\vdots$

remplaçons dans (2.7) on obtient :

$$y(x)=x^v\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^s$$

$$=x^v(a_0+a_1x+\ldots)=a_0x^v\left(1-\frac{x^2}{2^2(1+v)}+\frac{x^4}{2^4 2!(1+v)(2+v)}+\ldots\right)$$

on multiplier et diviser par $v!$ on trouve :

$$y(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+v},$$

qui sont fonctions de Bessel de premier type noté $J_v(x)$.

2.3.1 Fonction de Bessel du premier type

La fonction de Bessel du premier type d'ordre v est donné par l'expression suivante

$$J_v = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+v)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{2.10}$$

cette solution est analytique lorsque $|x| \geq 0$. [8]

Propriétés 2.3.1. *Les relations de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce sont données comme ci-dessous quelque soit les valeurs de v :*

1. $\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x)$.
2. $\frac{d}{dx}[x^{-v} J_v(x)] = -x^{-v} J_{v+1}(x)$.
3. $J_v'(x) = J_{v-1}(x) - \frac{x}{v} J_v(x)$.
4. $J_{-v}(x) = (-1)^v J_v(x)$.
5. $J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2x}{v} J_v(x)$.
6. $J_v'(x) = \frac{1}{2}[J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x)]$.

2.3.2 Fonction de Bessel deuxième type

Les fonctions de Bessel du second type, notées $Y_v(x)$, parfois notées à la place $N_v(x)$. Elles sont définit par la formule suivante :

$$Y_v(x) = \lim_{n\to v} Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(v\pi)},$$

avec $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$
Lorsque n n'est pas un entier $J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes.

2.3.3 Fonction de Bessel troisième type

Les fonctions de Hankel du nom du mathématicien Hermann Hankel, notées $H_v^1(x)$ *et* $H_v^2(x)$*, ce sont des fonctions spéciales de la physique mathématique.*

$H_v^1(x) = J_v(x) + iY_v(x)$ est appelé fonction de Hankel de première espèce.
$H_v^2(x) = J_v(x) - iY_v(x)$ est appelé fonction de Hankel de la deuxième espèce.

où i *est l' unité imaginaire et* $J_v(x), Y_v(x)$ *sont les fonctions de Bessel de premier et deuxième espèce.*

Propriétés 2.3.2. les fonctions de Hankel a les propriétés ci-dessus

- $H_v^1(x) = \frac{J_{-v}(x) - e^{-iv\pi} J_v(x)}{i \sin(v\pi)}$.
- $H_v^2(x) = \frac{J_{-v}(x) - e^{iv\pi} J_v(x)}{-i \sin(v\pi)}$.
- $H_{-v}^1(x) = e^{iv\pi} H_v^1(x)$.
- $H_{-v}^2(x) = e^{-iv\pi} H_v^2(x)$.

voir [10]

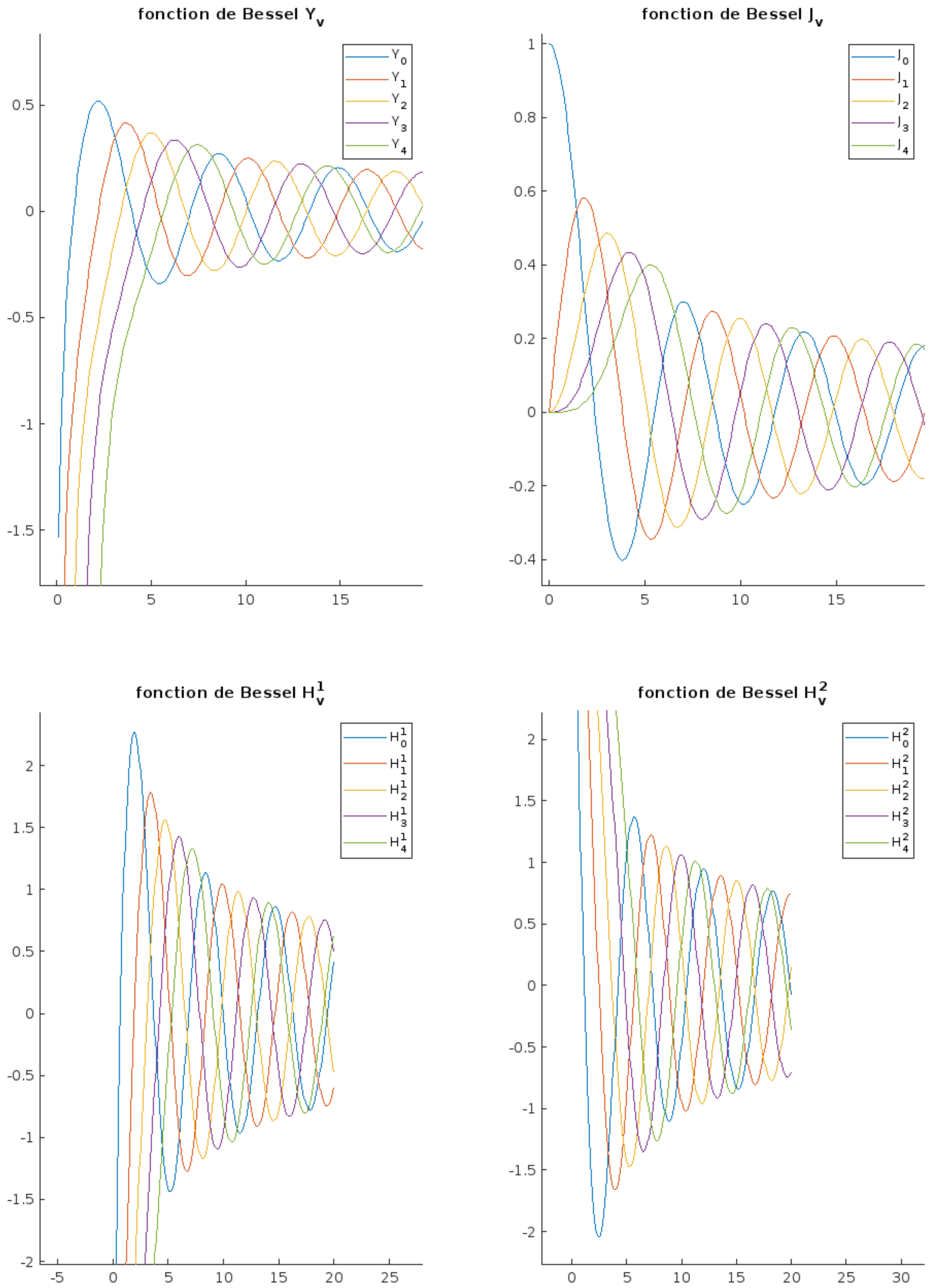


Figure 2.2: Les graphes de fonctions de Bessel

2.4 Fonction de Bessel sphérique

Les fonctions de Bessel sphérique sont des fonctions spéciales construites a partir de fonction de Bessel.

ce sont la solution de l'équation de Bessel sphérique suivante :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - v(v+1))y = 0, \tag{2.11}$$

la solution de cette équation est déterminer par la méthode de Frobenius.elle admet deux solution indépendantes noté $j_v(x)$, $y_v(x)$ donné par :
$j_v(x) = \sqrt{(\frac{\pi}{2x})}J_{v+\frac{1}{2}}(x).$
$y_v(x) = \sqrt{(\frac{\pi}{2x})}Y_{v+\frac{1}{2}}(x).$

tel que $j_v(x)$ sont appelé fonction de Bessel sphérique de deuxième espèce et $y_v(x)$sont appelé fonction de Bessel sphérique de premier espèce.

on peut également définir sur le même principe les fonctions de Hankel sphérique
$h_v^1(x) = j_v(x) + iy_v(x).$
$h_v^1(x) = j_v(x) - iy_v(x).$

les fonctions de Bessel sphérique admet les mêmes relations de récurrences de fonction de Bessel.

2.5 Fonction de Bessel modifies

Les fonctions de Bessel modifié génèrent l'ensemble des solutions de l'équation différentielle de Bessel modifie suivante :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + v^2)y = 0, \tag{2.12}$$

si l'on remplace x par ix dans l'équation de Bessel (2.6) on trouve l'équation (2.12), autrement dit si $y(x)$ est une solution générale de (2.6) alors $y(ix)$ est une solution général de (2.12).

pour déterminer la solution on utilise la méthode de Frobenius, on trouve deux solution noté $I_v(x)$ et $K_v(x)$ donné par les expressions suivante :

$$I_v(x) = (i)^{-v} J_v(ix).$$

$$k_v(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left[\frac{I_v(x)-I_{-v}(x)}{sin(v\pi)}\right], \quad si \quad v \neq 0,1,2,\ldots \\ \\ \lim\limits_{n\to v} \frac{\pi}{2}\left[\frac{I_n(x)-I_{-n}(x)}{sin(n\pi)}\right], \quad si \quad v = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

tel que $I_v(x)$ sont les fonctions de Bessel modifie de premier type et $K_v(x)$ sont les fonctions de Bessel modifie de deuxième type [8].

Relation de récurrence

Les fonctions de Bessel modifie admet les mêmes relations de récurrence si on note $f(x)$= $I_v(x)$ ou $k_v(x)$

1. $\frac{d}{dx}[x^v f_v(x)] = x^v f_{v-1}(x).$
2. $\frac{d}{dx}[x^{-v} f_v(x)] = -x^{-v} f_{v+1}(x).$
3. $f_v'(x) = f_{v-1}(x) - \frac{x}{v} f_v(x).$
4. $f_{-v}(x) = (-1)^v f_v(x).$
5. $f_{v-1}(x) + f_{v+1}(x) = \frac{2x}{v} f_v(x).$
6. $f_v'(x) = \frac{1}{2}[f_{v-1}(x) + f_{v+1}(x)].$

voir [2][8]

2.6 Forme intégral de fonction de Bessel

La forme intégrale des fonctions de Bessel de premier type est donnée par :

1. $J_v(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi cos(v\theta - xsin(\theta)d\theta.$
2. $J_v(x) = \frac{(\frac{x}{2})^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+\frac{1}{2})}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt.$

Démonstration 2.6.1. *2-*

$$I=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\sum_{k\geq 0}\frac{ixt^k}{k!}dt=\sum_{k\geq 0}\frac{ix^k}{k!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}t^k dt$$

et pour que l'intégral est nul pour k impaire, on prend $k=2s$ donc :

$$A=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}t^{2s}dt=2\int_{0}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}t^{2s}dt$$

on fait un changement de variable $u=t^2$, on obtient alors

$$A=\int_{0}^{1}(1-u)^{v-\frac{1}{2}}u^{s-\frac{1}{2}}du=\beta(v+\frac{1}{2},s+\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(v+s+1)}$$

$$I=\sum_{k\geq 0}\frac{(ix)^{2s}}{2s!}\frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})\lceil(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(v+s+1)}$$

$$=\Gamma(v+\tfrac{1}{2})\sum_{k\geq 0}\frac{(ix)^{2s}}{2s!}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(v+s+1)}=\Gamma(v+\frac{1}{2})\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^s}{2s!}\frac{x^{2s}\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(v+s+1)}$$

multiplier les deux coté par $(\frac{x}{2})^v$ on obtient :

$$(\tfrac{x}{2})^v I=\Gamma(v+\tfrac{1}{2})(\sqrt{\pi})(\tfrac{x}{2})^v\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^s}{s!\Gamma(1+s+v)}(\frac{x}{2})^{2s}=\Gamma(v+\frac{1}{2})(\sqrt{\pi})J_v$$

ce qui implique que $J_v(x)=\frac{(\frac{x}{2})^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+\frac{1}{2})}I$.

2.7 Forme intégrale de fonction de Bessel modifie

1. $I_v(x)=\frac{(\frac{x}{2})^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}e^{-xt}dt$ *avec* $v>\dfrac{1}{2},x>0.$

2. $K_v(x)=\frac{(\frac{x}{2})^v\sqrt{\pi}}{\Gamma(v+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{\infty}(t^2-1)^{v-\frac{1}{2}}e^{-xt}dt$ *avec* $v>\dfrac{1}{2},x>0.$

Démonstration 2.7.1. *1- d'après la formule*

$$I_v(x)=(i)^{-v}J_v(ix),$$

et on remplace x par ix dans la représentation intégrale de fonction Bessel de premier ,on trouve

$$I_v(x) = i^{-v}\frac{(1}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+\frac{1}{2})}(\frac{x}{2})^v i^v \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}e^{-xt}dt$$
$$= \frac{(\frac{x}{2})^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}e^{-xt}dt$$

2- voir [10]

2.8 Comportement asymptotique

Comportement asymptotique pour que $x \sim \infty$

$J_v(x) \sim (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}}\cos(x-(v+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})$.

$Y_v(x) \sim (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}}\sin(x-(v+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})$.

$H_v^1(x) \sim (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}}e^{i(x-(v+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}$.

$H_v^2(x) \sim (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}}e^{-i(x-(v+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}$.

$I_v(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{x}$.

$K_v(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x}$.

$j_v(x) \sim \frac{1}{x}\sin(x-\frac{v\pi}{2})$.

$y_v(x) \sim \frac{1}{x}\cos(x-\frac{v\pi}{2})$.

Comportement asymptotique pour que $x \sim 0$

$J_v(x) \sim \frac{(2v-1)!!}{x^{v+1}}$.

$j_v(x) \sim \frac{1}{\Gamma(v+1)}(\frac{x}{2})^v$.

$y_v(x) \sim \frac{-1}{\pi}(\frac{x}{2})^v$.

pour plus d'information voir [10]

3 : Application

CHAPITRE

Application de polynôme de Bessel

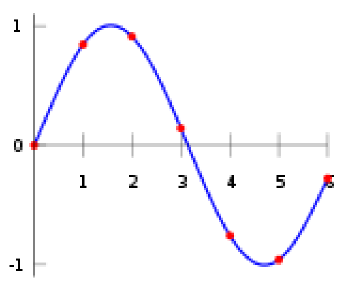
Les polynômes jouent un rôle très importants grâce a faciliter de calcul de dérivée et intégrale...etc. Elles sont utiliser dans différentes domaines par exemple pour résoudre des problèmes tel que l'interpolation, approximation, resolution des EDO et EI qu'on approfondirons dans ce chapitre .

3.1 Interpolation

Le problem de l'approximation d'une fonction f intervient dans plusieur situation comme par exemple :

- La fonction $f(x)$ est connue mais difficile a manipuler. L'approximation a pour but de remplacer f par une fonction simple qui est plus accessible pour l'intégration ...etc
- La fonction $f(x)$n'est pas connue ,on connait que les valeur dans certains point ,dans ce cas le but de l'approximation est alors de trouver une représentation analytiques des données exprémantale .

Étant donnée une suite de $(n+1)$ point $(x_i, f(x_i))$, i=0,1,..., n et f une fonction, la méthode d'interpolation consiste a déterminer un polynôme $p(x)$ de degré n passant par les point x_i tel que $p_n(x_i) = f(x_i)$.



Généralement il existe plusieurs méthode de l'interpolation a savoir par exemple

- **Interpolation de Lagrange :**

  $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$, avec $L_i(x) = \Pi_{i=0}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

- **Interpolation de newton :**

  $p(x) = \Pi_{i=0}^{n} a_i(x - x_i)$ avec a_i sont déterminer par la méthode de déférence dévissé.

- **Interpolation de spline cubique :**

  $P_i(x) = -M_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6(x_i-x_{i-1})} + M_i\frac{(x-x_n)^3}{6(x_n-x_{i-1})} + \left(\frac{y_i}{x-x_i} - M_i\frac{x_i-x_{i-1}}{6}\right)(x - x_i)\dots$
  $-\left(\frac{y_i}{x-x_i} - M_{i-1}\frac{x_i-x_{i-1}}{6}\right)(x - x_i)$,
  tel que les y_i sont l'image de x_i.

- **Interpolation de Tchebychev :**

  $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i)T_i(x)$, tel que T sont les polynômes de Tchebychev donnée par $T_i(x) = \cos(i \text{ arccos}(x))$ i=0,1,2,...
  avec $x_i = \cos(\frac{2i-1}{n}\frac{\pi}{2})$.

3.1.1 Principe de l'interpolation

L'idé de l'interpolation est de s'écrit la polynôme approché sous forme série :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i(x),$$

tel que B est une base polynomial et $p_n(x_i) = f(x_i)$, i=0,... n

on sabtitue par x_i on trouve le system $M \times a = f$

tel que M est une matrice de vandermande,

$$M = \begin{bmatrix} B_0(x_0) & B_1(x_0) & B_2(x_0) & \dots & B_n(x_0) \\ B_0(x_1) & B_1(x_1) & B_2(x_1) & \dots & B_n(x_1) \\ B_0(x_2) & B_1(x_2) & B_2(x_2) & \dots & B_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_0(x_n) & B_1(x_n) & B_2(x_n) & \dots & B_n(x_n) \end{bmatrix} ;\ a= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} ;\ f= \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

on résoudre le système pour trouver les coefficients et par substituant on obtient le polynôme.

3.2 Estimation de l'erreur

L'erreur est la difference entre la valeur exact et la valeur approchée

$$er(x) = |f(x) - p(x)|, \text{ avec } x \in [a, b]$$

on constate immédiatement que $er(x_i) = |f(x_i) - p(x_i)| = 0$.

3.2.1 Erreur d'interpolation

Soit $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sont des points de collocation,
on suppose que la fonction f est défini dans l'interval $[x_0, x_n]$ et $(n+1)$ dérivable dans l'interval alors pour tout x dans l'interval $[x_0, x_n]$,
l'erreur est défini par :

$$E(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \Pi_{i=0}^{n} (x - x_i) \, .$$

voir [9]

Exemple 3.2.1. *Étant donné le tableau suivant :*

x_i	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x_i)$	1.6487	1.9477	2.7183	7.3891

Table 3.1: Tableau des points d'interpolation

avec $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$.

Interpolation par polynôme de Bessel

Le polynôme approchée s'écrit sous forme suivante :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} k_i y_i(x),$$

tel que y sont les polynômes de Bessel.

on va interpoler cette fonction par un polynôme de degré 3

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} k_i y_i(x),$$

on substituée par les points on trouve le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} k_0 + k_2 - 5k_3 = f(-1) = 1.6487 \\ k_0 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_2 - \frac{1}{8}k_3 = f(\frac{-1}{2}) = 1.9477 \\ k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = f(0) = 2.7183 \\ k_0 + \frac{3}{2}k_1 + \frac{13}{4}k_2 - \frac{77}{8}k_3 = f(\frac{1}{2}) = 7.3891 \end{cases}$$

on peut écrire sous forme matricielle $A \times k = f$ *tel que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{4} & \frac{-77}{6} \end{bmatrix}, \; k = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

les coefficients sont déterminer par $k = A^{-1}f$,

alors k_0=*2.1* k_1 =*-0.759* k_2 =*1.08* k_3 = *0.305*

et le polynôme est $p_3(x) = 4.37x^3 + 7.8x^2 + 4.3x + 2.72.$

x	-1	-0.9	-.0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
er	0	0.14	0.18	0.16	0.09	0	0.08	0.15	0.16	0.12	0	0.19	0.4	0.66	0.68	0

Table 3.2: Tableau d'erreur pour l'interpolation avec polynôme Bessel

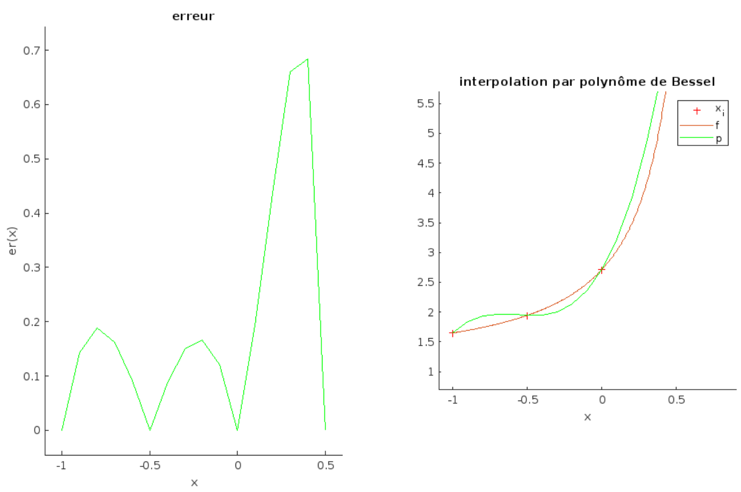


Figure 3.1: Interpolation par polynôme de Bessel avec erreur

Interpolation par polynôme de Tchebychev

On prend les points x_i suivante qui sont les racines de polynômes de Tchebychev

$$x_i = cos(\frac{2i-1}{n}\frac{\pi}{2}), i = 0, 1, \ldots n-1$$

x_i	-0.9511	- 0.5878	0	0.5878
$f(x_i)$	1.6695	1.8733	2.7813	11.3126

Table 3.3: Tableau des points d'interpolation

le polynôme approché s'écrit sous forme suivante :

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i T_i(x),$$

tel que T sont les polynômes de Tchebychev

on substituée par les point on trouve le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} m_0 - 0.95m_1 + 0.81m_2 - 0.95k_3 = 1.6695 \\ m_0 - 0.95m_1 - 0.31m_2 + 0.95m_3 = 1.8733 \\ m_0 - 6 \times 10^{-17}m_1 - m_2 + 1.8 \times 10^{-16}m_3 = 2.7813 \\ m_0 + 0.59m_1 - 0.31m_2 - 0.95m_3 = 11.3126 \end{cases}$$

$R \times m = f$ *tel que*

$$R=\begin{bmatrix} 1 & -0.95 & 0.81 & -0.95 \\ 1 & -0.95 & -0.31 & 0.95 \\ 1 & -6\times 10^{-17} & -1 & -1.8\times 10^{-16} \\ 1 & 0.59 & -0.31 & -0.95 \end{bmatrix} ;\ m = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$m = R^{-1}f,$

$$alors\ m_0 = 8.33\ m_1 = 10.7\ m_2 = 5.61\ m_3 = 1.68$$

$donc\ le\ polynôme\ est\ p_3(x) = 6.7x^3 + 11.22x^2 + 5.61x + 1.68.$

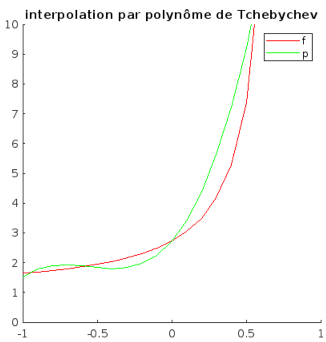
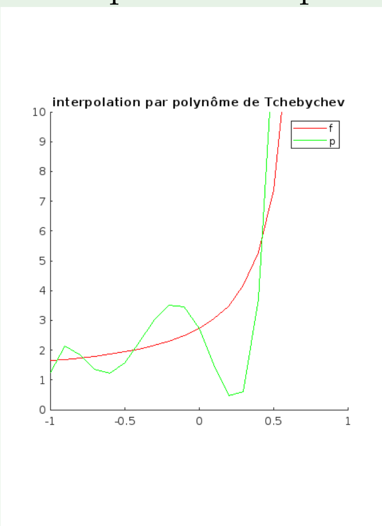
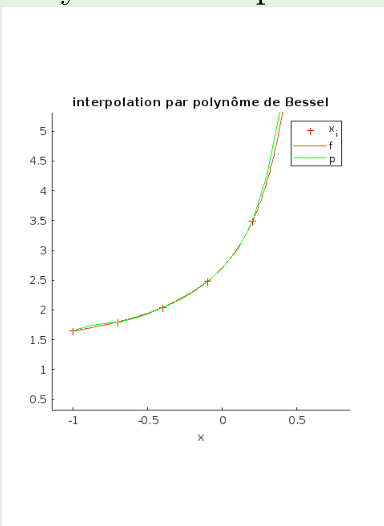


Figure 3.2: Interpolation par polynôme de Tchebychev

Remarque 3.2.1. On remarque pour n est très grand polynômes de Bessel reste stable par contre que Tchebychev n'est pas stable :





Convergence de l'erreur

Dans le domaine d'analyse numérique on s'intéresse toujours à deux axes très important :

- Stabilité de la méthode .

-Vitesse de convergence .

pour cela on a étudier ces deux propriétés pour les méthodes précédent ou n=15 et on obtient les résultat suivante :

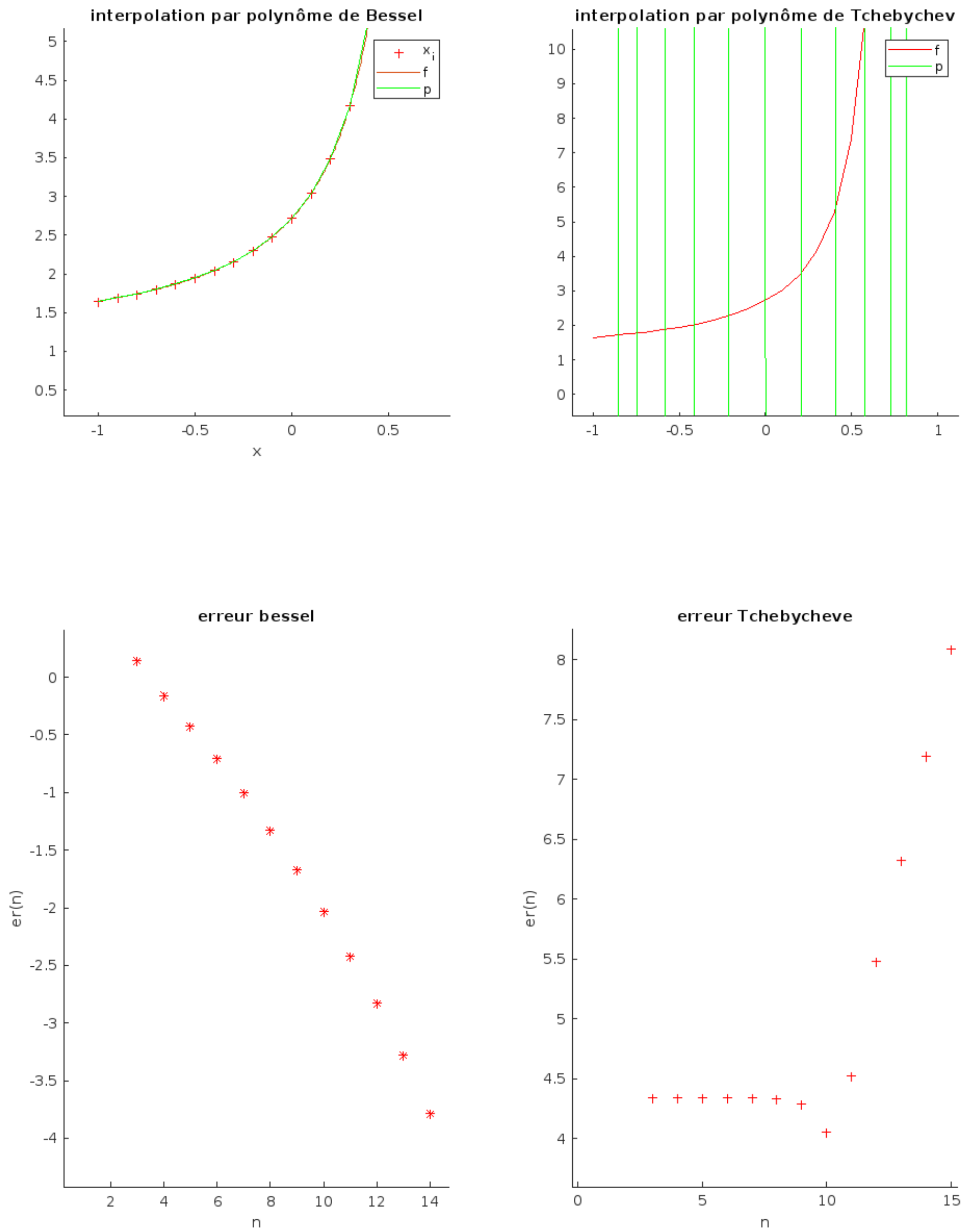


Figure 3.3: Étude de stabilité de la méthode par rapport a Bessel et Tchebychev

Conclusion

On sait que beaucoup que les polynômes de Tchebychev sont absolument les meilleures et donne une bonne approximation si les fonctions sont borné sur $[-1, 1]$*,et vous échouez dans les fonctions qui a des anomalies au bord de point 1 comme nous l'avons vu dans cet exemple,par contre que les polynômes de Bessel sont les plus efficace dans les fonctions qui a une accroissement rapide.*

Indication : *Pour interpoler avec un polynôme de grand* n*, on utilise un logiciel comme MATLAB.*

3.3 Approximation par la projection orthogonale

Dans cette partie on va interpoler une fonction dans un espace de Hilbert en raison de ces propriété caractéristique qui permet d'interpoler une fonction espace de dimensions infinis a une espace de dimension finis.

Principe de la méthode

Soit f une fonction définie sur un interval [a,b].

on va interpoler cette fonction par un polynôme de dégrée n s'écrit sous la forme suivante :

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k(x),$$

tel que B est une base polynomial orthogonal,

$$\langle B_k, B_j \rangle = \begin{cases} 0 & si \quad k \neq j, \\ c & si \quad k = j. \end{cases} \qquad (*)$$

pour trouver les coefficients on utilise la relation suivante :

$$\langle p_n, B_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \langle B_k, B_j \rangle,$$

et d'après la relation précédent (*), on trouve :

$$a_k = \frac{\langle f, B_k \rangle}{\langle B_k, B_k \rangle}. \tag{3.1}$$

Exemple 3.3.1. *On considérer la fonction f(x)=* e^x *sur l'interval* $[0, 2\pi]$ *on va approximer cette fonction par leur projection :*

$$p_3(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k y_k(x),$$

ou y sont les polynômes de Bessel.
on calcule les coefficients par la relation (3.1) *avec l'utilisation de changement de variable* $x = e^{i\theta}$ *tel que* $B_k = y_k$
donc :

$$a_k = \frac{\langle f, y_k \rangle}{\langle y_k, y_k \rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) y_k(e^{i\theta}) \rho(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta}{\int_0^{2\pi} y_k(e^{i\theta}) y_k(e^{i\theta}) \rho(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta},$$

alors on trouve : $a_0 = 0.289$,$a_1 = 0.589$,$a_2 = 0.118$, $a_3 = 0.0086$
et le polynôme est $p_3(x) = 0.12x^3 + 0.4845x^2 + 0.996x + 0.999$.

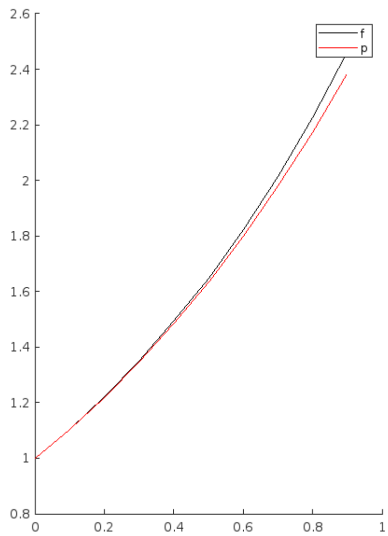


Figure 3.4: Courbe de e^x avec leur approximation

3.4 Résolution d'équation intégral par polynôme de Bessel

Des nombreux problèmes peuvent être modélisés en équations intégrales qui ont intéresser par Fredholm et voltera qui sont preuve l'existence et l'unicité de solution.

3.4.1 Équation intégrale

On appelle Équation intégrale tout equation dans la quelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégral. Cette définition général tient compte de beaucoup de formes naturellement issus de la modélisation des différentes problèmes .

la forme ordinaire d'une equation intégral linéaire est donner par :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u(t)dt, \tag{3.2}$$

tel que $\alpha(x)$, $f(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions donnée , λ est un paramétré u(x) est l'inconnu a déterminer qui peut être impossible par les méthodes analytique.

il existe deux type d'équation intégral :

- Équation intégral de Fredholm si les bornes d'intégration sont fixés.
- Équation intégral de voltera si l'un des bornes sont des fonctions .

3.4.2 Méthode de résolution (méthode de collocation)

Pour résoudre cette équation on utilise la méthode de collocation, le principe de cette méthode applique a la résolution d'une EDO et EI, qui consiste a chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finies en exigeant que l'équation soit vérifier certains nombre fini des point appelée point de collocation x_i voir [7].

tel que $u(x_i) = f(x_i) + \lambda \int k(x_i,t)u(t)dt,$

on pose

$$u(x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i(x_i), \tag{3.3}$$

tel que B est une base polynomial

alors

$$\sum_{i=0}^{n} a_i B_i(x_i) = f(x_i) + \lambda \int k(x_i, t) \sum_{i=0}^{n} a_i B_i(t) dt,$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i B_i(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i \int k(x_i, t) B_i(t) dt,$$

$$A_{i,j} a_i = f_i + \lambda S_{i,j} a_i,$$

tel que $A_{i,j} = B_j(x_i)$ et $S_{i,j} = \int k(x_i, t) B_j(t) dt$

$$(A_{i,j} - \lambda S_{i,j}) a_i = f_i,$$

$M_{i,j} a_i = f_i$ donc $a_i = inv(M_{i,j}) f_i$.

en remplaçant les a_i dans (3.3) on trouve la solution de l'équation intégrale donné.

Exemple 3.4.1. *Soit l'équation intégral de Fredholm suivante :*

$$v(x) = e^x - e^{-x} + \int_0^1 e^{-x-t} v(t) dt,$$

tel que $f(x) = e^x - e^{-x}$ *et* $k(x, t) = e^{-x-t}$.

avec la solution exact est $v(x) = e^x$

on va résoudre cette équation par la méthode précédente en donnant les points

ci-dessus $(0, 0.25, 0.5, 0.75, 1)$.

pour $n = 4$, *on a*

$$v(x_i) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i y_i(x_i), \tag{3.4}$$

tel que y sont les polynômes de Bessel.

$$v(x_i) = e^{x_i} - e^{-x_i} + \int_0^1 (e^{-x_i - t}) v(t) dt,$$

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i y_i(x_i) = e^{x_i} - e^{-x_i} + \int_0^1 (e^{-x_i - t}) \sum_{i=0}^{4} \alpha_i y_i(t) dt, \text{ on trouve :}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{31}{16} & \frac{235}{64} & \frac{2141}{256} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{4} & \frac{-77}{8} & \frac{591}{16} \\ 1 & \frac{7}{4} & \frac{79}{16} & \frac{1297}{64} & \frac{28501}{256} \\ 1 & 2 & 7 & 37 & 266 \end{bmatrix} ; S = \begin{bmatrix} 0.362 & 0.896 & 1.91 & 6.34 & 31.7 \\ 0.492 & 0.698 & 1.48 & 4.93 & 24.7 \\ 0.383 & 0.544 & 1.16 & 3.84 & 19.2 \\ 0.229 & 0.423 & 0.901 & 2.99 & 15 \\ 0.233 & 0.33 & 0.701 & 2.33 & 11.7 \end{bmatrix} ; f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5052 \\ 1.0422 \\ 1.6446 \\ 2.3504 \end{bmatrix}$$

alors $\alpha = (A - S)^{-1} f$

donc $\alpha_0 = 0.304$, $\alpha_1 = 0.555$,$\alpha_2 = 0.136$,$\alpha_3 = 0.00472$,$\alpha_4 = 6.16 \times 10^{-4}$.

En substituant dans (3.4) *on trouve :*

$$v(x) = 0.064x^4 + 0.14x^3 + 0.51x^2 + 0.999x + 1.$$

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$er(x_i)$	4.60×10^{-6}	2.89×10^{-6}	2.14×10^{-6}	1.76×10^{-6}	1.81×10^{-6}

Table 3.4: Tableau d'erreur pour les points de collocation

et $max(er)$= 4.60×10^{-6}

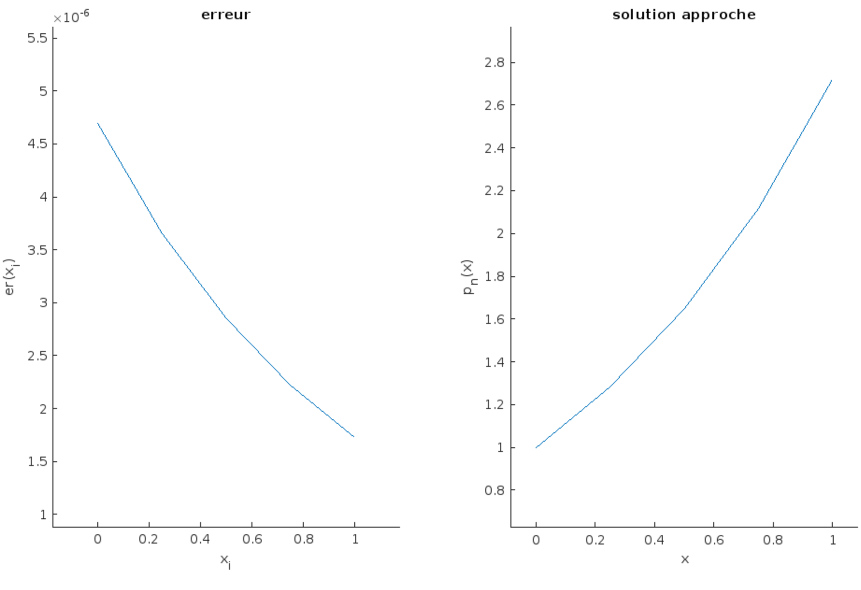


Figure 3.5: Solution approché avec l'erreur

Exemple 3.4.2. *Considérons l'équation intégrale suivante*

$$u(x) = x^2 + \tfrac{2}{3}x - \int_{-1}^{1}(x-t)u(t)dt,$$

d'où la solution exact est $u(x) = x^2$.
on applique la même méthode précédente on trouve que la solution approché est $u(x) = x^2$ *coïncider avec la solution exact c'est a dire que* $er(x_i) = 0$.

3.5 Résolution EDO

Dans cette partie on va déterminer la solution d'une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x). \tag{3.5}$$

On sait que la solution générale est $y_g = y_p + y_h$
Si a(x),b(x),c(x) sont des constant, il est facile de déterminer la solution mais si elles sont des polynômes la solution peut être difficile a déterminer .

Exemple 3.5.1. *Considérons l'équation différentielle suivant*

$$x^2y'' + xy' + y = x^3 + x^2, \tag{3.6}$$

avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
On va déterminer la solution particulier de cette équation posons que :

$$y_p = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i(x), \tag{3.7}$$

tel que B sont les polynômes de Bessel,alors

$$y_p = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i+k)!}{(i-k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k, \tag{3.8}$$

$$y'_p = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i-1} k\frac{(i+k)!}{(i-k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}, \tag{3.9}$$

$$y''_p = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i-1}(k-1)k\frac{(i+k)!}{(i-k)!(k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-2}, \tag{3.10}$$

on remplace (3.8) ,(3.9) *et* (3.10) *dans* (3.6) *on obtient :*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left[\left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i+k)!}{(i-k)!k!} + \sum_{k=0}^{i-1} (k-1)k \frac{(i+k)!}{(i-k)!(k-1)!} + \sum_{k=0}^{i-1} k \frac{(i+k)!}{(i-k)!k!} \right) \right] \left(\frac{x}{2} \right)^k = x^3 + x^2$$

on pose :

$$A_{ik} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i+k)!}{(i-k)!k!},$$

$$B_{ik} = \sum_{k=0}^{i-1} (k-1)k \frac{(i+k)!}{(i-k)!k!},$$

$$C_{ik} = \sum_{k=0}^{i-1} k \frac{(i+k)!}{(i-k)!k!},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 15 & 0 \\ 1 & 10 & 45 & 105 & 105 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 630 & 1260 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 30 & 45 & 0 \\ 0 & 10 & 90 & 315 & 420 \end{bmatrix}$$

$$D = (A+B+C)^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & 15 & 75 & 225 \\ 0 & 0 & 0 & 150 & 1050 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1785 \end{bmatrix}$$

$a = D^{-1} \times k$

avec $k = [0,0,1,1,0]^t$

donc :

$a_0 = \frac{1}{10}$,$a_1 = \frac{-7}{50}$,$a_2 = \frac{1}{3}$,$a_3 = \frac{1}{150}$, $a_4 = 0$,

substituant dans l'équation (3.7) *on obtient la solution est :*

$$y_p(x) = \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5}.$$

Application sur les fonctions de Bessel

L'équation de Bessel apparait lors de recherche des solutions séparables a l'équation de Laplace en coordonnées cylindrique donc les foncions de Bessel sont particulièrement important propagation des ondes et de potentielle statistique .

3.6 Résolution de l'équation harmonique

Soit l'équation harmonique suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{3.11}$$

on va la transformer vers une equation cylindrique faisant la changemant suivante :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta). \\ y = r\sin(\theta). \\ r = \sqrt{(x^2 + y^2)}. \\ \theta = arctan(\frac{y}{x}). \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{-\sin(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$
$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2})\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$
par substituant dans (3.11) on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{3.12}$$

qui est l'équation de Laplace cylindrique qu'on va le résoudre par la méthode de séparation de variable :

$$u(r, \theta, z) = R(r)M(\theta)Z(z) \tag{3.13}$$

on remplace (3.13) dans l'équation précédent (3.12) on trouve l'équation suivante :

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R(r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{M''(\theta)}{M(\theta)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{M''(\theta)}{M(\theta)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k^2 = cte,$$

$$\begin{cases} -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k^2, \\ \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{M''(\theta)}{M(\theta)} = -k^2. \end{cases}$$

pour $-\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k^2$,

$Z(z) = A\cosh(kz)$.

et $\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{M''(\theta)}{M(\theta)} = -k^2$, on multiplier par r^2 on trouve :

$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R(r)}{R(r)} + \frac{M''(\theta)}{M(\theta)} = -k^2r^2$,

$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R(r)}{R(r)} + k^2r^2 = \frac{M''(\theta)}{M(\theta)} = -v^2$,

$M(\theta) = B\sinh(v\theta)$.

Finalement on trouve l'équation :

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{v^2}{r^2} + k^2 = 0, \tag{3.15}$$

alors il reste de trouver $R(r)$,
multiplions (3.15) par $r^2R(r)$ on trouve :

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (k^2r^2 - v^2)R(r) = 0 \ ,$$

qui est l'équation de Bessel.
pour $k = 1$ alors $R(r) = c_1J_v(r) + c_2Y_v(r)$ d'ou

$$u(r,\theta,z) = (c_1J_v(r) + c_2Y_v(r))A\cosh(kz)B\sinh(v\theta)$$

et pour k est un nombre complexe $k = i$ on a $R(r) = I_v(x)$ ou $k_v(x)$
alors la solution de l'équation (3.12) est :

$$u(r,\theta,z) = (d_1I_v(r) + d_2K_v(r))A\cosh(kz)B\sinh(v\theta)$$

3.7 Calcule intégrales avec fonction de Bessel

Dans cette partie on va calculer l'intégral $I = \int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)dx$,

par l'utilisation de la premier forme intégral de fonction de Bessel alors :

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi cos(bx\sin\theta)d\theta dx$$
$$= \tfrac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-ax}\cos(bx\sin\theta)d\theta dx$$
$$= \tfrac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\int_0^\infty e^{-ax}\left(\frac{e^{ibx\sin\theta}+e^{-ibx\sin\theta}}{2}\right)dx\right]d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{e^{-(a-ib\sin\theta)x}}{-a+ib\sin\theta} + \frac{e^{-(a+ib\sin\theta)x}}{-a-ib\sin\theta}\right]_0^\infty d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{a-ib\sin\theta} + \frac{1}{a+ib\sin\theta}\right]d\theta$$
$$= \tfrac{a}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta$$

on fait un changement de variable $u = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $u^2 = \frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$, $\sin^2\theta = \frac{1}{1+u^2}$ alors :

$$I = \tfrac{a}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{a^2+b^2+a^2u^2}$$
$$= \tfrac{-a}{\pi}\tfrac{1}{a^2+b^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{1+\frac{a^2u^2}{a^2+b^2}u^2}$$

on pose $v^2 = \frac{a^2u^2}{a^2+b^2}$ on trouve :

$$I = \tfrac{-a}{\pi}\tfrac{1}{a^2+b^2}\tfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{1+v^2}$$

$$= \tfrac{-1}{\pi}\tfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\arctan(v)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

CONCLUSION

Ce mémoire est une étude des fonctions et polynômes de Bessel en donnant quelque propriété et les différents application. Dans ce mémoire Nous utilisons les fonctions de Bessel pour la résolutions de l'équation harmonique avec un changement cylindrique ou on a démontrer que l'équation de Bessel est un cas particulier de l'équation de Laplace. Aussi nous utilisons les polynômes de Bessel pour la resolution de l'équation intégral, différentielle et dans l'interpolation ou on a vue sont le plus efficace lorsque on interpole une fonction qui a un accroissement rapide par contre que les polynômes de Tchebychev a échoue dans ces cas des fonctions. Cette étude est numérique pas théorique qui a été un peu difficile puisque on a pas trouver aucun livre étudier l'erreur d'interpolation pour les polynômes de Bessel .

De manière générale, ce travail est inclus parmi les travaux d'analyse fonctionnelle et numérique, car il apparaît que le choix de la base est le plus difficile car il n'y a pas de critères de sélection, cette étude reste donc ouverte à d'autres travaux et un vaste espace de recherche.

Bibliography

[1] Y.Ayant.M.Borg, fonction spéciales a l'usage des étudiants en physique, DUNDO PARIS 1971 .

[2] W. W. Bell, D.Van, Spécial fonctions for scientistes and engineers, nostrand company LTD, 1967.

[3] E.Grosswaid, Bessel polynomiales, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1978.

[4] R.Haberman, Applied partial differential Équation With Fourier série and Boundray Value Problem 5 th Édition .

[5] M. Lavoie, Polynômes orthogonaux, Québec- Canada.

[6] A. Nikiforov. V. Ouvarov Fonctions spéciales de la physique mathématique, Où ce des publications universitaires, 1983.

[7] A.Rahmoune , Équation intégrales linéaire et non linéaires Analyse et techniques de Résolution, Augest 16, 2018.

[8] Ravi P. Agarwal Donal O'Regan, Ordinary and Partial Differential Équation with Special Function, Fourier Séries, and Boundary Value Problème, Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[9] J.Stoer.R.Bulirsh, Introduction to Numerical Analysis.

[10] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, Londres 1931.

[11] M.B. Zahaf and D. Manchon, arXiv:1206.2522 [math.FA].

Abstract

In this work, we have studied the functions and polynomials of Bessel with giving some theories and properties and mentioned some of their applications, where they were employed in the solutions of integral and differential equations, and also we used them to interpolate functions that have a certain asymptotic behavior, without forgetting the solutions of Laplace equations, where it was manifested through this study to emphasize that the natural source of the Bessel equation is the Laplace equation in cylindrical cordinate.
Key words: Bessel functions and polynomials, Rodrigue Formula, Sturm-Liouville problem

---

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié les fonctions et les polynômes de Bessel en donnant quelques théories et propriétés et mentionné certaines de leurs applications, où ils ont été employés dans les solutions d'équations intégrales et différentielles, et aussi nous les avons utilisés pour interpoler des fonctions qui ont un certain comportement asymptotique, sans oublier les solutions des équations de Laplace, où il a été manifesté à travers cette étude pour souligner que la source naturel de l'équation de Bessel est l'équation de Laplace en cordonné cylindrique .
Mots clés: Fonctions et polynômes de Bessel, formule Rodrigue , problem de Sturm-Liouville

---

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة دوال و كثيرات حدود باسل مع اعطاء بعض النظريات والخواص وذكر البعض من تطبيقاتها حيث تم توظيفها في حلول المعادلات التكاملية و التفاضلية وايضا استخدمناها في استقطاب دوال لها سلوك تقاربي معين دون ان ننسى حلول معادلات لابلاس حيث تجلى من خلال هذه الدراسة التاكيد على ان مصدر معادلة باسل هي معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية.
الكلمات المفتاحية: دوال وكثيرات حدود باسل ، عبارة رودريغ، مشكل ستيرم ليوفيل
