REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI - BBA

MEMOIRE

Présenté à la faculté de Mathématiques et informatiques
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Option : Mathématiques Appliquées

Par: ZOUAOU ASMA
ET
SATOURI LYNDA

THÈME:

Théorie du Contrôle Optimal-Existence de la solution optimale.

soutenu le : / 08 / 2020
devant le jury :

Président :		Pr
Encadreur :	Dr. Alia Ishak	Dr
Examinateur :		

Remerciements

Nous voulons d'abord à remerciement notre directeur de recherche : monsieur Alia Ishak. qui nous a fait l'honneur d'accepter l'encadrement de ce travail dont il a guidé la réalisation. Il nous accueilli et conseillé avec une grand amabilité, qu'il nous soit permis de lui manifester toute nos considération.

Nous voudrions exprimer les membres du jury pour leur présence, pour leur lecture attentive de notre thèse aussi que pour les remarque qu'ils nous a adressons lors de cette soutenance afin d'améliorer notre travail.

Table des matières

Introduction

La théorie du contrôle optimal peut être décrite comme l'étude des stratégies pour influencer de manière optimale un système d'état $X(.)$ avec une dynamique évoluant dans le temps selon une équation différentielle ordinaire (EDO). L'influence sur le système est modélisée comme une fonction $u(.)$, appelé le contrôle (ou la commande) qui est autorisé(e) à prendre des valeurs dans un espace métrique séparable (U, d) appelé l'espace d'action. Pour qu'un contrôle soit optimal, il doit minimiser (ou maximiser) une fonctionnelle d'objective, qui dépend globalement de l'état contrôlé du système $X(.)$ et du contrôle $u(.)$ sur un intervalle de temps $[0, T]$. En générale ce problème d'optimisation est de dimension infinie, puisque nous optimisons une fonctionnelle sur un espace de fonctions qui est un espace de dimension infinie.

Comme pour tout problème d'optimisation, lorsque on est face à un problème de contrôle optimal on est amené à répondre à deux questions fondamentales : 1) La première question qui se pose est le problème d'existence, i.e. existe-il une fonction $\bar{u}(.)$ qui minimise (ou maximise) la fonctionnelle objective ? Dans le cas où la réponse à cette question est positive, il est intéressant de se poser le problème d'unicité de la solution optimale. 2) Si l'existence d'une solution au problème est assurée, on peut alors mener une étude "quantitative" qui tend à caractériser la solution optimale via des conditions d'optimalités nécessaires et suffisantes.

L'objet de ce mémoire se focalise essentiellement sur la question d'existence pour une classe de problèmes de contrôle optimal assez générale. Plus précisément, notre mémoire comporte trois chapitres. Voici un bref résumé sur chacun d'eux :

1. **Quelques Rappels :** Ce chapitre est un bref rappel sur les notions en optimisation et en analyse fonctionnelle utilisées dans ce mémoire. On commence par quelques notions d'optimisation statiques, puis on rappelle le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz, le Théorème de Arzela-Ascoli, le Lemme de Mazur et on termine cette partie avec un petit rappel sur le Théorème de Banach–Saks.

2. **Problèmes de contrôle optimal** : Dans ce chapitre, après avoir présenté quelques exemples pratiques de problèmes de contrôle optimal déterministes, nous donnons la

formulation mathématique générale du problème et un résultat d'existence et unicité de la solution de l'équation d'état contrôlée.

3. **Existence de la solution optimal :** Dans ce chapitre, qui représente la partie principale de ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence. Nous considérons essentiellement le cadre où des conditions de convexité sont imposées. Nous énonçons trois théorèmes indépendants assurant l'existence du contrôle optimal dans deux contextes différents : Deux théorèmes sont énoncés dans le cas non-linéaire et un théorème dans le cas linéaire-convexe. En particulier, nous avons choisie des démonstrations qui font appel aux techniques d'analyse fonctionnelles à base de topologie faible. Ces démonstrations sont parmi les plus riches et les plus instructives que nous ayons trouvées dans la littérature existante.

Chapitre 1

Quelques Rappels

Ce chapitre contient quatre sections dans lesquelles nous rappelons quelques définitions/résultats classiques qui seront utilisés tout au long de ce mémoire.

1.1 Optimisation statique

1.1.1 Définitions élémentaires

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel normé (de dimension non nécessairement finie), et considérons le problème de minimisation :*

$$\phi := \inf_{x \in S} \varphi(x). \tag{1.1.1}$$

Où $x \in E$ est la variable de contrôle, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est la fonction objective, et $S \subset E$ est l'ensemble des décisions possibles.

Le but de ce paragraphe est de rappeler le traitement général du problème d'optimisation ci-dessus.

a) La première question qui se pose est le problème d'existence :

$$\exists ? x^* \in S : \phi := \varphi(x^*) \tag{1.1.2}$$

Dans le cas où la réponse à cette question est positive, il est intéressant de se poser le problème d'unicité du minimum.

b) Si l'existence d'une solution au problème (1.1.1) est assurée, on peut alors écrire des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre (d'Euler). Dans le cas non contraint (S = E), la condition nécessaire se réduit à la condition de nullité du gradient au point de minimum.

Dans ce mémoire, nous nous somme focalisé sur la première question. Avant de procéder à l'énoncé précis de quelques résultats d'existence classiques, rappelons les définitions et résultats suivant :

• Un sous-ensemble S d'un espace métrique est compact, si et seulement si, de toute suite de S on peut extraire une sous-suite convergente dans S.

• Une fonction φ définie sur un espace métrique E et à valeurs réelles est semi-continue inférieurement, si et seulement si, $\forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \to x$

$$\lim_{n\to+\infty} \inf \varphi\left(x_n\right) \geq \varphi\left(x\right), \qquad \text{pour tous } x \in E.$$

• Une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point $x \in E$ s'il existe une application linéaire $D\varphi\left(x\right)$ de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + D\varphi(x) \cdot h + \|h\|\varepsilon(h),$$

Où $\varepsilon : E \to \mathbb{R}$ est une fonction qui tend vers zéro quand $\|h\| \to 0$.

• Un sous-ensemble S d'un espace vectoriel est convexe, si et seulement si, pour tout $x, y \in S$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$.

• Soit S un ensemble convexe. Une fonction $\varphi : S \to \mathbb{R}$ est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si, pour tout $x, y \in S$ et $\lambda \in [0,1]$

$$\varphi\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leq (\text{resp.} <)\ \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

1.1.2 Quelques résultats d'existence Classiques

Théorème 1.1.1 *Supposons que la fonction φ est semi-continue inférieurement sur S et que l'ensemble S est compact. Alors le problème* (1.1.1) *admet une solution, i.e. il existe x^* $\in S$ tel que $\phi = \varphi(x^*)$.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite minimisant pour le problème (1.1.1), i.e. $x_n \in S$ pour tout n et $\varphi(x_n) \to \phi$. Comme S est compact, on peut extraire une sous suite $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\geq 0} \subset S$ qui converge vers un élément $x^* \in S$. On a bien évidement $\varphi(x^*) \geq \phi$, donc on va montrer que $\varphi(x^*) \leq \phi$ pour obtenir l'égalité.

Comme φ est semi-continue inférieurement en $x^* \in S$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} \inf \varphi(x_k) \geq \varphi(x^*) \quad (*)$$

D'autre part comme $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de $\{x_n\}_{n\geq 0}$ on a

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(x_k) = \phi$$

Donc

$$\lim_{k\to+\infty} \inf \varphi(x_k) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_k) \geq \varphi(x^*) \ \ (**)$$

De $(*)$ et $(**)$ on conclut : $\phi \geq \varphi(x^*)$. ■

Toutefois, en pratique, ce théorème est difficile à appliquer quand l'espace E est de dimension infinie. En dimension finie, les ensembles compacts s'identifient aux parties fermées bornées, et le théorème ci-dessus est souvent utilisé sous la forme suivante.

Théorème 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et S un sous-ensemble fermé de E. Supposons que φ est une fonction semi-continue inférieurement de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \{\varphi(x) + \chi_S(x)\} = +\infty \ \text{ où } \chi_S(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si } x \in S \\ +\infty \ \text{si } x \notin S \end{cases}. \tag{1.1.3}$$

Alors le problème (1.1.1) *admet une solution.*

Preuve. Comme pour le preuve précédente, on commence par considérer une suite minimisant $(x_n)_{n\in N}$ pour le problème (1.1.1).

1. Commençons par montrer que la suite $(x_n)_{n\in N}$ est bornée. Si elle ne l'était pas, on peut en extraire une sous-suite $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S qui tend vers l'infini. On a alors, d'après la définition (1.1.3)

$$\phi = \lim_{k\to+\infty} \varphi(x_k) = +\infty.$$

Ce qui est exclu par le fait que φ prend des valeurs dans IR.

2. Comme $(x_n)_{n\in N}$ est bornée, soit $M := \sup_n |x_n|$, et $S_M := S \cap \{x \in E,\ \ |x| \leq M\}$. Comme E est de dimension finie et S est fermé, il est clair que l'ensemble S_M est un fermé-borné (donc un compact) de E. Par ailleurs, comme $x_n \in S_M$ pour tout n, on déduit que $\phi = \sup_{x\in S_M} \varphi(x)$. Le résultat d'existence est maintenant obtenu par application directe du théorème précédent. ■

Nous terminons ce paragraphe par une condition suffisante pour l'unicité d'une solution au problème de minimisation (1.1.1), si l'existence est satisfaite.

Théorème 1.1.3 *Si l'ensemble S est convexe et la fonction φ est strictement convexe, le problème de minimisation* (1.1.1) *admet au plus une solution.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions x_1^* et x_2^* pour le problème (1.1.1), et soit $\lambda_0 \in [0, 1]$ tel que $x^* = \lambda_0 x_1^* + (1 - \lambda_0)\, x_2^*$. Noter que $x^* \in S$ (puisque S est convexe).

Comme φ est une fonction strictement convexe on a :

$$\varphi\,(x^*) < \lambda_0 \varphi(x_1^*) + (1 - \lambda_0)\, \varphi(x_2^*).$$

Puisque x_1^* et x_2^* sont deux solution optimales alors :

$$\varphi\,(x^*) < \lambda_0 \phi + (1 - \lambda_0)\, \phi = \phi$$

Qui est une contradiction. Donc il existe au plus une solution. ■

1.2 Théorie de Cauchy-Lipschitz

1.2.1 Existence et unicité d'une solution d'un EDO

Soient X un espace de Banach réel, U un ouvert de $\mathbb{R} \times X$, et $F : U \to X$ une application continue, avec : $U = I \times I'$.

Une application différentiable x d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans X est une solution de l'équation différentielle $\dot{x}\,(t) = F\,(t, x\,(t))$ définie par F, si pour tout t dans I, le couple $(t, x\,(t))$ appartient à U et $x'\,(t) = F\,(t, x\,(t))\,.$

Une solution $x : I \to X$ de cette équation différentielle est dite maximale s'il n'existe pas de solution $v : J \to X$ de cette équation différentielle, où J est un intervalle ouvert contenant strictement I, telle que $v_{|I} = x$.

L'application F est dite semi-Lipschitzienne si pour tous (t_0, x_0) dans U, il existe $c \geq 0$, J un intervalle ouvert contenant t_0 et W un voisinage ouvert de x_0 dans X, tels que le cylindre $J \times W$ soit contenu dans U et que pour tout $t \in J$ l'application de W dans X définie par $x \to F(t, x)$ soit c-Lipschitzienne. (Il est important que c ne dépende pas du temps $t \in J$).

- On appelle condition initiale une égalité de la forme $x(t_0) = x_0$ avec $(t_0, x_0) \in U$.
- On appelle problème de Cauchy le système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Résoudre le problème de Cauchy (localement) revient à trouver un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction u de classe C^1sur J satisfaisant (1.2.1).

Le résultat suivant concerne le problème de Cauchy pour l'équation différentielle définie par $F : U \to X$, c'est-à-dire, étant donné $(t_{0,}x_0) \in U$, assurer l'existence et l'unicité locale d'une solution $u = u_{t_0,x_0}$ de l'équation différentielle $x' = F(t, x)$, vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Existence et unicité locale

Théorème 1.2.1 *Soient X un espace de Banach réel, U un ouvert de $\mathbb{R} \times X$ et $F : U \to X$ une application continue semi-Lipschitzienne.*

(1) (Existence et unicité des solutions) Pour tout (t_0, x_0) dans U, il existe une et une seule solution maximale $u_{t_0,x_0} : I_{t_0,x_0} \to X$ de l'équation différentielle définie par F valant x_0 à l'instant t_0.

(2) (Régularité) S'il existe $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que F soit de classe C^k alors toute solution de l'équation différentielle définie par F est de classe C^{k+1}.

Preuve. Voir [1] . ■

Existence globale

On peut parfois montrer que toutes les solutions maximales sont globales. C'est le cas si la fonction F est définie sur X tout entier et si elle est globalement Lipschitzienne : car alors il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition, ni de domaine de validité de sa constante de Lipschitz.

Théorème 1.2.2 *On suppose $F \in C\ \ (I \times X, X)$ et globalement Lipschizienne par rapport à x. Alors, quel que soit $(t_0, x_0) \in I \times X$, il existe (un unique) $u \in C^{\,1}(I \times X)$ solution de* $(1.2.1)$.

1.3 Quelques résultats en Analyse fonctionnelle

Dans cette partie nous rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle classiques. Nous commençons par le fameux théorème d'Arzela-Ascoli. Dans un espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées. Dans un espace vectoriel topologique séparé, les parties relativement compactes restent bornées et fermées, mais la réciproque est fausse. Le théorème Arzela-Ascoli traite du cas de l'espace des fonctions continues. Soit $C(K, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues d'un espace métrique compact (K, d) et à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^n$ et soit A un sous ensemble de $C(K, \mathbb{R}^n)$.On muni $C(K, \mathbb{R}^n)$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. (i.e. $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$).

Définition 1.3.1 (Ensemble équicontinue) *A est dit équicontinue si :* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$ $\forall x_1, x_2 \in K,\ \forall f \in A,$

$$d(x_1, x_2) \leq \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.3.2 (Ensemble relativement compact) *A est dit relativement compact si $\overline{A}$ (adhérence de A) est compacte.*

Théorème 1.3.1 (Théorème de Heine) *Soit $f \in C((K, d), (Y, d'))$, avec (K, d) un espace métrique compact et (Y, d') un espace métrique quelconque. Alors f est uniformément continue.*

Théorème 1.3.2 (Arzela-Ascoli) *Soit (K, d) un espace métrique compact et A une partie de l'espace de Banach $(C(K, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) La partie A est équicontinue et bornée.
2) La partie A est relativement compacte.

Preuve. (i) Supposons que A soit équicontinue et bornée.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, et soit $\varepsilon > 0$. Comme l'ensemble $\{f_n \,; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue sur un compact K, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in K$

$$d(x,y) \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} \|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \varepsilon \\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

D'autre part, on a :

$$K = \underset{x\in K}{\cup} B_K(x,\delta).$$

Comme K est compact, d'après la propriété de Borel-Lebesgue il existe $x_1, ..., x_n \in K$ tels que

$$K = \overset{N}{\underset{i=1}{\cup}} B_K(x_i,\delta).$$

Puisque A est bornée il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq M$ et donc pour tout $i \in \{1, ..., N\}$

$$\{f_n(x_i),\ n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B_{\mathbb{R}^n}(0, M)}.$$

Cet ensemble est alors relativement compact. Par le procédé d'extraction diagonale, il existe donc une sous-suite (n_k) ; $k \in N$ telle que pour tout $i \in \{1, ..., N\}$ la suite ($f_{n_k}(x_i))_{ik\mathbb{N}}$ converge ; elle est donc de Cauchy. Par conséquent il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tous k, $k' \in N$ on ait :

$$k, k' \geq n \Longrightarrow \left|f_{n_k}(x_i) - f_{n_{k'}}(x_i)\right| \leq \varepsilon.$$

On pose : $n_{\max} = \max\{n_i; i \in \{1, ..., N\}\}$.

Soit $x \in K$, il existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$, tel que $x \in B(x_i, \delta)$. Pour tous k, $k' \in N$ on a :

$$\begin{aligned} \left|f_{n_k}(x) - f_{n_{k'}}(x)\right| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{i_0})| + \left|f_{n_k}(x_{i_0}) - f_{n_{k'}}(x_{i_0})\right| \\ &\quad + \left|f_{n_{k'}}(x_{i_0}) - f_{n_{k'}}(x)\right| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $n_{\max}$ est indépendant de x on peut passer à la borne supérieure sur x :

$$\| f_{n_k} - f_{n'_k} \|_\infty \leq 3\varepsilon$$

La suite (f_{n_k}) $k \in \mathbb{N}$ est donc de Cauchy dans $(C(K, \mathbb{R}^n), \| \cdot \|_\infty)$ qui est complet donc converge vers un élément de $C(K, \mathbb{R}^n)$.

En conclusion A est relativement compacte.

(ii) Supposons que A soit relativement compacte.

Puisque $\bar{A}$ est compacte donc bornée et par suite A aussi. Montrons que A est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$ on a :

$$\overline{A} \subset \bigcup_{f \in \bar{A}} B(f, \varepsilon)$$

Par Borel-Lebesgue il existe $f_1, ..., f_N \in \bar{A}$ tels que

$$\overline{A} \subset \bigcup_{f \in \overline{A}}^{N} B(f_i, \varepsilon)$$

Pour tout $i \in \{1, ..., N\}$ les f_i sont uniformément continues d'après le théorème de Heine, par suite il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $x, y \in K$:

$$d(x, y) \leq \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon.$$

Posons alors $\delta = \min\limits_{i \in \{1,...,N\}} \delta_i$

Soient $x, y \in K$ tels que $d(x, y) \leq \delta$ et $f \in A$, il existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tel que $f \in B(f_i, \varepsilon)$, alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| \\ &\quad + |f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc A est équicontinue. ■

1.3.1 Convergence faible et Lemme de Mazur

Le Lemme de Mazur est un résultat d'analyse fonctionnelle qui assure que dans un espace vectoriel normé, toute limite faible d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est limite forte (c'est-à-dire en norme) d'une suite combinaisons convexes des termes x_n de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et on note par $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ son dual topologique (i.e. l'ensemble de toutes les formes linéaires continues). On appelle la topologie faible de X, la topologie sur X qui est engendrée par le dual topologique X', i.e. la plus petite topologie sur X qui conserve la continuité des formes linéaires. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est dite faiblement convergente vers un vecteur x de X, si pour toute forme linéaire continue $f \in X'$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Le résultat suivant est connu pour être le Lemme de Mazur.

Théorème 1.3.3 (Théorème de Mazur) *Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite faiblement convergente vers un vecteur x de X. Alors il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x_n\}_{n\in N}$ qui converge en norme vers x. Autrement dit, pour toute entier n, le terme y_n est de la forme*

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} x_k \text{ avec } \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{R}^+,$$

tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = 0.$$

Pour la preuve de ce théorème, nous utiliserons trois propriétés valables dans un espace vectoriel normé :

1-L'adhérence de tout convexe est convexe.

2-Tout convexe fermé est faiblement fermé.

3-Tout point adhérent à une partie est limite d'une suite à valeurs dans cette partie.

Preuve. Soit C_0 l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des x_n , $n \geq 1$: c'est un convexe, et $C = \bar{C}_0^{\|\cdot\|}$ (i.e. la fermeture de C_0 par $\|\cdot\|$) est convexe et fermé, en norme. Donc aussi faiblement. Il ne reste plus qu'à remarque :

$$x \in \overline{\{x_n \ , \ n \geq 1\}}^{w} \subseteq \bar{C}^w \subset \bar{C}_0^{\|\cdot\|}.$$

Il existe donc $y_n \in \bar{C}_0^{\|\cdot\|}$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = 0.$$

Les notations $\overline{\{x_n \ , n \geq 1\}}^{w}$ et $\bar{C}^w$ désignent la fermeture par la topologie faible de $\{x_n \ , n \geq 1\}$ et C, respectivement. ■

1.3.2 Théorème de Banach-Saks

Soient à présent $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé complet) et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cet espace. On dit que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement au sens de Cesàro si il existe un vecteur $y \in X$ tel que

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y_n - y \right\| = 0.$$

La notion suivante est dite la propriété de Banach-Saks.

Définition 1.3.3 *On dit qu'un espace de Banach X admet la propriété de Banach-Saks si toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge en norme au sens de Cesàro, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{n_i} - x \right\| = 0.$$

Maintenant, pour énoncer précisément le Théorème de Banach-Saks, soient p un nombre réel satisfaisant $1 < p < \infty$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note par $\mathbb{L}^p([0,T], \mathbb{R}^n; \lambda)$ l'espace de Lebesgue d'ordre p défini sur un intervalle $[0,T]$, i.e.

$$\mathbb{L}^p([0,T], \mathbb{R}^n; \lambda) = \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R} \text{ mesurable, t.q. } \int_0^T |f(s)|^p \, ds < \infty \right\}.$$

En réalité f est une classe d'équivalence de la relation d'équivalence : $f = g$, $\lambda-$presque partout. En particulier, $\mathbb{L}^p([0,T], \mathbb{R}^n; \lambda)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\| = \left(\int_0^T |f(s)|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = 2$, $\mathbb{L}^2$ est un espace de Hilbert.

Le théorème suivant est une version adaptée du Théorème de Banach-Saks.

Théorème 1.3.4 (Théorème de Banach-Saks) *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R}^n; \lambda)$ qui converge faiblement vers une fonction $f \in \mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R}^n; \lambda)$. Alors il existe une sous suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens de Cesàro vers f, c'est-à-dire*

$$\lim_{N\to\infty} \left(\int_0^T \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{n_i}(s) - f(s) \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

En particulier, $\mathbb{L}^2([0,T], \mathbb{R}^n; \lambda)$ admet la propriété de Banach-Saks.

Preuve. Voir [2] . ■

Chapitre 2

Problèmes de contrôle optimal

Dans ce chapitre, nous donnons une formulation du problème du contrôle optimal déterministe. Afin de mieux appréhender l'essence du problème, il semble opportun de commencer par en citer quelques exemples pratiques très intéressants.

2.1 Exemples de modèles de contrôle optimal

2.1.1 Exemple 1: Contrôle optimal d'insectes nuisibles par des prédateurs

Ce modèle est tiré de la référence [3] .

Pour traiter une population $x_0 > 0$ d'insectes nuisibles, on introduit dans l'écosystème une population $y_0 > 0$ d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles. On suppose que les insectes prédateurs sont stériles. Le contrôle consiste en l'introduction, régulière d'insectes prédateurs. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a - by(t)), & x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = -cy(t) + u(t), & y(0) = y_0, \end{cases}$$

Où $a > 0$ est le taux de reproduction naturelle des nuisibles, $b > 0$ est un taux de prédation, $c > 0$ est le taux de disparition naturelle des prédateurs. Le contrôle $u(t)$ est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs au temps t, il vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq M \ ; \ (M > 0)$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T > 0$ fixé, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits :

$$J(u(.)) = x(T) + \int_0^T u(t)dt.$$

2.1.2 Exemple 2 : Contrôle optimal d'un avion

Ce modèle est tiré de la référence [3] .

Considérons le mouvement d'un avion, modélisé par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = \frac{u(t)}{mv(t)} - \mu g - \frac{c}{m}v(t)^2. \end{cases}$$

Où $x(t)$ est la distance au sol parcourue, $v(t)$ est le module de la vitesse, le contrôle $u(t)$ est l'apport d'énergie, m est la masse, et μ, c sont des coefficients aérodynamiques. Le contrôle vérifie la contrainte :

$$0 < a \leq u(t) \leq b$$

Le but est de déterminer une trajectoire menant du point initial $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ au point final $x(t_f) = x_f$, $v(t_f) = v_f$ et minimisant le coût :

$$J(u) = \int_0^T u(t)dt.$$

2.1.3 Exemple 3: Un modèle de pêche optimale.

Ce modèle est tiré de la référence [4] .

La population $x(t)$ (mesurée par exemple par sa masse en tonnes) d'une espèce donnée de poissons est supposée croître continuement en l'absence de pêche, suivant la loi suivante :

$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - \frac{y}{K}) \overset{def}{=} F(y) .$$

Où la constante $r > 0$ est le taux de croissance et la constante K est la capacité d'absorption de l'environnement, (si $x(t) < 0$).

Si on introduit une fonction "taux de pêche" $h(t)$ (en tonne par unité de temps par exemple), l'évolution du système est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(y) - u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Ici $u(t)$ est le contrôle. Une fonctionnelle coût pour ce modèle et donnée par

$$J(u(.)) = \int_0^T e^{-\delta t} \left[p - c(x(t))x(t)\right] u\left(t\right) dt,$$

Ou p est le prix de vente (supposé constant) du poisson par unité de masse de et $c(x(t))$ est le prix de revient de la prise d'une unité de masse de poisson quand la population est $x(t)$.

La constante δ est un taux de réduction dû aux coûts de stockage...etc.

2.1.4 Exemple 4 : Rendez-vous spatial

Ce modèle est tiré de la référence [4] .

On considère une station orbitale dont la trajectoire est supposée circulaire (au voisinage de la terre) et dont le vecteure position est $\overrightarrow{r_1}$ (dans un repère ayant pour origine le centre de la terre). On veut amarrer à cette station une navette (dont le vecteur position est $\overrightarrow{r_2}$) par l'action de moteurs dont la poussé est $\overrightarrow{u}$. Les lois de la mécanique s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overrightarrow{r}(t)}{dt^2} = -\mu \dfrac{\overrightarrow{r_1}(t)}{\left(r_1\right)^3(t)}, \\ \dfrac{d^2\overrightarrow{r_2}(t)}{dt^2} = -\mu \dfrac{\overrightarrow{r_2}(t)}{\left(r_2\right)^3(t)} + \overrightarrow{u}(t). \end{cases}$$

La position relative des deux objets est donnée par $\overrightarrow{R}(t) = \overrightarrow{r_2}(t) - \overrightarrow{r_1}(t)$ dont les composantes sont $(x_1, x_2, x_3)^\top$. La commande correspond à la poussée des moteurs $\overrightarrow{u} = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^\top$ où $(u_1, u_2, u_3) \in [0, d]^3$ et l'état du système est décrit par $\left(\overrightarrow{R}(t), \frac{d\overrightarrow{R}}{dt}\right)$.

Comme $\overrightarrow{R}$ est petit par rapport à $\overrightarrow{r_1}$, on peut linéariser ces équation et les projeter sur le repère de frénet associé à la station (origine : la station, axes radial (selon $\overrightarrow{r_1}$) et tangentiel (perpendiculaire à $\overrightarrow{r_2}$). Le mouvement dans le plan de l'orbite s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Avec

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ici la notation x' désigne la dérivée par rapport à t : $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

Le mouvement perpendiculaire au plan de l'orbite (avec x_3) vérifie une équation différentielle de type (2.1.1) tels que

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = u_3(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas particulier le paramètre ω correspond à la période de révolution $T = \frac{2\pi}{\omega}$ de la station et $u(t)$ représente est le contrôle. L'objective du contrôlleur est de choisir $u(\cdot)$ afin que les deux objets (la station et la navette) se rencontre, c'état -à-dire pour que l'état du système soit amené à 0.

La fonctionnelle coût: On cherche à minimiser le critère représentant la dépense d'énergie de la navette, qui est fonction de la poussée des moteurs $u(.)$:

$$J(u(.)) = \int_0^T f(u(t))\, dt.$$

Où $f : [0, d]^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

2.2 Formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal

Aux exemples ci-dessus présentés, peuvent s'ajouter bien d'autres dans des domaines tels : l'industrie, l'économie, la biologie, la médecine...etc. Cependant, le principe mathématique qui permet de formuler ces différents types des problèmes est le même. Plus spécifiquement, la problématique générale du contrôle optimal est la suivante.

Considérons un système d'état de contrôle général :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t), u(t)), \ t \in [0, T) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ est une fonction mesurable ; (U, d) est un espace métrique séparable qui représente l'espace d'action du contrôleur ; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est la condition initiale de l'état du contrôleur ; $T \in [0; +\infty]$ est appelée l'horizon du système. Pour tout instant $t \in [0.T]$, le contrôleur est amené à choisir une action $u(t) \in U$ afin d'influencer la trajectoire de l'état de son système. Toute fonction mesurable $\bar{u} : [0,T] \to U$ est appelée une stratégie réalisable du contrôleur et $x(.)$ solution de (2.2.1), est dite une trajectoire correspondante de $u(.)$.

On pose

$$\mathcal{U}_r[0,T] = \{u : [0,T] \to U, \ u(.) \text{ mesurable}\}.$$

La classe de tous les contrôles réalisables.

Comme nous avons vu avec les exemples introductifs, nous pouvons avoir des contraintes imposées sur l'état $x(.)$. En générale, elles peuvent êtres localement représentées par l'écriture :

$$x(t) \in S(t), \text{ pour tous } \ t \in [0,T]. \tag{L}$$

Où $\mathcal{S}(t) \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut changer au fur et à mesure que le temps évolue. D'autres types de contraintes existent également, par exemple elles peuvent êtres sous une forme globale :

$$g(x(T)) + \int_0^T l(t, x(t), u(t))\, dt \in \Gamma, \tag{G}$$

Où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^d$ et $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$.

Afin de évaluer les performances de ses stratégies, le contrôleur est souvent amené à utiliser une fonctionnelle qui à chaque stratégie $u(.)$ associe un nombre $J(u(.))$. Plus précisément dans le cas où $T < \infty$ on défini la fonctionnelle cout par :

$$J(u(.)) = h(x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), u(t))\, dt \in \mathbb{R},$$

Où $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables. Le premier terme et le second terme sont, respectivement, le cout terminal et le cout courant.

Dans le cas où $T = \infty$ on pose

$$J(u(.)) = \int_0^{+\infty} g(t, x(t), u(t))\, dt \in \mathbb{R},$$

Où $g : [0,\infty] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.

Définition 2.2.1 *Un contrôle réalisable $u(.) \in \mathcal{U}_r[0,T]$ est dit admissible si :*

1. *L'équation* (2.2.1) *admet une solution unique qu'on notera $x(.)$.*
2. *Les contraintes d'états de types (L) (et\ou éventuellement de type (G)) sont satisfaites.*
3. $|J(u(.))| \langle \infty$.

On note par $\mathcal{U}_{ad}[0,T]$ la classe de toutes les stratégies admissibles. Notre problème de contrôle optimal est donnée par :

$$(P) \begin{cases} \min J(u(.)), \\ u(.) \in \mathcal{U}_{ad}[0,T]. \end{cases}$$

Tout contrôle $\bar{u}(.) \in \mathcal{U}_{ad}[0,T]$ vérifiant à

$$J(\bar{u}(.)) = \min_{u(.) \in \mathcal{U}_{ad}[0,T]} J(u(.)).$$

Est dit une solution optimal au problème (P) et le couple $(\bar{u}(.), \bar{x}(.))$ est dit une paire optimale.

Remarque 2.2.1 *Comme nous le verrons plus tard, la topologie de $\mathcal{U}_{ad}[0,T]$ est intrinsèquement liée aux propriétés des fonctions $b, f,$et h.*

1. *Le problème (P) est dit à horizon fini si $T < \infty$, sinon il est dit un problème à horizon infini.*
2. *Le problème (P) est dit fini si $J(.)$ est minoré sur $\mathcal{U}_{ad}[0,T]$ (i.e. $\inf_{u(.)} J(u(.))$ existe).*

3. *Le problème (P) est dit solvable si on a l'existence d'au moins une solution optimale.*

4. *Dans le cas où U n'est pas convexe, nous dirons que (P) est un problème de contrôle non convexe.*

5. *Le problème (P) est dit convexe si : (i) $U \subset \mathbb{R}^m$ est un domaine convexe ; (ii) Pour tout $t \in [0, T]$, $S(t)$ est convexe. (iii) Γ est convexe.*

6. *Le problème (P) est dit sans contraintes sur l'état si $t \in [0, T]$, $S(t) = \mathbb{R}^n$ et aucune contraintes globales est imposée.*

7. *Le problème (P) est dit un problème sans contraintes s'il est sans contraintes sur l'état et $U = \mathbb{R}^m$.*

2.2.1 Formulations équivalentes

En générale, un problème de contrôle optimal avec $h = 0$ (i.e. $J(u(.)) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))\,dt$) est dit un **probléme de type Lagrange,** celui avec $f = 0$ (i.e. $J(u(.)) = h(x(T))$) est un problème de type **Mayer**. Enfin, un problème avec $h \neq 0$ et $f \neq 0$ est dit un problème de **Bolza.**

Il est bien connu que les 3 types de problèmes sont équivalents. En particulier tout problème de contrôle optimal de type Bolza ou Lagrange peuvent être ramenés à un problème de type Mayer en augmentant le nombre de variables d'états.

Soit par exemple un problème de type Bolza, si on définit

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \text{ où } w(t) = \int_0^t f(t, x(t), u(t))\,dt.$$

Le système d'état augmenté est ainsi régit par

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \tilde{b}(t, y(t), u(t)), \ t \in [0.T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Où $\tilde{b} : [0, T] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^{n+1}} \times U \to \mathbb{R}^{n+1}$, pout tout $(t, y, u) = (t, x, w, u)$

$$\tilde{b}(t, y, u) = \tilde{b}(t, x, w, u) = \begin{pmatrix} b(t, x, u) \\ f(t, x, u) \end{pmatrix}$$

et $y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le problème de Bolza se récrit comme suit

$$\begin{aligned}\min_{u(\cdot)} J(u(.)) &= \min_{u(\cdot)} \left\{ h(x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), u(t))\, dt \right\} \\ &= \min_{u(\cdot)} \{ h(x(T)) + w(T) \}.\end{aligned}$$

Ainsi si on pose:

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{h} & : & \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R} \\ & & \binom{x}{w} & \to & \tilde{h}(x,w) = h(x) + w. \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\tilde{h}(y(T)) &= \tilde{h}(x(T), w(T)) \\ &= h(x(T)) + w(T) \\ &= J(u(.)),\end{aligned}$$

qui a était réduit au cas de Mayer.

2.2.2 Problème Linéaire-Quadratique

Il existe un cas particulier d'un problème de contrôle optimal **sans contraintes** très important, il s'agit du problème **linéaire-quadratique (LQ)**.

C'est le cas où le système contrôlé est linéaire i.e.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \ t \in [0, T) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Où $A(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sont des fonctions mesurables, et la fonctionnelle coût est quadratique en la variable de contrôle et de l'état

$$\begin{aligned}J(u(.)) = &\int_0^T \frac{1}{2}(\langle Q(t)x(t), x(t)\rangle + \langle R(t)u(t), u(t)\rangle)dt \\ &+ \frac{1}{2}\langle G(T)x(T), x(T)\rangle.\end{aligned}$$

Avec $Q : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $R : [0,T] \to \mathbb{R}^{m\times m}$ sont mesurables et $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

2.3 Existence et unicité de la solution de l'équation d'état contrôlée

L'existence et l'unicité d'une solution de (2.2.1) pour le cas où $T < \infty$ peut être assurée par plusieurs théorèmes variant selon les hypothèses sur la fonction b et le domaine U.

Théorème 2.3.1 *Soit* $b : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue vérifiant les conditions suivantes : il existe* $K > 0$, *tels que:*

$$|b(t,x,u) - b(t,x',u)| \leq K|x - x'|, \ \forall (x,x') \ \forall (t,u), \tag{2.3.1}$$
$$|b(t,x,u)| \leq K(1 + |x|).$$

Alors pour toute fonction mesurable $u(.) \in \mathcal{U}_r[0,T]$, *il existe une unique fonction* $x(\cdot) \in (C([0.T], \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$ *solution de l'équation d'état contrôlé vérifiant*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x(s), u(s))\, ds, \quad \textit{pour } t \in [0.T]. \tag{2.3.2}$$

De plus, les deux estimations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \sup |x(t)| \leq e^{Kt}(1 + |x_0|) - 1, \\ |x(t) - x_0| \leq \left[e^{Kt} - 1\right](1 + |x_0|), \ \textit{pour tout } t \in [0,T] \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Avant de donner la démonstration de ce théorème, il convient de donner quelques lemmes indispensables.

Lemme 2.3.1 ***(Gronwall)*** *Soit* $f : [0.T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux vérifiant pour tout* $t \in [0.T]$

$$f(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t f(s)\, ds \tag{$*$}$$

où $\alpha, \beta \succ 0$ *sont deux réels indépendants de t. Alors*

$$f(t) \leq \alpha e^{\beta t}, \ \forall t \in [0.T].$$

Preuve. *En multipliant* $(*)$ *par* $e^{-\beta t}$*, on trouve*

$$e^{-\beta t} f(t) \leq \alpha e^{-\beta t} + \beta e^{-\beta t} \int_0^t f(s)\, ds$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\beta t} \int_0^t f(s)\, ds\} \leq \alpha e^{-\beta t},$$

pour tout $t \in [0.T]$ *. Ce qui donne par une simple intégration entre 0 et t :*

$$e^{-\beta t} \int_0^t f(s)\, ds \leq \frac{\alpha}{\beta}\left[1 - e^{-\beta t}\right].$$

On réinjecte enfin cette inégalité dans $(*)$ *pour obtenir le résultat voulu.* ∎

Avant de donner la démonstration de ce théorème, il convient de donner quelques lemmes indispensables.

Lemme 2.3.2 ***(Théorème du point fixe de Banach)*** *Soit* T *un opérateur sur un espace de Banach* E*. Supposons que*

(i) M *est une partie fermée non vide d'un espace de Banach* E*, et*

(ii) l'opérateur $T : M \to M$ *est* $\alpha-$ *contractant, i.e. par définition,*

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|,\ \forall \varphi, \psi \in M$$

Si $\alpha \in (0, 1)$. Alors l'équation $T\varphi = \varphi,\ \varphi \in M$ admet une solution unique $\varphi \in M$.

Preuve du Théorème 2.3.1. On commence par prouver l'unicité de la solution.

(i) **L'unicité :** Soit $u(.) \in \mathcal{U}_r[0, T]$ fixé. On suppose qu'il existe deux solutions $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ de (2.2.1) i.e.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t), u(t)),\ t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = b(t, y(t), u(t)),\ t \in [0, T], \\ y(0) = x_0. \end{cases}$$

D'autre part on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$x(t) - y(t) = x(0) - y(0) + \int_0^t (\dot{x}(s) - \dot{y}(s))\, ds, \ \forall t \in [0, T],$$

Ainsi on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \int_0^t |\dot{x}(s) - \dot{y}(s)|\, ds \\ &= \int_0^t |b(s, x(s), u(s)) - b(s, y(s), u(s))|\, ds. \end{aligned}$$

D'après la première condition du théorème (2.3.1) on trouve

$$|x(t) - y(t)| \leq K \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds, \ \forall t \in [0, T],$$

pour $K > 0$ indépendant de t. Par consequent on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0.T]} |x(t) - y(t)| &\leq K \sup_{t \in [0.T]} \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \\ &= K \int_0^T |x(s) - y(s)|\, ds \\ &\leq K \int_0^T \sup_{0 \leq r \leq s} |x(r) - y(r)|\, ds. \end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall on a

$$\|x(.) - y(.)\|_\infty \leq 0,$$

d'où

$$x(t) = y(t), \ \forall t \in [0.T].$$

Alors la solution est unique.

(ii) **L'existence :** Montrons à présent l'existence locale d'une solution. Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe une solution de (2.3.1) sur l'intervalle $[0.\alpha]$ pour tout α<min $\{k^{-1}, T\}$.

Pour cela, on considère l'opérateur :

$$T\colon \left(C\left([0.\alpha],\mathbb{R}^n\right),\|.\|_\infty\right)\to\left(C\left([0.\alpha],\mathbb{R}^n\right),\|.\|_\infty\right)$$

Définie par

$$T(x(\cdot))(t)=x_0+\int_0^t b\left(s,x(s),u(s)\right)ds,\quad t\in[0.\alpha]$$

On va vérifier que φ est bien définie, pour cela il suffit de vérifié que

$$\int_0^\alpha \left|b\left(s,x(s),u(s)\right)\right|ds<+\infty.$$

Or d'après l'hypothèse (2.3.1) du Théorème (2.3.1) :

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \left|b\left(s,x(s),u(s)\right)\right|ds &\leq K\left(\int_0^\alpha \left(1+|x(s)|\right)ds\right)\\ &\leq K\left(\alpha+\int_0^\alpha |x(s)|\,ds\right).\end{aligned}$$

Comme $x(.)\in\left(C\left([0.\alpha],\mathbb{R}^n\right),\|.\|_\infty\right)$, alors

$$\int_0^\alpha \left|b\left(s,x(s),u(s)\right)\right|ds\leq K\alpha\left(1+\sup_{s\in[0,\alpha]}|x(s)|\,ds\right)<+\infty$$

Donc $T(x(\cdot))(\cdot)$ est continue. Dans la suite on va montrer que φ est un opérateur contractant.

Soient $x(\cdot)$ et $y(\cdot)\in\left(C\left([0.\alpha],\mathbb{R}^n\right),\|.\|_\infty\right)$. On a

$$T(x(\cdot))(t)-T(y(\cdot))(t)=\int_0^t \left\{b\left(s,x(s),u(s)\right)-b\left(s,y(s),u(s)\right)\right\}ds$$

Donc

$$\left|T(x(\cdot))(t)-T(y(\cdot))(t)\right|\leq\int_0^t \left|b\left(s,x(s),u(s)\right)-b\left(s,y(s),u(s)\right)\right|ds$$

D'après la première condition du Théorème (2.3.1) on trouve

$$|T(x(\cdot))(t) - T(y(\cdot))(t)| \leq K \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds$$

Donc

$$\| T(x(\cdot))(\cdot) - T(y(\cdot))(\cdot)\|_\infty \leq K\alpha \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_\infty$$

Si on pose $\alpha < K^{-1}$, T est contractante et possède, par conséquent, un unique point fixe dans $(C([0.\alpha], \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$. Pour finir la démonstration, il reste à montrer l'existence d'une solution maximale sur l'intervalle $[0.T]$. Cette partie de la démonstration utilise la condition de croissance linéaire sur b, et ne diffère en aucun point de la démonstration classique dans le cas où u est continu ; voir par exemple Schwartz [[5] ,Tthéorème (4.2.10)].

Donc il existe une unique fonction $x(\cdot) \in (C([0.T], \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$ solution de l'équation d'état contrôlé vérifiant :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x(t), u(s))\, ds, \text{ pour } t \in [0.T].$$

(iii) **Première estimation :** D'après la première condition de théorème (2.3.1) On a :

$$|x(t)| \leq |x| + K \int_0^t (1 + |x(s)|) ds \ ; t \in [0, T].$$

Si nous notons le côté droit de ce qui précède par $\theta(t)$ alors,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= K + K|x(t)| \\ &\leq K + K\theta(t). \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \theta(t) &\leq e^{Kt}|x_0| + K \int_0^t e^{Ks} ds \\ &= e^{Kt}|x_0| + e^{Kt} - 1 \\ &= e^{Kt}(1 + |x_0|) - 1 \end{aligned}$$

Cela donne la première estimation en (2.3.3).

Deuxiéme estimation : D'après la deuxième condition de théorème (2.3.1) et la première estimation du (2.3.3) on trouve :

$$\begin{aligned} |x(t)-x| &\leq \int_0^t |b(s,x(s),u(s)|\,ds \\ &\leq K\int_0^t (1+|x(s)|\,ds \\ &\leq K\int_0^t e^{Ks}(|x_0|+1)ds \\ &= (1+|x_0|)[e^{Kt}-1]. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la deuxième estimation en (2.3.3). ■

Remarque 2.3.1 *Dans le théorème président, si la fonction b est de croissance linéaire par rapport à x et u (i.e.il existe $K>0$: $|b(t,x,u)| \leq K(1+|x|+|u|)$. Donc :*
1) Si U est borné alors pour toute fonction mesurable $u(\cdot) \in \mathcal{U}_r[0,T]$, il existe une unique fonction $x(\cdot) \in (C([0.T],\mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$ solution de l'équation d'état.
2) Si U est non borné alors pour tout $u(.) \in \mathbb{L}^1([0.T],\mathbb{R}^n)$, il existe une unique fonction $x(\cdot) \in (C([0.T],\mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$ solution de l'équation d'état.

Chapitre 3

Existence de la solution optimal

Dans ce chapitre, nous allons donner trois résultats d'existence indépendants pour des cas particuliers au Problème (P) (voir le Chap. 2, Sec. 2) en utilisant les techniques d'analyse fonctionnelles à base de topologie faible. La difficulté principale provient du fait que $\mathcal{U}_{ad}([0,T])$ est un sous-ensemble d'un espace de dimension infini. Comme d'habitude, afin d'établir un résultat d'existence, nous commençons par considérer une suite minimisant $\{u_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour le problème (P) et on note $\{x^{u_n}(\cdot)\}$ l'état du système associé. Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n(\cdot)) = \inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad}[0,T]} J(u(\cdot))$. Pour les trois théorèmes, nous allons suivre le schéma de démonstration suivant :

1. On se plaçant dans un espace convenable pour l'état du système, nous commençons par montrer, par un raisonnement de compacité, l'existence d'une sous-suite qu'on notera aussi par $\{x^{u_n}(\cdot)\}$ qui converge vers une certaine fonction continue $\bar{x}(\cdot)$.

2. On montre ensuite l'existence d'une variable de contrôle admissible $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}[0,T]$ telle que $\bar{x}(\cdot) = x^{\bar{u}(\cdot)}(\cdot)$ et que $J(\bar{u}(\cdot)) = \inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_r[0,T]} J(u(\cdot))$.

3.1 Un premier résultat d'existence d'une solution optimale

Considérons le Problème (P). Avant d'énoncer le premier théorème d'existence, effectuons d'abord quelques hypothèses nécessaires.

(**H1**) (U, d) est un espace métrique complet et séparable.

(**H2**) Les applications b, f et h sont mesurables, et il existe $K > 0$, et module de continuité ω (i.e. est une fonction a valeurs réelles $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ s'annulant et continue en 0 c-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(t) = \omega(0) = 0$) tels que pour $\varphi(t, x, u) = b(t, x, u), f(t, x, u), h(x)$,

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, \hat{x}, \hat{u})| &\leq K|x - \hat{x}| + w(d(u, \hat{u})), \\ |\varphi(t, 0, u)| &\leq K, \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, T], x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, u, \hat{u} \in U$.

(**H3**) Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$(b, f)(t, x, U) = \{(b(t, x, u), f(t, x, u));\ u \in U\}$$

est un convexe fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(**H4**) $S(t) = \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in [0, T]$.

Remarque 3.1.1 *Sous les hypothèses **(H1)-(H4),** il est facile de voire que tout contrôle réalisable est aussi admissible :*

$$\mathcal{U}_{ad}([0, T]) = \mathcal{U}_r([0, T]).$$

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses **(H1)-(H4),** si le Problème (P) est fini, alors il admet au moins une solution optimale.*

Avant de donner la démonstration de ce théorème, il convient de donner quelques lemmes indispensables.

Lemme 3.1.1 (L'inégalité des accroissements finis) *Soit f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeur sur $\mathbb{C}$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $\dot{f}$ est borné sur $]a, b[$ alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{x\in]a,b[} \left|\dot{f}(x)\right|.$$

Lemme 3.1.2 *Sous les hypothèses* (**H1**) *et* (**H2**), $|\varphi(t, x, u)| \leq K(1 + |x|)$ *et la famille* $\left\{x^{x_0, u(\cdot)} : u(\cdot) \in \mathcal{U}_r([0, T])\right\}$ *est un sous-ensemble équicontinue et uniformément bornée de* $C([0.T], \mathbb{R}^n)$.

Preuve. Premièrement commençons par noter que

$$\begin{aligned} |b(t,x,u)| &\leq |b(t,0,u)| + |b(t,x,u) - b(t,0,u)| \\ &\leq K + K|x-0| \\ &\leq K(1+|x|), \end{aligned}$$

pour tout $(t,x,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U$. Soit à présent

$$L := \{x(\cdot),\ \text{tel que } u(\cdot) \in \mathcal{U}_r([0.T])\}$$

On va vérifier que l'ensemble L est une partie équicontinue et uniformément bornée.

a) L'uniformément bornée : Soient $u(\cdot) \in \mathcal{U}_r([0.T])$ et $x(\cdot)$ la solution correspondent à $u(.)$. On a

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x(s), u(s))ds,\ \forall t \in [0.T].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t |b(s,x(s),u(s))|\,ds \\ &\leq |x_0| + K\int_0^t (1+|x(s)|)ds \\ &\leq |x_0| + Kt + K\int_0^t |x(s)|\,ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0.T]} |x(t)| &\leq |x_0| + KT + K\int_0^T |x(s)|\,ds \\ &\leq |x_0| + KT + K\int_0^T \sup_{r\in[0.s]} |x(r)|\,ds \end{aligned}$$

D'après Lemme de Gronwall, on a

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0.T]} |x(t)| &\leq (|x_0| + kT)\exp(kT) \\ &\leq c \end{aligned}$$

Alors L est uniformément borné.

b) L'équicontinuité : Soit $\varepsilon > 0$, et soit $u(\cdot) \in \mathcal{U}_r([0.T])$. On a :

$$\dot{x}(t) = b(t, x(t), u(t))$$

Donc

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0.T]} |\dot{x}(t)| &\leq K\left(1 + \sup_{t\in[0.T]} |x(t)|\right) \\ &< Kc. \end{aligned}$$

On appliquant l'inégalité des accroissements finis on trouve

Pour tout $t, s \in [0.T]$

$$|x(s) - x(t)| \leq Kc\,|s-t|\,.$$

En posanr $c_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{kc}$ on a pour tout $|s-t| < c_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |x(s) - x(t)| &< kcc_\varepsilon \\ &< kc\tfrac{\varepsilon}{k(1+k_1)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{x(.)\in L} |x(s) - x(t)| < \varepsilon$$

Alors L est une partie équicontinue.

Donc d'après Lemme d'Ascoli L est une partie relativement compacte. ■

A présent nous sommes en mesure de donner une preuve du Théorème 2.3.2.

Preuve du Théorème 2.3.2. Supposons que (P) est fini et soit $\{u_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_r([0,T])$ une suite minimisant de (P) i.e.

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_r[0,T]} J(u(\cdot))\,.$$

D'après le Lemme (2.3.4) et l'hypothèse $(H2)$, $\exists c > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \sup_n \|x^{u_n}(\cdot)\|_\infty < c, \\ \sup_n \left\|b\left(., x^{u_n(.)}(.), u_n(.)\right)\right\|_\infty < c, \\ \sup_n \left\|f\left(., x^{u_n(.)}(.), u_n(.)\right)\right\|_\infty < c \\ \sup_n \left|h\left(x^{u_n(.)}(T)\right)\right| < c, \end{cases}$$

En particuliers $\{x^{u_n}(.)\}$ est équicontinue et les suites $b\left(.,x^{u_n(.)}(.),u_n(.)\right)$, $f\left(.,x^{u_n(.)}(.),u_n(.)\right)$ sont uniformément bornées dans $\mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\int_0^T \left|b\left(s,x^{u_n(.)}(s),u_n(s)\right)\right|^2 ds < T\left\|b\left(.,x^{u_n(.)}(.),u_n(.)\right)\right\|_\infty < cT$$

et

$$\int_0^T \left|f\left(s,x^{u_n(.)}(s),u_n(s)\right)\right|^2 ds < T\left\|f\left(.,x^{u_n(.)}(.),u_n(.)\right)\right\|_\infty < cT.$$

Ainsi d'après le Lemme de Ascoli et la compacité faible des ensembles fermés et bornés dans $\mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$, il existe une sous suite que l'on note aussi par $\{x^{u_n}(.)\}$ tels que lorsque $n\to+\infty$:

$$\begin{cases} x^{u_n}(.) \overset{\|.\|_\infty}{\longrightarrow} \bar{x}(.)\in C([0,T];\mathbb{R}^n) \\ b\left(.,x^{u_n(.)}(.),u_n(.)\right) \overset{Faiblement}{\longrightarrow} \bar{b}(.)\in\mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n) \\ f\left(.,x^{u_n(.)}(.),u_n(.)\right) \overset{Faiblement}{\longrightarrow} \bar{f}(.)\in\mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n) \\ h\left(x^{u_n(.)}(T)\right) \overset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} h(\bar{x}(T)) \end{cases}$$

Pour finir la démonstration du théorème, il reste à trouver une variable de contrôle $\bar{u}(.)\in\mathcal{U}_r[0,T]$ telle que $\bar{x}(.)=x^{\bar{u}(.)}(.)$, $\bar{b}(.)=b\left(.,x^{\bar{u}(.)}(.),\bar{u}(.)\right)$ et $\bar{f}(.)=f\left(.,x^{\bar{u}(.)}(.),\bar{u}(.)\right)$.

D'après l'hypothèse $(H2)$,

$$\left\|b\left(.,x^{u_n(.)}(.),u_n(.)\right)-b(.,\bar{x}(.),u_n(.))\right\|_\infty \le K\left\|x^{u_n(.)}(.)-\bar{x}(.)\right\|_\infty$$

et

$$\left\|f\left(.,x^{u_n(.)}(.),u_n(.)\right)-f(.,\bar{x}(.),u_n(.))\right\|_\infty \le K\left\|x^{u_n(.)}(.)-\bar{x}(.)\right\|_\infty$$

Ainsi

$$b(.,\bar{x}(.),u_n(.)) \overset{Faiblement}{\longrightarrow} \bar{b}(.) \text{ au sens } \mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n),$$
$$f(.,\bar{x}(.),u_n(.)) \overset{Faiblement}{\longrightarrow} \bar{f}(.) \text{ au sens } \mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n).$$

On applique le Lemme de Mazur, il existe alors $\alpha_{in}\ge 0$ tels que $\sum\limits_{i\ge1}\alpha_{in}=1$ et pour $n\to+\infty$ on trouve

$$\sum_{i\ge1}\alpha_{in}b(.,\bar{x}(.),u_{n+i}(.)) \overset{fortement}{\longrightarrow} \bar{b}(.) \text{ au sens } \mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$$
$$\sum_{i\ge1}\alpha_{in}f(.,\bar{x}(.),u_{n+i}(.)) \overset{fortement}{\longrightarrow} \bar{f}(.) \text{ au sens } \mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n),$$

D'où il existe une sous suite telle que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1} \alpha_{in_k} b\left(t, \bar{x}\left(t\right), u_{n_k+i}\left(t\right)\right) &\overset{p.p.}{\to} \bar{b}\left(t\right) \text{ presque pour tout } t \in [0,T] \\
\sum_{i\geq 1} \alpha_{in_k} f\left(t, \bar{x}\left(t\right), u_{n_k+i}\left(t\right)\right) &\overset{p.p.}{\to} \bar{f}\left(t\right) \text{ presque pour tout } t \in [0,T],
\end{aligned}
$$

De l'hypothèse $(H3)$ on déduit que

$$
\left(\bar{b}\left(t\right), \bar{f}\left(t\right)\right) \in \left(b, f\right)\left(t, \bar{x}\left(t\right), U\right).
$$

Ainsi, d'après le lemme de Filippov (voir [6], page 102, corollaire 2.26) il existe une fonction mesurable $\bar{u}\left(.\right) \in \mathcal{U}_r([0,T])$ tel que $\bar{b}\left(.\right) = b\left(., x^{\bar{u}(.)}\left(.\right), \bar{u}\left(.\right)\right)$, $\bar{f}(.) = f(., x^{\bar{u}(.)}\left(.\right), \bar{u}\left(.\right))$.

Finalement, vérifions que $\bar{u}\left(.\right)$ est bien une solution optimale. D'après lemme de Fatou (voir [7] Yosida [page.17]), on obtient :

$$
\begin{aligned}
J\left(\bar{u}\left(.\right)\right) &= \int_0^T f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))dt + h\left(\bar{x}\left(T\right)\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha_{in} \left\{ \int_0^T f\left(., x_{n+i}\left(.\right), u_{n+i}\left(.\right)\right) dt + h(x_{n+i}(T)) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha_{in} J(u_{n+i}(.)) \\
&= \inf_{u(.)\in\mathcal{U}_r[0,T]} J\left(u\left(.\right)\right).
\end{aligned}
$$

■

Il y a deux conditions essentielles dans la preuve ci-dessus : (i) L'espace $\mathbb{R}^n$ où l'état $x^{u(.)}\left(t\right)$ prend des valeurs est localement compact (c'est-à-dire, tous ensemble fermé borné est compact), ce qui garantit que la suite $\{x^{u_n}\left(.\right)\}$ est relativement compacte (c'est-à-dire qu'elle admet une sous-suite convergente) sous la condition $(H2)$; (ii) l'ensemble $b\left(t, c, U\right)$ est convexe et fermé (appelé condition de Roxin), ce qui garantit que le théorème de Mazur et le théorème de sélection mesurable de Filippov sont applicables pour obtenir un contrôle optimal.

Pour le cas d'une formulation de Mayer (i.e. $f = 0$), il suffit de remplacer les hypothèses $(H2)$ et $(H3)$ par les deux hypothèses suivantes :

$(H2)'$ Les fonctions b et h sont continués en x tels que il existe $K > 0$, et module de continuité w tels que pour $\varphi(t, x, u) = b(t, x, u), h(x)$

$$|\varphi(t, x, u) - \varphi(t, \hat{x}, \hat{u})| \leq K|x - \hat{x}| \ + w(d(u, \hat{u}))$$
$$|\varphi(t, 0, u)| \leq K$$

$(H3)'$ Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$b(t, x, U) = bi(t, x, u);\ u \in U\ , i = 1, 2, ..., n\}.$$

Est un convexe fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Corollaire 3.1.1 *Sous les hypothèses* ***(H1)-(H2)'-(H3)'-*****(H4)*****,*** *si le Problème (P) est fini, alors il admet au moine une solution optimale.*

Preuve. Comme on a l'équivalence entre le problème de type Bolza et le problème de type Mayer (voir le sous-section (2.2.1) donc, d'après le théorème précédent (3.1.1) la démonstration de ce théorème est évidente. ■

D'autres résultats d'existences peuvent aussi être obtenus en fonction des hypothèses qui sont imposées sur l'espace d'actions U ainsi que sur les fonctions b, f et h. En particulier, nous énonçons le résultat d'existence suivant.

Considérons cette fois-ci les hypothèses suivantes :

(L1) $U \subset \mathbb{R}^m$ est un sous-ensemble compact.

(L2) les deux fonctions b et h sont continués en x tels qu'il existe $K > 0$, tels que

$$|b(t, x, u) - b(t, y, u)| + |f(t, x, u) - f(t, y, u)| + |h(x) - h(y)| \leq K|x - y|$$
$$|b(t, x, u)| + |f(t, x, u)| + |h(x)| \leq K(1 + |x| + |u|)$$

(L3) Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$(b(t, x, U), f(t, x, U)) = \{(b(t, x, u), f(t, x, u));\ u \in U\}$$

est un convexe fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(L4) $S(t) = \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in [0, T]$.

Corollaire 3.1.2 *Sous les hypothèses* $(L1) - (L4)$ *si le Problème (P) est fini, alors il admet au moine une solution optimale* $\bar{u}(.) \in \mathcal{U}_r([0, T])$.

3.2 Un deuxième résultat d'existence d'une solution optimale

Nous allons étudier dans cette partie, le cas de problèmes de contrôle "simple" de type **Lagrange.** Toutefois, contrairement à la section précédente, nous considérons un cas où une contrainte sur l'état terminal est imposée. On considère un système de contrôle définie par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b\left(t, x(t), u(t)\right), \ t \in [0, T]. \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La fonction coût $J : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ définie par :

$$J(u) := \int_0^T f\left(s, x(s), u(s)\right) ds.$$

Cette fois-ci, on impose une contrainte sur l'état terminale, définie par

$$x(T) = x(T; x_0, u(.)) \in M.$$

Où $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble non vide fixé.

On définit la classe des contrôles admissibles par:

$$\mathcal{U}_{ad}^M\left([0, T]\right) = \left\{u(.) \in \mathcal{U}\left[0, T\right] \ \text{tq} \ x(T) = x(T; x_0, u(.)) \in M)\right\}.$$

Si $\mathcal{U}_{ad}^M\left([0, T]\right) \neq \emptyset$, notre objectif est de trouver $\overline{u}\left(\cdot\right) \in \mathcal{U}_{ad}^M\left([0, T]\right)$ tq :

$$J(\overline{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^M([0,T])} J(u).$$

Commençons par poser les hypothèses suivantes :

(**C**1) Les conditions dans (2.3.1) sont vérifiées.

(C2) La fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ est mesurable et il existe module de continuité $\omega : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant $\omega\left(r, 0\right) = 0$, $\forall r > 0$, t.q :

$$\left|f\left(t, x_1, u\right) - f\left(t, x_2, u\right)\right)\right| \leq \omega(\left|x_1\right| \vee \left|x_2\right|, \left|x_1 - x_2\right|),$$
$$\forall (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times U, \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\sup_{(t,u) \in \mathbb{R}^+ \times U} \left|f\left(t, 0, u\right)\right| \equiv f_0 < \infty.$$

Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble

$$\mathbb{E}(t,x) = \{(Z^0.Z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ tq } Z^0 \geq f\,(t,x,u)\,,\ Z = b\,(t,x,u)\,,\ u \in U\}.$$

L'hypothèse suivante donne une certaine compatibilité entre le système de contrôle et la fonction coût

(C3) Pour tout $t \in [0,T]$, la propriété Cesari suivante est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{co}\mathbb{E}(t, B_\delta(x)) = \ \mathbb{E}(t,x).$$

Où $B_\delta(x)$ la boule de centre x et de rayon δ; $\overline{co}(\mathbb{E})$ représente l'enveloppe convexe fermé de l'ensemble $\mathbb{E}$ (la plus petit ensemble convexe fermé contenant $\mathbb{E}$).

Il est clair que, si l'hypothèse **(C3)** est vérifiée, alors $\mathbb{E}(t,x)$ est convexe fermé.

Théorème 3.2.1 *Supposons que $M \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé non vide tels que $\mathcal{U}_{ad}^M\left([0,T]\right) \neq \emptyset$. Alors sous les hypothèses **(C1)-(C3)**, Le problème (P) admet au moins une solution optimale.*

Preuve. Soit $\{u_n\} \in \mathcal{U}_{ad}^M\left([0,T]\right)$ est une suite minimisant. D'après théorème (2.3.1)

$$\mid x_n(t) \mid \leq \exp(Kt)(1+ \mid x_0 \mid) - 1 \ ,t \in [0,T] \quad , \quad n \geq 1 \tag{3.2.1}$$

Et pour tout $0 \leq \tau < t \leq T$,

$$\begin{aligned} \mid \quad & x_n(t) - x_n(\tau) \mid = \mid x(t, x_0, u_n(.)) - x(\tau, x_0, u_n(.)) \mid \\ \leq \quad & [\exp(K(t-\tau)) - 1][1 + x(\tau, x_0, u_n(.))] \\ \leq \quad & [\exp(K(t-\tau)) - 1] \exp(K\tau)(1+ \mid x_0 \mid) \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $\{x_n(.)\}$ est uniformément bornée et équicontinue. Donc d'après théorème Arzela-Ascoli est converge vers $\overline{x}$ dans $C([0,T];\mathbb{R}^n)$.

D'autre part :

$$\mid b(t, x_n(t), u_n(t)) \mid \leq K(1+ \mid x_n(t) \mid \leq K \exp(Kt)(1+ \mid x_0 \mid)$$

D'après (3.2.1) et (C2), on a :

$$\begin{aligned} f(t,x_n(t),u_n(t)) &\leq \mid f(t,0,u_n(t)) \mid + \mid f(t,x_n(t),u_n(t)) - f(t,0,u_n(t)) \mid \\ &\leq f_0 + \omega(\mid x_n(t) \mid, \mid x_n(t) \mid) \\ &\leq f_0 + \omega(\exp(KT)(1+ \mid x_0 \mid), \exp(KT)(1+ \mid x_0 \mid)) \\ &\leq K, \text{ pour tout } t \in [0,T] \quad , \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Ci-après, $K > 0$ représente une constante générique qui pourrait être différent de linge à linge. Par conséquent, en extrayant une sous suite si nécessaire, nous pouvons suppose que

$$\begin{cases} f(.,x_n(.),u_n(.)) \overset{Faiblement}{\rightarrow} \overline{f}(.) \text{ au sens } \mathbb{L}^2([0,T],\mathbb{R}) \\ b(.,x_n(.),u_n(.)) \overset{Faiblement}{\rightarrow} \overline{b}(.) \text{ au sens } \mathbb{L}^2([0,T],\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Pour certains $\overline{f}(.)$ et $\overline{b}(.)$. En suite par théorème de Banach-Saks, nous avons

$$\begin{cases} \widetilde{f}_n(.) \triangleq \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(.,x_i(.),u_i(.)) \rightarrow \overline{f}(.) \qquad \text{fortement dans } \mathbb{L}^2([0,T],\mathbb{R}) \\ \widetilde{b}_n(.) \triangleq \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b(.,x_i(.),u_i(.)) \rightarrow \overline{b}(.) \qquad \text{fortement dans } \mathbb{L}^2([0,T],\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

D'autre part, de (C1) et la convergence de $x_n(.) \rightarrow \overline{x}(.)$ dans $C([0,T];\mathbb{R}^n)$,

On a :

$$\begin{aligned} &\mid \widetilde{b}_n(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b(t,\overline{x}(t),u_i(t)) \mid \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mid b(t,x_i(t),u_i(t)) - b(t,\overline{x}(t),u_i(t)) \mid \\ &\leq \frac{K}{n}\sum_{i=1}^{n} \mid X_i(t) - \overline{X}(t) \mid \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

uniformément dans $t \in [0,T]$. De même par (C2),

$$\begin{aligned} &\mid \widetilde{f}_n(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t,\overline{x}(t),u_i(t)) \mid \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mid f(t,x_i(t),u_i(t)) - f(t,\overline{x}(t),u_i(t)) \mid \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \omega(\mid x_i(t) \mid \vee \mid \overline{x}(t) \mid, \mid x_i(t) - \overline{x}(t) \mid) \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Uniformément dans $t \in [0,T]$. Ensuite, par la définition de $\mathbb{E}(t,x)$ on a :

$$\begin{pmatrix} f(t,x_i(t),u_i(t)) \\ b(t,x_i(t),u_i(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{E}(t,x_i(t)) \qquad i \geq 1, \;\; t \in [0,T]$$

donc, pour tout $\delta > 0$, il existe un $n_\delta > 0$ tq :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{f}_n(t) \\ \widetilde{b}_n(t) \end{pmatrix} \in \overline{co}\mathbb{E}(t, B_\delta(\overline{x}(t))), \quad n \geq n_\delta, \qquad t \in [0,T] \tag{3.2.3}$$

D'après (3.2.2) ,(3.2.3) et (C3) on a :

$$\begin{pmatrix} \overline{f}(t) \\ \overline{b}(t) \end{pmatrix} = \lim \begin{pmatrix} \widetilde{f}_n(t) \\ \widetilde{b}_n(t) \end{pmatrix} \in \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\mathbb{E}(t, B_\delta(\overline{x}(t))) = \mathbb{E}(t,\overline{x}(t))$$

Par lemme de Filippov(voir [6], page 102, corollaire 2.26), il existe un $\overline{u}(.) \in \mathcal{U}_{ad}^M\,([0,T])$ tq :

$$\overline{f}(t) \geq f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)), \qquad \overline{b}(t) = b(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)), \qquad t \in [0,T]\,.$$

Cela signifie $\overline{x}(.) = x^{x_0,\overline{u}(.)}(.) = x(t,x_0,\overline{u}(.))$. D'autre part, depuis

$$x_n(T) \equiv x(T,x_0,u_n(.)) \in M \;, \qquad n \geq 1$$

On a :

$$\overline{x}(T) \equiv x(T,x_0,\overline{u}(.)) \in M$$

Ce qui signifie que $\overline{u}(.) \in \mathcal{U}_{ad}^M\,([0,T])$. Enfin, par le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} J(\overline{u}) &\leq \int_0^T \overline{f}(s)ds \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^T \widetilde{f}_n(s)ds \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n J(u_i(.)) = \lim_{n\to\infty} J(u_n(.)) \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^M([0,T])} J(u) \end{aligned}$$

Cela signifie que $\overline{u}(.)$ est une solution optimale. ■

3.3 Un résultat d'Existence d'une solution optimale pour le cadre Linéaire-Convexe

Dans cette partie, sous certaines hypothèses de convexité, on démontre l'existence du contrôle optimal pour le problème (P) dans le cas où l'équation d'état du système est linéaire.

$$b(t,x,u) \equiv A(t)\,x + B(t)\,u,$$

Avec $A(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ des fonctions mesurables. En revanche f et h sont laissés dans le cadre générale.

Commençons par poser les hypothèses suivantes :

(D1) $A(.)$ et $B(.)$ sont des fonctions bornées.

(D2) $S(t) = \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in [0,T]$.

(D3) L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$ est convexe fermé, et les deux fonctions f et h sont convexes et il existe deux constantes c, $\delta > 0$ tels que

$$f(t,x,u) \geq \delta\,|u|^2 + K,\;\; h(x) \geq -K \tag{2.4.1}$$

(D3*) L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$ est convexe compact, et les deux fonctions f et h sont convexes.

Lorsque l'une des hypothèses (D3) ou (D3*) est supposé, le problème (P) est appelé un problème de contrôle optimal linéaire-convexe (LC), puisque le système contrôlé est linéaire et le coût fonctionnel est convexe.

Remarque 3.3.1 *Sous les hypothèses **D1-D3,** il convient de prendre l'ensemble des contrôles admissible, tout contrôle réalisable qui soit carré intégrable :*

$$\mathcal{U}_{ad}([0,T]) = \left\{ u(.) \in \mathcal{U}_r([0,T]) \, ; \; \int_0^T |u(t)|^2\, dt < +\infty \right\}.$$

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses **D1-D2** avec **D3** où **D3*,** si le Problème (P) est fini, alors il admet au moins une solution optimale dans* $\mathcal{U}_{ad}([0,T])$.

Preuve. Supposons que les hypothèses **D1, D2** et **D3** sont satisfaites. Supposons aussi que (P) est fini et soit $\{u_n(.)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_{ad}([0,T])$ une suite minimisant de (P) :

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n(.)) = \inf_{u(.)\in\mathcal{U}_r[0,T]} J(u(.)),$$

D'après (2.4.1) on a :

$$\begin{aligned}\delta\int_0^T |u_n(t)|^2\,dt + KT &\leq \int_0^T f(t,x^{u_n}(t),u_n(t))\,dt + h(x^{u_n}(T)) - h(x^{u_n}(T))\\ &\leq J(u_n)+K\\ &\leq J(u_0)+K\end{aligned}$$

Donc il existe une constante C tel que

$$\sup_n \int_0^T |u_n(t)|^2\,dt \leq C$$

Ainsi la suite $\{u_n(.)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $\mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$. Donc il existe une sous-suite qu'on note aussi par $\{u_n(.)\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans $\mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ c'est à dire :

$$u_n(.) \overset{Faiblement}{\rightarrow} \bar{u}(.)\, dans\ \mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$$

D'après le Lemme de Mazur, il existe $\alpha_{in} \geq 0$ tels que $\sum_{i\geq 1}\alpha_{in} = 1$ et

$$\tilde{u}_n(.) = \sum_{i\geq 1}\alpha_{in}u_{n+i}(.) \overset{fortement}{\rightarrow} \bar{u}(.) \text{ au sens } \mathbb{L}^2([0,T];\mathbb{R}^n).$$

D'où il existe une sous suite

$$\tilde{u}_{n_k}(t) = \sum_{i\geq 1}\alpha_{in_k}u_{n+i}(t) \overset{p.s}{\rightarrow} \bar{u}(t) \text{ presque surement } t\in[0,T].$$

De l'hypothèse $(H3)$, U est un convexe fermé, on déduit que $\bar{u}(t) \in \mathcal{U}_{ad}([0,T])$. Notons par $\bar{x}(.)$ la solution correspondante à $\bar{u}(t)$. Ainsi, et

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t),\ t\in[0,T)\\ \bar{x}(0) = x_0,\end{cases}$$

Par ailleurs, comme le système est linéaire, nous avons $\dot{x}^{\bar{u}_n(.)}(.) = \sum\limits_{i\geq 1} \alpha_{in} x^{u_{n+i}(.)}(.)$ satisfait à

$$\begin{cases} \dot{x}^{\bar{u}_n(.)}(t) = A(t)\, x^{\bar{u}_n(.)}(t) + B(t)\, \tilde{u}_n(t)\,, \ t \in [0, T) \\ x^{\bar{u}_n(.)}(0) = x_0, \end{cases}$$

La différence nous donne

$$\begin{cases} \dot{x}^{\bar{u}_n(.)}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = A(t)\left(x^{\bar{u}_n(.)}(t) - \bar{x}(t)\right) + B(t)\left(\tilde{u}_n(t) - \bar{u}(t)\right), \ t \in [0, T) \\ x^{\bar{u}_n(.)}(0) - \bar{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Appliquons le lemme de Gronwall, on obtient qu'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\left\|x^{\bar{u}_n}(.) - \bar{x}(.)\right\|_\infty < c \int_0^T \left|\tilde{u}_n(t) - \bar{u}(t)\right|^2 dt$$

Le passage à la limite nous amène à ce que

$$\sum_{i\geq 1} \alpha_{in} x^{u_{n+i}(.)}(.) = x^{\bar{u}_n}(.) \overset{\|.\|_\infty}{\rightarrow} \bar{x}(.)\,.$$

Il reste à vérifier que $(\bar{u}(.), \bar{x}(.))$ est une paire optimale.

D'après les hypothèses de continuité et de convexités sur f et h nous avons,

$$\begin{aligned} J(\bar{u}(.)) &= \lim_{n\to\infty} J\left(x^{\tilde{u}_n(.)}(T)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T f\left(t, \sum_{i\geq 1} \alpha_{in} x^{u_{n+i}(.)}(t), \sum_{i\geq 1} \alpha_{in} u_{n+i}(t)\right) + h\left(\sum_{i\geq 1} \alpha_{in} x^{u_{n+i}(.)}(T)\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha_{in} \left(\int_0^T f\left(t, x^{u_{n+i}(.)}(t), \sum_{i\geq 1} \alpha_{in} u_{n+i}(t)\right) + h\left(x^{u_{n+i}(.)}(T)\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha_{in} J(u_{n+i}(.)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha_{in} \max_{i\geq 1} J(u_{n+i}(.)) \\ &= \lim_{n\to\infty} J(u_{n+i_0}(.)) \\ &= \inf_{u(.)\in \mathcal{U}_{ad}[0,T]} J(u(.)) \end{aligned}$$

■

3.3.1 Application au Problème Linéaire-quadratique

Un cas particulier est celui dans lequel les deux fonctions f et h sont des fonctions quadratiques convexes. Pour tout $(x_0, u(.)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{L}^2([0,T]; \mathbb{R}^m)$. Nous considérons un système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); t \in [0,T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Et la fonctionnelle coût est quadratique :

$$\begin{aligned} J(u\ (\cdot)) = \textstyle\int_0^T \frac{1}{2} \left(\langle Q(t)\,x(t), x(t) \rangle + \langle R(t)\,u(t), u(t) \rangle \right) dt \\ + \frac{1}{2} \langle Gx(T), x(T) \rangle . \end{aligned}$$

Les coefficients $A(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}, Q(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ et $R(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^{m\times m}$ sont des fonctions mesurables et $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique.

On a besoin d'imposer les hypothèses suivantes.

(K1) Les fonctions $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont continués.

(K2) Les coefficients de la fonction de coût satisfont à :

$$\text{i)} \begin{cases} Q(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n\times n}), \\ R(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n\times n}), \text{ tq,} \\ G \in \mathbb{R}^{n\times n}, \end{cases}$$

ii) $\forall t \in [0,T]$,

$$R(t) \geq \epsilon \mathbf{I}_m, Q(t) \geq 0, \text{et } G \geq 0.$$

Pour une certaine constante $\epsilon > 0$. $\mathbf{I}_m$ est la matrice identité d'ordre m.

Remarque 3.3.2 *Sous les hypothèses **(K1)-(K2)**, d'après le résultat d'existence Théorème (2.3.1), pour tout* $u(\cdot) \in \mathbb{L}^2([0,T]; \mathbb{R}^m)$, *l'équation* (3.3.1) *admet une solution unique* $x(\cdot) = x^{x_0, u\ (\cdot)}(\cdot)$, *et la fonctionnelle coût* $J(u\ (\cdot))$ *est bien définie.*

D'après la remarque précédente, on peut définir l'ensemble des contrôles admissibles comme suit :

$$U_{ad}\left([s,T]\right)=\mathbb{L}^2\left(s,T;\mathbb{R}^m\right)$$

Le problème de contrôle optimal LQ standard peut être énoncé comme suit.

Problème(LQ). Trouver un contrôle $\bar{u}^{x_0}\left(\cdot\right)\in\mathbb{L}^2\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^m\right)$ tel que :

$$J\left(\bar{u}^{x_0}\left(\cdot\right)\right)=\inf_{u(\cdot)\in\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{R}^m)}J\left(u\left(\cdot\right)\right). \tag{3.3.2}$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité de la solution optimale du Problème (LQ) sous les hypothèses **(K1)-(K2),** en particulier, l'existence est assurée par le Théorème (3.3.1) et l'unicité provient de la stricte convexité de $J\left(s,x_0,u\ \left(\cdot\right)\right)$ en $u\ \left(\cdot\right).$

Théorème 3.3.2 *Sous les hypothèses **(K1)-(K2),** le Problème (LQ) admet un unique contrôle optimal $\bar{u}^{s,y}\left(\cdot\right)$, pour toute paire initiale donnée $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$.*

Preuve. On commence par l'existence. Soit $x_0\in\mathbb{R}^n$, il est claire que sous l'hypothèse **(K2),** pour tout $u\left(\cdot\right)\in\mathbb{L}^2\left(0,T;\mathbb{R}^m\right)$

$$J\left(u\left(\cdot\right)\right)>0.$$

Ainsi

$$\inf_{u(\cdot)\in\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{R}^m)}J\left(u\left(\cdot\right)\right)\geq 0.$$

Le Problème (LQ) est donc fini. Ainsi, d'après le résultat d'existence Théorème (3.3.1), le Problème (LQ) admet au moins une solution optimale. A présent on vérifie l'unicité de la solution optimale. Soient $u\ \left(\cdot\right),v\left(\cdot\right)\in\mathbb{L}^2\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^m\right)$ et $\lambda\in\left[0,1\right]$. On a $x^{\lambda u(\cdot)+(1-\lambda)v(\cdot)}\left(\cdot\right)=\lambda x^{u(\cdot)}\left(\cdot\right)+\left(1-\lambda\right)x^{v(\cdot)}\left(\cdot\right).$

$$\begin{aligned}
& J\left(\lambda u\ \left(\cdot\right)+\left(1-\lambda\right)v\left(\cdot\right)\right)\\
= & \int_0^T\frac{1}{2}\left(\left\langle Q\left(t\right)x^{\lambda u\ (\cdot)+(1-\lambda)v(\cdot)}\left(t\right),x^{\lambda u\ (\cdot)+(1-\lambda)v(\cdot)}\left(t\right)\right\rangle\right.\\
& +\left.\left\langle R\left(t\right)\left(\lambda u\ \left(t\right)+\left(1-\lambda\right)v(t)\right),\lambda u\ \left(t\right)+\left(1-\lambda\right)v\left(t\right)\right\rangle\right)dt\\
& +\frac{1}{2}\left\langle Gx^{\lambda u\ (\cdot)+(1-\lambda)v(\cdot)}\left(T\right),x^{\lambda u\ (\cdot)+(1-\lambda)v(\cdot)}\left(T\right)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
& J\left(\lambda u\ \ (\cdot)+(1-\lambda)\, v\,(\cdot)\right) \\
= & \int_s^T \frac{1}{2}\left(\left\langle Q\,(t)\left(\lambda x^{u(\cdot)}\,(t)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(t)\right), \lambda x^{u(\cdot)}\,(t)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(t)\right\rangle\right. \\
& +\left\langle R\,(t)\left(\lambda u\ \ (t)+(1-\lambda)\, v\,(t)\right), \lambda u\ \ (t)+(1-\lambda)\, v\,(t)\right\rangle)\, dt \\
& +\frac{1}{2}\left\langle G(\lambda x^{u(\cdot)}\,(T)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(T)), \lambda x^{u(\cdot)}\,(T)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(T)\right\rangle. \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (**K2**), on a

$$\begin{aligned}
& \left\langle Q\,(t)\left(\lambda x^{u(\cdot)}\,(t)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(t)\right), \lambda x^{u(\cdot)}\,(t)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(t)\right\rangle \\
\leq\ & \lambda x^{u(\cdot)}\,(t)^{\top} Q\,(t)\, x^{u(\cdot)}\,(t)+(1-\lambda)\left(x^{v(\cdot)}\,(t)\right)^{\top} Q\,(t)\, x^{v(\cdot)}\,(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle G(\lambda x^{u(\cdot)}\,(T)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(T)), \lambda x^{u(\cdot)}\,(T)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(T)\right\rangle \\
\leq\ & \lambda x^{u(\cdot)}\,(T)\, G x^{\top u(\cdot)}\,(T)+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(T)^{\top} G x^{v(\cdot)}\,(T),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\langle R\,(t)\left(\lambda u\ \ (t)+(1-\lambda)\, v\,(t)\right), \lambda u\ \ (t)+(1-\lambda)\, v\,(t)\right\rangle \\
<\ & \lambda u\,(t)^{\top} R\,(t)\, u\ \ (t)+(1-\lambda)\, v\,(t)^{\top} R\,(t)\, v\,(t).
\end{aligned}$$

Donc (3.3.3) devient

$$\begin{aligned}
& J\left(\lambda u\ \ (\cdot)+(1-\lambda)\, v\,(\cdot)\right) \\
< & \int_s^T \frac{1}{2}\left(\lambda x^{u(\cdot)}\,(t)^{\top} Q\,(t)\, x^{u(\cdot)}\,(t)\right. \\
& +(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(t)^{\top} Q\,(t)\, x^{v(\cdot)}\,(t) \\
& \left.+\lambda u\,(t)^{\top} R\,(t)\, u\,(t)+(1-\lambda)\, v\,(t)^{\top} R\,(t)\, v\,(t)\right) dt \\
& +\frac{1}{2}\left(\lambda x^{u(\cdot)}\,(T)^{\top} G x^{u(\cdot)}\,(T)\right. \\
& \left.+(1-\lambda)\, x^{v(\cdot)}\,(T)^{\top} G x^{v(\cdot)}\,(T)\right) \\
= & \lambda J\,(u())+(1-\lambda)\, J\,(v()).
\end{aligned}$$

D'où la stricte convexité de $J\,(s, x_0, u\,(\cdot))$. Ce qui assure l'unicité de la solution optimale.

■

Conclusion

Notre mémoire expose en détails quelques résultats d'existence pour une classe de problèmes de contrôle optimale assez générale. La réalisation de ce mémoire fut une expérience très enrichissante pour nous qui nous a permis d'acquérir plusieurs connaissances sur la théorie du contrôle optimal.

Pendant la réalisation de ce mémoire, nous avons constaté qu'il y a une possibilité d'étendre ces résultats pour des modèles plus complexes, à savoir, des modèles issus de la théorie des jeux différentielles où l'équation d'état est contrôlée par une multitude de contrôleurs. Nous espérons que nous aurons la possibilité de poursuivre ce travail pouréventuellement des études de troisième cycle.

Bibliographie

[1] F. Paulin, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Notes de cours, École Normale Supérieure, http://www.fimfa.ens.fr/fimfa/IMG/File/cours/polyanalyse12009.pdf .

[2] Okada, N. "*On the Banach-Saks Property.*" Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 60, 246-248, 1984.

[3] A. Münch, Introduction à la théorie du contrôle, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand, Hiver2016, http://math.univ-bpclermont.fr/~munch/cours_ecole_doctorale_MUNCH2016.pdf.

[4] M. Bergounioux, Optimisation et contrôle des systèmes lineaires, Dunod, Paris, 2001, ISBN 2 10 005626 3.

[5] L. Schwatrz, *Analyse II : Calcul différentiel et équations différentielles*, Collection Enseignement des Sciences, Hermann. (1997)

[6] X. Li, J. Yong, *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*, Birkhduser, Boston, 1995.

[7] K. Yosida, Functional Analysis. 6e édition., Berlin: Springer-Verlag (1980).

[8] E, Roxin, The existence of optimal controls, Michigan Math. J., 9, 109-119. (1962).

[9] J. Yong and X.Y. Zhou, Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer-Verlag, New York. (1999).

[10] E. Trelat, Controle optimal: théorie et applications, Vuibert, Paris, 2005.

[11] J. Yong, Differential Games: A Concise Introduction. World Scienti. . . c Publisher, Singapore, 2015.