

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed EL Bachir EL-Ibrahimi
Bordj Bou ARRIRIDJ

Faculté des Mathématiques et informatique
Département de la recherche opérationnelle



Mémoire de fin d'étude
En vue de l'obtention du diplôme de Master
En : Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle

Thème :

Le problème de coloration par liste sur quelques classes des graphes

Présenté par : **ABBES Amel**

Soutenu publiquement le 13/07/2021 , devant le jury composé de :

Mr B.Brahmi *Président*

Mr H.Touati *Encadrant*

Mr A.Saha *Examinant*

Année universitaire : 2020-2021

1	<i>Généralités sur les graphes</i>	11
1.1	Définitions et notations	11
1.1.1	Graphe	11
1.1.2	Adjacence et incidence	12
1.1.3	Sous-graphe	13
1.1.4	Chaine , Cycle	13
1.1.5	Degrés	14
1.1.6	Connexité et forte connexité	15
1.2	Quelques classes de graphes	16
1.2.1	Graphe complet et clique	16
1.2.2	Graphe biparti et biparti complet	17
1.2.3	Graphe planaire	17
1.2.4	Arbres et forêt	20
1.2.5	Graphe d'intervalles	21
1.2.6	Graphes parfait	22
1.2.7	Graphe adjoint	22
1.3	Coloration des graphes	24
1.4	Variantes de la coloration propre des graphes	24
1.4.1	La coloration propre des sommets	24
1.4.2	La coloration propre des arêtes	25
1.4.3	La coloration par liste	25
1.5	Applications de coloration par liste des graphes	25
2	<i>Une application de la coloration par liste</i>	27
2.1	Affectation des registres et coloration du graphe	32
2.1.1	Graphes d'interférence (Graphes d'intervalles)	32

3	<i>La coloration par liste dans quelques graphes</i>	34
3.1	La coloration par liste des sommets	34
3.2	Graphes 2-choissable	35
3.3	Caractérisations du nombre de liste chromatique χ_L	44
3.4	Relations entre $\chi(G)$ et $\chi_L(G)$	47
3.4.1	Graphes ayant leur χ et χ_L identiques	49
3.5	La coloration par liste d'arêtes	51
3.6	Caractérisations du nombre de liste chromatique d'arête χ'_L	52
3.7	Relations entre $\chi'(G)$ et $\chi'_L(G)$	53
3.8	Résultats sur les graphes planaires	55

TABLE DES FIGURES

1.1	Le graphe de gauche est simple, par contre celui de droite ne l'est pas.	12
1.2	Exemple d'un graphe orienté	12
1.3	Adjacence et incidence	12
1.4	Graphe et sous-graphe	13
1.5	Chaîne et cycle	14
1.6	Graphe connexe et graphe non connexe	15
1.7	Graphe non fortement connexe	16
1.8	Un graphe et son complémentaire	16
1.9	Graphe complet	17
1.10	Graphe biparti G et biparti complet $K_{3,3}$	17
1.11	Représentation planaire du K_4	18
1.12	Représentation des faces dans un graphe planaire	18
1.13	Un graphe planaire externe	19
1.14	Arbre	20
1.15	Forêt	20
1.16	Graphe d'intervalles	21
1.17	Graphe cordal n'est pas un graphe d'intervalles	22
1.18	Un graphe parfait	22
1.19	Un graphe G et leur graphe adjoint $L(G)$	23
1.20	Coloration propre de sommets d'un graphe G	24
1.21	Coloration propre d'arêtes d'un graphe G	25
2.1	Un exemple d'un filtre IIR forme directe II	28
2.2	Exemple d'architecture hétérogène	28
2.3	Graphe de précédence correspondant	29
2.4	Utilisation des unités fonctionnelles	29
2.5	Graphe d'interférence des unités fonctionnelles	30

2.6	Planning et l'affectation des registres (a) : l'utilisation des registres et (b) : le graphe d'interférence des registre	31
2.7	Un graphe d'interférence qui est un graphe d'intervalles	32
2.8	Graphe d'interférence n'est pas un graphe d'intervalles	33
2.9	Architecture de registres hétérogènes	33
3.1	Graphe avec une liste d'affectation L	35
3.2	Arêtes parallèles entre u et v	36
3.3	Graphe complet d'ordre 6	36
3.4	Un grphe $\theta_{2,2,4}$	36
3.5	$\theta_{2,2,2k}$	37
3.6	La même liste est affectée pour les sommets w_j	37
3.7	Différentes listes sont affectées aux sommets w_i	38
3.8	Aucun choix pour w_{2k+1}	38
3.9	Coloration propre par liste	39
3.10	Cycles joints par au plus un sommet	40
3.11	Un graphe $\theta_{a,b,c}$ avec $a, b \neq 2$	41
3.12	$C \cup P$	41
3.13	$C \cup P \cup P^*$	42
3.14	Un graphe avec 2 chaines supplémentaires	42
3.15	Les graphes H_i , $1 \leq i \leq 5$	43
3.16	Nombre de liste chromatique d'un cycle pair et impair ($p \in \mathbb{N}^*$)	44
3.17	Un arbre T est une affectation de liste	46
3.18	Coloration par liste d'un arbre	46
3.19	Un graphe G ayant un seul cycle	47
3.20	Affectation de liste lorsque la longueur de P est pair ou impair	48
3.21	$K_{3,3}$	49
3.22	Un graphe chordal	50
3.23	Un graphe H et son complémentaire G	50
3.24	Un graphe et son grahe adjoint correspond	52
3.25	K_5	52
3.26	K_3	53
3.27	Un graphe biparti	54
3.28	Exemple dun graphe triangulaire et quasi-triangulaire	55
3.29	Un graphe planaire de 3 sommets	55
3.30	Fractionnement du graphe avec un chord de v_i à v_j	56
3.31	Les sommets voisins de v_k	56

REMERCIEMENT

Tout d'abord, je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir ouvert les portes de la connaissances, de m'avoir procuré la force et le courage nécessaire afin de mener à terme ce modeste travail.

Mes chaleureux et sincère remerciements vont à mon encadreur M_r TOUATI, sans lui, ce travail n'aurait pas pu avoir cette forme. Je lui témoigne tout mon gratitude pour m'avoir encouragé, consacrer son temps précieux et m'avoir accordée son attention avec une extrême patience, et je le remercie aussi pour tous ses conseils qui étaient mon guide vers une vision plus étendue.

Mes remerciements vont également aux membres du jury :
M_r B. BRAHMI pour l'honneur et le plaisir qu'il nous a fait en acceptant de présider ce jury,
et M_r A. SAHA qui a bien voulu examiner cet mémoire et d'accepter à participer au jury .

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et mes vifs remerciements à tous les enseignants de département de mathématiques et informatique notamment les enseignants de recherche opérationnelle .

DÉDICACES

Je dédie ce travail à mes parents pour leurs bénédiction et soutien .

À mon époux Mohamed et mes belles petites filles Amani et Maria .

À mes sœurs et mes frères et leurs familles .

À mes professeurs surtout mon encadreur Mr. Touati.

À mes amies .

La théorie des graphes est un domaine de recherche actif depuis 200 ans. Le plus ancien article de théorie des graphes connu a été rédigé par *Euler* en 1736, pour résoudre le problème des ponts de Königsberg.

Dans ce travail, nous avons étudié l'un des variantes de la coloration des graphes, c'est *la coloration par liste*.

Après avoir expliqué des notions de base sur les graphes, nous l'avons utilisé pour démontrer quelques théorèmes concernant le problème. Nous nous sommes par la suite présenté une application de la coloration par liste, qui est *l'affectation des registres*.

Enfin, nous nous sommes cités des relations et des théorèmes fondamentales de la coloration par liste dans quelques types de graphes notamment les graphes planaires.

Mots clés : graphe - coloration par liste - l'affectation de registres - graphes planaires .

ABSTRACT

Graph theory has been an active field of research for 200 years. The oldest known graph theory paper was written by Euler in 1736, to solve the problem of Königsberg bridges.

In this work, we have studied one of the variants of graph coloring, which is *list coloring*. After explaining some basic notions about graphs, we used it to demonstrate some theorems about the problem. We then presented an application of list coloring, which is *the assignment of registers*.

Finally, we cited fundamental relations and theorems of list coloring in some types of graphs, in particular planar graphs.

Key words : graph - list coloring - registers assignment - planar graphs .

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'application des mathématiques dans divers domaines a connu un essor spectaculaire ces dernières décennies. Avec le développement prodigieux des ordinateurs, les mathématiques discrètes sont devenues incontournables en informatique, en théorie des jeux, dans des problèmes de décision, et dans la plupart des sciences vu qu'elles s'occupent de l'étude de structure algébriques ou combinatoires finis .

La théorie des graphes, une branche des mathématiques discrètes, s'est avérée particulièrement utile pour un grand nombre de domaines vu sa richesse en résultats théoriques, et même d'applications aux problème du monde réel .

Historiquement, cette théorie prend ses racines des travaux d'*Euler* au 18^{ème} siècle, qui avait pour but l'étude du problème des sept ponts de **Königsberg**. Par ailleurs, elle s'est considérablement développée, pour devenir une théorie à part entière permettant la résolution de nombreux problèmes dans divers domaines notamment la biologie, la physique, l'informatique ...etc .

En effet, la théorie des graphes s'intéresse à l'étude des objets mathématiques , appelés **graphes**, utilisés pour modéliser les relations binaire entre des objets . La représentation en graphe est l'une des plus utilisées pour modéliser différents sortes d'objets ou situations. Un graphe peut être simplement présenté comme un ensemble de points reliés entre eux par des relations appelées arêtes ou arcs.

Malgré la simplicité apparente de leur représentation, les graphes occupent une large part de la complexité algorithmique. Il est donc très important de bien comprendre la structure de graphe modélisant le problème à résoudre afin de lui fournir des algorithmes de résolution efficaces. Pour preuve, le problème de coloration des graphes planaires, en est un exemple.

Depuis ses origines qui n'étaient qu'une simple curiosité mathématique qui tente de résoudre le problème célèbre **des quatre couleurs**, ce problème est devenu un sujet de grand intérêt, notamment en raison de la diversité de ses résultats théoriques, ses problèmes non résolus ou encore ses nombreuses applications dans différents domaines à savoir les problèmes d'ordonnancement, d'allocation de ressources, et la diffusion. En outre, la coloration de graphes peut servir dès qu'il y a la notion de concurrence ou de conflit.

D'une manière générale, la définition la plus simple de la coloration de graphes consiste à déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun sommet (point) n'ait la même couleur que ses voisins.(les points auxquels il est relié).

Nous nous intéressons dans ce travail, à la coloration par liste dans les graphes, qui est un problème *N-P difficile*¹ [19]. Ce problème a été introduit par *Erdős, Rubin, et Taylor* [4], dans la coloration des graphes, appelée communément coloration propre, on cherche à minimiser le nombre de couleurs utilisées, tandis que dans la variante à laquelle on s'intéresse, on cherche à minimiser la taille de la liste.

Erdős et al. a proposé la notion de coloration par liste pour tenter de résoudre un problème de *Jeffery Dinitz* qu'il a posé à la 10^{ème} conférence de Sud-Est sur la combinatoire, théorie des graphes et informatique à Boca Raton en Avril 1979 [23].

Le problème a été énoncé comme suit :

Étant donné un tableau ($m \times m$) de m -ensembles, est-il possible de choisir toujours un élément de chaque ensemble, en gardant les éléments choisis distincts dans chaque rangée, et distinct dans chaque colonne ?.

Cette variante de la coloration a plusieurs applications qui peuvent être modélisé par la coloration par liste. Une application très intéressante sera détaillée dans le 2^{ème} chapitre.

Le reste de notre travail est organisé comme suit : Dans le premier, nous présentons les définitions et les notions de base de la théorie des graphes qui nous seront nécessaires dans la suite. Nous présentons aussi les notions de la coloration propre des sommets et des arêtes et nous terminons par certains applications de la coloration par liste.

Le troisième chapitre. Nous citons certains théorèmes et résultats très important concernant la coloration par liste des sommets et des arêtes. Nous expliquons les graphes qui sont 2-choisissable, et nous donnons des caractéristiques sur les nombres de liste chromatique.

Nous terminons le travail par une conclusion.

1. un problème NP-difficile est un problème vers lequel on peut ramener tout problème de la classe NP par une réduction polynomiale.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHERS

Comme toute discipline, la théorie des graphes se distingue par son propre langage. Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et notions que l'on considère comme étant de base pour comprendre la suite du travail. Nous définissons précisément les classes de graphes qui interviennent dans ce mémoire. Ensuite, nous abordons les notions de coloration propre des sommets et la coloration propre des arêtes d'un graphes. Nous donnons leurs définitions ainsi leurs variantes fondamentales notamment la coloration par liste des sommets et des arêtes. Nous terminons le chapitre par quelques applications de coloration des graphes .

1.1 Définitions et notations

Toutes les notions de cette section ont été prise de ([24] et [25])

1.1.1 Graphe

Définition 1.1.1. *Un graphe G est un couple (V, E) où V est l'ensemble non vide des points dont les éléments sont appelés sommets, et E est l'ensemble d'arêtes de G . Chaque arête est une paire de sommets.*

On note habituellement une arête entre deux sommets u et v par uv .

Si $u=v$, alors l'arête uv est appelée boucle. Les arêtes qui ont les même extrémités sont arêtes multiples.

Un graphe est dit simple s'il est sans boucle et sans arêtes multiples.

Un graphe orienté , noté $G = (V, A)$, est le graphe où les arêtes sont orientés (On les appelle arcs) .

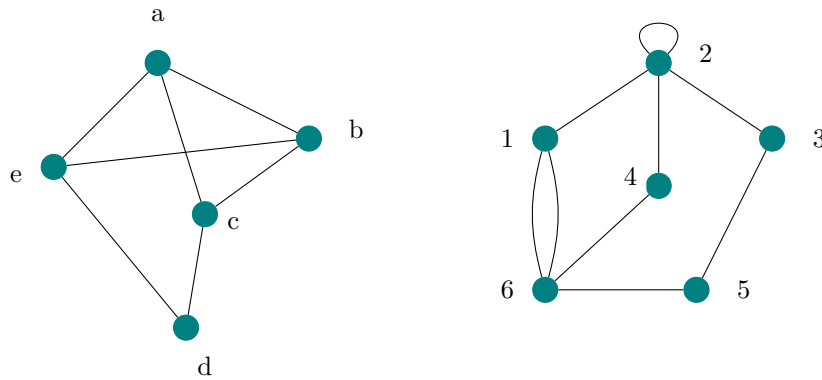


FIGURE 1.1 – Le graphe de gauche est simple, par contre celui de droite ne l’est pas.

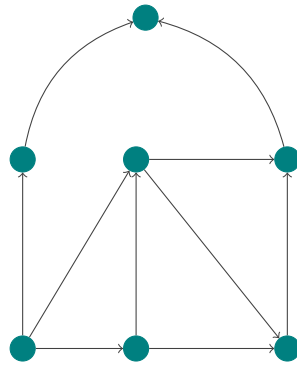


FIGURE 1.2 – Exemple d’un graphe orienté

1.1.2 Adjacence et incidence

Définition 1.1.2. Soit u et v deux sommets d’un graphe $G = (V, E)$. On dit que u et v sont **adjacent** si $uv \in E$. De ce fait on dit que u et v sont les extrémités de l’arête.

Deux arêtes sont incidentes si elles partagent une même extrémité.
L’arête uv est incidente aux sommets u et v .

Dans la figure 1.3 :

- Les sommets adjacents au sommet e sont : d, b, g, f .
- Les arêtes ed , eb , eg et ef sont incidentes.

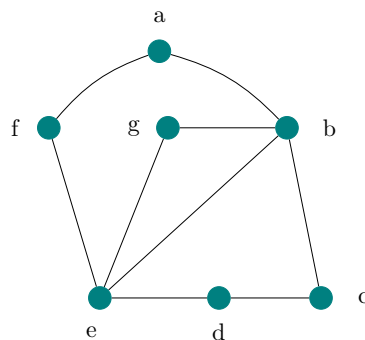


FIGURE 1.3 – Adjacence et incidence

1.1.3 Sous-graphe

Définition 1.1.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe représenté dans la figure 1.4(a) .

1. Un graphe $H = (V, E)$ est un sous-graphe de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ et toutes les arêtes de $E(H)$ ont leurs extrémités dans $V(H)$. On note $H \subseteq G$. (voir l'exemple de la figure 1.4 (b)).
2. Un graphe $H' = (V', E')$ est un sous-graphe partiel de G si $V(G') = V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$. (voir l'exemple de la figure 1.4 (c)).
3. Soit S un sous ensemble non vide de $V(G)$.Le sous-ensemble de G induit par S , noté $G[S]$,est le graphe défini comme suit : $V(G[S]) = S$ et toutes les arêtes de $E(G)$ ayant leurs deux extrémités dans S sont également dans $E(G[S])$.Autrement dit $E(G[S]) = \{uv \mid u, v \in S \text{ et } uv \in E(G)\}$. (voir l'exemple de la figure 1.4 (d)).
4. Le sous-graphe de G obtenu en supprimant un sommet v et toutes les arêtes incidentes à ce dernier est noté par $G \setminus \{v\}$ (ou simplement $G \setminus v$).(voir l'exemple 1.4 (e)). De même , le sous-graphe de G obtenu en supprimant une arête noté $G \setminus \{uv\}$.(ou simplement $G \setminus uv$). La suppression d'une arête uv n'implique pas la suppression des sommets u et v . (voir l'exemple de la figure 1.4(f)).

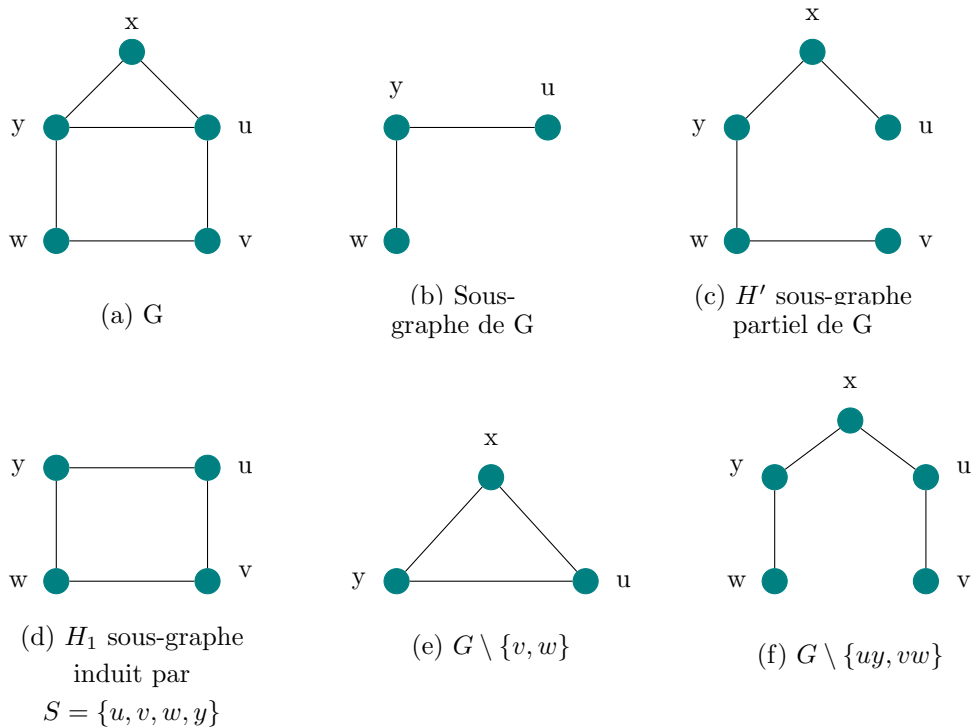


FIGURE 1.4 – Graphe et sous-graphe

1.1.4 Chaîne , Cycle

Définition 1.1.4. Une chaîne P_K dans un graphe G est une suite v_0, v_1, \dots, v_k de sommets telle que deux sommets consécutifs v_i et v_j sont reliés par une arête.

Une chaîne qui ne contient pas deux fois le même sommet est dite élémentaire . La longueur d'une telle chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose.

Une chaîne hamiltonienne d'un graphe G est une chaîne qui passe par tous les sommets de G une et une seule fois.

Une chaîne eulérienne d'un graphe G est une chaîne qui passe par toutes les arêtes de G une et une seule fois .

Un cycle C_k est une chaîne élémentaire (u_0, u_1, \dots, u_k) où les extrémités sont confondues c-à-d : $u_0 = u_k$.

Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets de G une et une seule fois.

Un cycle eulérien est un cycle qui passe par toutes les arêtes de G une et une seule fois .

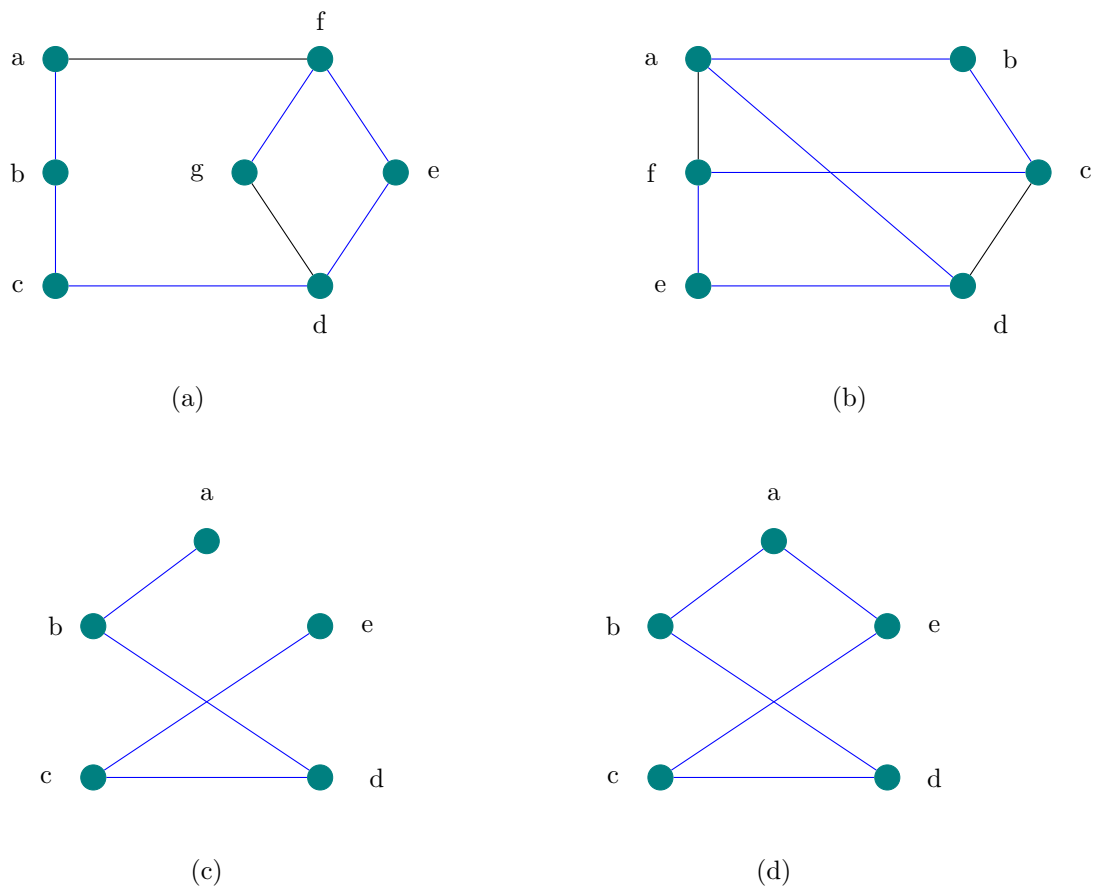


FIGURE 1.5 – Chaîne et cycle

La figure 1.5 représente :

(a) abcdefg une chaîne Hamiltonienne .

(b) adefcba un cycle Hamiltonien .

(c) abdce une chaîne Eulérienne .

(d) abdcea un cycle Eulérien .

1.1.5 Degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition 1.1.5. Le **degré d'un sommet** u de G noté $d_G(u)$ (ou $d(u)$), est égal au nombre de ses voisins, autrement dit, $d_G(u) = |N_G(u)|$. Un sommet est de degré K (respectivement au moins K , au plus K) est noté K -sommet (respectivement K^+ -sommet, K^- -sommet).

Un sommet est de degré 0 est dit **isolé**.

Pour le graphe orienté, le degré d'un sommet est le nombre d'arc entrant à v et ceux sortant de v , c-à-d : $deg(v) = deg^-(v) + deg^+(v) = |\{u : uv \in A\}| + |\{u : vu \in A\}|$

Le degré maximum d'un graphe G , noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés des sommets de G . En d'autres termes, $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$.

Le degré minimum de G , noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés des sommets de G . En d'autres termes, $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$.

Un graphe est dit **k-régulier** si tous ces sommets sont de degré k . En particulier, un graphes 3-régulier est dit **cubique**.

Lemme 1.1.1. [8] (Lemme des poignées de mains)

Pour tout graphe $G = (V, E)$, on a :

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E|$$

Dans un graphe G , chaque arête (u, v) de E est comptées deux fois, une pour le degré de u , et une pour le degré de v .

Corollaire 1.1.1. Le nombre de sommets de degré impair est pair.

1.1.6 Connexité et forte connexité

Définition 1.1.6. Un graphe $G = (V, U)$ est **connexe** si pour toute pair (u, v) , il existe une chaîne entre u et v .

Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal de G , c-à-d un sous-graphe tel que tout sous-graphe de G le contenant strictement n'est pas connexe.

La figure 1.6(a) représente un graphe connexe et la figure 1.6(b) représente un graphe non connexe ayant deux composantes connexe.

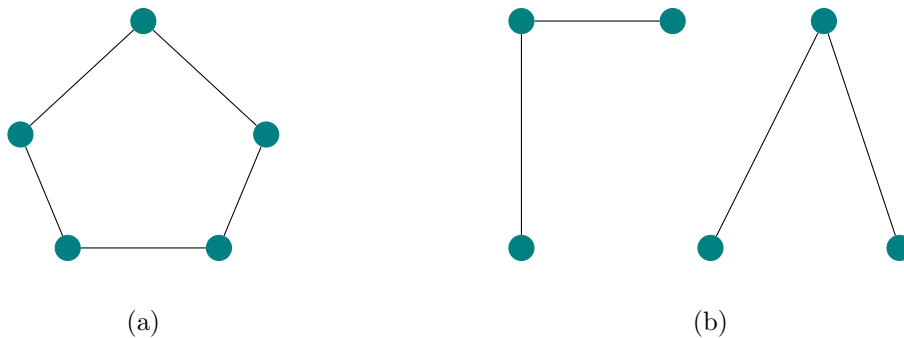


FIGURE 1.6 – Graphe connexe et graphe non connexe

Si le graphe G est orienté, on parle de la **connexité fortement**.

Définition 1.1.7. On dit qu'un graphe est **fortement connexe** si tout couple de sommets appartient à un circuit. Si le graphe n'est pas connexe, on parle de **composante fortement connexe**.

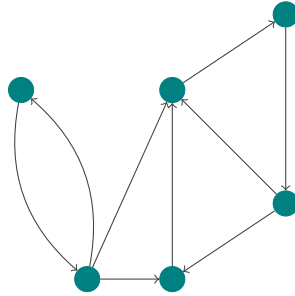


FIGURE 1.7 – Graphe non fortement connexe

Définition 1.1.8. Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ noté $\overline{G} = (V(G), E(\overline{G}))$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et $E(\overline{G})$ a exactement les paires de sommets qui ne sont pas des arêtes de G .



Un graphe G

Le complement de G

FIGURE 1.8 – Un graphe et son complémentaire

1.2 Quelques classes de graphes

1.2.1 Graphe complet et clique

Définition 1.2.1. [1] **Un graphe complet** à n sommets, noté K_n est un graphe tel que toute paire de sommets est reliée par une arête.

Une clique d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est un sous-ensemble de sommets de G dont le sous-graphe induit est complet.

Une clique maximale d'un graphe G est une clique dont le cardinal est le plus grand (c-à-d qu'elle possède le plus nombre de sommets).

La taille d'une clique est le nombre de sommets qui le compose.

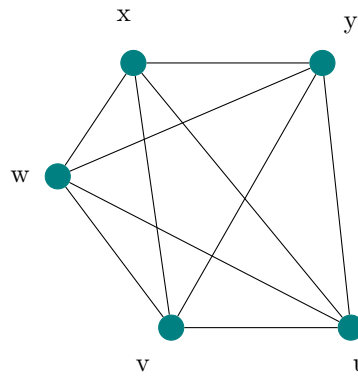


FIGURE 1.9 – Graphe complet

1.2.2 Graphe biparti et biparti complet

Définition 1.2.2. [29] Un graphe est dit **biparti** s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 telle que chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 .

Théorème 1.2.1. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impaire.

Un graphe biparti est dit complet si et seulement si tout sommet de V_1 est relié à tous les sommets de V_2 , on le note $K_{|V_1|,|V_2|}$.

La figure 1.10 montre que (a) est un graphe biparti et (b) un graphe biparti complet.

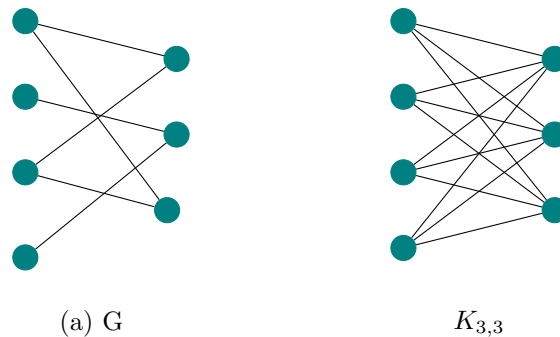


FIGURE 1.10 – Graphe biparti G et biparti complet $K_{3,3}$

1.2.3 Graphe planaire

Définition 1.2.3. [10] C'est un graphe qui peut être représenté sur un plan (ou une sphère) tel que deux arcs (ou arêtes) ne se coupent pas.

Les zones délimitées par des arêtes qui les entourent sont appelées *des faces*.

Définition 1.2.4. un graphe planaire est dit externe (en anglais *outer-planar*) si tous ses sommets appartiennent à la face extérieure. La figure 1.13 donne un exemple d'un graphe planaire externe.

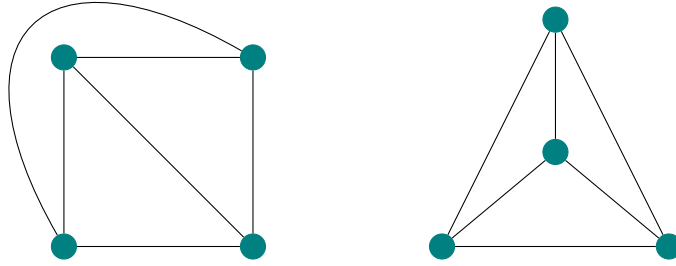


FIGURE 1.11 – Représentation planaire du K_4

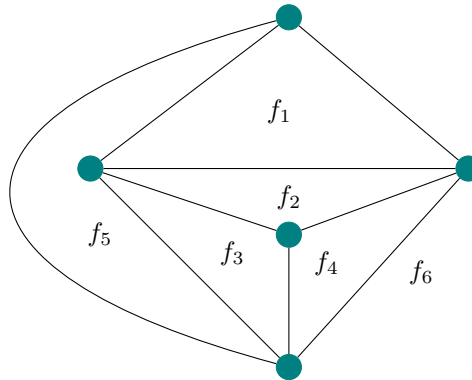


FIGURE 1.12 – Représentation des faces dans un graphe planaire

Propriétés des graphes planaires

Soit G un graphe planaire avec n sommets et m arêtes et f face .

Théorème 1.2.2. (Formule d'Euler)

$$n - m + f = 2$$

Proposition 1.2.1. *Tout graphe planaire connexe avec n -sommets contient au plus $3(n-2)$ arêtes.*

Démonstration. Soit G un graphe planaire connexe avec n sommets et m arêtes. En faisant la somme des nombres d'arêtes autour de chaque face , on obtient exactement le double du nombre d'arêtes parce que chaque arête est compté à double (elle apparait sur le pourtour de deux face).

Comme le pourtour de chaque face contient au moins 3 arêtes ; on a

$$2m \geq 3f$$

En utilisant la formule d'Euler 1.2.2 , on aurait :

$$2m \geq 3(m - n - 2)$$

d'où

$$m \leq 3(n - 2)$$

□

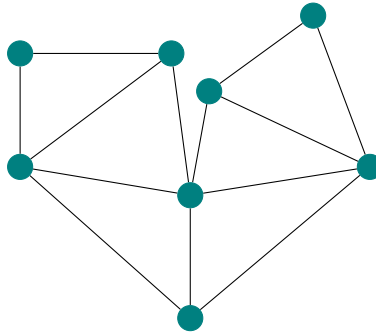


FIGURE 1.13 – Un graphe planaire externe

Proposition 1.2.2. *Un graphe G triangulé sur n sommets possède $3n - 6$ arêtes .*

Rappelons qu'un graphe planaire est *triangulé* si toutes ses faces sont des triangles. Puisqu'il est toujours possible de transformer un graphe planaire G en un graphe triangulé en rajoutant des arêtes entre deux sommets non adjacents d'une même face, on dit que G' est une triangulation de G si G est contenu dans G' et G' est triangulé.

Démonstration. Dans un graphe G triangulé on a trivialement $3|F(G)| = 2|E(G)|$. A l'aide de l'inégalité d'Euler, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 &= n - m + f \\ 2 &= n - m + \frac{2}{3}m \\ 2 &= n - \frac{1}{3}m \end{aligned}$$

d'où

$$m = 3n - 6$$

□

Proposition 1.2.3. *Les graphe sous la formes K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires .*

Démonstration. **Pour $K_{3,3}$:**

On suppose que $K_{3,3}$ est un graphe planaire . Comme $K_{3,3}$ n'a aucun cycle de longueur impaire , il ne contient en particulier pas de triangle et donc chaque face est délimitée par au moins quatre arêtes . On a alors :

$$4f \leq 2m = 18$$

Donc, $f \leq 4$, on utilise la formule d'Euler, on obtient :

$$2 = n - m + f \leq 6 - 9 + 4 = 1$$

Ce qui prouve par contradiction que $K_{3,3}$ n'est pas planaire .

De même pour K_5 :

On suppose que K_5 est un graphe planaire .Il vérifie alors que

$$m \leq 3n - 6$$

i.e.

$$10 = m \leq 3 \times 5 - 6 = 9$$

Ce qui prouve par contradiction que K_5 n'est pas planaire .

□

Le résultat suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette une représentation planaire .

Théorème 1.2.3. (Le théorème de Kuratowski)

Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivisions de K_5 ou de $K_{3,3}$.

1.2.4 Arbres et forêt

Définition 1.2.5. [24] On appelle **arbre** , qu'on note T , tout graphe simple , connexe et sans cycle .

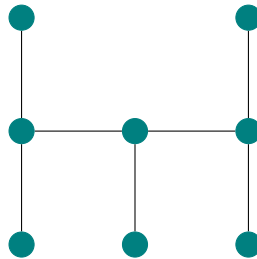


FIGURE 1.14 – Arbre

Définition 1.2.6. Une **forêt** est un graphe non connexe et sans cycle . Chaque composante connexe est un arbre .

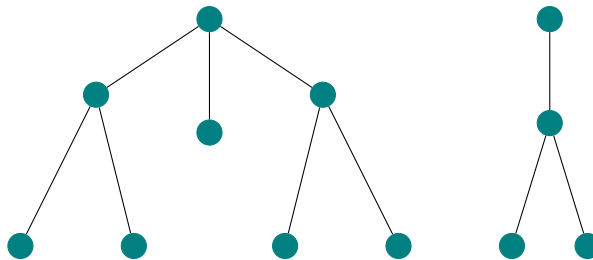


FIGURE 1.15 – Forêt

Définition 1.2.7. Une *racine* c'est Tout sommet r tel que tout autre sommet peut être atteint à partir de r par un chemin .

Définition 1.2.8. Une *feuille* est un sommet ayant son degré égal à 1 .

Dans les arbres, les propriétés sont équivalents.

1. Toute arbre possède au moins deux sommets ayant un degré égal à 1 .
2. Pour tout pair de sommets d'un arbre , il existe une seule chaîne les reliant .
3. Toute arbre possède $n - 1$ arêtes .
4. Puisque l'arbre est sans cycle , si on ajoute une arête entre deux sommets non adjacents , on crée un cycle et un seul .
5. Si on supprime une arête dans l'arbre , cette dernière devient non-connexe .

1.2.5 Graphe d'intervalles

Définition 1.2.9. [1] Un *graphe d'intervalles* est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles de la droite réelle. Chaque sommet du graphe d'intervalles représente un intervalle de l'ensemble, et une arête relie deux sommets lorsque les deux intervalles correspondants s'intersectent.

Étant donné des intervalles $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$, le graphe d'intervalles correspondant est $G = (V(G), E(G))$ où

$$V(G) = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$$

et

$$\{I_\alpha, I_\beta\} \in E \Leftrightarrow I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset$$

Voici un exemple :

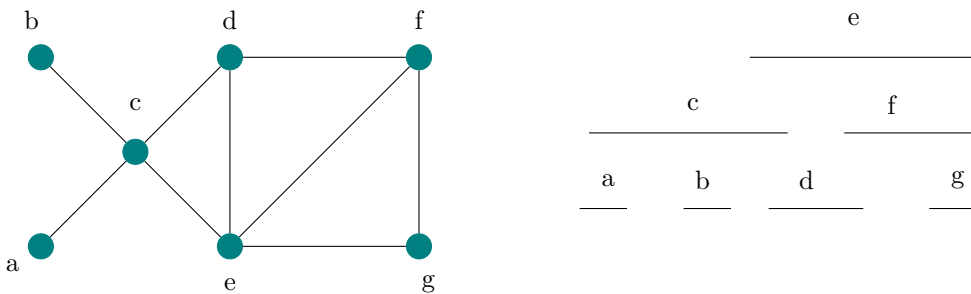


FIGURE 1.16 – Graphe d'intervalles

Types de graphes intervalles :

1. Un graphe intervalles *propre* est un graphe possédant un représentation d'intervalles dans laquelle aucune intervalle n'est inclus dans l'autre .
2. Un graphe intervalles est dit *unitaire* s'il possède une représentation fermé dans laquelle chaque intervalles est de longueur 1 .

Théorème 1.2.4. [22] Tout graphe d'intervalles est cordal , mais la réciproque est fausse

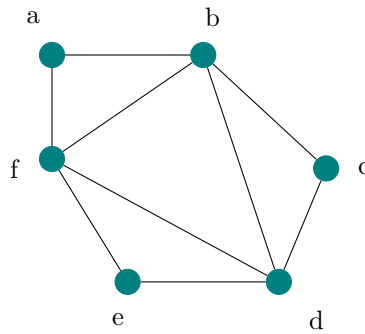


FIGURE 1.17 – Graphe cordal n'est pas un graphe d'intervalles

exemple 1.2.1. *Il n'est pas possible de trouver un ensemble d'intervalles qui réalise le graphe cordal suivant :*

Proposition 1.2.4. [27] *Un graphe est d'intervalles si et seulement s'il est possible d'ordonner toutes ses cliques maximales M_1, M_2, \dots, M_k de sorte que pour tout sommet $v \in (M_i \cap M_k)$, $i < k$, on a : $v \in M_j \forall i \leq j \leq k$.*

1.2.6 Graphes parfait

Les graphes parfaits ont été introduits par Berge qui essayait de résoudre un problème de théorie de la communication [27].

Définition 1.2.10. *Un graphe parfait G est un graphe vérifiant $\chi(H) = \omega(h)$ pour tout sous-graphe induit H de G .*

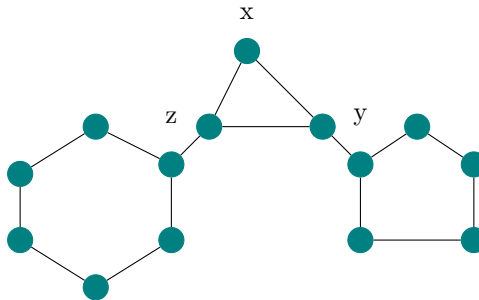


FIGURE 1.18 – Un graphe parfait

En 1972, Lovász a démontré la conjecture faible des graphes parfaits .

Conjecture 1.2.1. *le complémentaire d'un graphe parfait est parfait.*

Proposition 1.2.5. *Les graphes bipartis sont parfaits.*

1.2.7 Graphe adjoint

Définition 1.2.11. [1] *Un graphe adjoint est un graphe qui représente la relation d'adjacence entre les arêtes de G . Étant donné un graphe G , son graphe adjoint $L(G)$ est le graphe défini de la façon suivante :*

- Chaque sommet de $L(G)$ représente une arête de G .
- Deux sommets de $L(G)$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes partagent une extrémité commune dans G (on dit alors qu'elles sont adjacentes).

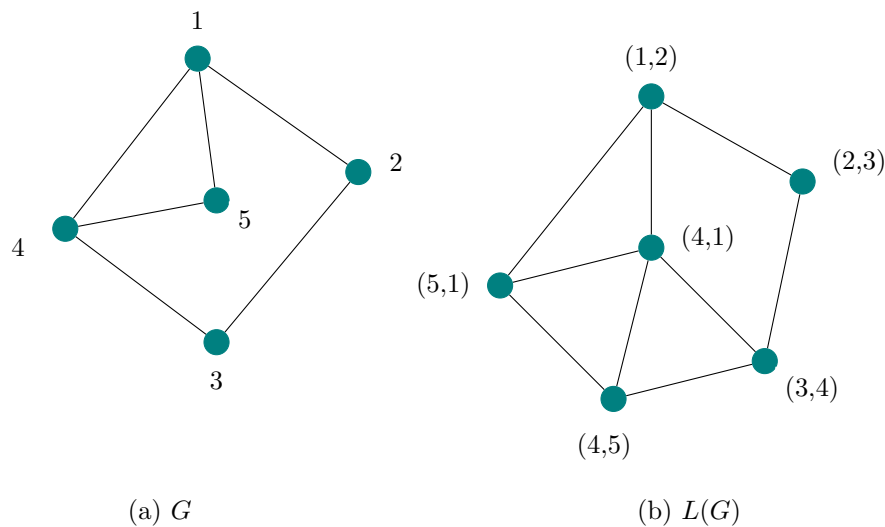


FIGURE 1.19 – Un graphe G et leur graphe adjoint $L(G)$

Propriétés

1. Le graphe adjoint d'un graphe connexe est connexe .
2. L'indice chromatique , χ' , d'un graphe G est égal au nombre chromatique de son graphe adjoint $L(G)$.
3. Si un graphe G a un cycle eulérien, c'est-à-dire si G est connexe et que tous ses sommets sont de degré pair, alors le graphe adjoint $L(G)$ est un graphe hamiltonien.

1.3 Coloration des graphes

La coloration des graphes est sans doute le sujet le plus populaire de la théorie des graphes. C'est l'une des branches les plus importantes, depuis l'émergence du fameux problème des quatre couleurs. Ce problème est posé par Francis Guthrie en 1852, il consiste à colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur, mais est-il possible ?

La coloration des graphes a des applications pratiques dans l'optimisation, l'informatique et la conception de réseau.

1.4 Variantes de la coloration propre des graphes

1.4.1 La coloration propre des sommets

La coloration propre des sommets consiste à attribuer chaque sommets d'un graphe une couleur à condition que deux sommets adjacents ne peuvent pas prendre la même couleur.

Définition 1.4.1. soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe et c une application tel que :

$$c : V(G) \mapsto S$$

Les éléments de S sont appelés **couleurs**. Si $|S| = k$ donc on dit que c est k -coloration, et G est **k -colorable** s'il a une k -coloration.

Définition 1.4.2. On définit le nombre chromatique d'un graphe G , noté $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k -colorable.

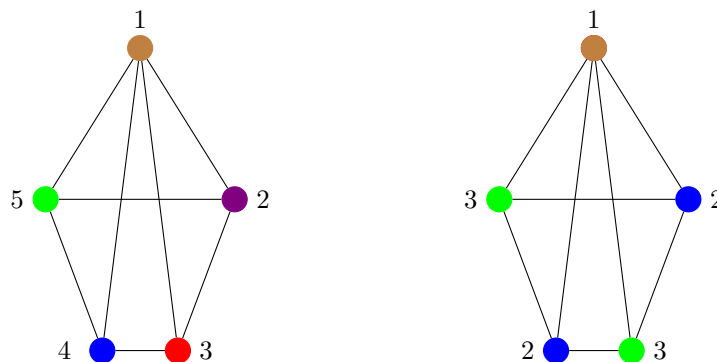


FIGURE 1.20 – Coloration propre de sommets d'un graphe G

La figure 1.20 représente une 5-coloration propre des sommets d'un graphe G , mais le nombre utilisé n'est pas le minimum. Le nombre chromatique de G vérifie : $3 \leq \chi(G)$; car G contient C_3 donc au moins 3 couleurs sont nécessaires pour colorer le graphe G , comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs (la figure 1.20 (b)), alors $\chi(G) \leq 3$. On conclure que $\chi(G) = 3$

1.4.2 La coloration propre des arêtes

Si on associe les couleurs aux arêtes du graphe au lieu de colorer les sommets, **que se passe-t-il?**

Définition 1.4.3. Une k -coloration d'arêtes d'un graphe G est une application :

$$c : E(G) \mapsto 1, 2, \dots, k$$

si deux arêtes adjacentes sont attribuées par des couleurs différentes

Définition 1.4.4. Le plus petit entier k tel que G est k -colorable d'arêtes est dit **l'indice chromatique**, noté par $\chi'(G)$.

exemple 1.4.1. La figure 1.21(a) représente une 5-coloration d'arêtes d'un graphe G , mais le nombre de couleurs utilisé n'est pas le minimum. L'indice chromatique de G vérifie $3 \leq \chi'(G)$, car G contient C_3 donc, au moins 3 couleurs nécessaires pour colorer le graphe G , comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs (la figure 1.21(b)), alors $\chi'(G) \leq 3$. D'où $\chi'(G) = 3$.

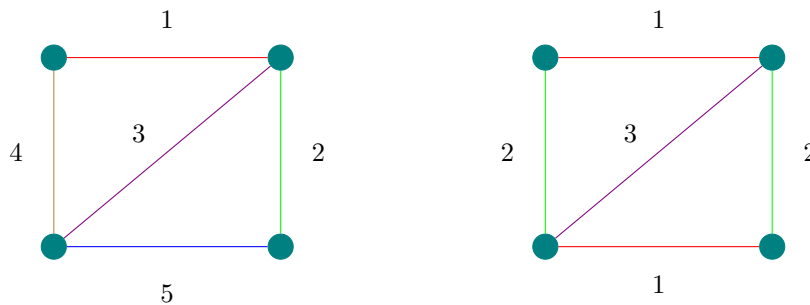


FIGURE 1.21 – Coloration propre d'arêtes d'un graphe G

1.4.3 La coloration par liste

La coloration par liste [9] est une généralisation de la coloration des sommets dans laquelle l'ensemble des couleurs disponibles à chaque sommet est restreint. L'affectation de liste d'un graphe G est une application L qui affecte à chaque sommet $v \in V$ une liste limitée de couleurs. Une affectation de liste est une k -affectation de liste si chaque liste est de longueur au moins k . Une L -coloration d'un graphe G est une coloration propre tel que $\forall v \in V(G)$, $c(v) \in L(v)$. Un graphe est L -colorable s'il existe une coloration propre pour G . Il est k -choisissable s'il est l -colorable pour chaque k -affectation de liste. Le nombre de liste chromatique, noté $\chi_L(G)$, est l'entier minimum pour lequel G soit k -choisissable.

1.5 Applications de coloration par liste des graphes

La coloration des graphes est utilisée pour résoudre divers problèmes allant de l'ordonnement au problème d'affectation des canaux. La coloration par liste en particulier provient naturellement d'applications avec des restrictions sur les valeurs pouvant être attribuées à certains objets [5, 11].

Dans cette section, nous proposons quelques exemples de ces problèmes et comment la coloration par liste est utilisée pour les résoudre .

1. **Le problème d'affectation des canaux** pour les réseaux maillés est similaire au problème de coloration par listes des graphes , qui est défini comme suit :

Dans un graphe $G = (V, E)$, tel que chaque radios correspond à un sommet(par exemple si un routeur correspond à trois radio ,ce routeur correspond à trois sommets). Chaque arête représente une liaison sans fil entre les radios . Étant donné un graphe $G = (V, E)$, et pour chaque $v \in V(G)$ on l'associe une liste $L(v)$ de couleurs . La question qui se pose : "est-il possible de construire une coloration de sommets valide telle que chaque sommets reçoit une couleurs de la liste $L(v)$.

2. **Le problème d'affectation de registre** , dans [12] , Zeitlhofer et Wess décrivent l'utilisation de coloration par liste pour résoudre ce problème .

Ce problème est en détail dans le chapitre 2 .

3. **Sudoku** [20] , est également une variante du problème de coloration par liste de graphe où chaque cellule représente un sommet. Il y a une arête entre deux sommets s'ils sont dans la même ligne ou la même colonne ou le même bloc .

4. **Affectation de fréquence radio mobile** [21], lorsque des fréquences sont attribuées aux tours, les fréquences affectés à toutes les tours au même endroit doivent être différentes. Comment associe des fréquences avec cette contrainte? Quel est le nombre minimum de fréquences nécessaires? Ce problème est également un exemple de problème de coloration par liste de graphe où chaque tour représente un sommet et une arête entre deux tours représente qu'elles sont à portée l'une de l'autre.

CHAPITRE 2

UNE APPLICATION DE LA COLORATION PAR LISTE

Le problème de coloration par liste des graphes a un grand nombre d'applications . L'affectation des registres est une étape importante du compilateur. Sa fonction principale est de définir des variables dans la mémoire ou les registres. En raison de la différence de latence d'accès élevée entre la mémoire et les registres, il est préférable de conserver les variables dans des registres. Lorsqu'un registre est nécessaire et que tous les registres sont occupés, l'un d'entre eux doit être déversé dans la mémoire. Ce procédé implique des coûts supplémentaires et, par conséquent, des performances moindres et une consommation d'énergie plus élevée. Par conséquent, les compilateurs doivent minimiser le nombre de registres utilisés et le nombre d'accès mémoire .

Définition 2.1. (*Unité arithmétique et logique (UAL)*)
est l'organe de l'ordinateur chargé d'effectuer les calculs. Le plus souvent, l'UAL est incluse dans l'unité centrale de traitement ou le microprocesseur.

Définition 2.2. *Un registre est une zone mémoire à l'intérieur du microprocesseur de faible taille, qui permet de mémoriser des mots mémoires ou des adresses d'une façon temporaire lors de l'exécution des instructions.*

Exemple :

Afin de clarifier le problème d'affectation des registres et les similitudes du problème d'affectation des unités fonctionnelles en cas d'architectures hétérogènes . On considère un exemple d'**un filtre IIR sous forme directe II** (filtre à réponse impulsionnelle infinie) , comme le montre la figure 2.1. Cet exemple a été tiré du travail de T. Zeitlhofer, B. Wess [12].

Pour calculer le signal de sortie $y(n)$, on a besoin de neuf opérations différentes I_1, I_2, \dots, I_9 , ces opérations sont montrées dans la figure 2.1. Les résultats intermédiaires qui correspondent à neuf registres symbolique sont notés par r_1, r_2, \dots, r_9 .

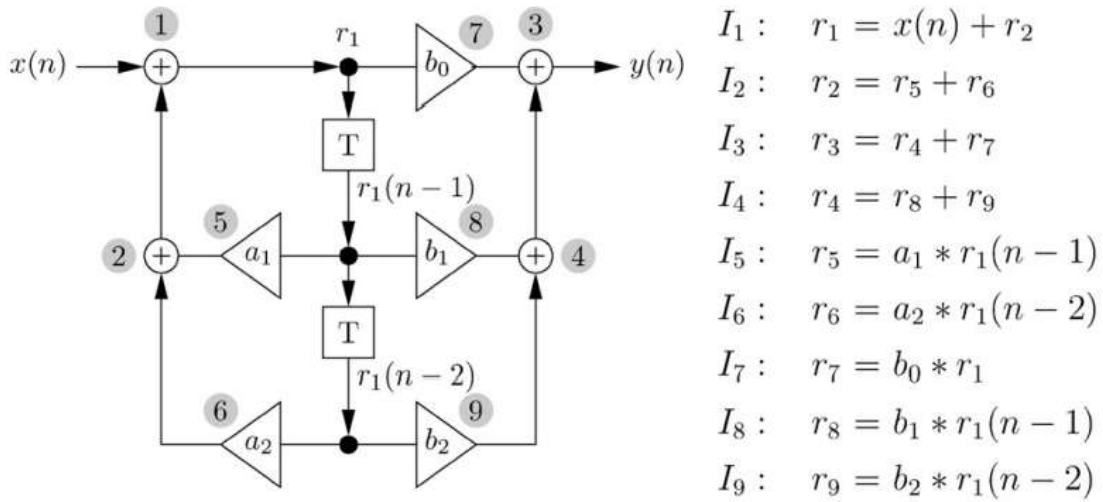


FIGURE 2.1 – Un exemple d’un filtre IIR forme directe II
[12]

Pour calculer ces résultats , on utilise l’architectures hétérogène donnée dans la figure 2.2 . Il y a deux unités fonctionnelles où la première unité prend en charge à la fois l’addition et la multiplication , et la deuxième effectue uniquement la multiplication .

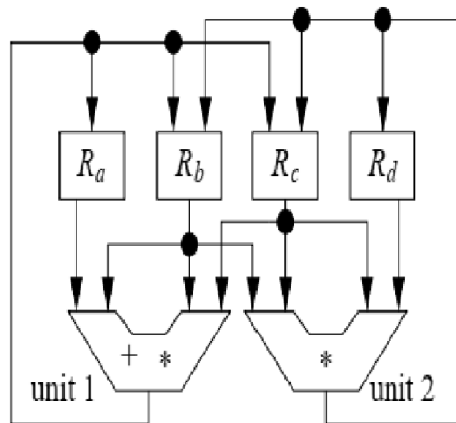


FIGURE 2.2 – Exemple d’architecture hétérogène

Après l'analyse des dépendances de données entre les instructions , *Tomas Zeithofer et Bernhard Wess* ont introduit le graphe de précedence illustré par la figure 2.3

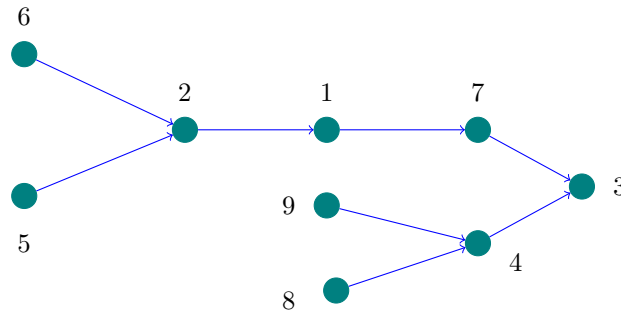


FIGURE 2.3 – Graphe de précedence correspondant

Une représentation valide donnée dans la figure 2.4 .

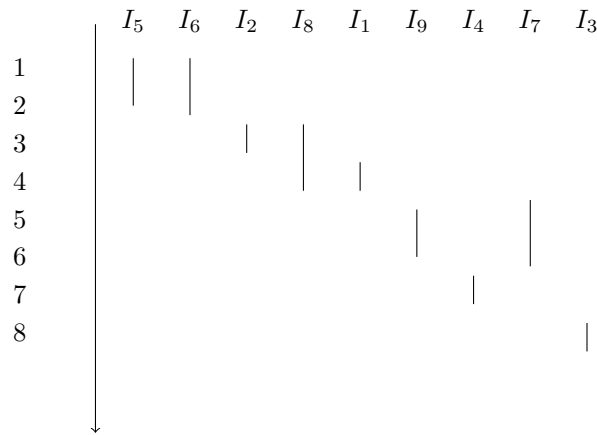


FIGURE 2.4 – Utilisation des unités fonctionnelles

Étant donné ce planning tel qu'aucune dépendance de données n'est violée , on doit répondre aux question si elle est calculable sur l'architecture hétérogène donnée .

D'abord , une unité fonctionnelle doit être affecté à chaque instruction . Ce problème peut être formuler comme un problème de coloration des graphes d'interférence (voir définition ??) .

En fonction de l'utilisation des unités fonctionnelles et leur latence , le graphe peut se décomposer en sous graphes (figure 2.5)

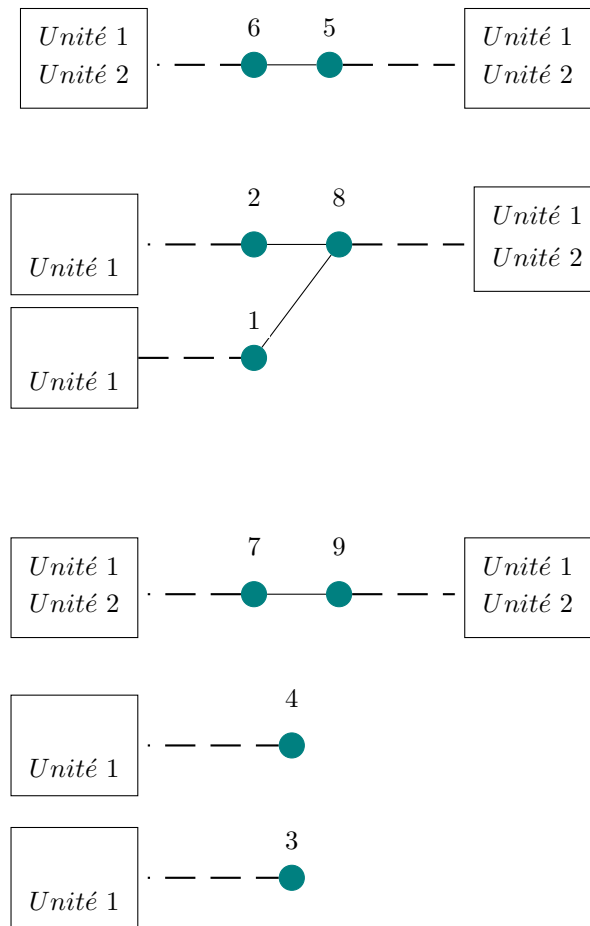


FIGURE 2.5 – Graphe d’interférence des unités fonctionnelles

L’architecture fournit deux unités fonctionnelles (figure 2.2), donc pour que le planning soit réalisable, le graphe d’interférence doit être coloré en utilisant au plus deux couleurs, et puisque les unités fonctionnelles ne sont pas équivalents, alors il existe *une liste* des unités fonctionnelles admissibles pour chaque instruction. Cela signifie, dans la théorie des graphes, qu’il existe une liste de couleurs admissibles pour chaque sommet. Ces listes sont données dans la figure 2.5 telles que les listes affectées pour les multiplications (I_5, I_6, I_7, I_8, I_9) contient les deux unités fonctionnelles, tandis que les listes pour les additions (I_1, I_2, I_3, I_4) contient seulement l’unité 1. Puisque les listes ne sont pas identiques pour tous les sommets, nous sommes confrontés à *un problème de coloration par listes* [4].

Maintenant, on suppose que l’unité 1 est affectée aux instructions $I_1, I_2, I_3, I_4, I_6, I_7$, et l’unité 2 est affectée aux instructions I_5, I_8, I_9 .

L’étape suivante de la génération de code consiste à attribuer des registres contenant des résultats intermédiaires. Pour des raisons de simplification, nous ne considérerons que les résultats intermédiaires $\{r_1, r_2, \dots, r_9\}$.

Selon le planning donné, les gammes active¹ pour les résultats intermédiaire sont données dans la figure 2.6(a)

1. gamme active se décompose d’une définition et de tous points d’un programme (ex la fin d’une instruction) dans lequel cette définition est active.

Typiquement , les problèmes d'affectation des registres sont en lien avec les problèmes de coloration de graphe. Dans notre exemple , un sommet correspond à une variable de programme et deux sommets sont reliés par une arête des variables correspondantes sont active en même temps .(la figure 2.6(b))

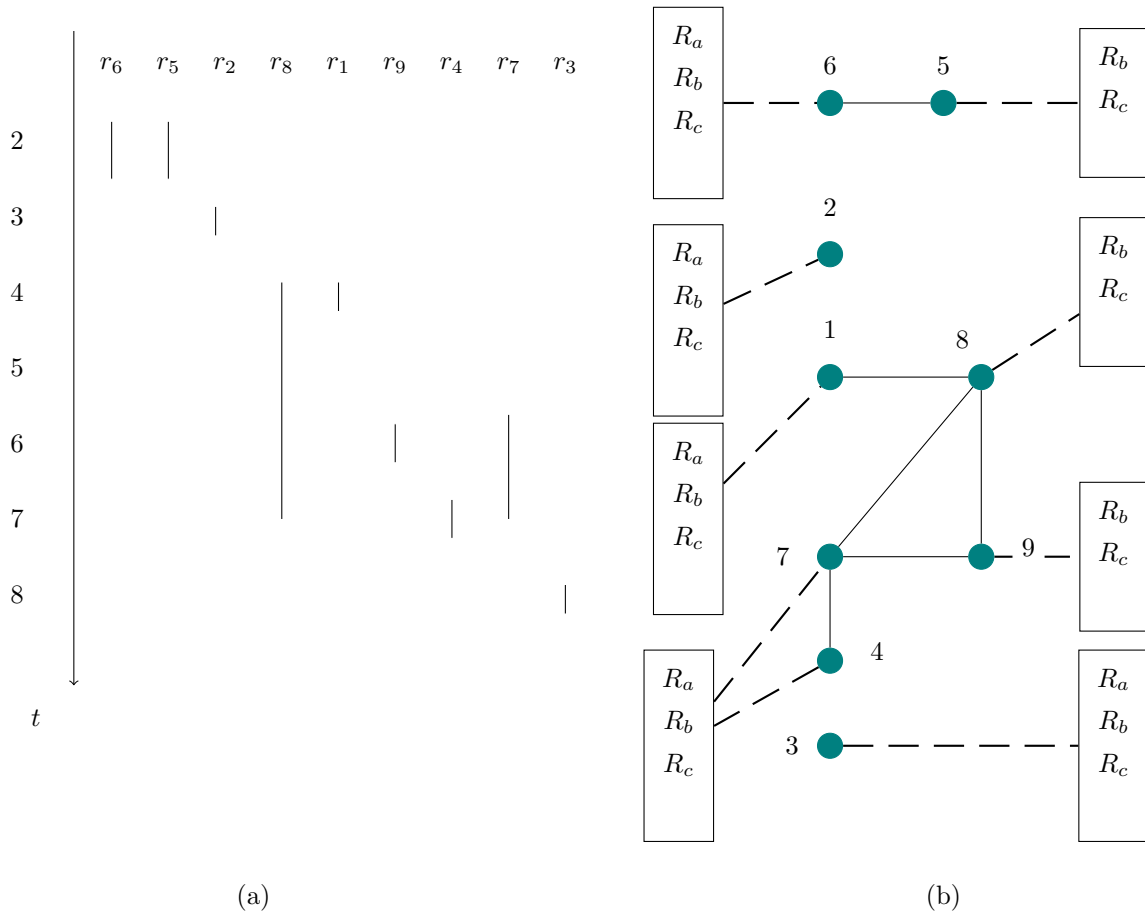


FIGURE 2.6 – Planning et l'affectation des registres (a) : l'utilisation des registres et (b) : le graphe d'interférence des registre

Les registres cibles admissibles pour les instructions sont définis par l'intersection de deux ensembles de registres . Le premier est défini par tous les registres dans lesquels l'instruction de consommation peut écrire et le second est défini par tous les registres à partir desquels l'instruction de production peut lire. Il y a quatre registres disponibles , mais ils ne peuvent pas être utilisés de manière interchangeable . En prend I_9 comme exemple : r_9 est produit par l'instruction I_9 , les registres cibles possibles sont R_b, R_c et R_d car l'instruction I_9 est exécutée par l'unité 2 . La valeur de r_9 est consommée par l'instruction I_4 qui est exécutée par l'unité 1 . Selon la figure 2.2, I_4 peut utiliser seulement les registres R_a, R_b et R_c comme opérandes sources . On déduit que la variable r_9 ne peut être placé que dans le registre R_b ou R_c .

Les listes des registres admissibles pour toutes les variables du programme sont présentées dans la figure 2.6(a) Nous sommes à nouveau confrontés à un problème de coloration de liste . Ce problème peut être résolu si $\{r_6, r_2, r_1, r_7, r_3\}$ sont placées dans le registre R_a , et les variables $\{r_5, r_8, r_4\}$ sont placées dans le registre R_b , et la variable r_9 est placée dans le registre R_c .

Cet exemple montre que l'affectation des registres et l'affectation des unités fonctionnelles pour les architectures hétérogènes sont des tâches difficiles .

2.1 Affectation des registres et coloration du graphe

Les problèmes d'affectation de registre sont généralement résolus en colorant un graphe d'intervalles G à l'aide d'heuristiques.

2.1.1 Graphes d'interférence (Graphes d'intervalles)

Définition 2.1.1. *Le graphe d'interférence modélise essentiellement les durées de vie concurrentes des variables de programme . Le graphe $G = (V, E)$ contient un sommet $v_k \in V$ pour chaque variable de programme $k = 1, \dots, N$, et deux sommets sont reliés par une arête $v_i v_j \in E$ si les variables sont active en même temps . Si seules des gammes active continues sont prises en compte, le graphe d'interférence est un graphe d'intervalle .*

Ainsi, les graphes d'intervalles modélisent l'intersection d'intervalles de temps continus et pour chaque graphe d'intervalles, il existe un représentation d'intervalles correspondant comme le montre la figure 2.7 , ou (a) est la représentation des intervalle , et (b) représente le graphe d'interférence correspondant . Une définition plus précise des graphes d'intervalle se trouve dans la section 1.2.5 .

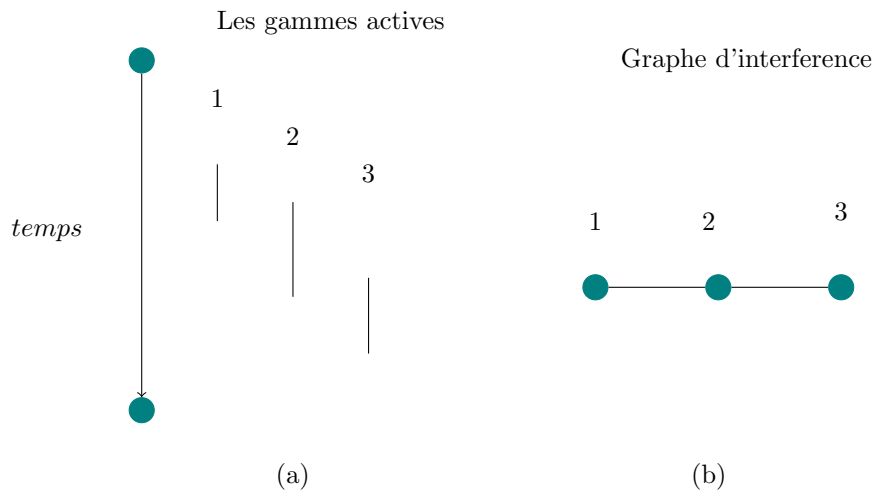


FIGURE 2.7 – Un graphe d'interférence qui est un graphe d'intervalles

La figure suivante donne un exemple qui montre que pas tous les graphes d'interférence ont une représentation d'intervalles .

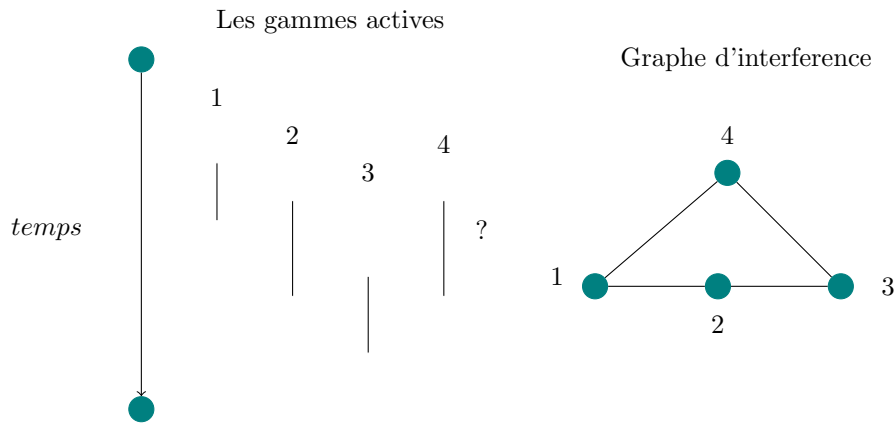


FIGURE 2.8 – Graphe d'interférence n'est pas un graphe d'intervalles

On suppose un ensemble homogène de L registres . Si on affectons un des L couleurs pour chaque sommet de G de telle sorte que différentes couleurs sont affectées aux sommets adjacents, alors cette L -coloration propre (voir 3.1) correspond à une affectation de registre . Le nombre minimum de registres requis est donné par le nombre chromatique du graphe d'intervalles.

Il est bien connu que pour un graphe d'intervalle G le nombre chromatique est égal à la taille ω de sa clique maximale , qui est le nombre maximum de variables de programme qui sont actives en même temps .

On continue avec l'exemple donnée dans la figure 2.7 . On suppose que trois registres $\{R_a, R_b, R_c\}$ sont disponibles . Pour chaque variable de programme, les registres admissibles sont indiqués sur la figure 2.9 .

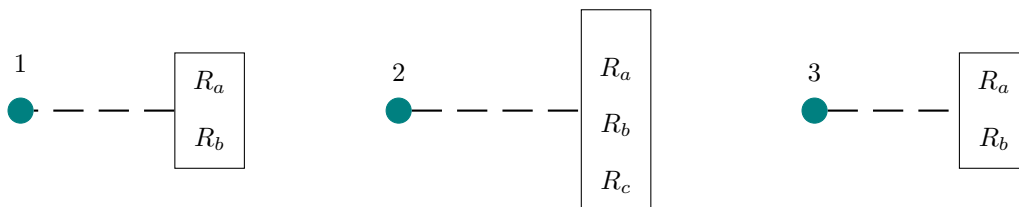


FIGURE 2.9 – Architecture de registres hétérogènes

CHAPITRE 3

LA COLORATION PAR LISTE DANS QUELQUES GRAPHES

La coloration des graphes est l'un des domaines les plus utiles de la théorie des graphes . Dans ce chapitre, nous allons aborder la coloration par liste dans différents graphes avec les variantes, à savoir : *la coloration par liste des sommets* et *la coloration par liste d'arêtes* . Ensuite, nous citons le lien entre les deux types ainsi la relation entre le nombre chromatique et le nombre de liste chromatique, et entre l'indice chromatique et l'indice de liste chromatique. Enfin , nous donnons quelques résultats sur les graphes planaires .

3.1 La coloration par liste des sommets

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple avec $V(G)$ est l'ensemble non vide des sommets et $E(G)$ l'ensemble non vide des arêtes . On note $n = |V(G)|$ et $m = |E(G)|$.

Nous rappelons que la coloration propre des sommets d'un graphe [4] est une application :

$$c : V(G) \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$$

tels que : $\forall u, v \in V(G) : c(u) \neq c(v)$ si $uv \in E(G)$.

Un graphe qui admet une k -coloration est dit ***k-colorable*** . Le nombre chromatique de G , noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration propre des sommets .

Théorème 3.1.1. (Brooks , [9])

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe .

Si G ni un cycle impair , ni un graphe complet , alors on a :

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

De plus : si G est complet ou est un cycle impair , alors :

$$\chi(G) = \Delta(G) + 1$$

Théorème 3.1.2. [16] Pour tout graphe de degré maximum $\Delta(G)$, on a :

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Dans la suite , la plupart des définitions et des résultats ont été tiré du travail de *Paul Erdős et al* [3] et du mémoire de master de *Courtney L. Baber* [5]

Définition 3.1.1. Pour un graphe G , une affectation de liste est une fonction L qui associe un ensemble de couleurs pour chaque sommet de G .

Une L -coloration de G est une fonction φ telle que $\varphi(v) \in L(v)$ pour chaque sommet $v \in V(G)$, et $\varphi(u) \neq \varphi(v) \forall u, v \in V(G)$ sont adjacents . Ça ce qu'on appelle **la coloration par liste des graphes** .

Définition 3.1.2. On définit le nombre de liste chromatique , χ_L , comme le plus petit entier k tel que G a une coloration par liste propre quelles que soient les listes attribuées aux sommets de G et $|L(v)| = k$.

Définition 3.1.3. Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe .

On dit que G est **k -choisissable** si la liste affecté à chaque sommet de G a de longueur k .

Définition 3.1.4. [19] Si $k \geq \chi_L$, alors on dit que G est k -choisissable .

Remarque 3.1.1. k -choisissabilité implique k -colorable [5] , mais la réciproque n'est pas vraie. (Dans le cas $k = 2$, l'exemple illustré dans la figure 3.1 montre ça) .

3.2 Graphes 2-choisissable

Les graphes 2-choisissables sont nécessairement 2-colorables mais la réciproque est fausse. La figure ci-dessous montre qu'un graphe G possède $\chi(G) = 2$ tandis que $\chi_L(G) = 3$.

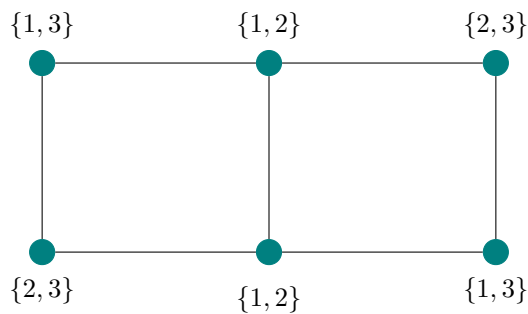


FIGURE 3.1 – Graphe avec une liste d'affectation L

Dans cette section , on donnera une caractérisation pour tous les graphes 2-choisissable, mais avant ça , on a besoin de quelques définitions .

Définition 3.2.1. u , v deux sommets adjacents de G tel que u et v ont plus qu'une arête entre eux . On appelle ces arêtes : **arêtes parallèles** .

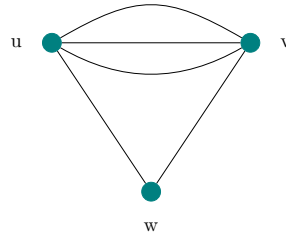


FIGURE 3.2 – Arêtes parallèles entre u et v

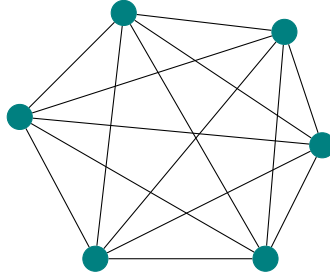


FIGURE 3.3 – Graphe complet d'ordre 6

Définition 3.2.2. [28] **Le cœur** d'un graphe G est son plus grand sous-graphe n'ayant pas de sommets de degré 1.

Le graphe de la figure ci-dessus représente à lui seul un cœur

Définition 3.2.3. [28] Le graphe sous forme $\theta_{q,r,s}$ est le graphe qui est l'union de trois chemins de longueurs q , r , et s dont les extrémités sont identifiées

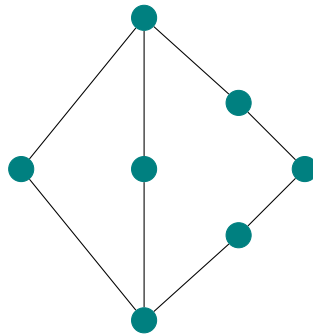


FIGURE 3.4 – Un grphe $\theta_{2,2,4}$

Théorème 3.2.1. [5]

Soit G un graphe . G est 2-choisissable si et seulement si son cœur est :

1. Un seul sommet .
2. Un cycle pair .
3. Un graphe de la forme $\theta_{2,2,2k}$ où k est un entier positif .

Démonstration. — Condition suffisante : Pour le premier cas , il est facile de voir qu'il est 2-choisissable.

Puisque le graphe K_2 avec arête parallèle forme un cycle de longueur 2 , donc 2-choisissable.

Reste à montrer la 2-choisissabilité pour les graphes $\theta_{2,2,2k}, k \geq 1$, car les cycles de longueur 4 ou plus sont des sous-graphes de θ .

Premièrement , on notera les sommets comme dans la figure 3.5

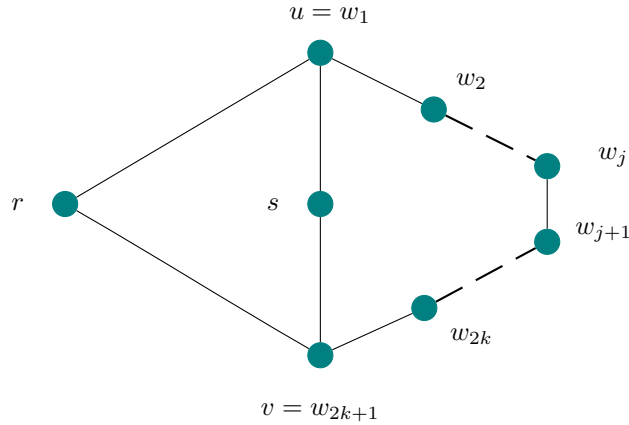


FIGURE 3.5 – $\theta_{2,2,2k}$

On distingue deux cas différents :

cas 1 : Même liste pour les sommets $\{w_i : 1 \leq i \leq 2k + 1\}$.

Soit $L(w_i) = \{a, b\}$. On choisit la couleur a (resp b) pour les sommets w_i si i impair (resp i pair). Donc $c(u) = c(v) = a$, et $L(r)$ et $L(s)$ doivent contenir une autre couleur que a car $|L(x)| = 2$ pour tout $x \in V(G)$, donc on obtient une coloration par liste valide .

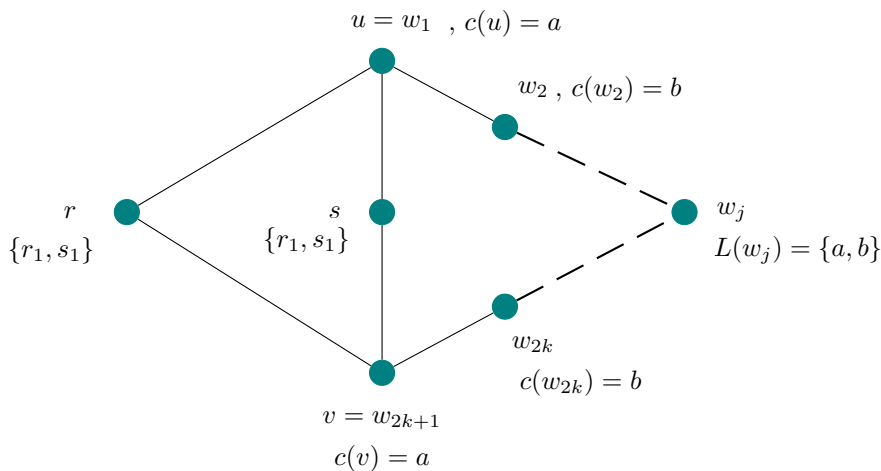


FIGURE 3.6 – La même liste est affectée pour les sommets w_j

cas 2 : Listes différentes pour les sommets $\{w_i : 1 \leq i \leq 2k + 1\}$.

(C'est-à-dire les couleurs des listes ne sont pas tous les mêmes , mais les listes sont de même cardinalité) .

Soient w_j, w_{j+1} deux sommets adjacents tels que $L(w_j) \neq L(w_{j+1})$. On choisit pour le sommet w_j une couleur à partir de $L(w_j) \setminus L(w_{j+1})$, ensuite une couleur a_{j-1} pour le sommet w_{j-1} à partir de $L(w_{j-1}) \setminus \{a_j\}$, on continue de la même manière jusqu'à ce qu'on colorie le sommet $u = w_1$ par la couleur a_1 .

on pose $L(w_{2k+1}) = \{r_1, s_1\}$. Si $L(r) \neq \{a_1, r_1\}$ ou $L(s) \neq \{a_1, s_1\}$, alors on choisit une autre couleur pour r et s , et on choisit une couleur pour w_{2k+1} à partir de sa liste, et on continue la coloration de w_{2k+1} à w_{j+1} .

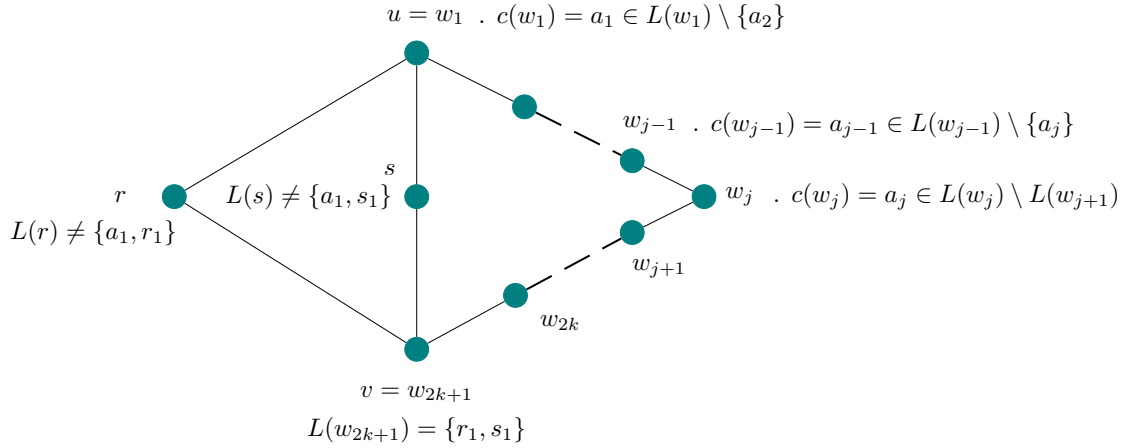


FIGURE 3.7 – Différentes listes sont affectées aux sommets w_i

Si par contre, $L(r) = \{a_1, r_1\}$ et $L(s) = \{a_1, s_1\}$, on ne peut pas colorer w_{2k+1} , car $c(w_1) = a_1$ et on est obligé de choisir r_1 pour r et s_1 pour s donc, il ne reste aucune couleur pour w_{2k+1} . La figure 3.8 explique ça.

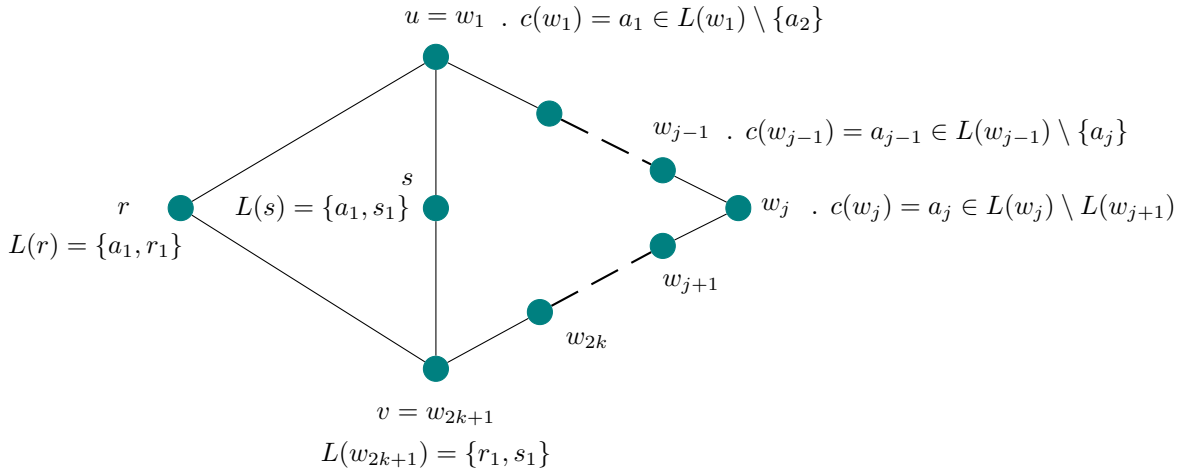


FIGURE 3.8 – Aucun choix pour w_{2k+1}

Dans ce cas, on retourne à w_{j+1} et on recommence. On choisit la couleur a_{j+1} pour le sommet w_{j+1} à partir de $L(w_{j+1}) \setminus L(w_j)$, et on continue de la même manière. On a $L(w_{2k+1}) = \{r_1, s_1\}$, et $a_1 \neq r_1 \neq s_1$, alors on choisit une couleur au sommet w_{2k+1} à partir de sa liste, et la couleur a_1 pour r et s , une couleur pour w_1 à partir de sa liste $L(w_1) \setminus \{a_1\}$ (car $|L(w_1)| = 2$) et on continue la coloration. (figure 3.9)

Dans les deux cas, on trouve une coloration par liste propre, d'où la suffisante.

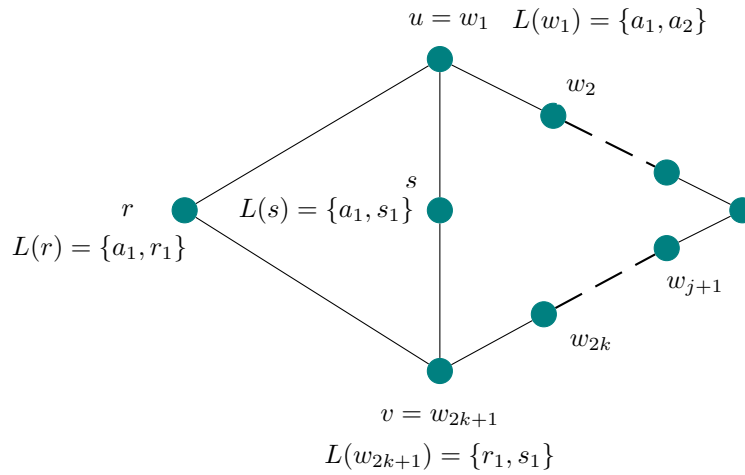


FIGURE 3.9 – Coloration propre par liste

— Condition nécessaire . On va montrer par contradiction que seulement les graphes qui sont 2-choisissable ont de cœur soit :

1. Un seul sommet .
2. Un cycle pair .
3. Le graphe $\theta_{2,2,2k}$.

On suppose que G est 2-choisissable dont leur cœur n'est aucun de ceux énumérés ci-dessus.

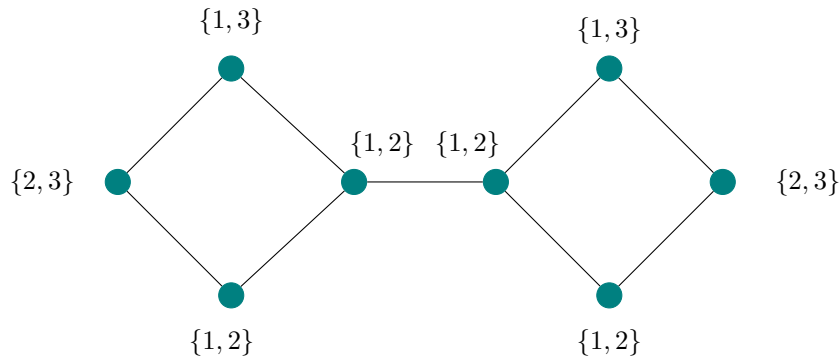
Le graphe G doit contenir un cycle , H , (car sinon ; le cœur de G est un seul sommet). Si H est impair donc $\chi(H) = 3$. Puisque $\chi_L(G) = 2$ par supposition) et $\chi_L(G) \geq \chi(G)$ ¹ , alors G ne peut par contenir un cycle impair .

G n'est pas un cycle pair (par hypothèse) . Soit C le plus court cycle dans G , donc il existe une arête $e \in E(G) \setminus C$, cette arête est sur un autre cycle ou sur une chaîne qui relie les deux cycles . Soit C^* l'autre cycle dans G , et puisque G est connexe ,donc il existe une chaîne entre C et C^* ou les deux cycles sont partagés par des sommets :

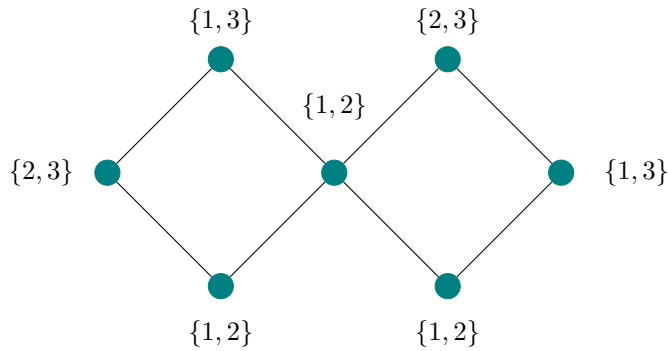
Si C et C^* partagent au plus un sommet :

On applique la technique de réduction suivante : " On supprime un sommet $x \in V(G)$ et on fusionne ses voisins en supprimant les arêtes parallèles créées (vu que les arêtes parallèles n'affectent pas la coloration des sommets) " , on répète cette procédure jusqu'à ce qu'on obtient l'un des graphes de la figure 3.10 qui ne sont pas 2-choisissable avec les listes données .

1. c'est le théorème de Erdős , Rubin , et Taylor dans [2]



(a) C et C^* ne partagent aucun sommet



(b) C et C^* partagent un sommet

FIGURE 3.10 – Cycles joints par au plus un sommet

Si C et C^* partagent au moins deux sommets :

Puisque C et C^* partagent au moins deux sommets, donc il existe une chaîne qui n'est pas dans C et relie deux sommets x et y de C .

Soit P la plus courte chaîne qui relie x à y . Si $P \cup C \neq \theta_{2,2,2k}$, alors il est de la forme $\theta_{a,b,c}$ avec $a \neq 2$ et $b \neq 2$. Par l'utilisation de procédure précédente, on peut réduire $C \cup P$ au graphe donné dans la figure 3.11 qui n'est pas 2-choississable.

Maintenant, on suppose que $C \cup P$ est un graphe $\theta_{2,2,2k}$, donc C est de longueur 4 (C est la plus courte chaîne dans G). On notera les sommets comme dans la figure 3.12 pour plus de facilité.

Par supposition G n'est pas $\theta_{2,2,2k}$, alors il existe une autre chaîne P^* disjoint de $P \cup C$ et relie deux sommets de $P \cup C$. (voir la figure 3.13).

Dans ce cas, il en résulte 06 cas possible :

Cas 1 :

Les sommets d'extrémité de P^* sont à l'intérieur de P . Donc, on a deux cycles disjoints reliés par une chaîne, que l'on peut réduire avec la procédure précédente et on obtient un graphe identique à celui donné par la figure 3.10(a).

Cas 2 :

L'un des points d'extrémités de P^* est c_1 et l'autre est un sommet intérieur $u \in P$. Donc, on a deux cycles disjoints partagent un sommet qui l'on peut réduire aussi (la figure 3.10(b)).

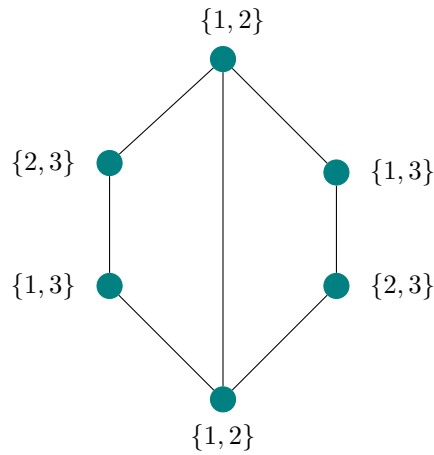


FIGURE 3.11 – Un graphe $\theta_{a,b,c}$ avec $a, b \neq 2$

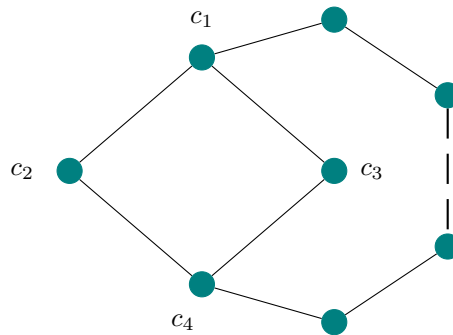


FIGURE 3.12 – $C \cup P$

Cas 3 :

L'une des extrémités de P^* est c_3 et l'autre est un sommet $u \in P$. Donc , l'arête c_1c_3 , la chaîne $c_1c_2c_4c_3$, et la chaîne de c_1 à u à travers P relié avec la chaîne de u à c_3 à travers P^* forment un graphe $\theta_{a,b,c}$ avec $a, b \neq 2$ où l'on peut réduire aussi (la figure 3.11) .

Cas 4 :

Les extrémités de P^* sont respectivement c_1 et c_3 (On retombe sur le cas 3) car la chaîne P^* et les chaînes $c_1c_2c_4c_5$ et c_1c_3 forment un graphe $\theta_{a,b,c}$ avec $a, b \neq 2$.

Cas 5 :

Les extrémités de P^* sont c_1 et c_4 .

- Si P est de longueur 2 , donc on a un graphe de la forme donné dans la figure 3.14 .
- Si la longueur de P est supérieur à 2, alors , la longueur de P^* est supérieur à 2 aussi. Donc , l'arête c_1c_3 et les chaînes P^* et $c_1c_2c_4c_3$ forment un graphe $\theta_{a,b,c}$ avec $a, b \neq 2$ (cas 3 et cas 4) .

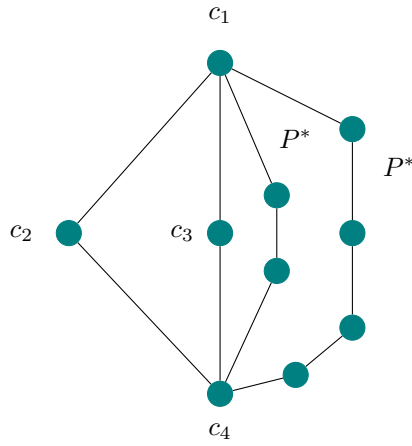


FIGURE 3.13 – $C \cup P \cup P^*$

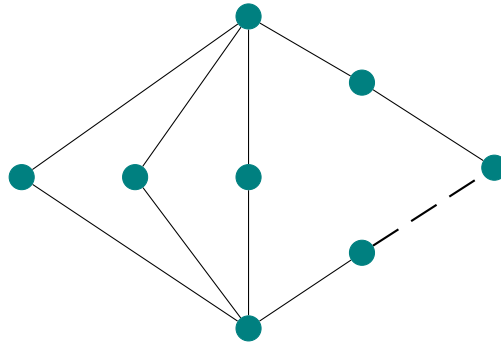


FIGURE 3.14 – Un graphe avec 2 chaînes supplémentaires

Cas 6 :

Les extrémités de P^* sont c_2 et c_4 . Dans ce cas on supprime l'arête c_1c_3 . Donc, l'arête c_2c_4 , P^* , et le chemin de c_2 à c_4 à travers l'arête c_2c_1 et P forment un graphe $\theta_{a,b,c}$ avec $a, b \neq 2$.

Jusqu'à maintenant, on a prouvé la suffisante pour les graphes G' qui sont la réduction de G par la technique de réduction et on a trouvé que les graphes G' ne sont pas 2-choisissable, reste à prouver la même chose pour G .

Soit G' le graphe réduit de G , G' n'est pas 2-choisissable. Soit x le sommet que l'on a supprimé de G . On annule la réduction par séparation des sommets adjacents à x en rajoutant x dans le graphe. On affecte à tous ces sommets la même liste $\{a, b\}$ qui était sur le sommets fusionné dans G' . On choisit la couleur a pour le sommet x , donc les sommets adjacents doivent prendre la couleur b . Ce choix est créé une coloration propre pour G , il aurait également créé une coloration propre pour G' ce qui est une contradiction avec les hypothèse. Alors, G n'est pas 2-choisissable

D'où, les seuls graphes 2-choisissable ont des cœurs :

- un seul sommet .
- un cycle pair .
- un graphe de la forme $\theta_{2,2,2k}$ avec $k \geq 1$.

□

Le résultat suivant montre qu'il existe des graphes qui ne sont pas 2-choisissable.

Corollaire 3.2.1. [28] Les graphes $H_1, H_2, H_3 = \theta_{1,3,3}, H_4 = \theta_{2,2,4}$ et H_5 représentés dans la figure 3.15 ne sont pas 2-choisissable.

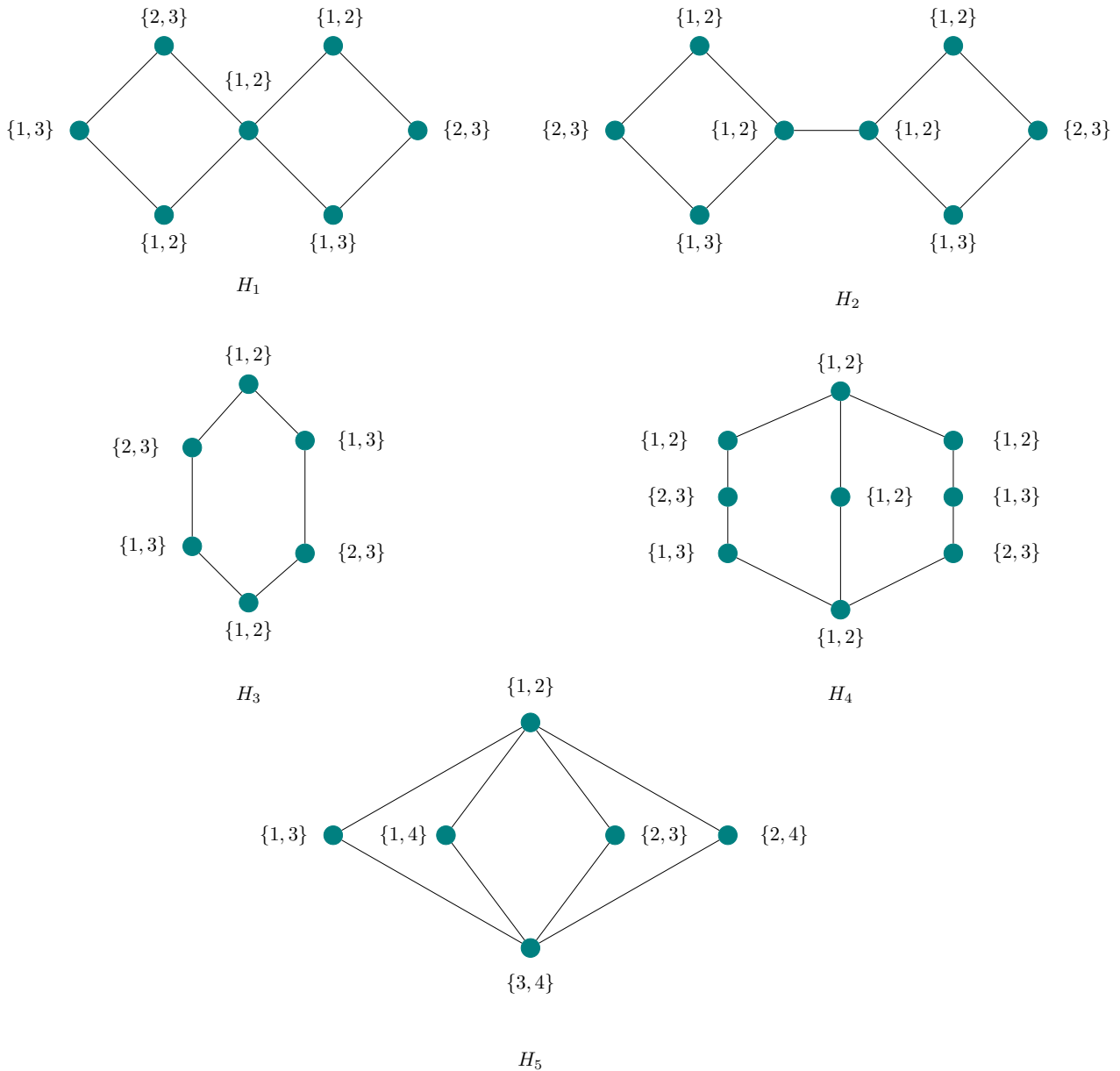


FIGURE 3.15 – Les graphes $H_i, 1 \leq i \leq 5$

3.3 Caractérisations du nombre de liste chromatique χ_L

Bien qu'il est difficile de calculer $\chi_L(G)$ pour un graphe arbitraire G (c'est un problème *NP-Difficile*), il existe une borne supérieure sur $\chi_L(G)$ basé sur le degré maximum $\Delta(G)$.On a la lemme suivante :

Lemme 3.3.1. [23]

$$\chi_L(G) \leq \Delta(G) + 1$$

De plus , si G est un graphe connexe ni complet , ni un cycle impair , alors on a le théorème suivant .

Théorème 3.3.1. [19] Soit G un graphe connexe ni complet , ni un cycle impair , donc :

$$\chi_L(G) \leq \Delta(G)$$

Le résultat suivant caractérise le nombre de liste chromatique du graphe G .

Théorème 3.3.2. [14] Soit G un graphe planaire externe (voir la définition 1.2.4) . Alors :

$$\chi_L(G) = \begin{cases} 2 & \text{Si } G \text{ est un graphe biparti ayant un cycle .} \\ 3 & \text{Sinon .} \end{cases}$$

Pour montrer ce théorème , on fait appel aux lemmes importants dans la preuve qui sont tirés de [14] .

Lemme 3.3.2. Soit C_n un cycle de longueur n .

On a :

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 2 , & \text{si } n \equiv 0[2] \\ 3 , & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases}$$

Voici un exemple 3.16 pour la lemme 3.3.2

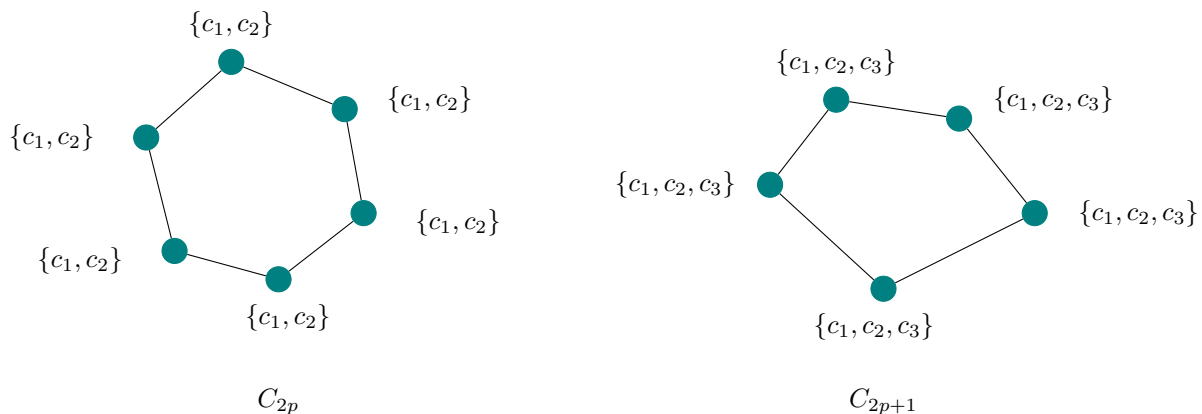


FIGURE 3.16 – Nombre de liste chromatique d'un cycle pair et impair ($p \in \mathbb{N}^*$)

Lemme 3.3.3. *Soit T un arbre enraciné à un sommet x . Soit $L = \{a, b\}$ un liste de couleurs satisfaisant $|L(v)| = 2$ pour tout $v \in V(T)$. Alors , il existe une coloration par liste propre pour T .*

Dans la figure 3.17 , on donne un exemple d'arbre avec une affectation de liste telle que $L(v) = \{a, b\}$.

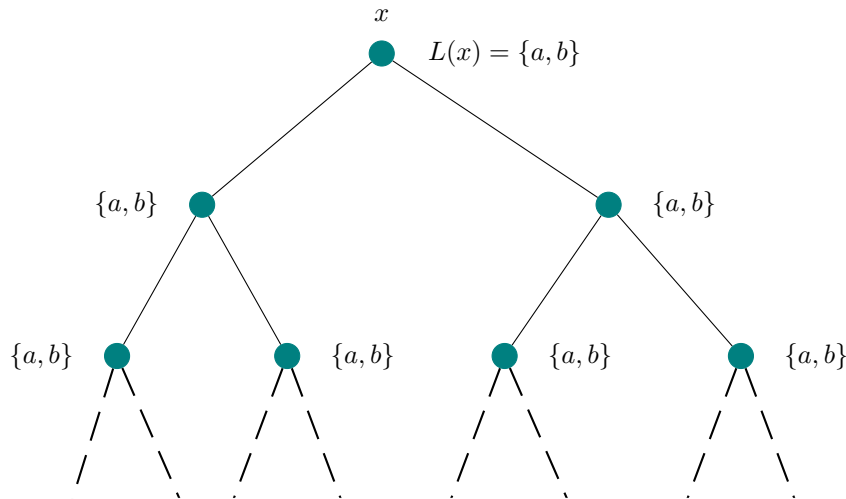


FIGURE 3.17 – Un arbre T est une affectation de liste

Démonstration. du théorème 3.3.2

Cas 01 :

G ne contient aucun cycle . Donc , G est un arbre , d’après le lemme 3.3.3 $\chi_L(G) = 2$. la figure 3.18 donne un exemple lorsque G ne contient aucun cycle .

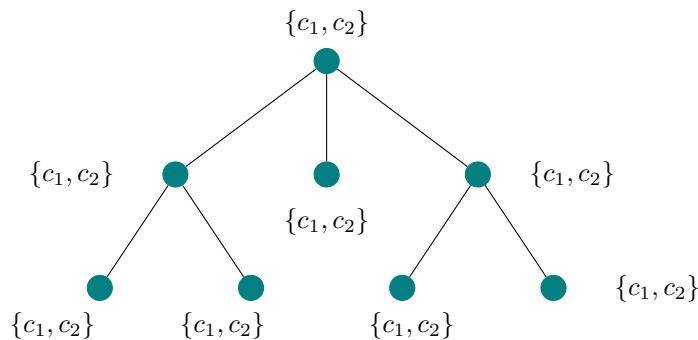


FIGURE 3.18 – Coloration par liste d’un arbre

Cas 02 :

G contient un seul cycle C . Donc $G - E(C)$ est une forêt qui contient des composantes (arbre) connexe dont elles rencontrent C à exactement un sommet . Par la lemme 3.3.2 , on affecte une liste de couleurs au sommets de C , du lemme 3.3.3 $\chi_L(G) = 2$.

La figure 3.19 donne un graphe G ayant un seul cycle C .

Cas 03 :

G contient au moins deux cycles .On suppose que $\chi_L(G) = 2$ (hypothèse), et G contient deux cycles $C_1 = u_0u_1, \dots, u_mu_0$ et $C_2 = v_0v_1, \dots, v_nv_0$ tels que u_0 et v_0 sont reliés par une chaîne P de longueur supérieur ou égal à zéro . On suppose que P est la plus courte chaîne .Lorsque $|P| = 0$ on suppose que $u_0 = v_0$ et $u_m = v_n$. Puisque $\chi(G) \leq \chi_L(G) = 2$ (voir le théorème 3.4.2) , donc G est un graphe biparti .

On a C_1 et C_2 deux cycles de longueur pair (d’après le lemme 3.3.2) , alors on affecte une liste de couleurs pour chaque sommet comme suit :

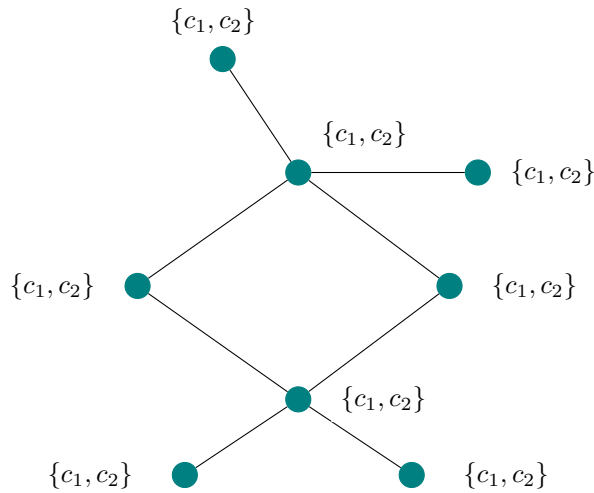


FIGURE 3.19 – Un graphe G ayant un seul cycle

La longueur de P est pair :

$$\text{Soit } L(u_1) = L(v_2) = \{1, 3\} .$$

$$L(u_2) = L(v_1) = \{2, 3\} .$$

$$L(x) = \{1, 2\}; \forall x \in V(G) \setminus u_1, u_2, v_1, v_2 .$$

La longueur de P est impair :

$$\text{Soit } L(u_1) = L(v_1) = \{1, 3\} .$$

$$L(u_2) = L(v_2) = \{2, 3\} .$$

$$L(x) = \{1, 2\}; \forall x \in V(G) \setminus u_1, u_2, v_1, v_2 .$$

D'après l'affectation , on conclut une contradiction avec l'hypothèse . D'où $\chi_L(G) = 3$.
Voici un exemple (la figure 3.20) qui montre lorsque $|P|$ est pair ou impair .

□

3.4 Relations entre $\chi(G)$ et $\chi_L(G)$.

La coloration des graphes est un cas particulier de la coloration par liste .

Dans cette section , on va citer quelques relations entre la coloration et la coloration par liste des graphes . Le résultat suivant est du à *Erdős , Rubin et Taylor* .

Théorème 3.4.1. [3] *Le graphe biparti complet est 2-colorable, et non k-choisissable lorsque*

$$m = \binom{2k-1}{k}$$

Démonstration. Le graphe biparti complet $K_{m,m}$ est 2-colorable , mais si $m = \binom{2k-1}{k}$ le graphe $K_{m,m}$ n'est pas k -choisissable. (k est un entier positif) .

Soit $[X, Y]$ la bipartition de $K_{m,m}$, L-affectation de liste telle que pour tout sous-ensemble I de k entiers de $\{1, 2, \dots, 2k-1\}$.

Dans l'un des parties , X , on doit utiliser au moins k -couleurs différentes. car sinon, on aura un sommet dans X non coloré (sans couleurs choisie) .

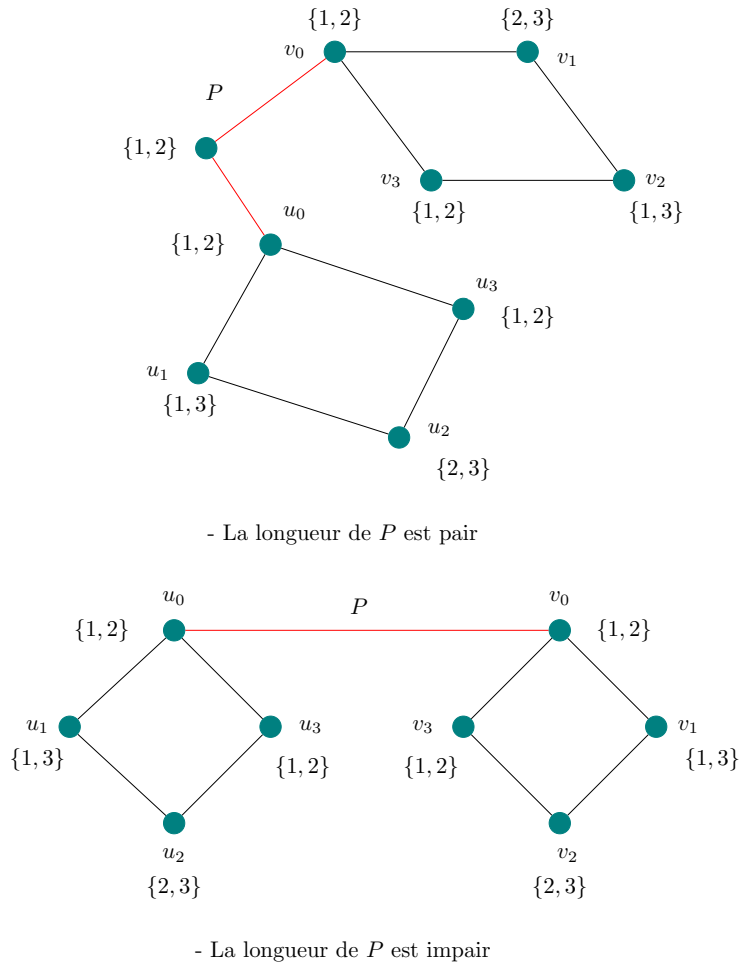


FIGURE 3.20 – Affection de liste lorsque la longueur de P est pair ou impair

Puisqu'on choisit k -couleurs pour X , certains sommets de l'autre partie ont cet ensemble k comme liste. D'où, il n'existe pas un L -coloration propre. □

exemple 3.4.1. La figure 3.21 représente un graphe biparti complet pour $k = 2$ et $m = 3$: On choisit 1 et 2 comme k -couleurs utilisées sur la partie X . Ensuite, la liste $\{1, 2\}$ ne recevra aucune couleur. La même chose est vraie pour tous les autres choix qu'on fait à gauche.

Conjecture 3.4.1. [13](La conjecture de Ohba)

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe tel que $|V(G)| \leq 2\chi(G) + 1$, alors G est chromatique-choisissable.

i.e

$$\chi(G) = \chi_L(G)$$

Conjecture 3.4.2. [16] Si G est un graphe planaire, alors :

$$\chi_L(G) \leq \chi(G) + 1$$

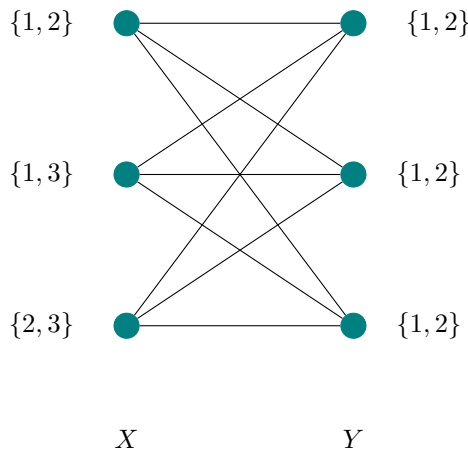


FIGURE 3.21 – $K_{3,3}$

Thomassen a prouvé cette conjecture dans le cas où $\chi(G) = 4 \Rightarrow \chi_L(G) \leq 5$

Théorème 3.4.2. [19] Pour un graphe G , on a :

$$\chi(G) \leq \chi_L(G) \leq \Delta(G) + 1$$

3.4.1 Graphes ayant leur χ et χ_L identiques

Les caractérisations des graphes qui ont $\chi = \chi_L = 2$ sont indiquées aux théorème 3.2.1 . Pour $\chi > 2$, on cite quelques caractérisations .

Mark Kubale a cité certains graphes ayant le nombre chromatique égale au nombre de liste chromatique dans [19] .

Remarque 3.4.1. Il est clair que : $\chi(K_n) = \chi_L(K_n) = n$

Définition 3.4.1. On dit qu'un graphe est **cordal** si chacun de ses cycles de quatre sommets ou plus possède une corde , c-à-d ,une arête reliant deux sommets non adjacents du cycle . Les graphes cordaux sont également appelés des graphes triangulés .

Théorème 3.4.3. Si G est un graphe cordal , alors :

$$\chi(G) = \chi_L(G)$$

exemple 3.4.2. Il est clair de vérifier que le graphe de la figure 3.22 est 3-colorable et 3-choisissable au même temps .

Théorème 3.4.4. Soit G un graphe quelconque sans K_4 . S'il existe une partition d'arêtes $E(G) = E_1 \cup E_2$, tels que chaque chemin induit P_3 contient exactement une arête dans chacun des listes E_1 , E_2 , alors :

$$\chi(G) = \chi_L(G) = \omega(G)$$

On note que $\omega(G)$ représente le nombre des sommets d'une clique maximale dans le graphe G .

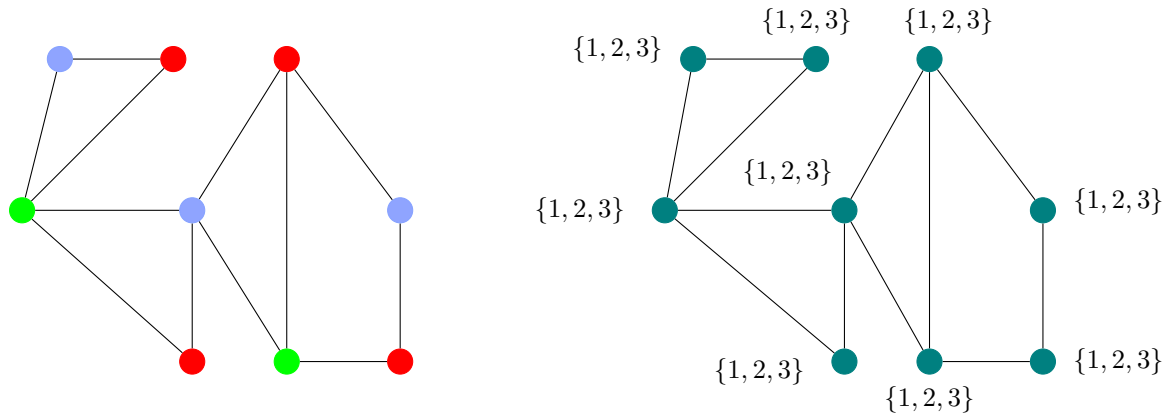


FIGURE 3.22 – Un graphe chordal

Théorème 3.4.5. Soit H un graphe sans triangle², et G son complémentaire. Alors

$$\chi(G) = \chi_L(G)$$

exemple 3.4.3. Soit H le graphe sans triangle représenté dans la figure 3.23, et G son complémentaire.

Il est facile de vérifier que $\chi(G) = \chi_L(G) = 4$

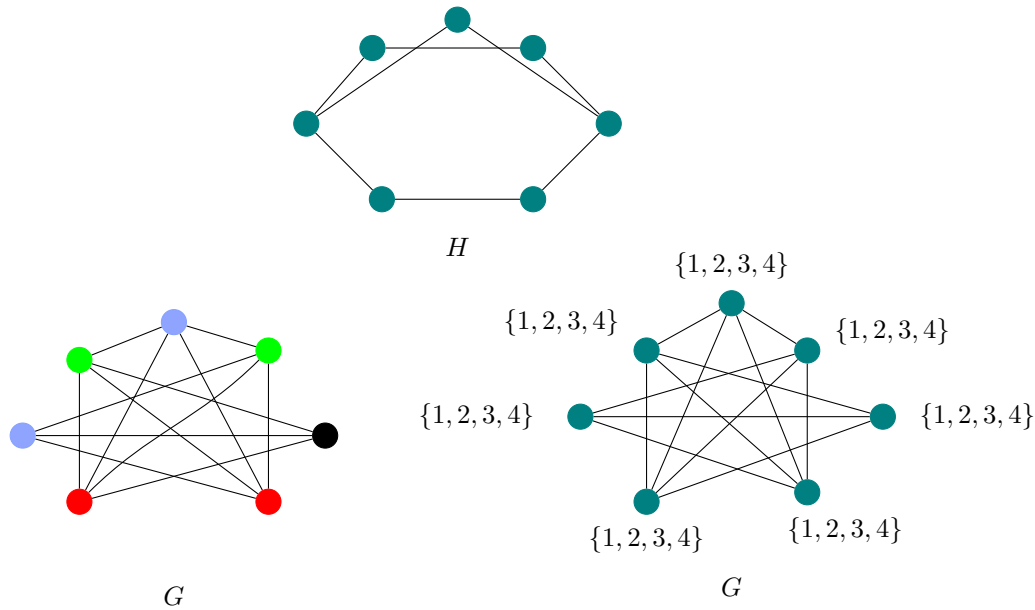


FIGURE 3.23 – Un graphe H et son complémentaire G

Gravier et Maffray ont présenté la conjecture suivante qui est une généralisation du théorème 3.4.5.

Conjecture 3.4.3. Soit G un graphe qui ne contient aucun sous-graphe induit $K_{1,3}$. Alors :

$$\chi(G) = \chi_L(G)$$

2. est le graphe qui ne possède pas de triplet d'arêtes formant un triangle .[1]

3.5 La coloration par liste d'arêtes

Nous rappelons qu'une k -coloration d'arêtes d'une graphe $G = (V(G), E(G))$ est une application c de l'ensemble des arêtes $E(G)$ dans l'ensemble des entiers des couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que pour toutes arêtes adjacentes uv et $vw \in E(G)$; $c(uv) \neq c(vw)$.

L'indice chromatique de G , noté $\chi'(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration propre des arêtes.

Puisqu'elle est une coloration propre d'arêtes, les arêtes incidentes à un même sommet doivent évidemment avoir toutes des couleurs différentes. Cette observation donne la borne inférieure de l'indice chromatique :

$$\chi'(G) \geq \Delta(G)$$

Théorème 3.5.1. [9] Pour tout graphe G , ayant un degré maximum Δ , on a :

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Ce théorème permet de classer les graphes en deux classes différentes : les graphes ayant un indice chromatique égal à $\Delta(G)$, dit **classe 1** (comme les graphes bipartis), et les graphes ayant un indice chromatique égal à $\Delta(G) + 1$, dit **classe 2** (comme les cycles impairs).

Théorème 3.5.2. Si G est un graphe biparti, alors :

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

Définition 3.5.1. [19]

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. On définit une affectation de listes aux arêtes comme une fonction $L : E(G) \mapsto 2^{\mathbb{N}}$ qui associe une liste de couleurs admissibles $L(e)$ pour chaque arête e .

Si $|L(e)| = k$ pour chaque arête $e \in E(G)$, alors on dit que L est k -affectation d'arêtes.

Définition 3.5.2. Pour chaque couleur $c : E(G) \mapsto \mathbb{N}$ qui affecte à chaque arête e une couleur de la liste $L(e)$ de telle sorte que $c(e_1) \neq c(e_2)$ pour chaque deux arêtes $e_1, e_2 \in E(G)$ est appelée une L -coloration d'arêtes du graphe G .

On définit l'indice de liste chromatique d'un graphe G , noté $\chi'_L(G)$, est le plus petit entier k tel que pour chaque k -affectation d'arêtes de liste sur le graphe G , il existe une L -coloration d'arêtes.

De plus, si G admet un graphe adjoint $L(G)$, alors :

$$\chi'_L(G) = \chi_L(L(G))$$

exemple 3.5.1. Soit le graphe G représenté dans la figure 3.24 et $L(G)$ son graphe adjoint : Si on affecte à chaque arête de G la même liste de couleurs, on obtient $\chi'_L(G) = 4$. La même liste on l'affecte sur les sommets de $L(G)$, on obtient aussi $\chi_L(L(G)) = 4$ D'où : $\chi'_L(G) = \chi_L(L(G))$.

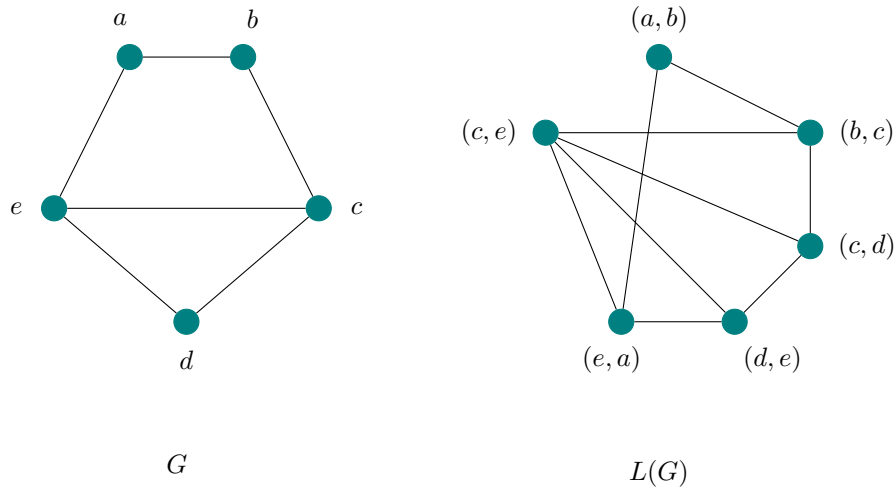


FIGURE 3.24 – Un graphe et son grahe adjoint correspond

3.6 Caractérisations du nombre de liste chromatique d'arête χ'_L

Les résultats de cette section sont extrait de [17]

Théorème 3.6.1. *Soit G un graphe complet K_n . Pour $n \geq 0$ on a :*

$$\chi'_L(K_n) \leq n$$

Dans l'exemple 3.25 , on a $n = 5$ et après l'affectation de liste ,on conclure $\chi'_L(K_5) = 5$, d'où le résultat .

Dans le cas où n est paire, on énonce la conjecture suivante

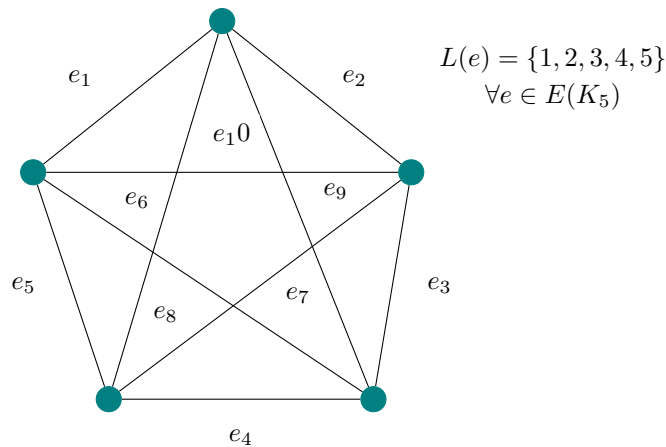


FIGURE 3.25 – K_5

Conjecture 3.6.1. *Pour tout entier $m \geq 0$, on a :*

$$\chi'_L(K_{2m}) = 2m - 1$$

Une valeur exacte a été déterminée, lorsqu'on a un ordre impair et premier.

Théorème 3.6.2. *Pour tout entier impair et premier p , on a :*

$$\chi'_L(K_p) = p$$

Un exemple pour le théorème 3.6.2 . On a pour $p = 3$ un graphe complet K_3 (la figure 3.26) et une liste d'affectation $L(e) = \{a, b, c\}$.

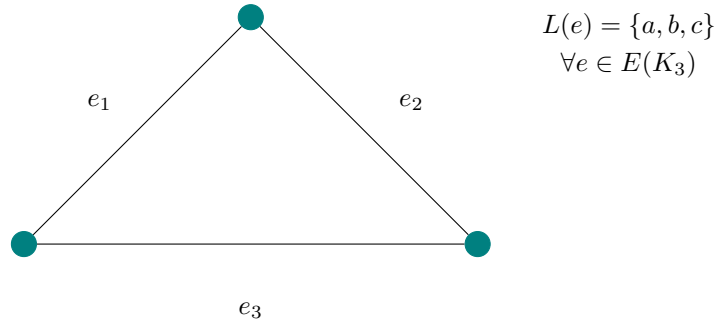


FIGURE 3.26 – K_3

Lemme 3.6.1. [14]

Soit C_n un cycle de longueur n .

$$\chi'_L(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \equiv 0[2] \\ 3, & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases}$$

3.7 Relations entre $\chi'(G)$ et $\chi'_L(G)$.

Théorème 3.7.1. [14] *Soit G un graphe planaire externe (voir définition 1.2.4). Alors :*

$$\chi'_L(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$$

Dans la suite , les résultats sont tirés de [19] .

Conjecture 3.7.1. *Soit G un graphe simple sans boucle , alors :*

$$\chi'(G) = \chi'_L(G)$$

Ce problème a été posé par *Vizing* lors d'une conférence à Odessa en 1975 , puis indépendamment par de nombreux autres auteurs (*Bollabàs et Harris*) .

En dehors de *Vizing* , *Dinitz* à présenté la conjecture ci-dessus en 1978 , mais limitée aux graphes bipartis complets seulement .

En 1995 , *Galvin* est prouvé le théorème suivant (plus généralisé) .

Théorème 3.7.2. *Si G est un graphe biparti . Alors :*

$$\chi'(G) = \chi'_L(G)$$

exemple 3.7.1. *Exemple illustratif du théorème 3.7.2 :*

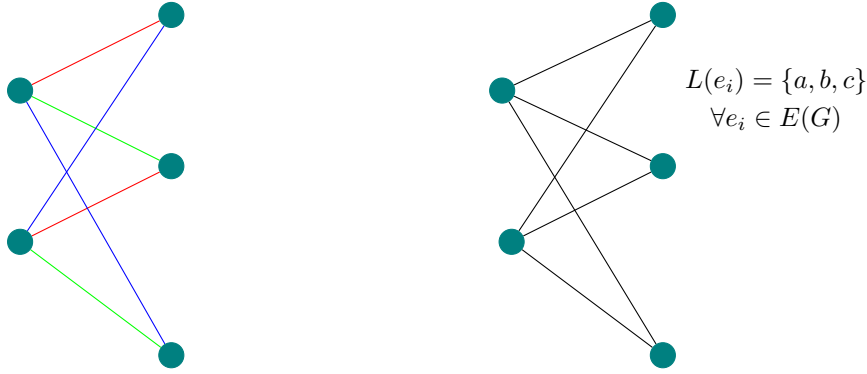


FIGURE 3.27 – Un graphe biparti

Définition 3.7.1. *Un graphe G est dit parfait , si pour chaque sous-graphe induit $H \subseteq G$, on a :*

$$\chi(H) = \omega(H)^3$$

Théorème 3.7.3. *Si G est un multigraphe dont le graphe adjoint est parfait , alors :*

$$\chi'_L(G) = \chi'(G) = \omega(L(G))$$

Ce théorème généralise le théorème de Galvin , puisque le graphe adjoint de quelque graphe biparti est parfait .

Ensuite , Vizing a prouvé que $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, et il pose une conjecture pour l'indice de liste chromatique .

Conjecture 3.7.2. *Pour chaque graphe G , on a :*

$$\Delta(G) \leq \chi'_L(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Cependant , d'après le théorème 3.3.1 , il résulte que $\chi'_L(G) = \chi_L(L(G)) \leq 2\Delta(G) - 1$, à moins que G ne soit un seul cycle.

Bollobàs et Harris sont présentés une large amélioration pour ce résultat .

Théorème 3.7.4.

$$\chi'_L(G) \leq \begin{cases} 2(\Delta(G) - 1) & \Delta(G) \geq 3 \\ 2\Delta(G) - 3 & \Delta(G) \geq 37 \\ 2(\Delta(G) - 2) & \Delta(G) \geq 47 \\ 2\Delta(G) - 5 & \Delta(G) \geq 56 \end{cases}$$

3. ω est la taille du clique maximale

3.8 Résultats sur les graphes planaires

Un des résultats les plus célèbres dans la théorie des graphes est **la démonstration de théorème de quatre couleurs** qui montre que chaque graphe planaire est **4-colorable** .

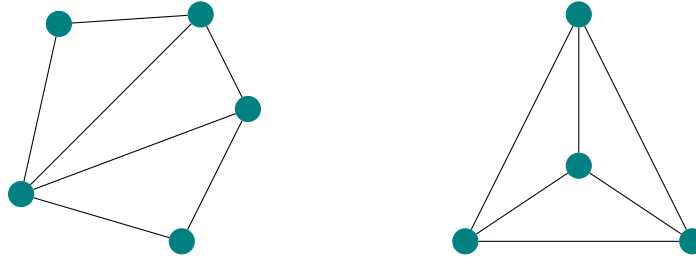
Le nombre de liste chromatique des graphes planaires est inférieur à 6 , qui découle du fait que dans chaque graphe planaire , il existe un sommet de degré au plus 5 .

En 1979 , Erdős et al. ont conjecturé qu'il existe un graphe planaire tel que $\chi_L(G) = 5$.

Quatorze ans plus tard , cette conjecture est prouvée par Carsten Thomassen .On va présenter cette preuve ici , mais avant ça , on donne une définition nécessaire .

Définition 3.8.1. [19] *Un graphe planaire qui a tous ses faces internes sont des triangles est dit **quasi-triangulaire** .*

Les graphes de la figure ci-dessous représente un graphe triangulaire et l'autre un graphe quasi-triangulaire.



Un graphe quasi-triangulaire

Un graphe triangulaire

FIGURE 3.28 – Exemple d'un graphe triangulaire et quasi-triangulaire

Théorème 3.8.1. [30] *Soit G un graphe quasi-triangulaire avec $C : v_1v_2\dots v_pv_1$ un cycle externe de G . On suppose que $|L(v_1)| = |L(v_2)| = 1$ avec $c(v_1) = 1$ et $c(v_2) = 2$, et pour chaque $v \in C \setminus v_1, v_2 : |L(v)| \geq 3$, et pour $v \in G \setminus C : |L(v)| \geq 5$. Alors, la coloration de v_1 et v_2 peut être étendue à une coloration propre pour le reste des sommets de G de sorte que, pour chaque sommet, la couleurs affectées est dans la liste de ce sommet .*

Démonstration. [31] Par récurrence sur le nombre de sommets n .

Si $n = 3$, alors $G = C_3$ un cycle avec 3 sommets. Puisqu'il existe au moins 3 couleurs disponibles pour le sommet restant v_3 qui n'est pas coloré, alors on a une coloration par liste propre (voir la figure .

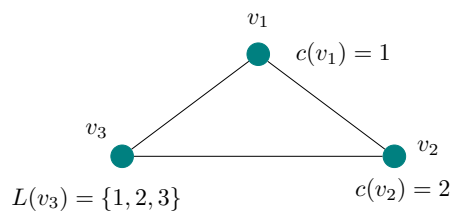


FIGURE 3.29 – Un graphe planaire de 3 sommets

Maintenant, supposons que $n \geq 4$. On a deux cas :

Si C a un chord : $v_i v_j$ entre deux sommets v_i et v_j ne sont pas adjacents.

On suppose $2 \leq i \leq j - 2 \leq p - 1$, et $v_{p+1} = v_1$. Pour le sous-graphe qui se compose par les sommets $v_1 v_2 \dots v_i v_j v_{j+1} \dots v_p v_1$ et leurs sommets adjacents intérieurs (la partie droite du graphe de la figure 3.30), on applique l'hypothèse d'induction, on obtient une coloration par liste valide. Ensuite, on l'applique sur le cycle $v_j v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ et leurs sommets intérieurs (partie gauche du graphe de la figure 3.30), on obtient aussi une coloration par liste valide.

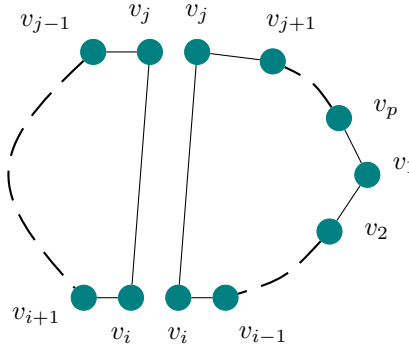


FIGURE 3.30 – Fractionnement du graphe avec un chord de v_i à v_j

Si C n'ayant pas un chord : On considère le sommet v_k (Voir la figure 3.31). Soit $v_1, u_1, u_2, \dots, u_r, u_{k-1}$ les sommets voisins de v_k sur cet ordre.

Puisque G n'a pas un chord, alors tous les sommets u_i sont des sommets internes, et puisque G est quasi-triangulaire, alors $C_k : v_1 v_2 \dots v_{k-1} u_r \dots u_2 u_1 v_1$ est un cycle dans G .

Si on supprime le sommet v_k , le cycle C_k est externe dans le graphe G' ($G \setminus v_k$).

Soit c_1, c_2 deux couleurs de la liste affectée au sommet v_k telles que $c_1 \neq 1$ et $c_2 \neq 1$ (la couleur affectée au sommet v_1). Si on supprime c_1 et c_2 de toutes les listes affectées aux sommets u_i , lors 3 couleurs restants dans les listes et on obtient une coloration par liste valide pour le graphe G' . Alors, on peut colorer le sommet v_k par la couleur c_1 ou bien c_2 qui sont indépendantes des couleurs affectées au sommet v_{k-1} .

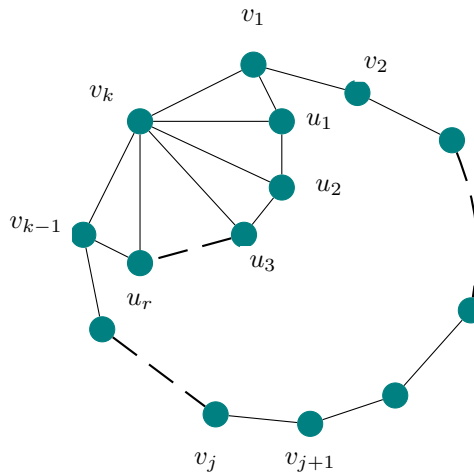


FIGURE 3.31 – Les sommets voisins de v_k

□

Une conséquence directe du théorème précédent est :

Corollaire 3.8.1. [30] *Tout graphe planaire est 5-choisissable.*

Si les graphes planaires sont 5-choisissable, ce n'est pas toujours vrai dans le cas de la 4-choisissabilité.

Théorème 3.8.2. [19] *Il existe des graphes planaires qui ne sont pas 4-choisissable .*

Le graphe présenté dans la preuve originale contient 238 sommets et est 4-colorable . Après ça , Voigt est présenté un graphe G d'ordre 130 avec $\chi(G) = 3$ et $\chi_L(G) = 5$, répondre par la négative à la question de savoir si $\chi_L(G) - \chi(G) \leq 1$ tient pour tous les graphes planaires. Le plus petit graphe planaire actuellement connu avec $\chi_L = 5$ a été trouvé par Mirzakhani, ce graphe contient 63 sommets et leur nombre chromatique égal à 3 . De plus , il y a une 4 affectations par lista L pour ce graphe qui utilise seulement 5 couleurs , de sorte que ce graphe n'est pas L -colorable .

Les résultats les plus importants concernant la coloration par liste des graphes planaires sont cités ci-dessous.

Théorème 3.8.3. [19] *Les graphes 3-choisissables sont :*

1. *Les graphes planaires biparti.*
2. *Les graphes planaires sans triangle.*
3. *Les graphes planaires de maille égal à 5.*

Théorème 3.8.4. [18] *Tout les graphe planaire G avec $\Delta(G) = 12$ vérifie $\chi'_L(G) = \Delta(G)$.*

CONCLUSION

Dans cet mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de coloration par liste dans quelques types de graphes, tel que nous avons exposé certaines définitions fondamentaux à propos de ce concept.

A travers ce travail, nous avons appris quelques classes des graphes. Nous avons compris c'est quoi un graphe planaire, un graphes d'intervalles, un graphe complet, un graphe biparti,...etc

En effet, le problème posé dans notre travail qui est la coloration par liste permet de trouver une coloration propre pour un graphe tel que chaque sommet de ce graphe doit prendre un couleur à partir de sa liste de couleurs de sorte que deux sommets adjacents ne peut pas voir la même couleur.

Le théorème de *Erdős, Rubin, et Taylor*, mentionné au troisième chapitre, nous donne une autorisation pour caractériser les graphes s'ils sont 2-choisissable ou non.

De plus, le théorème de *Erdős et al.* permet de prouver que le nombre de liste chromatique d'un graphe planaire égal à 5.

Une suite possible pour ce travail serait de caractériser les graphes planaires 4-choisissable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Graphe complet, graphe d'intervalles, <https://www.wikipedia.org/Wikipedia>, 11-06-2021.
- [2] Graphe adjoint, <https://www.wikipedia.org/Wikipedia>, 1-07-2021.
- [3] P.Erdős, A.L.Rubin, and H.Taylor, *Choosability in graphs*, California Institute of Technology, 1979 .
- [4] J. Ravi Sankar A. Felix G. Mokesh Rayalu and M. Maria Sagaya Nathan, *A Survey : List Coloring Problem*, International Journal of Control Theory and Applications, 2016 .
- [5] Courtney L. Baber, *An Introduction to List Colorings of Graphs*, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, April 2009.
- [6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory With Applications*, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2008.
- [7] O.V. Borodin, *Colorings of plane graphs : A survey*, Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, December 2012.
- [8] Frédéric Testard, *Théorie des graphes*, Université de La Rochelle 14.06.2021.
- [9] F. Havet .*Graph colouring and applications*, Projet Mascotte, CNRS/INRIA/UNSA, INRIA Sophia-Antipolis, 2004 .
- [10] Nathann Cohen, *Coloration des graphes planaires*, Master Statistiques, Informatique, et Techniques Numériques Université Claude Bernard - Lyon 1, Avril - Juillet 2008 .
- [11] Krishna N. Ramachandran, Elizabeth M. Belding, Kevin C. Almeroth, Milind M. Buddhikot, *Interference-Aware Channel Assignment in Multi-Radio Wireless Mesh Networks*, 2006.
- [12] T. Zeitlhofer and B. Wess, *List-coloring of interval graphs with application to register assignment for heterogenous register-set architectures*, 2003.

- [13] Julien Bensmail, Arirat Harutyunyan, Ngoc Khang Le, *List coloring diagraphs*, Feb 2018 .
- [14] Wang Weifan and Ko-Wein Lih .*Choosability, Edge choosability, and total choosability of outerplane*, Academic Press, 2001 .
- [15] Wang Weifan and Ko-Wein Lih,*Choosability and Edge Choosability of Planar Graphs without Five Cycles*, Academic Press, 2001 .
- [16] Coleman Hall, *On List-Coloring and the Sum List Chromatic Number of Graphs*, Virginia Commonwealth University, 2011 .
- [17] Uwe Schauz, *Proof of the List Edge Coloring Conjecture for Complete Graphs of Prime Degree*, Department of Mathematical Science, Liverpool University .2014 .
- [18] Marthe Bonamy, *Planar graphs with $\Delta \geq 8$ are $(\Delta + 1)$ -edge choosable* , Université Montpellier 2, 2013 .
- [19] Marek Kubale, *Graph colorings*, American Mathematic Society, 2000 .
- [20] Antal Ivànyi and Zsolt Németh, *List coloring of Latin and Sudoku graphs*, Komàrno, Slovakia, 2010 .
- [21] Martin Grötschel, Arie M. C. A. Koster, Andreas Eisenblätter, *Graph Colouring and Frequency Assignment* , 2012.
- [22] Alexandre Duret-Lutz, *Théorie des graphes*, 17 mars 2012 .
- [23] Michelle Anne Lastrina, *List-coloring and sum-list-coloring problems on graphs*, Iowa State University, 2012 .
- [24] Hillal Touati, *Élément de théorie des graphes*, Faculté de Mathématique et de l'informatique, université de BBA, 20 Décembre 2020 .
- [25] Chahinez Bachtarzi, *Théorie des graphes*, Faculté des nouvelles technologies de l'information et de la communication, Université de Constantine 2, 2014-2015 .
- [26] Preston Briggs, Keith D. Cooper, et Linda Torczon . *Improvement to graph Coloring Register Allocation* , Rice University, 15-06-2021 .
- [27] Grégory Morel, *Stabilité et coloration des graphes sans P_5* , Mathématique discrète, Universitéde Grenoble, 2011 .
- [28] Frederic Havet, *Chapitre 7 : Coloration sur listes*, 24-05-2021 .
- [29] Renyu Xu, *Some coloring problems of graphs*, Discrete Mathematics, 2017.

- [30] Lars-Daniel Öhman, *A Beautiful Proof by Induction*, Journal of Humanistic Mathematics, Vol6, N°1, 2016 .
- [31] Carsten Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, Journal of Combinatorial Theory B 62(1),(1994).