Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Salhi Sara

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Systèmes dynamiques

Thème

Les dérivations des algèbres de Lie et Hom-Lie

Soutenu publiquement le 21 Juin 2023 devant le jury composé de

Souad Azra	MCB	Université de Bordj Bou Arréridj	Président
Hadjer Adimi	MCB	Université de Bordj Bou Arréridj	Encadrant
Khadra Dekkar	MCB	Université de Bordj Bou Arréridj	Examinateur

Promotion 2022/2023

Remerciements

*Avant tout on remercie " **Allah**" tout puissant pour la volonté, la patience que nous a données d'accomplir ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude à ma directrice de mémoire, " **Mme HADJER ADIMI** ", docteur à l'université Mohamed EL Bachir EL Ibrohimi, pour sa patience, sa disponibilité, et surtout pour ses conseils avisés qui ont alimenté ma réflexion, pour mon aide, pour le du temps qu'elle a consacré et pour son encadrement éclairé tout au long de la rédaction de la mémoire.*

Tous nos remerciements aux membres du jury d'avoir accepté de corriger et d'étudier ce travail.

À tous les enseignants du département des mathématiques de l'université Mohamed El Bachir El IBrahimi, pour leur aide dans le transmission d'un trésor inestimable qui est la connaissance.

Je tiens à exprimer ma gratitude à tous ceux que ont contribué directement et indirectement à la réalisation de cette recherche.

Que Dieu vous bénisse tous.

⋆ Dédicace ⋆

Je dédie le fruit de cet effort à :
Chers parents : mon père "Farid Salhi" et ma mère "Nadjla Tabbi"
pour les sacrifices qu'ils ont consentis, leur soutien constant
et la profondeur de leur patience tout au long de mes années d'études.
Mes sœurs : "Khadidja", "Asma",
et "Bouchra" pour d'avoir toujours encouragée et soutenue.
Mon seul frère : "ELHadj".
Nos petits : "Mohamed", "Takwa".
Mes meilleures amies : "Meriem, Amira, Randa et Donia"
qui a partagé tous les bons souvenirs avec moi.

⋆ Sara ⋆

Table des matières

Introduction

Les algèbres sont une branche de mathématiques qui dans sa partie classique est consacrée à la résolution des équations algébriques via des formules explicites, tandis que la partie moderne explore les structures (groupes, anneaux, corps, idéaux...), prolongées par l'algèbre linéaire et multilinéaire et l'algèbre topologique. L'une des algèbres classiques la plus étudiée est l'algèbre de Lie nommée a l'honneur du mathématicien norvégien Sophus Lie, son premier article a été publié en 1869 [4], sur les nombres imaginaires. La théorie des groupes et algèbres de Lie commence à 1873, elles donnent la naissance à la topologie en mathématiques mais aussi peuvent être vu dans des applications en physique moderne : mécanique quantique et théorie de relativité, les travaux de Lie seront pour suivis par beaucoup des mathématiciens célèbres comme E. Cartan, W. killing , C. Chevalley, [18]... ect. Les algèbres de Lie sont liées à d'autres algèbres classique telles que les algèbres associatives, les algèbres de Jordan..., et elles reste encore très active. Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire appelé crochet de Lie, antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi et est un cas particulier d'algèbre sur un corps. De nombreuses propriétés géométriques et algébriques des algèbres de Lie, telles que le calcul de la dimension de leurs orbites ou la détermination de leurs premiers espaces de cohomologique, peuvent être étudiées en se basant sur la connaissance de l'espace des dérivations [5]. Un endomorphisme linéaire d de L est appelé une dérivation de L s'il satisfait $d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)],\ \forall x, y \in L.$ Il est facile de voir que l'ensemble $Der(L)$ de toutes les dérivations de L est un sous-espace vectoriel de plus, $Der(L)$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ pour le crochet $[d, d'] = d \circ d' - d' \circ d,\ \forall d, d' \in Der(L).$

La notion d'algèbre Hom-Lie est une généralisation des algèbres de Lie, qui est apparue en physique et étudiées par Hartwig Larsson et Silvestrov[11], une Hom algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire antisymétrique (appelée généralement crochet) $[-,-] : L \times L \to L$ vérifiant pour tous $x, y, z \in L$, $\circlearrowleft_{x,y,z} [\alpha(x), [y, z]] = 0$ c'est la Hom-identité de Jacobi, dans le cas ou $\alpha = id$, $(L, [-,-])$ est une algèbre de Lie.

Le but de ce mémoire est de calculer les dérivations des algèbres de Lie et les algèbres Hom-Lie en dimension finie, ce mémoire est organisé et conçu comme suit :
En commençant, par une introduction qui explique et motive le choix du sujet.

Dans le premier chapitre nous rappelons les définitions et les propriétés de base, est fait de quatre section, nous étudions les structure suivants anneaux, module, espace vectoriel, algèbres (définitions, morphisme d'objets, idéal d'un objets...).
Le deuxième chapitre est consacré aux dérivations des algèbres de Lie en dimension 2, 3 et 4. D'abord, nous donnons la définition d'algèbres de Lie, après avoir donné quelques exemples classique et quelques propriétés. Ensuite nous étudions les variétés algébrique et identifie les algèbres de Lie à ces constantes de structure, on donne les équations qui permet de détermine les dérivations des algèbres de Lie.
Dans Le troisième chapitre on donne les dérivations des algèbres de Hom-Lie. On rappelle d'abord des notions de base sur les algèbres Hom-Lie, on donne les équations qui permettent de déterminer les dérivations des algèbres de Hom-Lie en dimension 3 puis calculer ces dérivations.
Ce mémoire est illuté par un Annexe qui explique la méthode de calcule en utilisant le logiciel Mathematica .
Finalement, on terminera le mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Structure de $\mathbb{K}-$Algèbre

1.1 Objets, sous-objets et morphismes d'objets

Nous commençons par rappeler brièvement les définitions des notions de base.

1.1.1 Structure d'anneaux

Définition 1.1 *Soit A un ensemble non vide muni de deux lois de composition intérnes l'un notée $(+) : A \times A \to A$ et l'autre $(\cdot) : A \times A \to A$, et appelées repectivement l'addition et la multiplication, on dit que $(A, +, \cdot)$ est un anneau si et seulement les conditions suivantes sont verifiées :*

1) $(A, +)$ *est une groupe commutatif, c'est à dire vérifie les axiomes :*

- *La Loi $(+)$ est associative :*
$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ pour tous } x, y, z \in A.$$
- *La Loi $(+)$ est commutative :*
$$x + y = y + x \text{ pour tous } x, y \in A.$$
- *Il existe un élément neutre 0 ou 0_A pour l'addition de A, c'est à dire que pour tout $x \in A$ on a : $x + 0 = 0 + x = x$.*
- *A chaque élément $x \in A$ est associé son opposé, ou son négatif $(-x) \in A$ satisfait :*
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

2) *La multiplication $(\cdot)$ est distributive a droit et a gauche par rapport à l'addition $(+)$, c'est à dire : $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,*
et $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$ pour tous $x, y, z \in A$.

3) *La multiplication $(.)$ est associative :*
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \text{ pour tous } x, y, z \in A.$$

Remarque 1.1 *Si $1 \cdot x = x$ alors l'anneau A est unitaire.*

Exemple 1.1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *et* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *sont des anneaux commutatif.*

Sous anneaux

Définition 1.2 *Soit* $(A, +, \cdot)$ *un anneau,* B *est un sous ensemble de* A*, on dit que* B *est un sous anneau de* A *si et seulement si :*

1) $(B, +)$ *est un sous-groupe de* $(A, +)$*, c'est à dire :*
- $B \neq \phi$*, c-à-d* $O_A \in B$,
- $\forall x, y \in B,\ x - y \in B.$

2) B *est stable pour la multiplication :* $\forall x, y \in B,\ x \cdot y \in B.$

3) $1_A \in B.$

Morphisme d'anneaux

Définition 1.3 *Soient* A*,* B *deux anneaux et* $f : A \to B$ *une application, on dit que* f *est une morphisme d'anneaux si et seulement si :*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(x.y) &= f(x).f(y), \\ f(1_A) &= 1_B. \end{aligned}$$

Pour tous $x, y \in A.$

Idéal d'un anneau

Définition 1.4 *Soient* $(A, +, \cdot)$ *un anneau et* I *une partie de* $A.$ *On dit que* I *est un idéal de l'anneau* A *si seulement si :*

1) $(I, +)$ *sous groupe de* $(A, +).$

2) *Pour tous* $a \in A$ *et* $i \in I$:

$$\begin{cases} a \times i \in I, \\ \text{et } i \times a \in I. \end{cases}$$

1.1.2 Structure d'un module

Définition 1.5 ***(Module à gauche)*** *Soit* A *un anneau (commutatif non nul), un module* M *sur* A *ou plus simplement un* $A-$*module est un ensemble muni de deux opérations, la premiére* $M \times M \to M$ *étant notée* $(+)$ *et appelée l'addition, et la seconde* $A \times M \to M$ *étant notée* $(\cdot)$ *et appelée la multiplication externe telles que :*

1) $(M, +)$ *est un groupe abélien.*

2) M *muni de la multiplication* $(\alpha, x) \to \alpha \cdot x$ *ou* αx *qui vérifie :*

► *L'associativité mixte :*

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \text{ pour tous } \alpha, \beta \in A \text{ et } x \in M.$$

► *La double distributivité :*

$$(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x \text{ pour tous } \alpha,\beta\in A \text{ et } x\in M,$$
$$\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y \text{ pour tous } \alpha\in A \text{ et } x,y\in M.$$

► $1_A\cdot x=x$ *pour tous* $x\in M$.

Remarque 1.2 *De la même manière on peut définir un module à droit dont la seconde opération est donné par :* $M\times A\to M$. *Dans notre travail on va considérer le module à gauche.*

Exemple 1.2 *Un groupe abélien est un module sur* $\mathbb{Z}$.

Sous Module

Définition 1.6 *Soient* A *un anneau et* M *un* $A-$*module et* $N\subseteq M$, *on dit que* N *est un sous module de* M *si et seulement si :*

1) $(N,+)$ *est un sous-groupe de* $(M,+)$.
2) N *stable pour la multiplication extérne : pour tout* $\alpha\in A$ *et tout* $x\in N$, *on a* $\alpha\cdot x\in N$.

Morphisme de Module

Définition 1.7 *Soient* M *et* N *deux modules sur un anneau* A, *un morphisme de* A *module ou plus simplement un morphisme* $f:M\to N$ *est une application vérifiant :*

1) $f:(M,+)\to(N,+)$ *est un morphisme de groupes.*
2) *Pour tout* $\alpha\in A$ *et* $x\in M$, *on a* $f(\alpha x)=\alpha f(x)$.

Idéal d'un Module

Définition 1.8 *Soient* M *un* $A-$*module et* I *une partie de* M, *on dit que* I *est un idéal de* A *si :*

$$a\cdot x\in I \text{ pour tous } a\in I \text{ et } x\in M.$$

1.1.3 Espace Vectoriel

Définition 1.9 *On considère un ensemble* E *muni d'une loi de composition intérne noté* $(+)$ *et définit par :*

$$+:E\times E\longrightarrow E,$$
$$(x,y)\longrightarrow x+y.$$

Et muni d'une loi de composition extérne $(\cdot)$ *(sur le corps* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*)*

$$\cdot:\mathbb{K}\times E\longrightarrow E,$$
$$(\lambda,x)\longrightarrow\lambda\cdot x.$$

On dit que $(\boldsymbol{E},+,\cdot)$ *est un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$ *si :*

1) $(\boldsymbol{E},+)$ *est une groupe commutatif.*
2) *La loi extérne possède les propriétés suivantes :*

- $\forall\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{K},\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{E}:\ (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x},$
- $\forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{K},\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{E}:\ \boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{y},$
- $\forall\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{K},\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{E}:\ (\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\mu})\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x}),$
- $\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{E}:\ \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}.$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ *sont appelés scalaires.*

Exemple 1.3 *Un module sur un corps commutatif est un espace vectoriel.*

1.1.4 Notion d'algèbres

Définition 1.10 *Soit* $\boldsymbol{K}$ *un anneau commutatif, on appelle une* $\boldsymbol{K}-$*algèbres un* $\boldsymbol{K}-$*module* $\boldsymbol{A}$ *muni d'une loi de composition interne* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rightarrow\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ *appelée multiplication et notée* $(\cdot)$*telle que l'application*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{A},\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rightarrow\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}.\end{gathered}$$

soit $\boldsymbol{K}-$*bilinéaire.*

Si $\boldsymbol{K}$ (notée $\mathbb{K}$) est un corps commutatif on aura la définition suivante :

Définition 1.11 *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif, on appelle* $\mathbb{K}-$*algèbres tout* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* $\boldsymbol{A}$ *muni d'un loi de composition interne* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rightarrow\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ *appelée multiplication et notée* $(\cdot)$*telle que l'application*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{A},\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rightarrow\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}.\end{gathered}$$

soit $\mathbb{K}-$*bilinéaire.*

- *On dit que l'algèbre est associative si la multiplication est associative .*
- *On dit que l'algèbre est commutative si la multiplication est commutative.*
- *On dit que l'algèbre est unitaire si la multiplication possède un élément neutre.*
- *Toute algèbre associative unitaire est un anneau.*

Exemple 1.4 1) $\mathbb{K}$ *est une* $\mathbb{K}-$*algèbres.*

2) *Soit* $\boldsymbol{A}$ *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$*, alors l'espace* $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{A})$ *des applications* $\mathbb{K}-$*linéaire de* $\boldsymbol{A}$ *dans lui même muni de la composition des applications est une* $\mathbb{K}-$*algèbres unitaire.*

Chapitre 2

Généralités sur les algèbres de Lie

Dans ce chapitre, nous donnons et rappelons les notions fondamentales des algèbres de Lie de dimension finie, puis présenter les dérivations de cette algèbres en dimension inférieur ou égal a 4.

2.1 Algèbres de Lie

2.1.1 Notion d'algèbres de Lie

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Définition 2.1 *Une $\mathbb{K}$ algèbre de Lie est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\boldsymbol{L}$ muni d'une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} [-,-] : \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L} &\longrightarrow \boldsymbol{L}, \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\longrightarrow [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]. \end{aligned}$$

appelée "crochet de Lie" et vérifiant les axiomes :

▶ *Bilinéarité pour tout $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{K}, \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$:*

- *bilinéarité à gauche :*

$$[\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}] + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]. \tag{2.1}$$

- *bilinéarité à droite :*

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}] + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]. \tag{2.2}$$

▶ *L' antisymétrique :*

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = -[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]. \tag{2.3}$$

Pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$.

► *L' identité de Jacobi :*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{2.4}$$

Pour tous $x, y, z \in L$.

Remarque 2.1 1) *L' identité de Jacobi peut s'écrire sous la forme* $\circlearrowleft_{x,y,z} [x, [y, z]] = 0$.

2) *L' antisymétrique* $[x, y] = -[y, x]$ *est équivalent à* $[x, x] = 0$.
En effet, $\forall\ x, y \in L$, *on a :*

$$[x + y, x + y] = 0.$$

Par bilinéarité, on a :

$$[x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0.$$

Comme $[x, x] = [y, y] = 0$*, alors*

$$[x, y] + [y, x] = 0.$$

Ainsi,

$$[x, y] = -[y, x].$$

3) *L' identité de Jacobi peut se réécrire sous la forme :*

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

2.1.2 Quelques exemples classiques d'algèbre de Lie

1) Toute $\mathbb{K}$ espace vectoriel L, muni du crochet nul $[x, y] = 0$ pour tous $x, y \in L$ est une algèbre de Lie.
Une algèbre de Lie L, tel que $[x, y] = 0$ pour tous $x, y \in L$ est dite abélienne ou commutative.

2) Soit l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni du crochet :

$$[-, -] : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

telle que pour tous A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$[A, B] = AB - BA,$$

est une algèbres de Lie, elle est notée $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

3) Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\boldsymbol{Y} = (y_1,\ y_2,\ y_3) \in \mathbb{R}^3$.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ orienté par sa structure euclidienne canonique et muni d'un crochet $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}$ qui est défini par :

$$\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1).$$

est une algèbre de Lie notée par $\mathbb{R}^3_\wedge$.
L'addition de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ est définie par :

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

En effet,
1) On montre que $\wedge$ est bilinéaire :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X} + \lambda \boldsymbol{X}') \wedge \boldsymbol{Y} &= ((x_2 + \lambda x_2')y_3 - (x_3 + \lambda x_3')y_2,\ (x_3 + \lambda x_3')y_1 - \\ &\quad (x_1 + \lambda x_1')y_3,\ (x_1 + \lambda x_1')y_2 - (x_2 + \lambda x_2')y_1) \\ &= (\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}) + \lambda(\boldsymbol{X}' \wedge \boldsymbol{Y}). \\ \boldsymbol{X} \wedge (\boldsymbol{Y} + \lambda \boldsymbol{Y}') &= (x_2(y_3 + \lambda y_3') - x_3(y_2 + \lambda y_2'),\ x_3(y_1 + \lambda y_1') - \\ &\quad x_1((y_3 + \lambda y_3'),\ (x_1(y_2 + \lambda y_2') - x_2(y_1 + \lambda y_1') \\ &= (\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}) + \lambda(\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}').\end{aligned}$$

Pour $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}' \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) On montre que $\wedge$ est anti-symétrique :

$$\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{X} = (x_2x_3 - x_3x_2,\ x_3x_1 - x_1x_3,\ x_1x_2 - x_2x_1) = (0, 0, 0).$$

$\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3$.
3) $\wedge$ vérifie l'identité de Jacobi :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X} \wedge (\boldsymbol{Y} \wedge \boldsymbol{Z}) + \boldsymbol{Y} \wedge (\boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{X}) + \boldsymbol{Z} \wedge (\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \wedge (y_2z_3 - y_3z_2,\ y_3z_1 - y_1z_3,\ y_1z_2 - y_2z_1) + (y_1, y_2, y_3) \\ &\wedge (z_2x_3 - z_3x_2,\ z_3x_1 - z_1x_3,\ z_1x_2 - z_2x_1) + (z_1, z_2, z_3) \wedge (x_2y_3 - x_3 \\ &\ y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= y(x_2z_2 + x_3z_3,\ x_3z_3 + x_1z_1,\ x_1z_1 + x_2z_2) - z(x_2y_2 + x_3y_3,\ x_3y_3 + \\ &\ x_1y_1,\ x_1y_1 + x_2y_2) + z(y_2x_2 + y_3x_3 + y_3x_2 + y_1x_1, y_1x_1 + y_2x_2) - x \\ &\ (y_2z_2 + y_3z_3,\ y_3z_3 + y_1z_1,\ y_1z_1 + y_2z_2) + x(z_2y_2 + z_3y_3,\ z_3y_3 + z_1y_1, \\ &\ z_1y_1 + z_2y_2) - y(z_2x_2 + z_3x_3,\ z_3x_3 + z_1x_1,\ z_1x_1 + z_2x_2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}^3$.

Proposition 1 ***(Algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre associative)*** *On peut associer a chaque $\mathbb{K}-$ algèbre associative $\boldsymbol{A}$ une algèbre de Lie dont le crochet est défini pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$ par : $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$.*

Démonstration 1 *Vérifions l'antisymétrique et l'identité de Jacobi :*
1) Le crochet est anti-symétrique :
Pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$,

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] &= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \\
&= -(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \\
&= -[\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}].
\end{aligned}$$

2) le crochet vérifié l'identité de Jacobi :
Pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A}$,

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]] + [\boldsymbol{y}, [\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}]] + [\boldsymbol{z}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]] &= (\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x}) \\
&+ (\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{y}) \\
&+ (\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{z}) \\
&= (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}) \\
&+ (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}) \\
&+ (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) \\
&= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \\
&+ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} \\
&+ \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} \\
&= \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

2.1.3 Sous algèbres de Lie et idéal

Définition 2.2 *Soit $\boldsymbol{L}$ une algèbre de Lie, $\boldsymbol{H}$ est un sous ensemble de L, on dit que $\boldsymbol{H}$ est une sous-algèbre (de Lie) de $\boldsymbol{L}$ si :*

- *$\boldsymbol{H}$ est un sous espace vectoriel de $\boldsymbol{L}$.*
- *Pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$, on a $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \in \boldsymbol{H}$.*

Exemple 2.1 1) *Soit $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}^*$, Les sous-ensembles suivants de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.*

- *$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle,*
- *$\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$,*
- *$\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$,*

— $\mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$, *l'ensemble des matrices diagonales de* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

2) *Tout sous espace d'un algèbre de Lie abélienne est une sous algèbre de Lie abélienne.*

Définition 2.3 *Soit L une algèbre de Lie, I est une sous ensemble de L, on dit que est un idéal de L si :*

▶ *I est un sous espace vectoriel de L.*

▶ *Pour tout $x \in I$ et tout $y \in L$ on a $[x, y] \in I$.*

Remarque 2.2 *Si I et J sont deux idéaux de l'algèbre de Lie L alors $I + J$, $I \cap J$ et $[I, J]$ sont encore des idéaux de L.*

2.1.4 Morphisme d'algèbre de Lie

Définition 2.4 *Soient L_1 et L_2 deux algèbres de Lie, et $\varphi : L_1 \to L_2$ une application linéaire. On dit que φ est un morphisme d'algèbres de Lie si :*

$$\forall\, x, y \in L_1, \quad \varphi([x, y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2.$$

— *L'application φ est un isomorphisme d'algèbres de Lie si de plus φ est bijective.*

— *Les algèbres de Lie L_1 et L_2 sont dites isomorphes s'il existe isomorphisme d'algèbres de Lie $\varphi : L_1 \to L_2$.*

2.1.5 Centre d'une algèbres de Lie

Définition 2.5 *Soit L une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. On appelle center de L et on le note $Z(L)$ l'ensemble :*

$$Z(L) = \{x \in L,\ \forall\, y \in L,\ [x, y] = 0\}.$$

Exemple 2.2 *On dit que L est une algèbre de Lie abélienne si $Z(L) = L$, c'est à dire, si le crochet de L est nul.*

2.1.6 Représentations et modules

Définition 2.6 *Une représentation de l'algèbre de Lie L, ou $L-$module est une paire (V, ρ), où V est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Autrement dit ρ est une application linéaire telle que :*

$$\forall x, y \in L, \quad \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) = \rho([x, y]).$$

Remarque 2.3 *En général, on définit plutôt un $L-$module (à gauche) comme étant un espace vectoriel V muni opération :*

$$L \times V \to V,$$
$$(x, v) \to x \cdot v.$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1) $(x, v) \to x \cdot v$ *est linéaire en* x *et en* v.
2) $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$ *pour tout* $x, y \in L$ *et* $v \in V$.

Exemple 2.3 *L'application :*

$$ad : L \to \mathfrak{gl}(L),$$
$$x \to ad_x(y) = [x, y].$$

définit une représentations de L *appelée la représentation adjointe.*

2.1.7 Algèbres de Lie quotient

Définition 2.7 *Soient* L *une algèbres de Lie et* I *un idéal de* L. *On muni l'espace vectoriel quotient* L/I *du crochet défini par :*

$$\forall\, x, y \in L : \; [x + I, y + I] = [x, y] + I.$$

2.1.8 Variétés des algèbres de Lie

Définition 2.8 *La dimension d'une algèbre de Lie est la dimension de l'espace vectoriel associé, lorsque la dimension de l'algèbre de Lie* L *est finie on peut définir une base, supposons en effet que la dimension de* L *est* n, *alors on prend* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *une base. On peut ainsi calculer le crochet de chaque élément de la base, il est obtenu par :*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k \quad pour\ i, j \in \{1, ..., n\}. \tag{2.5}$$

Les coefficients C_{ij}^k *sont appelés les constantes de structure.*

Exemple 2.4 *Les constantes de structure de* $sl_2(\mathbb{K})$ *par rapport à la base* $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ *avec :*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sont données par :

$[e_1, e_1] = 0,$

$[e_1, e_2] = e_1e_2 - e_2e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e_3,$
$[e_1, e_3] = e_1e_3 - e_3e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2e_1,$
$[e_2, e_1] = -[e_1, e_2] = -e_3,$
$[e_2, e_2] = 0,$
$[e_2, e_3] = e_2e_3 - e_3e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2e_2,$
$[e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = 2e_1,$
$[e_3, e_2] = -[e_2, e_3] = -2e_2,$
$[e_3, e_3] = 0,$
tel que :

$$\begin{aligned} C_{21}^3 &= -C_{12}^3 = -1, \\ C_{32}^2 &= -C_{23}^2 = -2, \\ C_{31}^1 &= -C_{13}^1 = 2. \end{aligned}$$

Les constantes de structures non mentionné sont nuls.

Proposition 2 *Les constantes de structure des lois d'algèbres de Lie vérifier le système d'équations suivants :*

$$L'antisym\acute{e}trique \ : \ \ C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}. \tag{2.6}$$

$$L'identit\acute{e}\ de\ Jacobi \ : \ \sum_{l=1}^{n} (C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s + C_{ij}^l C_{kl}^s) = 0 \tag{2.7}$$

$$\forall\, i, j, k, s \in \{1, ..., n\}.$$

Démonstration 2 *1) Soit* $(L, [-,-])$ *une algèbre de Lie de dimension* n*, le crochet de Lie peut être calculer pour chaque élément de la base* $B = \{e_1,\ e_2 ...,\ e_n\}$ *de la manière suivants :*

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\} \ \ (L'antisym\acute{e}trique),$$

alors : $$[e_i, e_j] + [e_j, e_i] = 0,$$
ce qui est équivalent à :

$$\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^k + C_{ji}^k) e_k = 0 \quad \forall\ i, j \in \{1, ..., n\},$$

comme $B = \{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ *est une base alors les coefficients de*

$$\sum_{k=1}^{n}(C_{ij}^k + C_{ji}^k)e_k = 0,$$

sont nuls c'est à dire :

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0 \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\},$$

d'où l'antisymétrique est donnée par le système suivante :

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}.$$

2) *Les constantes de structure* C_{ij}^k *par rapport à la base* $\{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ *de l'algèbre de Lie satisfait l'identité de Jacobi, qui est représentée pour tout* $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, *par :*

$$\begin{aligned}
\circlearrowleft [e_i, [e_j, e_k]] &= 0,\\
[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] &= 0,\\
[e_i, \sum_{l=1}^{n} C_{jk}^l e_l] + [e_j, \sum_{l=1}^{n} C_{ki}^l e_l] + [e_k, \sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l e_l] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} C_{jk}^l [e_i, e_l] + \sum_{l=1}^{n} C_{ki}^l [e_j, e_l] + \sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l [e_k, e_l] &= 0,\\
\sum_{l=1}^{n} C_{jk}^l \sum_{s=1}^{n} C_{il}^s e_s + \sum_{l=1}^{n} C_{ki}^l \sum_{s=1}^{n} C_{jl}^s e_s + \sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l \sum_{s=1}^{n} C_{kl}^s e_s &= 0,\\
\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s + C_{ij}^l C_{kl}^s)e_s &= 0,\\
\sum_{s=1}^{n}(\sum_{l=1}^{n}(C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s + C_{ij}^l C_{kl}^s))e_s &= 0,
\end{aligned}$$

et comme $B = \{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ *est une base de* L *alors :*

$$\sum_{l=1}^{n}(C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s + C_{ij}^l C_{kl}^s) = 0 \quad \forall\, i, j, k, s \in \{1, ..., n\},$$

par conséquent, l'identité de Jacobi équivalante au système polynomiales suivant :

$$\sum_{l=1}^{n}(C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s + C_{ij}^l C_{kl}^s) = 0 \quad \forall\, i, j, k, s \in \{1, ..., n\}.$$

Ainsi, l'ensemble des algèbres de Lie de dimension finie est munie d'une structure de variété algébrique plongée dans $\mathbb{K}^{n^3}$.

2.1.9 Dérivations

Définition 2.9 *Soit L une algèbre de Lie une dérivation D de L est une application $\mathbb{K}-$linéaire $D : L \to L$ qui vérifie :*

$$D([x,y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] \quad \textit{pour tout } x, y \in L. \tag{2.8}$$

Où de manière équivalente :

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) \quad \textit{pour tout } x, y \in L. \tag{2.9}$$

On note par $Der_{\mathbb{K}}(L)$ l'ensemble de dérivations de L.

Proposition 3 *Soit $D,\ E$ deux dérivations d'algèbre de Lie L, alors :*

1) La dérivation des sommes égal a la sommes des dérivation c'est à dire :

$$D(x+y,z) = D(x,z) + D(y,z) \quad \textit{pour tout } x, y, z \in L.$$

2) La dérivation de αxy est égal a α dérivation xy :

$$D(\alpha xy) = \alpha D(xy) \quad \textit{pour tout } x, y \in L,\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

3) $[D, E]$ est défini comme :

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D,$$

est une dérivation.

4) ad : $L \to L$ est une dérivation notée ad_x.

$$ad_x[y,z] = [x,[y,z]] \quad \textit{pour tout } x, y, z \in\ L.$$

Démonstration 3 *1)*

$$\begin{aligned} D(x+y,z) &= D(x+y)z + (x+y)D(z) \\ &= D(x)z + D(y)z + xD(z) + yD(z) \\ &= D(x)z + xD(z) + D(y)z + yD(z) \\ &= D(x,z) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} D(\alpha xy) &= D(\alpha x)y + \alpha x D(y) \\ &= \alpha D(x)y + \alpha x D(y) \\ &= \alpha(D(x)y + xD(y)) \\ &= \alpha D(xy). \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
[D,E](x,y) &= D\circ E(x,y) - E\circ D(x,y)\\
[D,E](x,y) &= D\circ(xE(y)+E(x)y) - E\circ(xD(y)+D(x)y)\\
&= D(x)E(y) + xD\circ E(y) + D\circ E(x)y + E(x)D(y)\\
&- E(x)D(y) - xE\circ D(y) - E\circ D(x)y - D(x)E(x)\\
&= xD\circ E(y) + D\circ E(x)y - xE\circ D(y) - E\circ D(x)y\\
&= [D,E]xy + x[D,E]y.
\end{aligned}$$

Dans cette partie, on définie et on explique quelques concepts importants concernant les dérivations intérieures.

2.1.10 Dérivation intérieure

Définition 2.10 *Soient L une algèbre de Lie, x un élément de L. L'application linéaire*

$$\begin{aligned}
ad_x :&L \longrightarrow L,\\
&y \longrightarrow [x,y]
\end{aligned}$$

est appelée dérivation intérieure de L.

Par l'identité de Jacobi,

$$\begin{aligned}
ad_x([y,z]) &= [x,[y,z]]\\
&= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]]\\
&= [[x,y],z] + [y,[x,z]]\\
&= [ad_x(y),z] + [y,ad_x(z)].
\end{aligned}$$

Pour tous $y, z \in L$.
Par conséquent, toute dérivation intérieure est bien une dérivation.
Le symbole $Inn(L)$ représente l'ensemble de toutes les dérivations intérieures de l'algèbre de Lie L.
Comme toute dérivation, une dérivation intérieures peut être représentée par une matrice. Soit maintenant L une algèbre de Lie de dimension n sur $\mathbb{K}$ avec $B = \{e_1, \ldots,\ e_n\}$ est une base. On choisit $k \in \{1, \ldots,\ n\}$ et on note $H = \mathfrak{h}_{ij}$ la matrice correspondante de la dérivation intérieure $ad(e_i) : L \longrightarrow L$, ainsi

$$ad(e_k)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{h}_{ij} e_j.$$

De plus, $[e_k,\ e_i] = \sum_{j=1}^{n} C_{ki}^{j} e_j$ est valide. Par conséquent, les éléments de H sont données par : $\mathfrak{h}_{ij} = C_{ki}^{j} = -C_{ik}^{j}$.

Exemple 2.5 *L'exemple le plus simple est sans doute celui de la dérivation de l'algèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_3(k)$, c'est à dire toutes les applications linéaires D : $\mathfrak{h}_3(k) \longrightarrow \mathfrak{h}_3(k)$ satisfaisant aux conditions suivantes $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ pour tout $x,\ y.$ Ici, les crochets sont données par $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3$, où $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ désigne une base. Les dérivations intérieures sont de la forme $ad(x).$ Alors,*

$$\begin{cases} ad_{e_1}(e_1) = 0, \\ ad_{e_1}(e_2) = e_3, \\ ad_{e_1}(e_3) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} ad_{e_2}(e_1) = -e_3, \\ ad_{e_2}(e_2) = 0, \\ ad_{e_2}(e_3) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} ad_{e_3}(e_1) = 0, \\ ad_{e_3}(e_2) = 0, \\ ad_{e_2}(e_3) = 0. \end{cases}$$

On a les représentations adjoints suivants :

$$ad(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ ad(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ad(e_3) = 0.$$

Cependant, l'algèbre de Lie d'Heisenberg possède de nombreuses autres dérivations (dérivations extérieures).
En fait, toutes les applications linéaires de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_4 & 0 \\ d_2 & d_5 & 0 \\ d_3 & d_6 & d_1 + d_5 \end{pmatrix},$$

sont des dérivations de l'algèbre de Lie de Heisenberg.

Proposition 4 *Dans la base $B = \{e_1, ...,\ e_n\}$ l'équation (2.8) de s'écrire comme suite :*

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} d_{sk} - \sum_{p=1}^{n} d_{pi} C_{pj}^{s} - \sum_{q=1}^{n} d_{qj} C_{iq}^{s} = 0 \qquad \forall\, i, j, s \in \{1, ..., n\}. \tag{2.10}$$

Si $p = q = k$ alors :

$$\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^{k} d_{sk} - d_{ki} C_{kj}^{s} - d_{kj} C_{ik}^{s}) = 0 \qquad \forall\, i, j, s \in \{1, ..., n\}.$$

Avec :

$$D(e_i) = \sum_{p=1}^{n} d_{pi} e_p \qquad \forall\, i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.11}$$

Démonstration 4

$$D[e_i, e_j] = [D(e_i), e_j] + [e_i, D(e_j)],$$
$$D\left(\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} e_k\right) = \left[\sum_{p=1}^{n} d_{pi} e_p, e_j\right] + \left[e_i, \sum_{q=1}^{n} d_{qj} e_q\right],$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} D(e_k) = \sum_{p=1}^{n} d_{pi}[e_p, e_j] + \sum_{q=1}^{n} d_{qj}[e_i, e_q],$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} \sum_{s=1}^{n} d_{sk} e_s = \sum_{p=1}^{n} d_{pi} \sum_{s=1}^{n} C_{pj}^{s} e_s + \sum_{q=1}^{n} d_{qj} \sum_{s=1}^{n} C_{iq}^{s} e_s,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{ij}^{k} d_{sk} e_s - \sum_{p=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} d_{pi} C_{pj}^{s} e_s - \sum_{q=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} d_{qj} C_{iq}^{s} e_s = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} d_{sk} - \sum_{p=1}^{n} d_{pi} C_{pj}^{s} - \sum_{q=1}^{n} d_{qj} C_{iq}^{s} \right) e_s = 0 \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\},$$

et comme $B = \{e_1, ..., \ e_n\}$ est une base de L alors :

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} d_{sk} - \sum_{p=1}^{n} d_{pi} C_{pj}^{s} - \sum_{q=1}^{n} d_{qj} C_{iq}^{s} = 0 \quad \forall\, i, j, s \in \{1, ..., n\},$$

si $p = q = k$ alors :

$$\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^{k} d_{sk} - d_{ki} C_{kj}^{s} - d_{kj} C_{ik}^{s}) = 0 \qquad \forall\, i, j, s \in \{1, ..., n\}.$$

2.2 Dérivations des algèbres de Lie

Proposition 5 *1) Toute algèbre de Lie de dimension 2 est isomorphe à l'algèbres suivante :*

► $L_2^1 : [e_1, \ e_2] = e_2$.

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

2) Toute algèbre de Lie de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbre suivants :

► $L_3^1 : [e_1, \ e_2] = e_3$.

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_3^1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{11} + d_{22} \end{pmatrix}.$$

► $L_3^2 : [e_1, \ e_2] = e_2, \ [e_1, \ e_3] = \alpha e_3, \ \alpha \neq 0.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix}.$$

▶ $L_3^3 : [e_1,\ e_2] = e_2 + e_3,\ [e_1,\ e_3] = e_3.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

3) *Toute algèbre de Lie de dimension 4 est isomorphe à l'une des algèbre suivants :*

▶ $L_4^1 : [e_1,\ e_2] = e_2,\ [e_1,\ e_3] = \alpha e_3,\ [e_1,\ e_4] = (1+\alpha)e_4,\ [e_2,\ e_3] = e_4,\ \alpha \neq 0.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_4^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} & 0 \\ d_{41} & \dfrac{d_{31}}{\alpha} & -d_{21} & d_{22}+d_{33} \end{pmatrix}.$$

▶ $L_4^2 : [e_1,\ e_2] = e_2 + e_3,\ [e_1,\ e_3] = e_3,\ [e_1,\ e_4] = 2e_4,\ [e_2,\ e_3] = e_4.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{22} & 0 \\ d_{41} & -d_{21}+d_{31} & -d_{21} & 2d_{22} \end{pmatrix}.$$

▶ $L_4^3 : [e_1,\ e_3] = e_3,\ [e_1,\ e_4] = e_4,\ [e_2,\ e_3] = e_4.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} & 0 \\ d_{41} & d_{31} & d_{43} & d_{22}+d_{33} \end{pmatrix}.$$

▶ $L_4^4 : [e_1,\ e_2] = e_2,\ [e_1,\ e_3] = \alpha e_3,\ [e_1,\ e_4] = \beta e_3,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_4^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & 0 & 0 & \dfrac{\beta d_{33} - \alpha d_{34}}{\beta} \end{pmatrix}.$$

► $L_4^5 : [e_1,\ e_2] = \alpha e_2,\ [e_1,\ e_3] = e_3 + e_4,\ [e_1,\ e_4] = e_4.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_4^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & d_{33} \end{pmatrix}.$$

► $L_4^6 : [e_1,\ e_2] = e_2 + e_3,\ [e_1,\ e_3] = e_3 + e_4,\ [e_1,\ e_4] = e_4.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_4^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{22} & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{32} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

► $L_4^7 : [e_1,\ e_2] = e_3,\ [e_1,\ e_4] = e_4.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_4^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{22} & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}.$$

► $L_4^8 : [e_1,\ e_2] = e_3,\ [e_1,\ e_3] = e_4.$

-La dérivée de cette algèbre est donnée par :

$$D_4^8 = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{11} + d_{22} & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{32} & 2d_{11} + d_{22} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Généralités sur les algèbres Hom-Lie

Le but de ce chapitre est de rappeler les notions fondamentales concernant les algèbres Hom-Lie, puis présenter les dérivations de cette algèbres.

3.1 Algèbres Hom-Lie

3.1.1 Notion d'algèbres Hom-Lie

Définition 3.1 *On appelle algèbre Hom-Lie un triplet $(L, [-,-], \alpha)$ où L est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $[-,-] : L \times L \to L$, est une application bilinéaire, et $\alpha : L \to L$ une application linéaire tels que :*

$$[x, y] = -[y, x], \quad \forall\, x, y \in\ L\ (L'antisymtrique). \tag{3.1}$$

$$[\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(z), [x, y]] + [\alpha(y), [z, x]] = 0, \quad \forall\, x, y, z \in L \tag{3.2}$$

$$(Identit\acute{e}\ de\ Hom - Jacobi).$$

Remarque 3.1 *1) Une algèbre Hom-Lie $(L, [-,-], \alpha)$ est dite multiplicative si α est un morphisme d'algèbre, c'est à dire : $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)] \quad \forall\, x, y \in L.$*
2) Il est dit régulier si α est un automorphisme .
3) Si $\alpha = Id_L$ alors l'identité précédente correspond à la condition de Jacobi, et l'algèbre définie est une algèbre de Lie.
Toute les algèbres de Lie sont des algèbres Hom-Lie avec α=Id_L.

Exemple 3.1 *Soit $\{x_1, x_2, x_3\}$ une base de l'espace vectoriel $sl_2(\mathbb{C})$ de dimension 3 .*
Le crochet suivant et l'application linéaire α sur $sl_2(\mathbb{C})$ définissent une algèbre Hom-Lie :

$$[x_1, x_2] = -2ax_2, \quad \alpha(x_1) = ax_1.$$
$$[x_1, x_3] = 2x_3, \quad \alpha(x_2) = a^2x_2.$$
$$[x_2, x_3] = \frac{-1+a}{2}x_1, \quad \alpha(x_3) = ax_3.$$

où a est un paramètre dans $\mathbb{C}$.

Exemple 3.2 *$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), [-,-], \alpha)$ est une Hom-algèbre de Lie, où $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées d'ordre n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,*

$$[-,-] : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

tels que : $\quad$ *pour tout* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ [A,B] = AB - BA,$
et $\quad \alpha : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$
tels que : $\quad$ *pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K},\ \alpha(A) = \lambda A.$

Démonstration 5 *On va montré que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), [-,-], \alpha)$ est une Hom-algèbre de Lie, on a :*

1) Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}[A,B] = AB - BA &= -(BA - AB) \\ &= -[B,A].\end{aligned}$$

2) Pour tous $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
&[\alpha(A),[B,C]] + [\alpha(B),[C,A]] + [\alpha(C),[A,B]] \\
=&[\alpha(A), BC - CB] + [\alpha(B), CA - AC] + [\alpha(C), AB - BA] \\
=&\alpha(A)(BC - CB) - (BC - CB)\alpha(A) + \alpha(B)(CA - AC) \\
&- (CA - AC)\alpha(B) + \alpha(C)(AB - BA) - (AB - BA)\alpha(C) \\
=&\alpha(A)BC - \alpha(A)CB - BC\alpha(A) + CB\alpha(A) + \alpha(B)CA \\
&- \alpha(B)AC - CA\alpha(B) + AC\alpha(B) + \alpha(C)AB - \alpha(C)BA \\
&- AB\alpha(C) \\
=&\lambda ABC - \lambda ACB - BC\lambda A + CB\lambda A + \lambda BCA - \lambda BAC - \\
&CA\lambda B + AC\lambda B + \lambda CAB - \lambda CBA - AB\lambda C + BA\lambda C \\
=&\lambda ABC - AB\lambda C - \lambda ACB + AC\lambda B - BC\lambda A + \lambda BCA + \\
&CB\lambda A - \lambda CBA - \lambda BAC + BA\lambda C - CA\lambda B + \lambda CAB \\
=&\lambda(ABC - ABC) + \lambda(-ACB + ACB) + \lambda(-BCA + BCA) + \\
&\lambda(CBA - CBA) + \lambda(-BAC + BAC) + \lambda(-CAN + CAB) \\
=&0.
\end{aligned}$$

Proposition 6 *Toute espace vectoriel L de dimension 2 muni d'une application bilinéaire anti-symétrique,*

$$[-,-] : L \times L \to L,$$

et une application linéaire, $\alpha : L \longrightarrow L$, est une Hom-algèbre de Lie.

Démonstration 6 *Pour montrer que* $(L, [-,-], \alpha)$ *est une Hom-algèbre de Lie il suffit de montrer la Hom-identité de Jacobi, puisque* $[-,-]$ *est anti-symétrique par définition.*
Soient (x, y) *une base de* L,

$$\circlearrowleft_{x,y,x} [\alpha(x), [y, x]] = [\alpha(x), [y, x]] + [\alpha(y), [x, x]] + [\alpha(x), [x, y]].$$

$[-,-]$ *est anti-symétrique donc :*

$$[x, y] = -[y, x] \ \ et \ \ [x, x] = 0.$$

Ainsi,

$$\circlearrowleft_{x,y,x} [\alpha(x), [y, x]] = [\alpha(x), [y, x]] - [\alpha(x), [y, x]] = 0.$$

Théorème 3.1 ***(Principe de twiste)*** *Soient* $(L, [-,-])$ *une algèbre de Lie et* $\alpha : L \to L$ *une application linéaire qui est multiplicative par rapport* $[-,-]$.
On définit $[-,-]_\alpha = \alpha \circ [-,-]$ *comme suie :*

$$[x, y]_\alpha = [\alpha(x), \alpha(y)] = \alpha([x, y]) \ \forall\, x, y \in \ L.$$

Alors $(L, [-,-]_\alpha, \alpha)$ *est une algèbre Hom-Lie.*

Démonstration 7 *Comme* $(L, [-,-])$ *est une algèbre de Lie,*
1) Alors on a :

$$[x, y]_\alpha = [\alpha(x), \alpha(y)] = -[\alpha(y), \alpha(x)] = -[y, x]_\alpha.$$

2) On a :

$$\begin{aligned}
&\circlearrowleft_{x,y,z} [\alpha(x), [y, z]_\alpha]_\alpha \\
&= [\alpha(x), [y, z]_\alpha]_\alpha + [\alpha(z), [x, y]_\alpha]_\alpha + [\alpha(y), [z, x]_\alpha]_\alpha \\
&= [\alpha(x), [\alpha(y), \alpha(z)]]_\alpha + [\alpha(z), [\alpha(x), \alpha(y)]]_\alpha + [\alpha(y), [\alpha(z), \alpha(x)]]_\alpha \\
&= [\alpha \circ \alpha(x), \alpha \circ \alpha[y, z]] + [\alpha \circ \alpha(z), \alpha \circ \alpha[x, y]] + [\alpha \circ \alpha(y), \alpha \circ \alpha[z, x]] \\
&= \alpha \circ \alpha([x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $(L, [-,-]_\alpha, \alpha)$ *est une algèbre Hom-Lie.*

3.1.2 Sous algèbres Hom-Lie et idéal

Définition 3.2 *Soit* $(L, [-,-], \alpha)$ *une algèbre Hom-Lie,* H *est un sous ensemble de* L*, on dit que* H *est une sous-algèbre Hom-Lie si :*

- ▶ H *est un sous espace vectoriel de* L.

- *Pour tous $x, y \in H$, on a $[x, y] \in H$.*
- *Pour tous $x \in H$, on a $\alpha(x) \in H$*

Définition 3.3 *Soit $(L, [-,-], \alpha)$ une algèbre Hom-Lie, I est une sous ensemble de L, on dit que est un idéal de L si :*

- *I est un sous espace vectoriel de L.*
- *Pour tout $x \in I$ et tout $y \in L$, on a $[x, y] \in I$.*
- *Pour tous $x \in I$, on a $\alpha(x) \in I$*

Remarque 3.2 *L'algèbre Hom-Lie L est dite abélienne si $[x, y] = 0$, $\forall\, x, y \in L$.*

3.1.3 Morphisme d'algèbre Hom-Lie

Définition 3.4 *Soient $(L, [-,-], \alpha)$ et $(L', [-,-]', \alpha')$ deux algèbres Hom-Lie. Un morphisme d'algèbre Hom-Lie est une application $\varphi : L \to L'$ Vérifiant :*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]' \ \textit{pour tous}\ x, y \in L,$$

$$\varphi \circ \alpha = \alpha' \circ \varphi.$$

Remarque 3.3 *En particulier, deux algèbres Hom-Lie $(L, [-,-], \alpha)$ et $(L', [-,-]', \alpha')$ sont isomorphes si φ est une application linéaire bijective.*

3.1.4 Centre d'une algèbre Hom-Lie

Définition 3.5 *Soit $(L, [-,-], \alpha)$ est une algèbres Hom-Lie, On appelle centre de l'algèbre Hom-Lie est on le note $C(L)$ l'ensemble :*

$$C(L) = \{x \in L,\ [x, L] = 0;\ [\alpha(x), L] = 0\}.$$

3.1.5 Représentations d'algèbre Hom-Lie

Définition 3.6 *Une représentation d'une algèbre Hom-Lie $(L, [-,-], \alpha)$ sur l'espace vectoriel V par rapport à $\beta \in \mathfrak{gl}(V)$ est une application linéaire $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$, telle que pour tout $x, y \in L$, ce qui suit les égalités sont satisfaites :*

$$\rho(\alpha(x)) \circ \beta = \beta \circ \rho(x),\ \ \forall\, x \in L. \tag{3.3}$$

$$\rho([x, y]) \circ \beta = \rho(\alpha(x)) \circ \rho(y) - \rho(\alpha(y)) \circ \rho(x),\ \forall\, x, y \in L. \tag{3.4}$$

Exemple 3.3 *Soit $(L, [-,-], \alpha)$ une algèbres Hom-Lie. L'application ad : $L \longrightarrow End(L)$ définie par :*

$$ad(x)y = ad_x(y) = [x, y],\ \ \forall\, x, y \in L.$$

est une représentation de L appelée représentation adjointe.

3.1.6 Variétés des algèbres Hom-Lie

Définition 3.7 *La dimension d'une algèbre Hom-Lie est sa dimension en tant qu'espace vectoriel, lorsque la dimension de l'algèbre Hom-Lie L est finie, on peut définir une base, supposons en effet que la dimension de L est n, alors on prend $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base. On peut ainsi calculer le crochet de chaque élément de la base, il est obtenu par :*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k \quad pour\ i, j \in \{1, ..., n\}, \tag{3.5}$$

avec :

$$\alpha(e_i) = \sum_{l=1}^{n} a_{li} e_l \quad pour\ i \in \{1, ..., n\}. \tag{3.6}$$

Les coefficients $\{(C_{ij}^k), (a_{li})\}$ sont appelés les constantes de structures.

Remarque 3.4 *La variété des algèbres de Hom-Lie de dimension n est notée Hom Lie$_n$.*

Proposition 7 *Les constantes de structure des lois d'algèbres Hom-Lie vérifier le système d'équations polynômiales suivants :*

$$L'antisymétrique\ :\ C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}. \tag{3.7}$$

$$Identité\ de\ Hom-Jacobi\ :\ \sum_{l,m=1}^{n} (a_{li} C_{jk}^m C_{lm}^s + a_{lj} C_{ki}^m C_{lm}^s + a_{lk} C_{ij}^m C_{lm}^s) = 0 \tag{3.8}$$

$$\forall\, i, j, k, s \in \{1, ..., n\}.$$

Démonstration 8 *1) Soit $(L, [-,-], \alpha)$ une algèbre Hom-Lie de dimension n, le crochet Hom-Lie peut être calculer pour chaque élément de la base $B = \{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ de la manière suivants :*

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\} \quad (L'antisymètrique),$$

alors : $$[e_i, e_j] + [e_j, e_i] = 0,$$
ce qui est équivalent à :

$$\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^k + C_{ji}^k) e_k = 0 \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\},$$

comme $B = \{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ est une base alors, les coefficients de

$$\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^k + C_{ji}^k) e_k = 0,$$

sont nuls c'est à dire :

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0 \quad \forall\, i,j,k \in \{1,...,n\},$$

d'où l'antisymétrique est donnée par le système suivante :

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad \forall\, i,j,k \in \{1,...,n\}.$$

2) *Les constantes de structure* $\{(C_{ij}^k),(a_{li})\}$ *relative à la base* $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, *de l'algèbre Hom-Lie vérifier identité de Hom-Jacobi qui se traduit par :*

$$\circlearrowleft_{e_i,e_j,e_k} [\alpha(e_i),[e_j,e_k]] = 0,$$
$$[\alpha(e_i),[e_j,e_k]] + [\alpha(e_k),[e_i,e_j]] + [\alpha(e_j),[e_k,e_i]] = 0,$$
$$\left[\alpha(e_i), \sum_{m=1}^n C_{jk}^m e_m\right] + \left[\alpha(e_k), \sum_{m=1}^n C_{ij}^m e_m\right] + \left[\alpha(e_j), \sum_{m=1}^n C_{ki}^m e_m\right] = 0,$$
$$\left[\sum_{l=1}^n a_{li}e_l, \sum_{m=1}^n C_{jk}^m e_m\right] + \left[\sum_{l=1}^n a_{lk}e_l, \sum_{m=1}^n C_{ij}^m e_m\right] + \left[\sum_{l=1}^n a_{lj}e_l, \sum_{m=1}^n C_{ki}^m e_m\right] = 0,$$
$$\sum_{l=1}^n a_{li} \sum_{m=1}^n C_{jk}^m [e_l,e_m] + \sum_{l=1}^n a_{lk} \sum_{m=1}^n C_{ij}^m [e_l,e_m] + \sum_{l=1}^n a_{lj} \sum_{m=1}^n C_{ki}^m [e_l,e_m] = 0,$$
$$\sum_{l=1}^n a_{li} \sum_{m=1}^n C_{jk}^m \sum_{s=1}^n C_{lm}^s e_s + \sum_{l=1}^n a_{lk} \sum_{m=1}^n C_{ij}^m \sum_{s=1}^n C_{lm}^s e_s + \sum_{l=1}^n a_{lj} \sum_{m=1}^n C_{ki}^m \sum_{s=1}^n C_{lm}^s e_s = 0,$$
$$\sum_{s=1}^n \left(\sum_{l,m=1}^n \left(a_{li}C_{jk}^m C_{lm}^s + a_{lk}C_{ij}^m C_{lm}^s + a_{lj}C_{ki}^m C_{lm}^s \right) e_s \right) = 0 \quad \forall\, i,j,k \in \{1,...,n\},$$

et comme $B=\{e_1,\ e_2,...,\ e_n\}$ *est une base de* L *alors :*

$$\sum_{l,m=1}^n \left(a_{li}C_{jk}^m C_{lm}^s + a_{lk}C_{ij}^m C_{lm}^s + a_{lj}C_{ki}^m C_{lm}^s \right) = 0 \quad \forall\, i,j,k,s \in \{1,...,n\},$$

par conséquent, l'identité de Hom-Jacobi équivalant au système polynomiales suivant :

$$\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \left(a_{li}C_{jk}^m C_{lm}^s + a_{lk}C_{ij}^m C_{lm}^s + a_{lj}C_{ki}^m C_{lm}^s \right) = 0 \quad \forall\, i,j,k,s \in \{1,...,n\}.$$

Ainsi, l'ensemble des algèbre Hom-Lie de dimension finie est munie d'une structure de variété algébrique de $K^{n^2(n+1)}$.

3.1.7 Dérivations

Définition 3.8 *Soit* $(L,[-,-],\alpha)$ *une algèbre Hom-Lie, une* $\alpha-$*dérivation de l'algèbre Hom-Lie est une application linéaire* $D : L \longrightarrow L$ *vérifiant les propriétés suivants :*

$$[D,\alpha] = 0 \ \ i.e\ \ D\circ\alpha = \alpha\circ D, \tag{3.9}$$

et

$$D([x,y]) = [D(x),\alpha(y)] + [\alpha(x),D(y)] \quad \textit{pour tous}\ \ x,y\in L. \tag{3.10}$$

Proposition 8 *Dans la base* $B = \{e_1, \ e_2, ..., \ e_n\}$ *l'équation* (3.9) *peut s'écrire comme suit :*

$$\sum_{q=1}^{n} a_{qi}d_{sq} - \sum_{p=1}^{n} d_{pi}a_{sp} = 0 \ \ \forall \, i, s \in \{1, ..., n\}. \tag{3.11}$$

Si $p = q$ *alors :*

$$\sum_{q=1}^{n}(a_{qi}d_{sq} - d_{qi}a_{sq}) = 0 \ \forall \, i, s \in \{1, ..., n\}.$$

Avec :

$$\begin{aligned} D(e_i) &= \sum_{p=1}^{n} d_{pi}e_p \ \ \forall \, i \in \{1, ..., n\}, \\ \alpha(e_i) &= \sum_{q=1}^{n} a_{qi}e_q \ \ \forall \, i \in \{1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Et l'équation (3.10) *peut s'écrire comme suit :*

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k}d_{sk} - \sum_{p,l=1}^{n} d_{pi}a_{lj}C_{pl}^{s} - \sum_{l,q=1}^{n} a_{li}d_{qj}C_{lq}^{s} = 0 \ \ \forall \, i, j, k, s \in \{1, ..., n\}. \tag{3.12}$$

Si $p = q = k$ *alors :*

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}(C_{ij}^{k}d_{sk} - \sum_{l=1}^{n} d_{ki}a_{lj}C_{kl}^{s} - \sum_{l=1}^{n} a_{li}d_{kj}C_{lk}^{s}) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n}(C_{ij}^{k}d_{sk} - \sum_{l=1}^{n}(d_{ki}a_{lj}C_{kl}^{s} - a_{li}d_{kj}C_{lk}^{s})) = 0 \ \forall \, i, j, s \in \{1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} D(e_i) &= \sum_{p=1}^{n} d_{pi}e_p \ \forall \, i \in \{1, ..., n\}, \\ \alpha(e_i) &= \sum_{l=1}^{n} a_{li}e_l \ \forall \, i \in \{1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Démonstration 9 *1)*

$$\begin{aligned} &D \circ \alpha = \alpha \circ D, \\ &D \circ \alpha - \alpha \circ D = 0, \\ &D(\alpha(e_i)) - \alpha(D(e_i)) = 0, \\ &D\left(\sum_{q=1}^{n} a_{qi}e_q\right) - \alpha\left(\sum_{p=1}^{n} d_{pi}e_p\right) = 0, \\ &\sum_{q=1}^{n} a_{qi}D(e_q) - \sum_{p=1}^{n} d_{pi}\alpha(e_p) = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{q=1}^{n} a_{qi} \sum_{s=1}^{n} d_{sq} e_s - \sum_{p=1}^{n} d_{pi} \sum_{s=1}^{n} a_{sp} e_s = 0,$$
$$\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} a_{qi} d_{sq} - \sum_{p=1}^{n} d_{pi} a_{sp} \right) e_s = 0 \ \forall\, i \in \{1, ..., n\},$$

et comme $B = \{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ *est une base de* L *alors :*

$$\sum_{q=1}^{n} a_{qi} d_{sq} - \sum_{p=1}^{n} d_{pi} a_{sp} = 0 \ \forall\, i, s \in \{1, ..., n\},$$

si $p = q$ *alors :*

$$\sum_{q=1}^{n} (a_{qi} d_{sq} - d_{qi} a_{sq}) = 0 \ \forall\, i, s \in \{1, ..., n\}.$$

2)

$$D([e_i, e_j]) = [D(e_i), \alpha(e_j)] + [\alpha(e_i), D(e_j)],$$
$$D\left(\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} e_k \right) = \left[\sum_{p=1}^{n} d_{pi} e_p, \alpha(e_j) \right] + \left[\alpha(e_i), \sum_{q=1}^{n} d_{qj} e_q \right],$$
$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} D(e_k) = \left[\sum_{p=1}^{n} d_{pi} e_p, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l \right] + \left[\sum_{l=1}^{n} a_{li} e_l, \sum_{q=1}^{n} d_{qj} e_q \right],$$
$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} \sum_{s=1}^{n} d_{sk} e_s = \sum_{p=1}^{n} d_{pi} \sum_{l=1}^{n} a_{lj} [e_p, e_l] + \sum_{l=1}^{n} a_{li} \sum_{q=1}^{n} d_{qj} [e_l, e_q],$$
$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} \sum_{s=1}^{n} d_{sk} e_s = \sum_{p=1}^{n} d_{pi} \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \sum_{s=1}^{n} C_{pl}^{s} e_s + \sum_{l=1}^{n} a_{li} \sum_{q=1}^{n} d_{qj} \sum_{s=1}^{n} C_{lq}^{s} e_s,$$
$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{ij}^{k} d_{sk} e_s - \sum_{p=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} d_{pi} a_{lj} C_{pl}^{s} e_s - \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{li} d_{qj} C_{lq}^{s} e_s = 0,$$
$$\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} d_{sk} - \sum_{p=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} d_{pi} a_{lj} C_{pl}^{s} - \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{li} d_{qj} C_{lq}^{s} \right) e_s = 0 \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\},$$

et comme $B = \{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ *est une base de* L *alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} d_{sk} - \sum_{p,l=1}^{n} d_{pi} a_{lj} C_{pl}^{s} - \sum_{l,q=1}^{n} a_{li} d_{qj} C_{lq}^{s} = 0 \quad \forall\, i, j, s \in \{1, ..., n\},$$

si $p = q = k$ *alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^{k} d_{sk} - \sum_{l=1}^{n} d_{ki} a_{lj} C_{kl}^{s} - \sum_{l=1}^{n} a_{li} d_{kj} C_{lk}^{s}) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} (C_{ij}^{k} d_{sk} - \sum_{l=1}^{n} (d_{ki} a_{lj} C_{kl}^{s} - a_{li} d_{kj} C_{lk}^{s})) = 0 \quad \forall\, i, j, s \in \{1, ..., n\}.$$

3.2 Dérivations des algèbres Hom- Lie

Proposition 9 *Toutes les algèbres Hom-Lie associée à l'homomorphisme* $\begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} w & s & l \\ 2l & v & f \\ 2s & e & v \end{pmatrix}$, *donnée par rapport à la base* $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ *avec* w, v, s, l, f *et* e *sont des paramètres dans* $\mathbb{K}$, *on établit la classification des algèbre Hom-Lie en dimension* 3 *Voir [15].*

Proposition 10 *Les dérivations des algèbres Hom-Lie de dimension* 3 *sont nuls.*

Annexe

Dérivations des algèbres de Lie

$\boldsymbol{n = 2;}$

CC $=$ **Flatten[Table[**$\boldsymbol{c[i, j, k], \{i, 1, n\}, \{j, 1, n\}, \{k, 1, n\}}$**]]**
$\{c[1,1,1], c[1,1,2], c[1,2,1], c[1,2,2], c[2,1,1], c[2,1,2], c[2,2,1], c[2,2,2]\}$
DD $=$ **Array[**$\boldsymbol{d, \{n, n\}}$**]**
$\{\{d[1,1], d[1,2]\}, \{d[2,1], d[2,2]\}\}$

For[$\boldsymbol{i = 1, i \leq n, i{+}{+},}$ **For[**$\boldsymbol{j = 1, j \leq n, j{+}{+},}$ **For[**$\boldsymbol{k = 1, k \leq n, k{+}{+}, c[i, j, k] = 0}$**]]]**

$\boldsymbol{c(1, 2, 2) = 1; c(2, 1, 2) = -1;}$

initialisation

Anti-symetrie

Anti[i_, j_, k_] :=$\boldsymbol{c(i, j, k) + c(j, i, k)}$
AntiSyst $=$ **Union[Flatten[Table[Simplify[Anti(**$\boldsymbol{i, j, k}$**)],** $\boldsymbol{\{i, n\}, \{j, n\}, \{k, n\}}$**]]]**
$\{0\}$

Identité de Jacob

Id[i_, j_, k_, s_] :=$\boldsymbol{\sum_{l=1}^{n}(c(j, k, l)c(i, l, s) + c(k, i, l)c(j, l, s) + c(i, j, l)c(k, l, s))}$
IdSyst $=$ **Union[Flatten[Table[Simplify[Id(**$\boldsymbol{i, j, k, s}$**)],** $\boldsymbol{\{i, n\}, \{j, n\}, \{k, n\}, \{s, n\}}$**]]]**
$\{0\}$

La dérivation

$\text{Dev}[\text{i\_}, \text{j\_}, \text{s\_}] := \sum_{k=1}^{n} (c(i,j,k)d(s,k) - d(k,i)c(k,j,s) - d(k,j)c(i,k,s))$
$\text{DevSyst} = \text{Union}[\text{Flatten}[\text{Table}[\text{Simplify}[\text{Dev}(i,j,s)], \{i,n\}, \{j,n\}, \{s,n\}]]]$
$\{0, -d(1,1), d(1,1), -d(2,1), d(2,1)\}$

Résolution :

$\text{syst} = \text{AntiSyst} \cup \text{IdSyst} \cup \text{DevSyst}$
$\{0, -d(1,1), d(1,1), -d(2,1), d(2,1)\}$
$\text{Reduce}[\text{syst} = \mathbf{0}, \text{Variables}[\text{syst}]]$
$[d(1,1) = 0 \&\& d(1,2) = 0]$

Dérivations des algèbres Hom-Lie

$n = 3;$

$\text{CC} = \text{Flatten}[\text{Table}[c[i,j,k], \{i,1,n\}, \{j,1,n\}, \{k,1,n\}]]$
$\{c(1,1,1), c(1,1,2), c(1,1,3), c(1,2,1), c(1,2,2), c(1,2,3), c(1,3,1),$
$c(1,3,2), c(1,3,3), c(2,1,1), c(2,1,2), c(2,1,3), c(2,2,1), c(2,2,2),$
$c(2,2,3), c(2,3,1), c(2,3,2), c(2,3,3), c(3,1,1), c(3,1,2), c(3,1,3),$
$c(3,2,1), c(3,2,2), c(3,2,3), c(3,3,1), c(3,3,2), c(3,3,3)\}$

$\text{For}[i = 1, i \leq n, i\text{++}, \text{For}[j = 1, j \leq n, j\text{++}, \text{For}[k = 1, k \leq n, k\text{++}, c[i,j,k] = 0]]]$

$c(1,2,1) = \alpha; c(2,1,1) = -\alpha; c(1,2,3) = \beta; c(2,1,3) = -\beta; c(1,3,2) = \delta;$
$c(3,1,2) = -\delta; c(2,3,1) = \lambda; c(3,2,1) = -\lambda; c(2,3,3) = \frac{\alpha v}{w}; c(3,2,3) = -\frac{\alpha v}{w};$

$\text{For}[i = 1, i \leq n, i\text{++}, \text{For}[j = 1, j \leq n, j\text{++}, a(i,j) = 0]]$

$a(1,1) = w; a(2,2) = v; a(3,3) = v;$
$\text{DD} = \text{Array}[d, \{n,n\}]$
$\{\{d[1,1], d[1,2], d[1,3]\}, \{d[2,1], d[2,2], d[2,3]\}, \{d[3,1], d[3,2], d[3,3]\}\}$
$\text{AA} = \text{Array}[a, \{n,n\}]$
$\{\{a[1,1], a[1,2], a[1,3]\}, \{a[2,1], a[2,2], a[2,3]\}, \{a[3,1], a[3,2], a[3,3]\}\}$

initialisation

Anti-symetrie

Anti[i_, j_, k_] :=$c(i,j,k)+c(j,i,k)$

AntiSyst $=$ Union[Flatten[Table[Simplify[Anti(i,j,k)], $\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\}$]]]

$\{0\}$

Identité de Hom-Jacob

Idh(i_, j_, k_, s_) := $\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(a(l,i)c(j,k,m)c(l,m,s)+a(l,j)c(k,i,m)c(l,m,s)+(a(l,k)c(i,j,m)c(l,m,s))$

IdhSyst $=$ Union[Flatten[Table[Simplify[Idh(i,j,k,s)], $\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\},\{s,n\}$]]]

$\{0\}$

Dérivation de hom-Jacob

Devh(i_, j_, s_) := $\sum_{k=1}^{n}(c(i,j,k)d(s,k)-\sum_{l=1}^{n}(d(k,i)a(l,j)c(k,l,s)-a(l,i)d(k,j)c(l,k,s)))$

DevhSyst $=$ Union[Flatten[Table[Simplify[Devh(i,j,s)], $\{i,n\},\{j,n\},\{s,n\}$]]]

$$\{0, 2\alpha wd(1,2), 2\beta wd(1,2), 2\delta wd(1,3), 2v\left(\frac{1}{w}(\alpha vd(2,3))-\beta d(2,1)\right), v(2\lambda d(2,3)-2\alpha d(2,1)), -2\delta vd(3,1), -\beta d(3,1)+\lambda vd(1,3)-\alpha((v+1)d(1,1)-wd(2,2)), \lambda vd(1,3)+\alpha(wd(2,2)-(v-1)d(1,1))+\beta d(3,1), -\frac{1}{w}(2\alpha v^2 d(3,2)), -2\lambda vd(3,2), -\frac{1}{w}(\alpha vd(3,2)+\delta vwd(2,1)+\lambda wd(1,2)), \lambda d(1,2)\delta(-v)d(2,1)+d(2,1)+\frac{1}{w}(\alpha vd(3,2))+d(2,1), -\delta d(2,1)+\lambda(-v)d(1,2)+\alpha wd(3,2), \delta d(2,1)+\lambda(-v)d(1,2)+\alpha wd(3,2), -\alpha d(1,2)-\beta d(3,2)+\delta wd(2,3), \alpha d(1,2)+\beta d(3,2)+\delta wd(2,3), -\delta d(2,3)-\frac{1}{w}(\alpha v^2 d(1,2))+\beta wd(3,2), \delta d(2,3)-\frac{1}{w}(\alpha v^2 d(1,2))+\beta wd(3,2), -\lambda(v(d(2,2)-d(3,3))+d(1,1))-\frac{1}{w}(\alpha v(w+1)d(3,1)), -\delta(vd(1,1)-wd(3,3)+d(2,2)), \delta(-vd(1,1)+wd(3,3)+d(2,2)), -\alpha d(1,3)-\beta d(3,3)+\frac{1}{w}(\alpha v^2 d(1,3))-\beta vd(1,1)+\beta wd(2,2), \alpha d(1,3)+\frac{1}{w}(\alpha v^2 d(1,3))-\beta vd(1,1)+\beta(wd(2,2)+d(3,3)), -\frac{1}{w}(\alpha v(v(d(2,2)-d(3,3))+d(3,3))+w(\lambda d(1,3)+\beta vd(3,1))), -\frac{1}{w}(\alpha v(w-1)d(3,1))\lambda(v(d(3,3)-d(2,2))+d(1,1)), \frac{1}{w}(\alpha v(v(d(3,3)-d(2,2))+d(3,3))+w(\lambda d(1,3)-\beta vd(3,1)))\}$$

Commutativité

Com(i_, s_) := $\sum_{q=1}^{n}(a(q,i)d(s,q) - d(q,i)a(s,q))$
ComSyst = Union[Flatten[Table[Simplify[Com(i,s)], $\{i,n\}$, $\{s,n\}$]]]
$\{0, d(1,2)(w-v), d(1,3)(w-v), d(2,1)(v-w), d(3,1)(v-w)\}$

Résolution :

syst = AntiSyst ∪ IdhSyst ∪ DevhSyst ∪ ComSyst

$$\{0, d(1,2)(w-v), 2\alpha w d(1,2), 2\beta w d(1,2), d(1,3)(w-v), 2\delta w d(1,3), d(2,1)(v-w), 2v\left(\frac{1}{w}(\alpha v d(2,3)) - \beta d(2,1)\right), v(2\lambda d(2,3) - 2\alpha d(2,1)), d(3,1)(v-w), -2\delta v d(3,1), -\beta d(3,1) + \lambda v d(1,3) - \alpha((v+1)d(1,1) - w d(2,2)), \beta d(3,1) + \lambda v d(1,3) + \alpha(w d(2,2) - (v-1)d(1,1)), -\frac{1}{w}(2\alpha v^2 d(3,2)), -2\lambda v d(3,2), -\frac{1}{w}(\alpha v d(3,2) + \delta v w d(2,1) + \lambda w d(1,2)), \lambda d(1,2) - \delta v d(2,1) + \frac{1}{w}(\alpha v d(3,2)), -\delta d(2,1) + \lambda(-v)d(1,2) + \alpha w d(3,2), \delta d(2,1) + \lambda(-v)d(1,2) + \alpha w d(3,2), -\alpha d(1,2) - \beta d(3,2) + \delta w d(2,3), \alpha d(1,2) + \beta d(3,2) + \delta w d(2,3), -\delta d(2,3) - \frac{1}{w}(\alpha v^2 d(1,2)) + \beta w d(3,2), \delta d(2,3) - \frac{1}{w}(\alpha v^2 d(1,2)) + \beta w d(3,2), -\lambda(v(d(2,2) - d(3,3)) + d(1,1)) - \frac{1}{w}(\alpha v(w+1)d(3,1)), -\delta(v d(1,1) - w d(3,3) + d(2,2)), \delta(-v d(1,1) + w d(3,3) + d(2,2)), -\alpha d(1,3) - \beta d(3,3) + \frac{1}{w}(\alpha v^2 d(1,3)) - \beta v d(1,1) + \beta w d(2,2), \alpha d(1,3) + \frac{1}{w}(\alpha v^2 d(1,3)) - \beta v d(1,1) + \beta(w d(2,2) + d(3,3)), -\frac{1}{w}(\alpha v(v(d(2,2) - d(3,3)) + d(3,3)) + w(\lambda d(1,3) + \beta v d(3,1))), \lambda(v(d(3,3) - d(2,2)), \frac{1}{w}(\alpha v(v(d(3,3) - d(2,2)) + d(3,3)) + w(\lambda d(1,3) - \beta v d(3,1)))\}$$

Reduce[syst = 0, Variables[syst]]

conclusion

L'étude présentée dans ce mémoire s'articule essentiellement sur les dérivations des algèbres de Lie et Hom-Lie, elle est divisé en deux parties, la première partie est consacrée aux algèbres de Lie dont ont a calculé les dérivations des algèbres de Lie en dimension 2 ,3 et 4, la deuxième partie concerne leurs extension (Hom-algèbre de Lie). on identifie les équations satisfaisant les conditions de dérivation à leurs constantes de structure qui permettront de calculer les dérivations sous le logiciel Mathematica.

Bibliographie

[1] H. Adimi, *Les indices des algèbres de Lie et algèbres Hom-Lie*, Thèse de doctorat, 2016, université de setif.

[2] B. Agrebaoui, K. Benali, A. Makhlouf, *Representations of simple Hom-Lie algebras*, preprint arxiv : 1903.08874, 21 Mar 2019.

[3] T. Benjmaa, A. Makhlouf, N. Saadaoui, *Current Hom-Lie algebras*, Acutm volume 26, Number 1, June 2022.

[4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Springer, Berlin, Heidlberg, https : //doi.org/10.1007/978-3-540-35337-9-1.

[5] D. Burde, K. Dekimpe, B. Verbeke, *Almost-inner derivations of Lie algebras*, Journal of algebra and lts applications vol. 17, NO. 11, 1850214, 2018, https : // doi.org/10.1142/ So219498818502146.

[6] A. Chabert-Loir, *Introduction aux groupes et algèbres Lie*, Cours de master 2, 2004-2005, université de Rennes 1. "https ://webusers.imj-prg.fr/antoine.chambert-loir/enseignement/2004-05/lie/lie.pdf"

[7] J. François dat, *Croupes et Algèbres de Lie*, Cours introductif de M2, 2013-2014, université Pierre et Marie Curie." https ://webusers.imj-prg.fr/ jean-francois.dat/enseignement/GAL/GALM2.pdf"

[8] J. François dat, *Algèbres de Lie semi-simples et leurs représentations*, Cours introductif de M2, 2013-2014, université Pierre et Marie Curie. https ://webusers.imj-prg.fr/ jean-francois.dat/enseignement/AL/AL.pdf

[9] F. Gourdeau, B.R. Hodgson, *Coup d'oeil sur quelques structures algébriques*, MAT-1300 (A-13), université laval.

[10] D. Harari, *Cours Algèbre 1-Anneaux et modules*, Cours M1, fait à l'E.N.S 2003-2004, université Paris-Sud, 35 pages.

[11] J.T. Hartwig, D. Larsson, S.D. Silvestrov, *Deformations of Lie algebras using $\sigma-$ derivations*, Journal of algebra volume 295, Jaunary 2006, 314-361.

[12] A. Jeanneret, D. lines, *Invitation à l'algèbre ; théorie des groupes, des anneaux, des corps et des modules* , Cépadués-editions, vauquelin, 2008.

[13] B. Keller, *Introduction aux groupes et algèbres de Lie*, Décembre 2001. https ://webusers.imj-prg.fr/bernhard.keller/lie/Caruso Notes Groupes Et Algebres De Lie.pdf

[14] X. Li, *Representations of 3-dimensional simple multiplcative Hom-Lie algèbras*, Advances in mathmatical Physics, volume 2013, 7 page.

[15] A. Makhlouf, D. Sergei, *Hom-Algebra structures*, J. Gen Lie Theory Appl, NO. 2, 2008, 51-64.

[16] J.M. Monier, *Cours de Mathématiques(en 7 tomes)*, collection J'intégre, Dounod, 2003.

[17] A. Moreau, *Algèbres de Lie semi simple : représentations et éléments nilpotent*, Cours, 2018-2019, 81 page.

[18] S. Togo, *Derivations of Lie algebras*, J. Sci, Hiroshima univ, ser, A-I 28 (1964), 133-158.

الملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو حساب الإشتقاقات لنوعين من الجبر، الأول هو الجبر الكلاسيكي (الجبر لي) بدأنا بإعطاء بنية الجبر ثم حددنا هذا الجبر بثوابت بنيته و نعطي المعادلات التي تجعل من الممكن تحديد الإشتقاقات و الثاني هو الجبر هوم لي ونحن مهتمون بمشتقات هذا الجبر و قمنا بنفس العمل مثل الأول.

Résumé

Le but de ce mémoire est de calculer les dérivations pour deux types d'algèbres, le premier étant l'algèbre classique (l'algèbre de Lie). On a commencé par donner la structure d'un algèbre de Lie puis identifie cette algèbre à ses constantes de structure. On donne les équations qui permettent de déterminer les dérivations. Le deuxième est l'algèbre Hom -Lie on s'intéresse aux dérivations de cette algèbre. Nous n'avons fait que le même travail que la première.

Abstract

The objective of this memory is to compute derivations for two types of algebras, the first one being the classical algebra (the Lie algebra). We started by giving the structure of a Lie algebra then identified this algebra with its structure constants. We give the equations that allow to determine the derivations. The second is the algebra Hom-Lie we are interested in the derivations of this algebra. We did the same work as the first.