Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présentée par :

BELALMI Hadjer
ZOUAOUI Asma

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Systèmes Dynamiques

Thème

Méthode de points intérieurs et nouvelle direction de recherche pour la programmation semi-définie.

Soutenu publiquement **le 8 Juillet 2021** devant le jury composé de

BELKACEM Naziheddine	M.A.A.	Président
GUERRA Loubna	M.C.B.	Encadrant
ADDOUNE Smail	M.C.A.	Examinateur

Promotion 2020/2021

Remerciements

*Avant tout on remercie " **Allah**" tout puissant pour la volonté, la patience que nous a données d'accomplir ce travail.*

*Un grand remerciement à notre encadreur " **Dr. GUERRA Loubna** "; maître de conférence classe B ; à l'université Mohamed El-Bachir-El-Ibrahimi, Bordj Bou Arréridj ; pour avoir accepté de diriger ce mémoire, et pour les conseils fructueux et sa disposition, l'encouragement et l'orientations qu'elle nous a attribuées.*

Nous exprimons nos vifs remerciements aux membres de jury :

- **Monsieur BELKACEM Naziheddine** ; maître assistant classe A ; à l'université Mohamed El-Bachir-El-Ibrahimi, Bordj Bou Arréridj ; de nous avoir fait l'honneur de faire partie de ce jury, que nous avons amélioré grâce à ses conseils et ses remarques d'en être le président.
- **Dr. ADDOUNE Smail** ; maître de conférence classe A ; à l'université Mohamed El-Bachir-El-Ibrahimi, Bordj Bou Arréridj ; pour l'attention toute particulière qu'il a accordée à ce travail et pour avoir accepté de participer au jury de cet mémoire d'en être l'examinateur.

Nous remercions également toute l'équipe administrative du département de Mathématiques à l'université de Bordj Bou Arréridj, et à toute la promotion Mathématiques de ***Systèmes Dynamiques 2020-2021.***

⋆ Dédicace ⋆

Je dédie ce modeste travail...
À le plus cher père du monde ' Noureddine '.
À la plus tendre du monde, ma mère ' Aicha '.
Pour leur soutien moral, leur encouragement tout a long de mes études.
Qu'Allah leur présente une bonne santé et une longue vie.
À mon soutien mes frères ' Amar , Mouâad ', et ma chère sœur ' Lina '.
Avec mes souhaits de bonheur et de réussite dans leur vie.
À mes chers cousins : ' Ayoub, Oussama, Gholam, Oussid, Adem ',
et mes chères cousines : ' Bouba, Nedjwa, Aya, Basmala '.
À toute la famille ' BELALMI ' et ' BENHAMADI ' sans exception.
À ma copine intime ' Rayane BENSAÂDI '.
À tous mes amis : ' Selmane, Amine, Bachir, Djalil, Zohir... '
Et à toute mes amies ' Asma, Chahira, Silya, Khawla ,
Nour El Imane, Mouna, Zahra,... '

⋆ BELALMI Hadjer ⋆

⋆ Dédicace ⋆

Je dédie ce travail, particulièrement :
À la personne qui a le plus grand cœur du monde mon père ' Azouz '
qui m'a soutenu tout au long de mon parcours universitaire.
À ma chère mère la plus tendre ' fifi '.
Sans oublier les bougies qui font éclairer la maison, mes plus belles soeurs
' Romaissa, Sorour ' et ' Aridj '.
Et ma nièce qui a importé la joie à la maison ' Tassnim '.
À toute la famille ' ZOUAOUI ' et ' BENHAMADI ' sans exception.
À celle qui a été à mes côtés, qui a apprécié ma situation, je ne l'oublierai jamais
ma binôme ' Hadjer '.
Je n'oublie pas ma copine intime qui est hors pays loin de mes yeux
qui m'a toujours offert de l'espoir ' Abir '.

⋆ ZOUAOUI Asma ⋆

Table des matières

Introduction

La programmation semi-définie (SDP) est un domaine important et récent de la programmation mathématique surtout dans les années **90**, grâce à son utilisation vaste et on la trouve dans plusieurs domaines, notamment : l'architecture, ingénierie électrique,...

Le problème SDP est une généralisation de la programmation linéaire (PL), la programmation quadratique et d'autre part est un cas particulier de plusieurs problèmes d'optimisation comme la programmation quadratique semi-définie, qui acte sur l'ensemble des matrices symétriques semi définies positives donc l'ensemble des contraintes est un cône non polyédrique ce qui fait les méthodes classiques simpliciales ne sont pas valables. Pour cela, on utilise les méthodes de points intérieurs qui ont été initialisées pour la première fois par **Karmakar** en **1984** [13]. Plusieurs algorithmes ont été développés pour la programmation linéaire [12, 24], la programmation quadratique [1] et la programmation semi-définie SDP [15, 18, 19, 23, 25, 27, 29]. Ainsi que, la programmation quadratique semi-définie [2].
Les méthodes de points intérieurs peuvent être classifiées en quatre types :

- **Méthodes affines**.
- **Méthodes projectives**.
- **Méthodes de réduction de potentiel**.
- **Méthodes de la trajectoire centrale**.

Dans ce travail, on s'intéresse à la méthode de la trajectoire centrale (TC) de type primal-dual qui a été présentée pour la première fois par **De Klerk** en **1998** [19], son direction est dit direction classique. Plusieurs travaux pour avoir des nouvelles directions et nouvelle mesure de proximité.

Notons que plusieurs travaux ont été réalisés pour résoudre le problème SDP, où des algorithmes de type TC basés sur les fonctions noyaux [4, 8, 29, 30] et d'autres basés sur les transformations algébriques [6, 14, 17, 29] ont été développés.
Kheirfam [14] fait l'extension d'étude de **Darvay** en **2016** [7] qui basée sur la transformation algébrique $\psi(t) = t - \sqrt{t}$.

On s'intéresse à l'étude du travail de **Kheirfam** pour voir de nouvelles directions.
Ce mémoire est composé de trois chapitres :

- Dans **le premier chapitre**, on présente un rappel sur des notions fondamentales d'usage fréquent par la suite, à savoir l'analyse matricielle, l'analyse convexe ainsi que la programmation mathématique.
- **Le deuxième chapitre** est consacré à la programmation semi-définie et le développement d'un algorithme TC de type primal-dual à petit pas, on utilise le schéma de symétrisation de **Nesterov-Todd** et on termine ce chapitre par l'analyse de la complexité de cet algorithme dans [14].

- Dans **le troisième chapitre**, on présente les tests numériques appliqués sur quelques exemples semi-définie pour montrer l'efficacité de cet algorithme.

On terminera ce mémoire par une conclusion générale.

Notations

$\mathbb{R}^n$	:	L'espace des vecteurs réels de dimension n,
$\mathbb{R}^n_+$	:	L'orthant positif de $\mathbb{R}^n$,
$\mathbb{R}^{m\times n}$	:	L'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(m \times n)$,
A^T	:	Le transposé d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
a_{ij}	:	Elément de la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{S}^n$	=	$\{X : X \in \mathbb{R}^{n\times n}, X = X^\top\}$,
$A \succeq 0$ $(A \succ 0)$	:	A est une matrice semi définie positive (définie positive),
$A \preceq 0$ $(A \prec 0)$	:	A est une matrice semi définie négative (définie négative),
$\mathbb{S}^n_+$	=	$\{X : X \in \mathbb{S}^n, X \succeq 0\}$,
$\mathbb{S}^n_{++}$	=	$\{X : X \in \mathbb{S}^n, X \succ 0\}$,
$\lambda_i(A)$	:	La i^{ème}valeur propre de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$\lambda_{\max}(A)$	=	$\max_i \lambda_i(A)$, si $\lambda_i(A) \in \mathbb{R}$, $\forall i, (\lambda_i(A) \in \mathbb{C})$,
$\lambda_{\min}(A)$	=	$\min_i \lambda_i(A)$, si $\lambda_i(A) \in \mathbb{R}$, $\forall i, (\lambda_i(A) \in \mathbb{C})$,
$\mathbf{Tr}\ (A)$	=	$\sum_i a_{ii} = \sum_i \lambda_i(A)$, (la trace d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$),
$\rho(A)$	=	$\max_i \lvert\lambda_i(A)\rvert$, (le rayon spectral de A),
$\lVert A\rVert_F^2$	=	$\mathbf{Tr}\ (AA^\top) = \sum_i \sum_j a_{ij}^2$,
$\lVert A\rVert_2$	=	$\sqrt{\rho(A^\top A)}$, la norme spectrale de A,
$A \bullet B$	=	$\mathbf{Tr}\ (A^\top B)$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$A^{\frac{1}{2}}$	:	La racine carrée de la matrice $A \succ 0$,
A^{-1}	:	L'inverse d'une matrice régulière A,
$A \sim B$	:	Il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$; (semblable),
I	:	La matrice identité d'ordre n,
$\mathrm{diag}(x)$	=	X la matrice diagonale avec $X_{ii} = x_i$,
$X^{(k)}$	:	Le $k^{ième}$ terme d'une suite de matrices.

Chapitre 1

Notions et préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire certaines notions et résultats de calcul matriciel et quelques propriétés des matrices symétriques et semi-définie positive ainsi que des notions de base de l'analyse convexe et de la programmation mathématique.

1.1 Produit scalaire, normes et matrices

Dans cette partie, on présente quelques notions d'analyse matricielle.

1.1.1 Produit scalaire et normes (Frobenius)

Définition 1.1.1. *Le produit scalaire usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ est défini par :*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y.$$

- **Produit scalaire sur l'ensemble des matrices carrées réelles :**

Définition 1.1.2. *Soient A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, le produit scalaire de A et B noté $A \bullet B$ est défini par :*

$$A \bullet B = \boldsymbol{Tr}\,(A^T B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = B \bullet A.$$

- **La notion de norme vectorielle :**

Définition 1.1.3. *La norme vectorielle est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$, notée par $\|\,.\,\|$ et vérifie les conditions suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \| \lambda x \| = |\lambda| \| x \| .$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$

- **La norme matricielle :**

Définition 1.1.4. *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, l'application $\| . \| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ est appelée norme matricielle si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0, \ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
2. $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
4. $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|, \ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

On note que les normes matricielles usuelles pour tout $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont :

$$\| A \|_1 = \max_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right), \ \| A \|_\infty = \max_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right) \text{ et } \| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)},$$

la dernière norme est appelée la norme spectrale. On utilisera également la norme de Frobenius :

$$\| A \|_F = \sqrt{A \bullet A} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2}.$$

Si $A = A^T$, alors on obtient les résultats suivants :

$$\| A \|_F = \sqrt{\mathbf{Tr}\ (A^T A)} = \sqrt{\mathbf{Tr}\ (A^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(A)},$$

et

$$\| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^2)} = \max_{i=1}^{n} | \lambda_i(A) |,$$

de plus

$$\| A \|_2 \leq \| A \|_F \leq \sqrt{n} \| A \|_2,$$

et pour toute norme matricielle on a :

$$\rho(A) \leq \| A \| .$$

1.1.2 Matrices (semi-) définies positives

Définition 1.1.5. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

- *A est dite semi-définie positive si et seulement si : $x^T Ax \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.*
- *A est dite définie positive si et seulement si : $x^T Ax > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.*

- **Propriétés des matrices (semi-) définies positives :**

Théorème 1.1.1. *Soit $A \in \mathbb{S}^n$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $A \in \mathbb{S}^n_+$ (*resp* $A \in \mathbb{S}^n_{++}$).
2. $\lambda_{min}(A) \geq 0 \, (\lambda_{min}(A) > 0)$.

3. $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = P^T P$ $(resp\ \exists P \in \mathbb{R}^{n\times n},\ rg(P) = n,\ A = P^T P)$.

Proposition 1.1.1. *Soit $A \in \mathbb{S}^n_{++}$, alors il existe une matrice unique $B \in \mathbb{S}^n_{++}$ telle que $A = B^2$, et on la note souvent par $B = A^{\frac{1}{2}}$. De plus, B est appelée la racine carrée de A.*

Dans la suite, on s'intéresse aux matrices symétriques semi-définies positives. On définit sur $\mathbb{S}^n$ l'ordre de Löwner par :

$$A \succcurlyeq B \Leftrightarrow A - B \succcurlyeq 0,\ (\text{resp}\ \ A \succ B \Leftrightarrow A - B \succ 0),$$

et on a :

Proposition 1.1.2. *Soient $A, B \in \mathbb{S}^n_+$, alors :*

1. $A + B \succcurlyeq B$.
2. $A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \succcurlyeq 0$.
3. $\boldsymbol{Tr}(AB) \le \boldsymbol{Tr}(A)\boldsymbol{Tr}(B)$.
4. $\boldsymbol{Tr}(AB) \ge 0$.

Lemme 1.1.1. *Soient $A, B \in \mathbb{S}^n_+$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $A \bullet B = 0$.
2. $AB = 0$.
3. $\frac{1}{2}(AB + BA) = 0$.

Lemme 1.1.2. *Soient $A, B \in \mathbb{S}^n_+$. Alors :*

$$\lambda_{min}(A)\lambda_{max}(B) \le \lambda_{min}(A)\boldsymbol{Tr}(B) \le A \bullet B \le \lambda_{max}(A)\boldsymbol{Tr}(B) \le n\lambda_{max}(A)\lambda_{max}(B).$$

1.2 La convexité

La notion de convexité est un outil mathématique d'importance pour l'étude des problèmes d'optimisation. Dans cette partie, on présente quelques notions de base .

1.2.1 Ensembles et applications affines

- **Ensembles affines**

Définition 1.2.1. *Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est dite affine si :*

$$\forall x, y \in F\ et \forall \lambda \in \mathbb{R} : (1-\lambda)x + \lambda y \in F.$$

On dit aussi que F est une varriété affine (linéaire).

- **Applications affines**

Définition 1.2.2. *Une application f est dite affine sur $F \subset \mathbb{R}^n$ si :*

$$\forall x, y \in F\ \ et\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : f[(1-\lambda)x + \lambda y] = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Si de plus $f(0) = 0$ alors f est linéaire. Plus généralement tout fonction affine f définie sur $F \subset \mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = c^T x + d,\ \ où\ \ c \in \mathbb{R}^n\ \ et\ \ d \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Ensembles et Fonctions convexes

- **Ensembles convexes**

Définition 1.2.3. *Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in C : [x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y,\ \lambda \in [0,1]\} \subset C.$$

Autrement dit, si le segment de droite joignant deux points quelconques x, y est entièrement inclus dans C.

- **Fonctions convexes**

Définition 1.2.4. *Soit C un ensemble convexe, on dit que $f : C \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur C si*

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda)f(y),\ \forall \lambda \in [0,1],\ \forall x, y \in C.$$

Si l'inégalité est stricte pour $x, y \in C,\ x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[,\ f$ est dite strictement convexe sur C c'est à dire

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Énonçons maintenant, Cône convexe :

- **Cônes convexes**

Définition 1.2.5. *Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est appelé Cône si*

$$\mathbb{R}_+^* K \subseteq K,$$

c'est à dire

$$\forall x \in K,\ \forall \lambda > 0 : \lambda x \in K.$$

Si $K \cap (-K) = \{0\}$, K est dit cône pointé, avec $-K = \{-x, x \in K\}$. Si K est convexe, on l'appelle cône convexe.

1.3 Programmation Mathématique

1.3.1 Définitions

Dans cette partie, on donne les outils de base d'un problème d'optimisation. On rappelle certaines définitions importantes.

- **Problème d'optimisation**

Sous sa forme générale, un problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \min\limits_{x} f(x) \\ x \in C, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des contraintes.
Si $C = \mathbb{R}^n$, ce problème est appelé problème d'optimisation sans contraintes.

- **Programme mathématique**

Un programme mathématique est un problème d'optimisation qui consiste à trouver une solution du problème qui maximise ou minimise une fonction donnée sous un ensemble des contraintes.
En général, un programme mathématique est défini par :

$$(PM)\begin{cases} \min\limits_{x} f(x) \\ x \in D, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue est appelée fonction objective, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des contraintes. Souvent D est présenté comme suit :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m, h_j(x) = 0, j = 1, ..., p\},$$

avec g_i, h_j dont des fonctions de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

- **Solution réalisable :**

Un point x^0 est dit solution réalisable de (PM) s'il vérifié les contraintes (c'est à dire $x^0 \in D$).

- **Contrainte saturée :**

Une contrainte d'inégalité $g_i(x) \leq 0$ est dite saturée en $\overline{x} \in D$ si $g_i(\overline{x}) = 0$.
Une contrainte d'égalité $h_j(x) = 0$ est par définition saturée en tout point x de D.

- **Solution optimale globale :**

Tout point $x^* \in D$ satisfaisant

$$f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in D,$$

est appelé solution optimale globale.
L'ensemble des solutions optimales globales de (PM) est noté par :

$$arg \min_{x \in D} f(x).$$

- **Solution optimale locale :**

Tout point $x^* \in D$ satisfaisant

$$f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in D \cap \vartheta,$$

où ϑ est un voisinage de x^*, est appellé solution optimale locale.
L'ensemble des solutions optimales locales de (PM) est noté par :

$$loc \min_{x \in D} f(x).$$

On a toujours :

$$arg \min_{x \in D} f(x) \subseteq loc \min_{x \in D} f(x).$$

1.3.2 Classification des problèmes mathématiques

On classifie le problème (PM) à partir de deux propriétés principales à savoir la convexité et la différentiabilité de la fonction objective et les contraintes.

- (PM) est différentiable si les fonctions f, g_i, h_j sont différentiables.
- (PM) est convexe si f, g_i sont convexes et h_j sont affines.

On note que si (PM) est convexe, alors tout optimum local est un optimum global.

1.3.3 Qualification des contraintes

La Qualification des contraintes est satisfaite pour tout $\overline{x} \in D$ dans l'un des trois cas suivants :

- Les contraintes sont affines (D est un polyèdre convexe).
- La condition de Slater : Si D est convexe (c'est à dire g_i sont convexes et h_j sont affines) et $int(D) \neq \emptyset$ c'est à dire

$$\exists x^0 : g_i(x^0) < 0 \text{ et } h_j(x^0) = 0, \ \forall i, j.$$

1.3.4 Existence et unicité d'une solution optimale

- **Existence**

Théorème 1.3.1. ***(Weirstrass)*** *Si f est une fonction continue sur $D \subseteq \mathbb{R}^n$, D est compact (fermé et borné), alors (PM) admet au moins une solution optimale $x^* \in D$.*

Corollaire 1.3.1. *Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est non vide et fermé et si f est continue et coercive sur D (c'est à dire $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$), alors (PM) admet au moins une solution optimale.*

- ***Unicité***

Si f est strictement convexe et l'ensemble D est convexe, alors si (PM) admet une solution optimale, la solution est unique.

Remarque 1.3.1. *La stricte convexité assure l'unicité de la solution et non l'existence de ce dernier.*

1.3.5 Conditions d'optimalité

La définition suivante dite de Karush-Kuhn-Tucker **(K.K.T)** donne une condition nécessaire d'optimalité du premier ordre.

Définition 1.3.1. ***(Karush-Kuhn-Tucker)***
Supposons que les fonctions f, g_i, h_j sont C^1 dans un voisinage de $\overline{x} \in D$ et que les contraintes vérifient une des trois conditions de qualification ci-dessus. Si f a un minimum local en $\overline{x}$ sur D alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^P$ tels que :

$$(K.K.T) \begin{cases} \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0, \\ \lambda_i g_i(\overline{x}) = 0, \forall i = 1, ..., m, \\ h_j(\overline{x}) = 0, \forall j = 1, ..., p. \end{cases}$$

Les quantités λ_i et μ_j sont appelées multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange.

Définition 1.3.2. ***(Le lagrangien)***
Le lagrangien d'un programme mathématique (PM) est défini par :

$$L(x, \lambda, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{m} y_j h_j(x), \ \lambda_i \in \mathbb{R}_+, y_j \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.3.2.

- *Si les contraintes de* (PM) *ne sont pas qualifiées en* $\overline{x}$*, les conditionsde* ***(K.K.T)*** *ne s'appliquent pas.*
- *Si* (PM) *est convexe, les conditions de* ***(K.K.T)*** *sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que* $\overline{x}$ *soit un minimum global.*

1.4 Méthodes de Newton

1.4.1 Principe de la méthode

Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, différentiable et soit $J(x)$ la matrice jacobienne de la fonction F. Alors nous considérons le système non linéaire suivant :

$$F(x) = 0.$$

A partir d'un vecteur x^0 de $\mathbb{R}^n$ et l'utilisation de la formule suivante :

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} F(x^k),$$

on construit une suite de point définie par :

$$x^{k+1} = x^k + d^k,$$

où d^k est le vecteur de direction, solution du système :

$$J(x^k)d^k = -F(x^k).$$

Chapitre 2

Programmation convexe semi-définie et méthode de points intérieurs

Dans ce chapitre, on s'intéresse à résoudre un problème convexe semi-définie (SDP) dont l'inconnue est une matrice symétrique semi-définie positive $X \in \mathbb{S}^n_+$. Pour cela, on développe un algorithme de trajectoire centrale (TC) de type primal-dual basé sur une nouvelle direction, et on termine par la convergence de l'algorithme et l'analyse de sa complexité.

2.1 La programmation semi-définie

Rappelons que $\mathbb{S}^n$ est l'ensemble des matrices symétriques de taille $(n \times n)$.
On désigne par :

- $\mathbb{S}^n_+$ l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives.

$$\mathbb{S}^n_+ = \{A \in \mathbb{S}^n : A \text{ est semi-définie positive (ou } A \succeq 0)\}.$$

- $\mathbb{S}^n_{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

$$\mathbb{S}^n_{++} = \{A \in \mathbb{S}^n : A \text{ est définie positive (ou } A \succ 0)\}.$$

La programmation semi-définie (SDP) est une généralisation de la programmation linéaire (PL). En comparant avec la programmation linéaire standard le vecteur de variables $x \in \mathbb{R}^n_+$ est remplacé par une matrice variable $X \in \mathbb{S}^n_+$. Autrement dit, le cône de l'orthant positif $x \geq 0$ est remplacé par le cône des matrices semi-définies positives $X \succeq 0$.

2.1.1 Position du problème

Problème primal

Soient deux entiers naturels m, n avec $m \leq n$, un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ des matrices C, $A_i \in \mathbb{S}^n$, $i = 1, \ldots, m$.
Un programme semi-définie sous forme primale est un problème d'optimisation donné par :

$$(P) \begin{cases} \min\limits_X C \bullet X \\ A_i \bullet X = b_i \,,\, i = 1, \ldots, m, \\ X \in \mathbb{S}^n_+. \end{cases}$$

- **L'ensemble des solutions réalisables primales**

On note

$$\mathcal{F}_P = \{X \in \mathbb{S}^n_+ : A_i \bullet X = b_i, i = 1, ..., m\},$$

$$\mathcal{F}_P^+ = \{X \in \mathbb{S}^n_{++} : A_i \bullet X = b_i, i = 1, ..., m\},$$

L'ensemble des solutions réalisables (et strictement réalisables, respectivement) pour (P).

- **Valeur optimale primale**

La valeur optimale primale du problème (P) est définie par :

$$val(P) = \inf_x \{C \bullet X : A_i \bullet X = b_i,\ i = 1, ..., m,\ X \in \mathbb{S}^{\ltimes}_+\}.$$

- **Solution optimale primale**

On dit que X^* est une solution optimale primale de (P) si :

$$X^* \in \mathcal{F}_P \text{ et } val(P) = C \bullet X^*.$$

Problème dual

Pour obtenir le problème dual de (P), on considère la fonction Lagrangienne

$$L : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$L(X, y) = C \bullet X + \sum_{i=1}^m (b_i - A_i \bullet X) y_i,$$

le dual de (P) est donné par :

$$\{\max_{y \in \mathbb{R}^m} \min_{X \in \mathbb{S}^n_+} L(X, y) = \max_{y \in \mathbb{R}^m} H(y),$$

où

$$\begin{aligned} H(y) &= \min_{X \in \mathbb{S}^n_+} L(X, y), y \in \mathbb{R}^m, \\ &= \min_{X \in \mathbb{S}^n_+} \left\{ C \bullet X + \sum_{i=1}^m (b_i - A_i \bullet X) y_i \right\}, y \in \mathbb{R}^m, \\ &= \min_{X \in \mathbb{S}^n_+} \left\{ \left(C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \right) \bullet X + b^T y \right\}, y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$H(y) = \begin{cases} b^T y \ \text{ si } \left(C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \right) \succcurlyeq 0 \\ -\infty \qquad\qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc le dual est un programme semi-défini donné par :

$$(D)\begin{cases}\max\limits_{(y,Z)} b^T y\\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_i + Z = C\\ Z \in \mathbb{S}_+^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^m\end{cases},$$

où l'inconnu est $(y, Z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}_+^n$.

- **L'ensemble des solutions réalisables duales**

On note

$$\mathcal{F}_D = \left\{ Z \in \mathbb{S}_+^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z = C \right\},$$

$$\mathcal{F}_D^+ = \left\{ Z \in \mathbb{S}_{++}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z = C \right\},$$

L'ensemble des solutions réalisables (et strictement réalisables, respectivement) pour (D).

- **Valeur optimale duale**

La valeur optimale dual du probléme (D) est définie par :

$$val(D) = \sup_{(y,Z)} \left\{ b^T y : \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z = C, y \in \mathbb{R}^m \text{ et } Z \in \mathbb{S}_+^n \right\}.$$

- **Solution optimale duale**

On dit que (y^*, Z^*) est une solution optimale duale de (D) si :

$$(y^*, Z^*) \in \mathcal{F}_D \text{ et } val(D) = b^T y^*.$$

2.2 Domaines d'application de la programmation semi-définie

Ces dernières années, la programmation semi-définie (SDP) devient l'un des problèmes les plus étudiés grâce à leurs applications en différents domaines comme :

- Problème de programmation non linéaire.
- Optimisation combinatoire.
- Programmation quadratique avec contraintes quadratiques.
- Optimisation quadratique non convexe.
- Problèmes géométriques en formes quadratiques.
- Norme spectrale d'une matrice.
- Optimisation des valeurs propres.
- Approximation de Tchebychev.

2.3 Dualité en SDP

2.3.1 Saut de dualité

Définition 2.3.1. *Soient $X \in \mathcal{F}_P$ et $(y, Z) \in \mathcal{F}_D$, alors la différence*

$$\begin{aligned}
val(P) - val(D) &= C \bullet X - b^T y, \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z\right) \bullet X - \left(\sum_{i=1}^{m} A_i \bullet X\right) y_i, \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} y_i A_i\right) \bullet X + Z \bullet X - \left(\sum_{i=1}^{m} A_i \bullet X\right) y_i, \\
&= Z \bullet X, \\
&= X \bullet Z,
\end{aligned}$$

est appelée le saut de dualité des problèmes (P) et (D).

Maintenant, on a :

- **Dualité faible**

Théorème 2.3.1. *[31] Pour toute $X \in \mathcal{F}_P$ et $(y, Z) \in \mathcal{F}_D$ on a :*

$$X \bullet Z = C \bullet X - b^T y \geq 0.$$

Preuve. Soient $X \in \mathcal{F}_P$ et $(y, Z) \in \mathcal{F}_D$, alors :

$$\begin{aligned}
C \bullet X - b^T y &= C \bullet X - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \\
&= C \bullet X - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \bullet X, \\
&= \left(C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i\right) \bullet X, \\
&= Z \bullet X \geq 0, \qquad \text{car } X \text{ et } Z \in \mathbb{S}^n_+,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité découle de la Proposition 1.1.2. Donc

$$C \bullet X - b^T y \geq 0, \ \forall X \in \mathcal{F}_P \text{ et } \forall (y, Z) \in \mathcal{F}_D.$$

Ce qui achève la preuve. □

- **Dualité forte**

La programmation linéaire (PL) et la programmation (SDP) ont une structure très similaire, mais certains résultats de la dualité en (PL) ne sont pas valable en (SDP), la dualité forte qui n'est pas vérifiée sauf si la stricte réalisabilité de l'un des deux problèmes est préservée. On explique cela dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.2.

1. *Si le problème (P) est strictement réalisable i.e., $\exists X \in \mathcal{F}_P^+$ alors $val(P) = val(D)$. Si en autre, $val(P)$ est fini, alors l'ensemble des solutions optimales duales de (D) est compact non vide.*
2. *Si le problème (D) est strictement réalisable i.e., $\exists (y, Z) \in \mathcal{F}_D^+$ alors $val(P) = val(D)$. Si en autre, $val(D)$ est fini, alors l'ensemble des solutions optimales primales de (P) est compact non vide.*

2.3.2 Hypothèses

Pour résoudre les deux problèmes (P) et (D), on suppose qu'ils vérifient les hypothèses suivantes :

-Hypothèse 1. Condition d'indépendance : Les matrices $[A_1, A_2, ..., A_m]$ sont linéairement indépendantes.

-Hypothèse 2. Condition de points intérieurs (**CPI**) : on suppose qu'il existe un point primal-dual strictement réalisable (X^0, y^0, Z^0), en autre terme ce point vérifie

$$\begin{cases} A_i \bullet X^0 & = b_i, i = 1, ..., m \\ \sum_{i=1}^{m} y_i^0 A_i + Z^0 & = C, \\ X^0, Z^0 \in \mathbb{S}_{++}^n \text{ et } y^0 \in \mathbb{R}^m. & \end{cases}$$

On rappelle que le problème (P) consiste à minimiser la fonction :

$$f(X) = C \bullet X,$$

sous l'ensemble des contraintes

$$\mathcal{F}_P = \{A_i \bullet X = b_i,\ i = 1, ..., m,\ X \in \mathbb{S}_+^n\},$$

qui s'écrit comme l'intersection d'un cône convexe non polyédrique noté par $(X \in \mathbb{S}_+^n)$ et des contraintes linéaires $\{A_i \bullet X = b_i,\ i = 1, ..., m\}$. Donc $\mathcal{F}_P$ est convexe et comme $\mathcal{F}_P$ est d'intérieur relatif non vide, alors la condition de Slater est satisfaite (c-à-d $\mathcal{F}_P$ est convexe et $\mathcal{F}_P^+ \neq \phi$). De plus, la fonction objective $f(X)$ est deux fois différentiable et convexe c'est à dire

$$\nabla f(X) = C,\ \nabla^2 f(X) = 0.[18]$$

Par conséquent, le problème d'optimisation (P) est convexe et différentiable, à contraintes qualifiées. Alors les conditions d'optimalités de **(K.K.T)** sont nécessaires et suffisantes et s'écrivent comme suit :

$$(K.K.T) \begin{cases} A_i \bullet X & = b_i,\ i = 1, ..., m, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z & = C, \\ X \bullet Z & = 0,\ X, Z \in \mathbb{S}_+^n, \end{cases}$$

qui équivalent à :

$$\begin{cases} A_i \bullet X & = b_i,\ i = 1,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z & = C, \\ XZ & = 0,\ X, Z \in \mathbb{S}^n_+. \end{cases} \tag{2.1}$$

L'idée principale des méthodes de points intérieurs primal-dual est de remplacer la condition de complémentarité $XZ = 0$ par $XZ = \mu I$, où $\mu > 0$. Par cette substitution, nous obtenons

$$\begin{cases} A_i \bullet X & = b_i,\ X \succ 0,\ i = 1,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z & = C,\ Z \succ 0 \\ XZ & = \mu I,\ \mu > 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $XZ = \mu I$ est l'équation de centralité.

Le système (2.2) admet une solution unique, notée par $(X(\mu), y(\mu), Z(\mu))$ pour $\mu > 0$ (μ fixé) qui étudié par [16, 20], définie la trajectoire centrale qui converge vers la solution optimale quand μ tend vers 0 [17, 9]). En supposant que les matrices A_i, $i = 1,\dots,m$ sont linéairement indépendantes.

2.4 Nouvelle direction cherchée

- **Fonction matricielle**

Définition 2.4.1. *Soient $X \in \mathbb{S}^n$ et*

$$X = Q_X^{-1}\ diag\,(\lambda_1(X),\dots,\lambda_n(X))Q_X,$$

la décomposition spectrale de X, où Q_X est orthogonale. La fonction matricielle $\psi(X)$ est définie par :

$$\psi(X) = Q_X^{-1}\ diag\,(\psi(\lambda_1(X)),\dots,\psi(\lambda_n(X)))Q_X.$$

On note que la fonction $\psi(X)$ est bien définie lorsque $\psi(t)$ est bien définie pour chaque valeur propre de X et

$$\psi^{'}(X) = Q_X^{-1}\ diag\,(\psi^{'}(\lambda_1(X)),\dots,\psi^{'}(\lambda_n(X)))Q_X.$$

La Définition 2.4.1 est appelée Théorème de Décomposition Spectrale d'une matrice symétrique. Elle nous permet de faire l'extension de la définition d'une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à une fonction de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^n$ [11].

Afin d'obtenir des nouvelles, Darvay [7], a remplacé l'équation de centralité $XZ = \mu I$ par $\psi\left(\frac{XZ}{\mu}\right) = \psi(I)$, où $\psi(.)$ est une fonction matricielle définie à partir d'une fonction réelle continûment différentiable $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qu'on suppose l'inversible ψ^{-1} existe. Donc le système (2.2) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} A_i \bullet X & = b_i,\ X \succ 0,\ i = 1,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z & = C,\ Z \succ 0 \\ \psi\left(\frac{XZ}{\mu}\right) & = \psi(I). \end{cases} \tag{2.3}$$

En utilisant la méthode de Newton pour résoudre le système non linéaire (2.3), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} A_i \bullet \triangle X & = 0,\ i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} \triangle y_i A_i + \triangle Z & = 0, \\ \psi\left(\frac{XZ}{\mu} + \frac{X\triangle Z + \triangle XZ + \triangle X \triangle Z}{\mu}\right) & = \psi(I), \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\triangle X, \triangle y, \triangle Z$ désigne les directions cherchées.
En appliquant ([29], Lemme 2.5) sur la troisième équation du système (2.4) et en négligeant la terme $\triangle X \triangle Z$, on obtient

$$\psi\left(\frac{XZ}{\mu}\right) + \psi'\left(\frac{XZ}{\mu}\right)\left(\frac{X\triangle Z + \triangle XZ}{\mu}\right) = \psi(I).$$

Par conséquent, on a le système suivant :

$$\begin{cases} A_i \bullet \triangle X & = 0,\ i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} \triangle y_i A_i + \triangle Z & = 0, \\ \triangle X + X\triangle Z Z^{-1} & = \mu\left(\psi'\left(\frac{XZ}{\mu}\right)\right)^{-1}\left(\psi(I) - \psi\left(\frac{XZ}{\mu}\right)\right)Z^{-1}. \end{cases} \tag{2.5}$$

On note que $\triangle Z$ est symétrique d'après la deuxième équation du système (2.5) mais $\triangle X$ n'est pas forcément symétrique. Alors pour traiter ce problème, Todd et all [26] introduisent une matrice P inversible comme suit :

$$\begin{cases} A_i \bullet \triangle X & = 0,\ i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} \triangle y_i A_i + \triangle Z & = 0, \\ \triangle X + P\triangle Z P^t & = \mu\left(\psi'\left(\frac{XZ}{\mu}\right)\right)^{-1}\left(\psi(I) - \psi\left(\frac{XZ}{\mu}\right)\right)Z^{-1}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Dans ce travail, on s'intéresse au schéma de symétrie de Nesterov-Todd :

$$P := X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}} Z X^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}} X^{\frac{1}{2}} = Z^{\frac{-1}{2}}(Z^{\frac{1}{2}} X Z^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{-1}{2}}, \tag{2.7}$$

où $P \in \mathbb{S}_n^{++}$.
On définit $D = P^{\frac{1}{2}}$. La matrice D est utilisée pour mettre à l'échelle, les deux matrices X et D au même la matrice V qui vérifie :

$$V := \frac{1}{\sqrt{\mu}} D^{-1} X D^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} DZD. \tag{2.8}$$

On note que les matrices D et V sont symétriques et définies positives . De plus, on a

$$V^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} D^{-1} X D^{-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} DZD\right) = \frac{1}{\mu} D^{-1} XZD,$$

et

$$D_X := \frac{1}{\sqrt{\mu}} D^{-1} \triangle X D^{-1}\ ,\ D_Z := \frac{1}{\sqrt{\mu}} D \triangle Z D, \tag{2.9}$$

on peut facilement vérifier que le système (2.6), s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \overline{A_i} \bullet D_X & = 0,\ i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} \triangle y_i \overline{A_i} + D_Z & = 0, \\ D_X + D_Z & = P_V, \end{cases} \tag{2.10}$$

où

$$\overline{A_i} := \frac{1}{\sqrt{\mu}} D A_i D,\ i = 1, \dots, m$$

et

$$P_V = \sqrt{\mu} D^{-1} (D\psi^{'}(V^2) D^{-1})^{-1} (\psi(I) - D\psi(V^2) D^{-1}) Z^{-1} D^{-1}.$$

- Notons que $[\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_m}]$ sont aussi linéairement indépendants.
- De plus, les directions D_X et D_Z sont symétriques est vérifiants :

$$\begin{aligned} D_X \bullet D_Z = D_Z \bullet D_X &= \frac{1}{\mu} \langle \triangle X, -\sum_{i=1}^{m} \triangle y_i A_i \rangle, \\ &= \frac{1}{\mu} \left[-\sum_{i=1}^{m} \triangle y_i (A_i \bullet \triangle X) \right],\ \text{ où }\ A_i \bullet \triangle X = 0, \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc les nouvelles directions cherchées sont orthogonales.
Pour les différents choix de ψ, on obtient des valeurs différent pour P_V par Ross et al [24] pour la programmation linéaire (LO).

- Si $\psi(t) = t$ alors $P_V = V^{-1} - V$ qui est étudié par [17] pour SDP.
- Si $\psi(t) = \sqrt{t}$ alors $P_V = 2(I - V)$ présenté par Darvay [6] pour LO et Wang et Bai [29] pour SDP.

En 2016, Darvay [7] a proposé une méthode de points intérieurs suivant la trajectoire centrale pour les problèmes (LO).

- Si $\psi(t) = t - \sqrt{t}$, alors $P_V = 2(V - V^2)(2V - I)^{-1}$, qui est étudié pour Darvay [6] pour (LO) et Kheirfam [14] pour SDP.

Dans ce mémoire, on s'intéresse par $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ et l'étude de Kheirfam [14] pour résoudre un problème SDP.

$$\begin{aligned} V^2 + V P_V &= V^2 + (2V^2 - 2V^3)(2V - I)^{-1} \\ &= V^2 (2V - I)(2V - I)^{-1} + (2V^2 - 2V^3)(2V - I)^{-1} \\ &= V^2 [(2V - I) + 2(I - V)](2V - I)^{-1} \\ &= V^2 (2V - I)^{-1} \\ &= [V^2 + 2V - 2V + I - I](2V - I)^{-1} \\ &= [(2V - I) + (V - I)^2](2V - I)^{-1} \\ &= I + (V - I)^2 (2V - I)^{-1}. \end{aligned}$$

D'après le théorème spectral pour les matrices symétriques [31], et puisque $V \in \mathbb{S}^n_+$, on obtient :

$$V = Q^T \operatorname{diag}(\lambda_1(V), \ldots, \lambda_n(V))Q,$$

où Q est une matrice orthonormale ($Q^T = Q^{-1}$) qui diagonalise V. Alors :

$$(V - I)^2 = Q^T \operatorname{diag}((\lambda_1(V) - 1)^2, \ldots, (\lambda_n(V) - 1)^2)Q.$$

et

$$(2V - I)^{-1} = Q^T \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2\lambda_1(V) - 1}, \ldots, \frac{1}{2\lambda_n(V) - 1}\right)Q.$$

De plus, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} V^2 + VP_V - I & = & (V - I)^2(2V - I)^{-1}, \\ & = & Q^T \operatorname{diag}\left(\dfrac{(\lambda_1(V) - 1)^2}{2\lambda_1(V) - 1}, \ldots, \dfrac{(\lambda_n(V) - 1)^2}{2\lambda_n(V) - 1}\right)Q. \end{array} \tag{2.11}$$

Considérons la fonction $f(t) = \dfrac{(t-1)^2}{2t-1}$, $t > \frac{1}{2}$ c'est facile de montrer que $f(t) > 0, \forall t > \frac{1}{2}$ et par conséquent d'après le Théorème 1.1.1 on a $(V - I)^2(2V - I)^{-1} \in \mathbb{S}^n_+$, donc $V^2 + VP_V - I \succ 0$. lorsque

$$\lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}. \tag{2.12}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{P_V^2}{4} \succ 0. \tag{2.13}$$

De (2.12) et (2.13) on déduit que par $\lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}$, alors :

$$V^2 + VP_V \succ I - \frac{P_V^2}{4}. \tag{2.14}$$

2.4.1 La mesure de proximité

Pour l'analyse de l'algorithme, on définit une mesure de proximité $\delta(X, Z; \mu)$ comme suit :

$$\delta(V) := \delta(X, Z; \mu) := \frac{\|P_V\|}{2} = \|(V - V^2)(2V - I)^{-1}\|_F. \tag{2.15}$$

Puisque les directions D_X et D_Z sont orthogonales et d'après la troisième équation de (2.10), on a :

$$\|P_V\|_F^2 = \|D_X + D_Z\|_F^2 = \|D_X\|_F^2 + \|D_Z\|_F^2.$$

On peut vérifier que :

$$\delta(V) = 0 \Leftrightarrow V = I \Leftrightarrow XZ = \mu I. \tag{2.16}$$

Par conséquent, la valeur de $\delta(V)$ est considérée comme une mesure appropriée de la distance entre le triple (X, y, Z) donné et $(X(\mu), y(\mu), Z(\mu))$. Après un pas complet de Nesterov-Todd (NT), le nouveau itéré est donné par :

$$\begin{array}{rcl} X_+ & = & X + \triangle X. \\ y_+ & = & y + \triangle y. \\ Z_+ & = & Z + \triangle Z. \end{array} \tag{2.17}$$

Notons que la recherche d'une solution optimale primale-duale est équivalente à mettre le saut de dualité $X \bullet Z$ vers le zéro, cela est exprimé par la mise à jour du paramètre μ via :

$$\mu_+ = (1-\theta)\mu, \ 0 < \theta < 1.$$

- Si θ dépend de n, alors l'algorithme est dit à petit pas.
- Si θ est indépendant à n, alors l'algorithme est dit à grand pas.

Par la suite, on présente un Algorithme primal-dual à petit pas pour SDP.

2.4.2 Algorithme

On présente un algorithme de trajectoire centrale (TC) de type primal-dual basé sur une nouvelle direction cherchée pour SDP.

Algorithme réalisable Trajectoire Centrale (TC) de type primal-dual pour SDP

Début Algorithme
Données
Paramètre de précision $\epsilon > 0$;
Paramètre de proximité $\beta, 0 < \beta < 1 \left(\text{défaut } \beta = \frac{1}{2}\right)$;
Paramètre $\theta, 0 < \theta < 1 \left(\text{défaut } \theta = \frac{1}{27\sqrt{n}}\right)$;
Initialisation :
Soit (X^0, y^0, Z^0) vérifiant **CPI** tel que $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) \leq \beta$, $\lambda_{min}\left(\sqrt{\frac{X^0 Z^0}{\mu^0}}\right) > \frac{1}{2}$,
paramètre de barrière $\mu^0 = \frac{X^0 \bullet Z^0}{n}$ et $k = 0$;
tant que $X^{(k)} \bullet Z^{(k)} \geq \epsilon$ **faire**
résoudre le système (2.10) et calculer $(\triangle X, \triangle y, \triangle Z)$ de (2.9);
$(X^{(k+1)}, y^{(k+1)}, Z^{(k+1)}) := (X^{(k)}, y^{(k)}, Z^{(k)}) + (\triangle X, \triangle y, \triangle Z)$;
$\mu^{(k+1)} := (1-\theta)\mu^{(k)}$, et $k = k+1$;
fin tant que
fin Algorithme.

Algorithme 2.4.2

2.4.3 La convergence de l'algorithme et l'analyse de la complexité

Pour l'analyse de l'algorithme, on introduit la notation

$$Q_V = D_X - D_Z.$$

Ainsi, on a

$$D_X = \frac{P_V + Q_V}{2}, \quad D_Z = \frac{P_V - Q_V}{2},$$

et

$$D_X D_Z + D_Z D_X = \frac{P_V^2 - Q_V^2}{2}. \tag{2.18}$$

Puisque

$$D_X \bullet D_Z = D_Z \bullet D_X = 0,$$

on a

$$\|Q_V\|_F^2 = \|D_X - D_Z\|_F^2 = \|D_X\|_F^2 + \|D_Z\|_F^2 = \|P_V\|_F^2 = 4\delta(V)^2. \tag{2.19}$$

Maintenant, on a besoin de quelques résultats techniques qui sont nécessaire pour montrer la strict faisabilité du nouveau itéré.

Lemme 2.4.1 ([18], Lemme 3.3.1). *Soit $X(\alpha) := X + \alpha \triangle X$, $Z(\alpha) = Z + \alpha \triangle Z$ tels que $X \succ 0$, $Z \succ 0$. Si on a :*

$$det\,(X(\alpha)Z(\alpha)) > 0, \forall \alpha \in [0, \overline{\alpha}].$$

Alors $X(\alpha) \succ 0$ et $Z(\alpha) \succ 0$, $\forall 0 \leq \alpha \leq \overline{\alpha}$.

Lemme 2.4.2 ([18], Lemme 3.3.3). *On suppose que $Q \in \mathbb{S}_{++}^n$, et $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice anti-symétrique. On a : $det\,(Q + M) > 0$. De plus, si $\lambda_i(Q+M) \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$, alors :*

$$0 < \lambda_{min}(Q) \leq \lambda_{min}(Q+M) \leq \lambda_{max}(Q+M) \leq \lambda_{max}(Q),$$

ce qui implique $Q + M \succ 0$.

Notons que la convergence de l'algorithme et l'analyse de la complexité est faite par Kheirfam [14]

Par la suite, on montre la faisabilité du pas Nesterov-Todd complet.

Lemme 2.4.3 ([14], Lemme 5.3). *Soit $\delta := \delta(X, Z; \mu) < 1$ et suppose que $\lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}$. Alors :*

$$X_+ \succ 0, \quad Z_+ \succ 0.$$

Preuve. Pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$ on a :

$$X(\alpha) = X + \alpha \triangle X, \quad Z(\alpha) = Z + \alpha \triangle Z.$$

En utilisant (2.8) et (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
X(\alpha)Z(\alpha) &= (X + \alpha \triangle X)(Z + \alpha \triangle Z), \\
&= XZ + \alpha(X \triangle Z + \triangle X Z) + \alpha^2 \triangle X \triangle Z, \\
&= \mu D(V^2 + \alpha(D_X V + V D_Z) + \alpha^2 D_X D_Z) D^{-1}, \\
&\sim (V^2 + \alpha(D_X V + V D_Z) + \alpha^2 D_X D_Z), \\
&= Q(\alpha) + M(\alpha),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où

$$Q(\alpha) = \mu\Big(V^2 + \alpha V(D_X + D_Z) + \frac{1}{2}\alpha^2(D_X D_Z + D_Z D_X)\Big),$$

et

$$M(\alpha) = \mu\alpha\Big(D_X V - V D_X + \frac{1}{2}\alpha(D_X D_Z - D_Z D_X)\Big).$$

On peut facilement voir que la matrice $M(\alpha)$ est anti-symétrique. D'autre part, en utilisant la troisième équation de (2.10) et (2.18), on obtient :

$$\begin{aligned}
Q(\alpha) &= \mu\left(V^2 + \alpha V P_V + \alpha^2 \frac{P_V^2 - Q_V^2}{4}\right),\\
&= \mu\left(V^2 + \alpha V P_V + \alpha^2 \frac{P_V^2 - Q_V^2}{4} + \alpha V^2 - \alpha V^2\right),\\
&= \mu\left((1-\alpha)V^2 + \alpha(V^2 + V P_V) + \alpha^2 \frac{P_V^2 - Q_V^2}{4}\right),\\
&\geq (1-\alpha)V^2 + \alpha\left(I - \frac{P_V^2}{4}\right) + \alpha^2 \frac{P_V^2 - Q_V^2}{4},\\
&= (1-\alpha)V^2 + \alpha\left(I - (1-\alpha)\frac{P_V^2}{4} - \alpha\frac{Q_V^2}{4}\right),
\end{aligned}$$

où l'inégalité est devienne de (2.14). De plus, comme $0 \leq \alpha \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|(1-\alpha)V^2\frac{P_V^2}{4} - \alpha\frac{Q_V^2}{4}\right\|_F &\leq (1-\alpha)\left\|\frac{P_V^2}{4}\right\|_F + \alpha\left\|\frac{Q_V^2}{4}\right\|_F,\\
&= (1-\alpha)\left\|\frac{P_V \cdot P_V}{4}\right\|_F + \alpha\left\|\frac{Q_V \cdot Q_V}{4}\right\|_F,\\
&\leq (1-\alpha)\left\|\frac{P_V}{2}\right\|_F^2 + \alpha\left\|\frac{Q_V}{2}\right\|_F^2,\\
&\leq \frac{\|P_V\|^2}{4} \ \text{car } \|P_V\| = \|Q_V\|,\\
&= \delta^2 < 1.
\end{aligned}$$

Cela implique que (2.19). On obtient :

$$I - (1-\alpha)\frac{P_V^2}{4} - \alpha\frac{Q_V^2}{4} \succ 0,$$

et comme $V^2 \succeq 0$, alors $Q(\alpha) \succ 0$. Et d'après le Lemme 2.4.2, on a :

$$\det(X(\alpha)Z(\alpha)) = \det(Q(\alpha) + M(\alpha)) > 0.$$

En plus, puisque $X(0) = X \succ 0$ et $Z(0) = Z \succ 0$, Lemme 2.4.1 implique que $X(1) = X_+ \succ 0$ et $Z(1) = Z_+ \succ 0$. Ce qui achève la preuve. □

2.4.4 La convergence quadratique de la mesure de proximité

Lemme 2.4.4 ([14], Lemme 5.4). *Si* $\delta := \delta(X, Z; \mu) < \frac{1}{2}$ *et* $\lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}$, *alors :*

$$\delta(X_+, Z_+; \mu) \leq \frac{3\delta^2\sqrt{1-\delta^2}}{(2\sqrt{1-\delta^2} - 1)(1 + \sqrt{1-\delta^2})}.$$

Preuve. Puisque $\delta < 1$ et $\lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}$, du Lemme 2.4.3, on déduit que $X_+ \succ 0$ et $Z_+ \succ 0$. De (2.20) avec $\alpha = 1$, (2.18) et (2.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{X_+ Z_+}{\mu} &\sim V^2 + VP_V + \frac{P_V^2 - Q_V^2}{4} + M, \\ &= I + (V-I)^2(2V-I)^{-1} + \frac{P_V^2 - Q_V^2}{4} + M, \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $M = D_X V - V D_X + \frac{1}{2}(D_X D_Z - D_Z D_X)$ est une matrice anti-symétrique. D'autre part, d'après la définition de P_V, on a :

$$\begin{aligned} \frac{P_V^2}{4} &= V^2(I-V)^2(2V-I)^{-2}, \\ &= V^2(I-V)^2(2V-I)^{-1}(2V-I)^{-1}, \\ &\sim (V^2(2V-I)^{-1})((V-I)^2(2V-I)^{-1}). \end{aligned} \tag{2.22}$$

De (2.21) et (2.22), on obtient :

$$\begin{aligned} V_+^2 &\sim \frac{X_+ Z_+}{\mu}, \\ &\sim I + (V^2 + 2V - I)V^{-2}\frac{P_V^2}{4} - \frac{Q_V^2}{4} + M. \end{aligned} \tag{2.23}$$

De la condition $\lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \lambda_{min}(V^2 + 2V - I) &\geq \lambda_{min}(V)^2 + 2\lambda_{min}(V) - 1, \\ &> \frac{1}{4} + 1 - 1, \\ &> \frac{1}{4} > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, la matrice $V^2 + 2V - I$ est symétrique et définie positif. Par conséquent, d'après le Lemme 2.4.2 et (2.23), on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{min}((V_+)^2) &= \lambda_{min}\left(I + (V^2 + 2V - I)V^{-2}\frac{P_V^2}{4} - \frac{Q_V^2}{4} + M\right), \\ &\geq \lambda_{min}\left(I + (V^2 + 2V - I)V^{-2}\frac{P_V^2}{4} - \frac{Q_V^2}{4}\right), \\ &\geq \lambda_{min}\left(I + (V^2 + 2V - I)V^{-2}\frac{P_V^2}{4}\right) - \left\|\frac{Q_V^2}{4}\right\|_\infty^2, \\ &\geq 1 - \left\|\frac{Q_V^2}{4}\right\|_\infty^2, \\ &\geq 1 - \frac{1}{4}\|Q_V\|_\infty^2, \\ &= 1 - \delta^2, \end{aligned} \tag{2.24}$$

où la dernière égalité découle de (2.19). De l'hypothèse $\delta < \frac{1}{2}$ et (2.24), on déduit que

$$\lambda_{min}(V_+) > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}.$$

Maintenant on a :

$$\begin{aligned}
\delta(X_+, Z_+, \mu) &= \|(V_+ - (V_+)^2)(2V_+ - I)^{-1}\|_F, \\
&= \|V(I-V)(I+V)(I-V)^{-1}(2V-I)^{-1}\|_F, \\
&= \|V_+(2V_+ - I)^{-1}(V_+ + I)^{-1}(I - (V_+)^2)\|_F, \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i(V_+)(1-\lambda_i(V_+)^2)}{(2\lambda_i(V_+)-1)(1+\lambda_i(V_+))}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \frac{\lambda_{min}(V_+)}{(2\lambda_{min}(V_+)-1)(1+\lambda_{min}(V_+))}\left[\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i(V_+)^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{(2\sqrt{1-\delta^2}-1)(1+\sqrt{1-\delta^2})}\|I-(V_+)^2\|_F, \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

où les inégalités découlent du fait que la fonction $f(t) = \dfrac{t}{(2t-1)(t+1)}$ est décroissante pour tout $t > \frac{1}{2}$. Comme $(V^2 + 2V - I)V^{-2} = I + (2V-I)V^{-2} \leq 2I$, donc d'après (2.23), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|I-(V_+)^2\|_F &= \left\|(I-2V-V^2)V^{-2}\frac{P_V^2}{4} + \frac{Q_V^2}{4} - M\right\|_F, \\
&\leq 2\left\|\frac{P_V^2}{4}\right\|_F + \left\|\frac{Q_V^2}{4} - M\right\|_F, \\
&\leq 2\left\|\frac{P_V^2}{4}\right\|_F + \left\|\frac{Q_V^2}{4}\right\|_F, \\
&= 2\left\|\frac{P_V \cdot P_V}{4}\right\|_F + \left\|\frac{Q_V \cdot Q_V}{4}\right\|_F, \\
&\leq 2\frac{\|P_V\|^2}{4} + \frac{\|Q_V\|^2}{4}, \\
&\leq 3\delta^2, \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité devient de (2.19), et la seconde inégalité devient de l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{Q_V^2}{4} - M\right\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i\left(\frac{Q_V^2}{4} - M\right)\right]^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i\left(\frac{Q_V^2}{4} - M\right)^2\right], \\
&= \mathbf{Tr}\left[\left(\frac{Q_V^2}{4} - M\right)^2\right], \\
&= \mathbf{Tr}\left[\left(\frac{Q_V^2}{4}\right)^2 + \frac{Q_V^2}{4}M^T + M^T\frac{Q_V^2}{4} - MM^T\right], \\
&\leq \mathbf{Tr}\left[\left(\frac{Q_V^2}{4}\right)^2\right] = \left\|\frac{Q_V^2}{4}\right\|_F^2.
\end{aligned}
$$

comme $\frac{Q_V^2}{4}M^T + M^T\frac{Q_V^2}{4}$ est anti-symétrique et MM^T est semi-définie positif, on obtient la dernière inégalité. En remplaçant (2.26) dans (2.25), on obtient :

$$\delta(X_+, Z_+; \mu) \leq \frac{3\delta^2\sqrt{1-\delta^2}}{(2\sqrt{1-\delta^2}-1)(1+\sqrt{1-\delta^2})}.$$

Ce qui achève la preuve. □

Le corollaire suivant montre la convergence quadratique de la mesure de proximité avec le pas de Newton complet.

Corollaire 2.4.1. *Si $\delta < \frac{1}{2}$ alors :*

$$\delta(X_+, Z_+; \mu) \leq \frac{9-3\sqrt{3}}{2}\delta^2.$$

Preuve. Soit $\delta < \frac{1}{2}$ alors : $\sqrt{1-\delta^2} > \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, comme la fonction $f(t) = \dfrac{t}{(2t-1)(1+t)}$ est décroissante pour $t > \frac{1}{2}$, alors :

$$
\begin{aligned}
\delta(X_+, Z_+; \mu) \leq \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\delta^2}{(\frac{2\sqrt{3}}{2}-1)(1+\frac{\sqrt{3}}{2})} &= \frac{3\sqrt{3}\delta^2}{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}, \\
&= \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})\delta^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}, \\
&= \frac{3\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3+2-\sqrt{3})\delta^2}{(3-1)(4-3)}, \\
&= \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\delta^2}{2}, \\
&= \frac{9-3\sqrt{3}}{2}\delta^2 \simeq 1.332\delta^2.
\end{aligned}
$$

□

2.4.5 L'influence du nouveau itéré sur le saut de dualité

Dans le lemme suivant, on analyse l'influence du pas de Nesterov-Todd le saut de dualité.

Lemme 2.4.5 ([14], Lemme 5.5). *Soit $\delta =: \delta(X, Z; \mu)$, après le pas de Nesterov-Todd. On a :*

$$X_+ \bullet Z_+ \leq \mu(\delta^2 + n).$$

Preuve. En utilisant (2.18), (2.21) et l'orthogonalité des matrices D_X et D_Z, on obtient :

$$\begin{aligned}
X_+ \bullet Z_+ &= \mu \, \mathbf{Tr}\,(V_+^2), \\
&= \mu \, \mathbf{Tr}\,(V^2 + VP_V + D_X D_Z + D_Z D_X + M), \\
&= \mu \, \mathbf{Tr}\,(V^2 + VP_V + M), \\
&= \mu \, \mathbf{Tr}\,(I + (V - I)^2 (2V - I)^{-1} + M), \\
&= \mu \, \mathbf{Tr}\,(I + (V - I)^2 (2V - I)^{-1}),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du Lemme 2.4.2 et le fait que M est anti-symétrique. Maintenant, d'après (2.22) et l'égalité précédente, on déduit :

$$\begin{aligned}
X_+ \bullet Z_+ &= \mu \, \mathbf{Tr}\left(I + (2V - I)V^{-2}\frac{p_V^2}{4}\right), \\
&\leq \mu \, \mathbf{Tr}\left(I + \frac{P_V^2}{4}\right), \ \text{car } I + (2V - I)V^{-2} \leq I, \\
&= \mu\left(n + \frac{\|P_V\|_F^2}{4}\right), \\
&= \mu(n + \delta^2),
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

2.4.6 La mise à jour du paramètre μ

Par la suite on montre l'influence de la mise à jour du μ sur la nouvelle proximité après un pas de Nesterov-Todd complet.

Lemme 2.4.6 ([14], Lemme 5.6). *Soit $\delta = (X, Z; \mu) < \frac{1}{2}, \lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}$ et $\mu_+ = (1 - \theta)\mu$, où $0 < \theta < 1$. Alors $\lambda_{min}\left(\frac{V_+}{\sqrt{1-\theta}}\right) > \frac{1}{2}$ et*

$$\delta(X_+, Z_+; \mu_+) \leq \frac{\sqrt{3}(\sqrt{n}\theta + 3\delta^2)}{3\sqrt{1-\theta} + \sqrt{3}(1-\theta) - 2(1-\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

De plus, si $\theta = \dfrac{1}{27\sqrt{n}}$ et $n \geq 4$, alors on obtient $\delta(X_+, Z_+; \mu_+) < \frac{1}{2}$.

Preuve. Puisque $\lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}$, $\delta < \frac{1}{2}$ et d'après la preuve du Lemme 2.4.4, on obtient $\lambda_{min}(V_+) > \frac{1}{2}$. Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}\lambda_{min}\left(\frac{V_+}{\sqrt{1-\theta}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\lambda_{min}(V_+),\\ &> \frac{1}{2\sqrt{1-\theta}},\\ &> \frac{1}{2},\ \text{car}\ \frac{1}{\sqrt{1-\theta}} > 1,\ \forall 0<\theta<1.\end{aligned}$$

Afin de simplifier la notation, on définit :

$$\tilde{V}_+ = \frac{V_+}{\sqrt{1-\theta}}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}\delta(X_+, Z_+; \mu_+) &= \left\|\left(\frac{V_+}{\sqrt{1-\theta}} - \left(\frac{V_+}{\sqrt{1-\theta}}\right)^2\right)\left(\frac{2V_+}{\sqrt{1-\theta}} - I\right)^{-1}\right\|_F,\\ &= \|(\tilde{V}_+ - (\tilde{V}_+)^2)(2\tilde{V}_+ - I)^{-1}\|_F,\\ &= \|\tilde{V}_+(I-\tilde{V}_+)(I+\tilde{V}_+)(I+\tilde{V}_+)^{-1}(2\tilde{V}_+ + I)^2\|_F,\\ &= \|\tilde{V}_+(2\tilde{V}_+ - I)^{-1}(I+\tilde{V}_+)^{-1}(I-\tilde{V}_+^2)\|_F,\\ &= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i(\tilde{V}_+)(1-\lambda_i(\tilde{V}_+)^2)}{(2\lambda_i(\tilde{V}_+)-1)(1+\lambda_i(\tilde{V}_+))}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\\ &\leq \frac{\lambda_{min}(\tilde{V}_+)}{(2\lambda_{min}(\tilde{V}_+)-1)(1+\lambda_{min}(\tilde{V}_+)-1))}\|I-\tilde{V}_+^2\|_F,\\ &= \frac{\lambda_{min}(V_+)\|(1-\theta)I - V_+^2\|_F}{\sqrt{1-\theta}(2\lambda_{min}(V_+)-\sqrt{1-\theta})(\sqrt{1-\theta}+\lambda_{min}(V_+))},\\ &\leq \frac{\sqrt{1-\delta^2}\|(1-\theta)I - V_+^2\|_F}{\sqrt{1-\theta}(2\sqrt{1-\delta^2}-\sqrt{1-\theta})(\sqrt{1-\theta}+\sqrt{1-\delta^2})},\end{aligned} \tag{2.27}$$

où la première inégalité est due à la fonction $f(t) = \dfrac{t}{(2t-1)(1+t)}$ pour $t > \frac{1}{2}$ est décroissante et la deuxième inégalité découle de (2.24) et le fait que la fonction :
$h(t) = \dfrac{t}{(2t-\sqrt{1-\theta})(t+\sqrt{1-\theta})}$ est décroissante pour $t > \dfrac{\sqrt{1-\theta}}{2}$.

De $\delta < \frac{1}{2}$, on a $\sqrt{1-\delta^2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors

$$h(\sqrt{1-\delta^2}) \leq h(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3(1-\theta)}-2(1-\theta)}.$$

En utilisant (2.26), on obtient :

$$\begin{aligned}\|(1-\theta)I - V_+^2\|_F &\leq \theta\|I\|_F + \|I - V_+^2\|_F,\\ &\leq \sqrt{n}\theta + 3\delta^2.\end{aligned}$$

En remplaçant ces deux bornes dans (2.27), on obtient :

$$\delta(X_+, Z_+; \mu_+) \leq \frac{\sqrt{3}(\sqrt{n}\theta + +\delta^2)}{3\sqrt{1-\theta} + \sqrt{3}(1-\theta) - 2(1-\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ceci complète la preuve de la première partie du lemme.

Pour prouver la deuxième partie, on considère $g(t) = \dfrac{1}{3t + \sqrt{3}t^2 - 2t^3}$ avec $0 < t < 1$, qui est décroissante sur l'intervalle $]0, 1[$.
Maintenant, on suppose que $\theta = \dfrac{1}{27\sqrt{n}}$, $n \geq 4$. Alors, avec $t = \sqrt{1-\theta} \geq \sqrt{\frac{53}{54}}$, on obtient $g(\sqrt{1-\theta}) \leq g\left(\sqrt{\frac{53}{54}}\right) \simeq 0.3667$. Donc, pour $\delta < \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta(X_+, Z_+; \mu_+) &\leq g(\sqrt{1-\theta})\sqrt{3}(\sqrt{n}\theta + 3\delta^2), \\ &\leq 0.3667\sqrt{3}\left(\frac{1}{27} + \frac{3}{4}\right), \\ &\simeq 0.4998 < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 2.4.1. *Lemme 2.4.6 montre que l'algorithme 2.4.2 est bien défini, dans le sens que les conditions $X \succ 0$, $Z \succ 0$, $\lambda_{min}(V) > \frac{1}{2}$ et $\delta(X, Z; \mu) < \frac{1}{2}$ sont maintenues dans toutes les itérations.*

2.4.7 Analyse de la complexité

Le lemme suivant donne une borne supérieure pour le nombre total d'itérations produites par cet algorithme.

Lemme 2.4.7 ([14], Lemme 5.7)**.** *On suppose que X^0 et Z^0 sont strictement réalisables, $\mu^0 = \dfrac{X^0 \bullet Z^0}{n}$ et $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) < \frac{1}{2}$. De plus, soient X^k et Z^k être l'itération obtenue après k itération. Puis l'inégalité $X^k \bullet Z^k \leq \epsilon$ est satisfait si :*

$$k \geq \frac{1}{\theta}\, log\left(\frac{\mu^0(n + \frac{1}{4})}{\epsilon}\right).$$

Preuve. D'après le Lemme 2.4.5, on obtient :

$$X^k \bullet Z^k \leq \mu^k\left(n + \frac{1}{4}\right) = (1+\theta)^k \mu^0\left(n + \frac{1}{4}\right).$$

Puis l'inégalité $X^k \bullet Z^k \leq \epsilon$ satisfaite si :

$$(1-\theta)^k \mu^0\left(n + \frac{1}{4}\right) \leq \epsilon.$$

En prenant des logarithmes, on obtient :

$$k \log(1-\theta) + \log \mu^0 \left(n + \frac{1}{4}\right) \leq \log \epsilon.$$

Puisque $-\log(1-\theta) \geq \theta$ pour $\theta < 1$, alors l'inégalité ci-dessus est valable si :

$$k \geq \frac{1}{\theta} \log \left(\frac{\mu^0 (n + \frac{1}{4})}{\epsilon} \right).$$

Cela complète la preuve. $\square$

Théorème 2.4.1. *On suppose que* $X^0 = Z^0 = I$. *De plus, soient* $\theta = \dfrac{1}{27\sqrt{n}}$, $n \geq 4$, *alors l'algorithme 2.4.2 nécessite au plus :*

$$O\left(\sqrt{n} \log \left(\frac{n}{\epsilon}\right)\right)$$

itérations.

Preuve. De $X^0 = Z^0 = I$, on obtient $\mu^0 = 1$. Par conséquent, en utilisant le Lemme 2.4.7 et $\theta = \dfrac{1}{27\sqrt{n}}$, $n \geq 4$, on obtient le résultat. $\square$

Chapitre 3

Tests numériques

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux expérimentations numériques issues de l'application de l'algorithme 2.4.2 sur des problèmes convexes semi-définis. Nous avons utilisé le Langage MATLAB 8.4 (R2014a) sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU M460 (2.53 GHz) avec 6,00 Go RAM. On note par :

- $\delta(X, Z; \mu)$: la mesure de proximité qui est associée à l'algorithme 2.4.2.
- (X^0, y^0, Z^0) : un point initial strictement réalisable et vérifie $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) \leq \frac{1}{2}$ pour l'algorithme 2.4.2, avec $\mu^0 = \dfrac{X^0 \bullet Z^0}{n} > 0$ et $\theta = \dfrac{1}{27\sqrt{n}}$.
- (X^*, y^*, Z^*) : la solution optimale du problème primal (P) et dual (D), respectivement.
- **iter** : le nombre des itérations produites par l'algorithme 2.4.2.
- **CPU** : le temps d'exécution d'un algorithme en seconde.

3.1 Exemples à taille fixe

Exemple 1. *[30]*
On considère le problème SDP, avec $m = 3$, $n = 5$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La solution initiale primale-duale strictement réalisable est donnée par :

$$X^0 = I,\ Z^0 = I \ et\ y^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pour cet exemple, on prend $\epsilon = 10^{-5}$, $\mu^0 = 1$ *et* $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) = 0 < \frac{1}{2}$.
La solution optimale primale-duale obtenue est :

$$X^* = \begin{bmatrix} 0.0714 & -0.0718 & 0.0168 & 0.0649 & -0.1583 \\ -0.0718 & 0.0724 & -0.0183 & -0.0602 & 0.1676 \\ 0.0168 & -0.0183 & 0.0103 & -0.0084 & -0.0772 \\ 0.0649 & -0.0602 & -0.0084 & 0.1481 & 0.0056 \\ -0.1583 & 0.1676 & -0.0772 & 0.0056 & 0.6021 \end{bmatrix},$$

$$Z^* = \begin{bmatrix} 1.4338 & 0.5754 & -0.0295 & -0.4043 & 0.2169 \\ 0.5754 & 1.0956 & 0.3401 & 0.2169 & -0.1121 \\ -0.0295 & 0.3401 & 1.1874 & 0.2169 & 0.0478 \\ -0.4043 & 0.2169 & 0.2169 & 0.2831 & -0.1415 \\ 0.2169 & -0.1121 & 0.0478 & -0.1415 & 0.0957 \end{bmatrix},$$

$$y^* = [0.8585, 1.0937, 0.7831]^T.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est egale à -1.0957.

- **Résultats numériques (Exemple 1)**

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus pour les différents tailles testées.

iter	CPU
787	1.1006

Exemple 2.
Soit le problème (SDP) *où,* $m = 3, n = 5$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solution initiale primale-duale strictement réalisable est donnée par :

$$X^0 = I,\ Z^0 = I \ et\ y^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pour cet exemple, on prend $\epsilon = 10^{-5}$, $\mu^0 = 1$ *et* $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) = 0 < \frac{1}{2}$.
La solution optimale primale-duale obtenue est :

$$X^* = \begin{bmatrix} 1.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3333 \end{bmatrix},$$

$$Z^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; y^* = \begin{bmatrix} -0.3333 \\ -3.6667 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est egale à -15.3333.

- **Résultats numériques (Exemple 2)**

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus pour les différents tailles testées.

iter	**CPU**
787	0.7182

Exemple 3.
On considère le problème SDP, *avec* $m = 3$, $n = 6$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solution initiale primale-duale strictement réalisable est donnée par :

$$X^0 = I, \; Z^0 = I \; et \; y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pour cet exemple, on prend $\epsilon = 10^{-5}$, $\mu^0 = 1$ *et* $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) = 0 < \frac{1}{2}$.

La solution optimale primale-duale obtenue est :

$$X^* = \begin{bmatrix} 1.7811 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7396 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9585 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5207 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est egale à -6.

- **Résultats numériques (Exemple 3)**

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus pour les différents tailles testées.

iter	**CPU**
875	0.8647

Exemple 4.
On considère le problème SDP, *avec* $m = 3$, $n = 5$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solution initiale primale-duale strictement réalisable est donnée par :

$$X^0 = I, \; Z^0 = I \; et \; y^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pour cet exemple, on prend $\epsilon = 10^{-5}$, $\mu^0 = 1$ *et* $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) = 0 < \frac{1}{2}$.
La solution optimale primale-duale obtenue est :

$$X^* = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; Z^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$y^* = [-0.0001, -1, -1]^T.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est egale à -6.

- **Résultats numériques (Exemple 4)**

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus pour les différents tailles testées.

iter	CPU
663	0.5678

Exemple 5.
Soit $m = 3, n = 5$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solution initiale primale-duale strictement réalisable est donnée par :

$$X^0 = I,\ Z^0 = I \ et \ y^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pour cet exemple, on prend $\epsilon = 10^{-5}$, $\mu^0 = 1$ et $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) = 0 < \frac{1}{2}$.
La solution optimale primale-duale obtenue est :

$$X^* = \begin{bmatrix} 1.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}, Z^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y^* = \begin{bmatrix} -0.3333 \\ -1.3333 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est egale à -6.6667.

- **Résultats numériques (Exemple 5)**

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus pour les différents tailles testées.

iter	CPU
787	0.8669

3.2 Exemple à taille variable

Exemple 6.
Soient $n = 2m$, $b(i) = 2,\ i = 1,\dots,m$, *et*

$$A_i(j,k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = k \quad \text{ou } j = k = i + m, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$C(i,j) = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \quad \text{et } i \leq m, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La solution initiale primale-duale strictement réalisable est donnée par :

$$X^0(i,j) = \begin{cases} 2 - \gamma & \text{si } i = j = 1,\dots,m, \\ \gamma & \text{si } i = j = m+1,\dots,n, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

$$Z^0(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} - 1 & \text{si } i = j = 1,\dots,m, \\ \frac{1}{\gamma} & \text{si } i = j = m+1,\dots,n, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

$$y^0(i) = -\frac{1}{\gamma},\ i = 1,\dots,m,$$

avec $\gamma = \dfrac{(4 - \sqrt{8})}{2}$,
Pour cet exemple, on prend $\epsilon = 10^{-4}$.
La solution optimale primale-duale obtenue est :

$$X^*(i,j) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j = 1,\dots,m, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

$$Z^*(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = m+1,\dots,n, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

$$y^*(i) = -1,\ i = 1,\dots,m,$$

La valeur optimale pour les deux problèmes est egale à $-2m = -n$.

- **Résultats numériques (Exemple 6)**

Le tableau suivant présente les résultats numériques obtenus pour les différents tailles testées.

(m,n)	$\delta(X^0,Z^0;\mu^0)$	**iter**	**CPU**
$(5,10)$	$4.9651\ e^{-16}$	979	1.3427
$(25,50)$	$2.4825\ e^{-15}$	2500	7.8853
$(50,100)$	$3.5108\ e^{-15}$	3725	48.7687
$(100,200)$	$4.9651\ e^{-15}$	5534	282.6994
$(200,400)$	$7.0217\ e^{-15}$	8203	$2.1706\ e^{3}$

Conclusion

Dans ce travail, on s'intéresse à résoudre le problème semi-définie (SDP) par la méthode de trajectoire centrale (TC) basée sur une nouvelle direction de recherche, on utilise la transformation algébrique présentée par **Kheirfam** en **2016** [14]. On introduit ψ à l'équation de centralité pour obtenir des nouvelles directions cherchés et nouvelle mesure de proximité.

On a développé un algorithme primal-dual de points intérieurs à petit pas, on obtient une meilleure complexité polynomiale qui est de l'ordre $O\left(\sqrt{n}\log\left(\frac{n}{\epsilon}\right)\right)$, avec les paramètres qui ont un rôle important dans l'algorithme : $\theta = \dfrac{1}{27\sqrt{n}}, \beta = \frac{1}{2}$ et la mesure de proximité $\delta(X^0, Z^0; \mu^0) < \frac{1}{2}$ et $\lambda_{min}\left(\sqrt{\dfrac{X^0 Z^0}{\mu^0}}\right) > \frac{1}{2}$, justifient la difficulté (la symétrisation de la direction, le point initiale ...) de cette méthode.

Finalement, on applique l'algorithme proposé sur quelques problèmes semi-définie confirment et montrent l'efficacité de nos résultats théoriques.

Bibliographie

[1] M. Achache. A new primal-dual path-following method for convex quadratic programming. Computational and Applied Mathematics, (25) pp. 97-110, (2006).

[2] M. Achache, L. Guerra. A full-Nesterov-Todd-step primal-dual interior point algorithm for convex quadratic semidefinite optimization. Computational and Applied Mathematics,(231) : 581-590, (2014).

[3] F. Alizadeh, J. P. A. Haeberly and M. L. Overton, Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming : Convergence rates, stability and numerical results, SIAM J. Optim. 8 (1998) 746-768.

[4] B. K. Choi, G. M. Lee, On complexity analysis of the primal-dual interior-point method for semidefinite optimization problem based on a new proximity function, Nonlinear Analysis 71 (2009) 2628-2640.

[5] J. P. Crouzeix, B. Merikhi, A logarithm barrier method for semidefinite programming, RAIRO. Oper. Res. 42 (2008) 123-139.

[6] Zs. Darvay, New interior point algorithms in linear programming, Babeş-Bolyai University (2003) 51-92.

[7] Zs. Darvay, I. M. Papp and P. R. Takács, Complexity analysis of a full-Newton step interior-point method for linear optimization, Period. Math. Hungar. 73(1) (2016) 27–42.

[8] M. El Ghami, C. Roos and T. Steihauga, A generic primal-dual interior-point method for semidefinite optimization based on a new class of kernel functions, Optimization Methods and Software. 25 (3) (2010) 387-403.

[9] M. Halicka, E. De Klerk and C. Roos, On the convergence of the central path in semidefinite optimization, SIAM J. Optim. 12(4) (2002) 1090–1099.

[10] C. Helmberg, F. Rendl, R. J. Vanderbei and H. Wolkowicz, An interior-point method for semidefinite programming, SIAM J. Optim. 6 (1996) 342-361.

[11] R.A. Horn, R.J. Charles.Matrix analysis, Compridge University Press, UK, (1986).

[12] B. Jansen, C. Roos, T. Terlaky, J. Ph. Vial, Primal-dual algorithm for linear programming based on the logarithmic barrier method. Journal of optimization theory and applications, 83 : 1-26, (1994).

[13] N. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica. 4 (1984) 373-395.

[14] B. Kheirfam, New complexity analysis of a full Nesterov-Todd step interior-point method for semidefinite optimization, Asian-European Journal of Mathematics. (2016).

[15] M. Kojima, M. Shida, S. Shindoh. Search directions in the SDP and monotone SDLCP : Generalization and inexact computation. Mathematical Programming, 85 : 51-80, (1999).

[16] M. Kojima, S. Shindoh and S. Hara, Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices, SIAM J. Optim. 7 (1997) 86–125.

[17] E. De Klerk, Aspects of Semidefinite Programming : Interior Point Algorithms and Selected Applications (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002).

[18] E. De Klerk. Interior point methods for semidefinite programming. Master of Science in the Faculty of Enginnering University of Pretoria, (1997).

[19] E. De Klerk, C. Roos, T. Terlaky. On primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming. Mathematical programming, 137-157, (1998).

[20] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii, Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming (SIAM, Philadelphia, PA, 1994).

[21] Y. E. Nesterov and M. J. Todd, Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones, SIAM J. Optim. 8 (1998) 324–364.

[22] Y. E. Nesterov and M. J. Todd, Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming, Math. Oper. Res. 22(1) (1997) 1–42.

[23] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky. New complexity analysis of the primal-dual method for semidefinite optimization based on the Nesterov-Todd direction. Journal of optimization theory and applications ; vol.109, no.2, pp. 327-343, (2001).

[24] C. Roos, T. Terlaky, J. Ph. Vial, Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach. John-Wiley. Sons, Chichester, UK, (1997).

[25] J. F. Sturm, S. Zhang. Symmetric primal-dual path following algorithms for semidefinite programming. Technical Report 9554/A, Tinbergen Institute, Erasmus University Rotterdam, (1995).

[26] M. J. Todd. A study of search directions in primal-dual interion-point methods for semidefinite programming. Working paper, school of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca. New-York 14853, (1998).

[27] M. J. Todd, K. C. Toh, R. H. Tütüncü. On the Nesterov-Todd direction in semidefinite programming. Mathematical programming. Copyright(c) by the Society for Industial and Applied Mathematics. SIAM Journal on Optimization, 8 : 769-796, (1998).

[28] I. Touil, D. Benterki, A. Yassine, A feasible primal-dual interior point method for linear semidefinite programming, J. Comput. Appl. Math. 312 (2016) 216-230.

[29] G. Q. Wang and Y. Q. Bai, A new primal-dual path-following interior-point algorithm for semidefinite optimization, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009) 339–349.

[30] G. Q. Wang, Y. Q. Bai, C. Roos, Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Semidefinite Optimization Based on a Simple Kernel Function, Journal of Mathematical Modelling and Algorithms. 4 (2005) 409-433.

[31] H. Wolkowicz, R. Saigal and L. Vandenberghe, Handbook of Semidefnite Programming. Theory, Algorithms, and Applications (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000).

• ملخص:

في هذه المذكرة، اهتممنا بحل مسالة البرمجة الخطية نصف معرفة (SDP) باستعمال طريقة المسار المركزي الذي يعتمد على الاتجاهات الجديدة و التي تتمثل في تقديم دالة مصفوفة ψ للمعادلة المركزية. $XZ = \mu I$.
من خلال دراسة Kheirfam, $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ الذي اقترح خوارزمية ذات خطوة صغيرة، حيث في كل تكرار نستعمل الخطوة الكاملة لنيوتن ومقياس القرب للحصول على حل تقريبي.
يعتمد تحليلنا على مخطط Nesterov-Todd.
هذه الدراسة متبوعة باختبارات عددية لاظهار فعالية هذه الخوارزمية.

• الكلمات المفتاحية:

برمجة نصف معرفة، طريقة المسار المركزي، الاتجاهات الجديدة، خوارزمية ذات خطوة صغيرة، تعقيد حدودي.

• **Résumé :**

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la résolution du problème semi-définie (SDP) par la méthode de trajectoire centrale (TC) basée sur une nouvelle direction cherchée qui consiste à introduire une fonction matricielle ψ à l'équation de centralité $XZ = \mu I$.
Par l'étude de Kheirfam ou $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ qui a proposer un algorithme à petit pas, à chaque itération on utilise la pas de Newton complet et une mesure de proximité pour obtenir une solution approximative. Notre analyse est basée sur le schéma de Nesterov-Todd.
Cette étude est suivie par des tests numériques pour montrer l'efficacité de l'algorithme proposé.

• **Mots clés :**

Programmation semi-définie, Méthode de trajectoire centrale, Nouvelle direction cherchée, Algorithme à petit pas, Complexité polynomiale.

• **Abstract:**

In this memory, we are interested to solve the linear semidefinite programming broblem (SDP) by a central path method (TC) based on new search direction which consists in introducing a matrix function ψ to the equation of centrality $XZ = \mu I$.
By the study of Kheirfam, $\psi(t) = t - \sqrt{t}$ who proposed a small-update algorithm, we use at each iteration the full-Newton-step and a suitable proximity measure to obtain an approximate solution. Our analysis is based on the Nesterov-Todd scheme.
This study is followed by numerical tests to show the efficiency of these algorithm.

• **Keywords:**

Semidefinite programming, Central path method, New search direction, Small-update Algorithm, Polynomial complexity.