

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

*Université de Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi - Bordj Bou Arreridj*

*Faculté des Sciences et de la technologie*

*Département d'Electromécanique*

# *Mémoire*

*Présenté pour obtenir*

**LE DIPLOME DE MASTER**

**FILIERE : Electrotechnique**

**Spécialité : Commande électrique**

Par

- **KHELIF LOKMANE**
- **MAHANI ABDELOUAHAB**

*Intitulé*

*Contribution à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans des guides d'ondes cylindriques*

*Soutenu le : 11 septembre 2022*

*Devant le Jury composé de :*

<i>Nom &amp; Prénom</i>	<i>Grade</i>	<i>Qualité</i>	<i>Etablissement</i>
<i>M.SLIMANE MEDJMADJ</i>	<i>MCB</i>	<i>Président</i>	<i>Univ-BBA</i>
<i>M.ABDELHALIM BENCHEIKH</i>	<i>PR</i>	<i>Encadreur</i>	<i>Univ-BBA</i>
<i>M.ABDELHAK BENHENICHE</i>	<i>MCB</i>	<i>Examineur</i>	<i>Univ-BBA</i>

*Année Universitaire 2021/2022*

## Remerciement

Tout d'abord, remercions Dieu Tout-Puissant d'avoir guidé nos pas tout au long de l'année, nous donnant la force et la foi pour accomplir ce modeste travail.

Nous tenons également à remercier notre superviseur, M. ABDELHALIM BENCHEIKH, qui nous a beaucoup aidé et soutenu et qui a été extrêmement patient avec nous, ce que nous apprécions vraiment.

Nous tenons à remercier tout le personnel enseignant qui nous a offert cette opportunité de poursuivre nos études et qui a su mettre en valeur ce travail.

Un grand merci à nos parents et familles qui nous soutiennent et nous aident.

Merci à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce travail.

## Tables des matières :

<b>Introduction générale .....</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre I. Propagation des ondes électromagnétiques .....</b>	<b>6</b>
I.1. Introduction .....	7
I.2. Equations de Maxwell .....	8
I.2.1. Définition .....	8
I.2.2. Descriptions des Équations de Maxwell .....	8
I.2.2.1. Forme intégrale des équations de Maxwell .....	8
I.2.2.2. Forme différentielle des équations de Maxwell .....	10
I.3. Les équations d'ondes .....	11
I.4. Les applications des ondes électromagnétiques .....	12
I.4.1. Les applications industrielles .....	12
I.4.2. Les radiocommunications .....	12
I.5. Guide d'onde .....	14
I.5.1 Les ondes TE, TM, TEM .....	15
I.5.2 Solutions générales des ondes TEM, TE et TM .....	15
I.5.2.1 Ondes TEM .....	16
I.5.2.2 Ondes TE .....	17
I.5.3 Guide rectangulaire .....	17
I.5.4 Guide circulaire .....	19
I.5.5 Remarque .....	21
I.6. Propagation de l'onde électromagnétique dans un guide d'onde .....	21
I.7. Câbles coaxiaux .....	22
I.7.1 Câbles coaxiaux flexibles .....	23
I.7.2 Lignes rigides .....	23
<b>Chapitre II. Simulation des champs électromagnétiques dans des guides cylindrique métalliques .....</b>	<b>25</b>
Introduction .....	26
II.A. Propagation d'une onde dans le vide le long d'un cylindre	

conducteur .....	26
II.B. Etude de la propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial cylindrique .....	33
1. Description du problème .....	33
2. Modélisation mathématique .....	35
II.C. Propagation guidée d'une onde par un câble coaxial parfait ou avec perte .....	41
II.D. Conclusion .....	48
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>49</b>

## INTRODUCTION GENERALE

Pour transférer de l'énergie à haute fréquence d'un point à un autre, nous n'utilisons pas de câbles d'extension ordinaires, mais des lignes de transmission aux caractéristiques appropriées. Une ligne peut être constituée d'un guide d'onde (tube métallique dans lequel circulent les ondes), ou elle peut être constituée d'une ligne en « mode TEM », qui est généralement constituée de deux conducteurs parallèles. Un fil TEM est constitué de deux conducteurs électriques parallèles séparés par un diélectrique, très bon isolant aux fréquences utilisées (air, téflon...). Si l'un des conducteurs est entouré par l'autre, il est dit coaxial.

Les lignes de transmission ne doivent pas rayonner. En fait, le câble coaxial peut répondre à cette condition. Pour les lignes à deux fils, la distance entre les deux conducteurs doit être très faible par rapport à la longueur d'onde, et il ne doit y avoir aucun obstacle à proximité des deux conducteurs.

À la micro-onde, un guide d'onde sera employé qui, à la même longueur, aura moins de pertes que d'un câble coaxial.

Le travail présent s'inscrit dans ce cadre, et vise à étudier la propagation des ondes électromagnétique dans des guides d'ondes cylindriques, et pour aboutir à nos objectifs, ce manuscrit est divisé en deux parties organisées de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous avons donné un aperçu des guides d'ondes. Les caractéristiques, quelques définitions, leurs équations et solutions, et leurs différents types de guides d'ondes sont principalement introduits. De plus, nous montrerons les équations de Maxwell et leurs solutions. Enfin, le câble coaxial sera décrit en détail car il est à la base de cette étude.

Le deuxième chapitre sera consacré à la présentation de trois problèmes notion sur le câble coaxial. Au début, on va étudier la propagation d'une onde dans le vide le long d'un cylindre conducteur comme premier problème. Après ça, le deuxième problème l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial cylindrique. Finalement, la propagation guidée d'une onde par un câble coaxial parfait ou avec perte. Tout en résolvant ces problèmes, nous présentons les résultats de simulation des champs électromagnétiques.

Ce document sera en fin clôturé par une conclusion générale répondant et une référence bibliographique.

## **Chapitre I**

---

# **Propagation des ondes électromagnétiques**

## I.1. Introduction :

Les ondes électromagnétiques rendent la technologie plus innovante et performante : 5G pour les smartphones, wifi plus rapide, etc. Grâce à eux, vous pouvez écouter la radio, regarder la télévision, vous connectez à internet, naviguer sur votre tablette... On peut dire que ces ondes électromagnétiques vous donnent accès à un certain nombre d'objets que vous utilisez au quotidien.

Les ondes électromagnétiques existent depuis le début de l'univers. A des champs électriques et magnétiques qui oscillent à la même fréquence. Ces deux champs perpendiculaires entre eux se propagent dans des directions orthogonales dans le milieu.

Les ondes électromagnétiques sont une classe d'ondes qui peuvent se propager dans un milieu de propagation tel que le vide ou l'air à des vitesses proches de la vitesse de la lumière, qui est proche de 300 000 kilomètres par seconde. Par exemple, ces ondes sont générées par des charges électriques en mouvement. Elles correspondent à des oscillations couplées de champs électriques et magnétiques dont les amplitudes varient sinusoidalement avec le temps. Malgré ces complexités, il est parfaitement décrit depuis près de 150 ans. En 1864, le physicien écossais James Clark Maxwell découvrit sa formule mathématique. Nous parlons des fameuses "équations de Maxwell" qui sont la base mathématique de toutes les applications électriques modernes.

## I.2. Equations de Maxwell :

### I.2.1. Définition :

Les équations de Maxwell modélisent mathématiquement les interactions entre charges électriques, courants électriques, champs électriques et champs magnétiques. Dit simplement, elles décrivent les phénomènes électriques, magnétiques et lumineux.

Ces équations sont très importantes en physique et tirent leur grande élégance de leur simplicité : juste quatre équations pour décrire le vaste monde de l'électromagnétisme.

### I.2.2. Descriptions des Équations de Maxwell :

Les équations de Maxwell, également appelées équations de Maxwell-Lorentz, sont des lois fondamentales de la physique. En termes de force électromagnétique lorentzienne, ils constituent les hypothèses fondamentales de l'électromagnétisme. Ces équations se traduisent par différents théorèmes sous forme locale (Gauss, Ampère, Faraday)

#### I.2.2.1. Forme intégrale des équations de Maxwell :

- **Équation de Maxwell-Gauss** : La distribution des charges électriques est la cause du champ électrique. Le flux électrique à travers la surface de Gauss  $\partial V$  entourant volume  $V$  est directement proportionnel à la charge électrique à l'intérieur.

Forme intégrale :

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV = Q(V) \quad (1-1a)$$

Forme locale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-1b)$$

- **Équation de Maxwell-Thomson** : les lignes de champ magnétique forment une boucle fermée. Le flux magnétique traversant la surface fermée du volume est égal à la charge magnétique à l'intérieur, c'est-à-dire nulle, car il n'y a pas de monopôles magnétiques.

Forme intégrale :

$$\oiint_{dv} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1-2a)$$

Forme locale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1-2b)$$

- **Équation de Maxwell-Faraday** : Un champ magnétique variable dans le temps produit (induit) un champ électrique. La circulation électrique à travers une section  $\partial A$  de la zone A est égale à la variation inverse du flux magnétique à travers la même surface. Les deux champs sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Forme intégrale :

$$\oint_{dA} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \left( \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) = 0 \quad (1-3a)$$

Forme locale :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1-3b)$$

- **Équation de Maxwell-Ampère** : Une charge électrique en mouvement ou un courant changeant peut créer un champ magnétique. La circulation magnétique dans une section  $\partial A$  de la zone A est égale à la somme du courant et de la variation temporelle du courant à travers cette section.

Forme intégrale :

$$\oint_{dA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_t \cdot d\vec{S} + \left( \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) \quad (1-4a)$$

Forme locale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1-4b)$$

L'un des résultats les plus surprenants de ces équations est que les champs électriques et magnétiques se propagent à une certaine vitesse, qui dépend de la force du champ électrique induit par un aimant en mouvement. Cela signifie que la vitesse d'onde requise est la vitesse que vous avez donnée à l'aimant lorsque vous avez créé le champ électrique et qu'elle aura la même énergie que son propre champ magnétique. Cette vitesse était déjà connue à l'époque, et Maxwell

a souligné qu'elle correspondait très bien à la vitesse de la lumière. Par conséquent, il en a déduit que les ondes lumineuses provenaient des ondes électromagnétiques.

Ainsi, des équations mathématiques prédisent l'existence d'ondes électromagnétiques. Vingt ans plus tard, les expériences de Heinrich Rudolf Hertz confirmèrent leur existence et formèrent la base de la théorie des ondes radio et du radar. Aujourd'hui, les équations de Maxwell sont généralement exprimées sous forme différentielle plutôt que sous forme intégrale :

### I.2.2.2. Forme différentielle des équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-5)$$

1. L'advection du champ électrique est proportionnelle à la densité de charge.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1-6)$$

2. L'advection du champ magnétique est nulle et il n'y a pas de monopôle magnétique.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1-7)$$

3. Une variation du champ électrique dans une direction (vers la gauche) donne la variation temporelle inverse du champ magnétique sur l'axe vertical.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1-8)$$

4. La variation du champ magnétique dans une direction est égale à la somme du champ électrique et de sa variation dans le temps.

### I.3. Les équations d'ondes :

Supposons que les champs se propagent dans un milieu isotrope et homogène, c'est-à-dire avec  $\epsilon$  et  $\mu$  constants. Supposons de plus qu'il n'y ait ni charges ni courants libres dans le milieu (il s'agit d'un milieu non-conducteur), et donc

$$\rho = 0, \quad j = 0. \quad (1-12)$$

On veut alors résoudre les équations

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1-13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1-14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1-15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1-16)$$

Agissons sur le rotationnel de  $\vec{E}$  avec  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ . A l'aide de l'identité

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (1-17)$$

Où la dernière égalité suit de l'équation (1-13), on déduit alors les équations d'onde pour les champs E et B

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-18)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-19)$$

Ici nous avons défini la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu caractérisé par la perméabilité  $\epsilon$  et susceptibilité  $\mu$ ,

$$v^2 = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \quad (1-20)$$

Il est clair, que dans le vide  $\epsilon\mu = 1$  et donc  $v = c$ . Dans le contexte des équations satisfaites par les potentiels  $\Phi$  et  $\mathbf{A}$  dans la jauge de Lorenz. Remarquons que l'équation d'onde dans le vide s'écrit sous forme relativiste

$$0 = \partial_{\mu} \partial^{\mu} f(t, x) = \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \right) f(t, x) = \square f(t, x) \quad (1-21)$$

#### **I.4. Les applications des ondes électromagnétiques :**

Les ondes électromagnétiques sont utilisées depuis longtemps dans les applications de radiodiffusion et de télédiffusion. Aujourd'hui, les téléphones portables et les applications multimédias sans fil les rapprochent de plus en plus des gens. Ils sont également utilisés dans des applications industrielles, des applications médicales ou produits par des équipements électriques. De nouvelles applications de radiocommunication sont continuellement développées. Ils utilisent des ondes électromagnétiques associées à des systèmes de transmission de plus en plus complexes.

##### **I.4.1. Les applications industrielles :**

Dans les applications industrielles, les ondes sont utilisées pour le chauffage, le séchage, la télédétection, la radiolocalisation. Par exemple, les systèmes de chauffage par micro-ondes utilisent une source d'ondes électromagnétiques de forte puissance avec une fréquence de 2,45 GHz. Ce principe est utilisé depuis longtemps dans le séchage industriel de la canne à sucre, par exemple, avant d'être appliqué au four à micro-ondes domestique.

Le système de chauffage par induction est basé sur la chaleur générée sur un support métallique placé dans un champ magnétique variable, à une fréquence d'environ 40 kHz. Ce champ magnétique rayonne sous forme d'ondes électromagnétiques au voisinage du milieu. Ce principe a été appliqué aux poêles domestiques. Il est également utilisé comme système de freinage pour les camions ou les machines-outils. Les équipements électriques émettent aussi involontairement des ondes électromagnétiques : lignes de distribution, moteurs, transformateurs... Ces émissions sont limitées aux équipements conçus et installés selon les normes CEM.

##### **I.4.2. Les radiocommunications :**

De nombreuses applications, y compris les services de diffusion et de télécommunication, utilisent les ondes électromagnétiques comme moyen de transmission et de transfert d'informations entre émetteurs et récepteurs. L'information est donnée, voix, image, vidéo. Ils sont associés à différents services : diffusion radio et télévision, réseaux de téléphonie mobile, téléphones sans fil, réseaux autonomes (police, pompiers), points d'accès internet Wi-Fi,

radar air et mer, périphériques informatiques sans fil, talkie-walkie-talkie, talkies-walkies pour bébés, télécommandes domotiques, voitures, systèmes d'alarme sans fil.

Il existe de nombreux systèmes sans fil qui utilisent des émetteurs de radiofréquence, aidant ainsi à mesurer les niveaux de champ électromagnétique ambiant dans l'environnement.

Pour tous ces systèmes, dans le cas d'une exposition publique, deux configurations d'émetteurs doivent être distinguées :

- les émetteurs fixes de radiocommunication fonctionnant en permanence : par exemple, les émetteurs de radiodiffusion et de télévision ou les antennes des stations de base de téléphonie mobile ;
- Les émetteurs portables qui émettent occasionnellement et sont associés à des usages spécifiques, tels que les talkies-walkies, les téléphones portables, les cartes Wi-Fi sur les ordinateurs portables.

Le tableau ci-dessous présente les différents services, applications et bandes de fréquences utilisés.

Bande de fréquences	Services/Applications
9 kHz - 30 MHz	Radiodiffusion grandes ondes, ondes moyennes et ondes courtes – DéTECTEURS de victimes d'avalanches – Systèmes de détection antivol – Lecteur de cartes sans contact – Applications médicales
30 MHz - 87,5 MHz	Télédiffusion analogique et numérique – Réseaux professionnels (taxis, pompiers, gendarmerie nationale, réseaux radioélectriques indépendants) – Radioamateurs – Microphones sans fil – Radiolocalisation aéronautique – Radars – Applications médicales
87,5 - 108 MHz	Radiodiffusion en modulation de fréquences.
108 - 136 MHz	Gestion du trafic aéronautique
136 - 400 MHz	Télédiffusion analogique et numérique – Réseaux professionnels (police, pompier, SAMU) – Fréquences réservées au vol libre

	– Gestion du trafic maritime – Radiomessagerie
400 - 470 MHz	Balise ARGOS – Réseaux professionnels (gendarmerie, SNCF, EDF) – Télécommandes et télémessure médicale – Systèmes de commande – Réseaux cellulaires TETRA et TETRAPOL – Applications médicales
470 - 860 MHz	Télédiffusion analogique et numérique
860 - 880 MHz	Bande ISM (Industriel, Scientifique, Médical) : appareils à faible portée type alarmes, télécommandes, domotique, capteurs sans fil, RFID
880 - 960 MHz	Téléphonie mobile (GSM 900)
960 - 1 710 MHz	Radiodiffusion numérique – Réseaux privés – Faisceaux hertziens
1 710 - 1 880 MHz	Téléphonie mobile (GSM 1800)
1 880 - 1 900 MHz	Téléphones sans fil DECT
1 920 - 2 170 MHz	Téléphonie mobile (UMTS)
2 400 - 2 500 MHz	Réseaux Wi-Fi - Bluetooth – Four à micro-ondes
3 400 - 3 600 MHz	Boucle locale radio large bande (WiMAX)
> 3 600 MHz	Radars – Boucle locale radio – Faisceaux hertziens

### I.5. Guide d'onde :

Un guide d'ondes est une forme spéciale de ligne de transmission utilisée dans les applications micro-ondes. Ce sont des tubes métalliques constitués de matériaux de haute qualité (cuivre et laiton - en partie argentés voire dorés). Dans la technologie récente, ces rails sont en cuivre et plaqués d'une fine couche de fibre de carbone. Les guides d'ondes peuvent avoir des sections transversales rectangulaires, circulaires ou elliptiques, les sections transversales rectangulaires étant le plus souvent utilisées pour des connexions relativement courtes. Les guides d'ondes présentent plusieurs avantages par rapport à la transmission coaxiale et filaire. Le principal avantage est que les pertes lors de la transmission sont minimisées. Les champs électriques et magnétiques pour le transfert

d'énergie sont nuls dans les surfaces métalliques. Par conséquent, ces champs sont confinés à l'espace intérieur du rail, minimisant les pertes. De plus, ils sont complètement blindés, ils sont donc très résistants aux interférences externes provenant de signaux très faibles transmis.

Les guides d'ondes présentent théoriquement des avantages considérables par rapport aux câbles coaxiaux, mais en pratique ces avantages ne sont utilisés efficacement qu'à des fréquences supérieures à 1 GHz. En effet, les pertes des câbles coaxiaux sont dues à leur propre capacité et inductance ainsi qu'à l'effet de peau. Cette atténuation augmente significativement avec la fréquence de transmission, et au-delà de 36 GHz, les câbles coaxiaux sont rarement utilisés. La résistance au claquage de ces câbles est également limitée par la faible distance entre les conducteurs intérieur et extérieur, ce qui augmente les pertes. Ces inconvénients sont encore acceptables pour des signaux de faible puissance, mais à forte puissance ils entraînent des pertes inacceptables.

### I.5.1 Les ondes TE, TM, TEM :

Les ondes TE et TM dans un guide d'onde sont des ondes électromagnétiques pour lesquelles le champ électrique ou le champ magnétique, respectivement, sont normaux à la direction de propagation Oz définie par l'axe du guide.

### I.5.2 Solutions générales des ondes TEM, TE et TM :

Les équations qui permettent de calculer les fréquences de coupure des différents modes proviennent des équations de Maxwell. On suppose que les champs électriques et magnétiques sont harmoniques dans le temps, et que la propagation se fait selon l'axe z. Les champs électriques et magnétiques peuvent être écrits selon :

$$\bar{E}(x, y, z) = [\bar{e}(x, y) + \hat{z}e_z(x, y)]e^{-j\beta z} \quad (1-22)$$

$$\bar{H}(x, y, z) = [\bar{h}(x, y) + \hat{z}h_z(x, y)]e^{-j\beta z} \quad (1-23)$$

Où  $\bar{e}(x, y)$  et  $\bar{h}(x, y)$  représentent les composantes transversales des champs électriques et magnétiques (composantes en x et y), et  $e_z$  et  $h_z$  sont les composantes longitudinales.

Si la région du guide d'onde est sans sources, les équations de Maxwell peuvent être écrites selon :

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \quad (1-24)$$

$$\nabla \times \bar{H} = -j\omega\epsilon\bar{E} \quad (1-25)$$

On peut solutionner ces équations pour obtenir les quatre composantes transversales en fonction des composantes longitudinales ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  et  $H_y$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ ) :

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left( \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (1-26a)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (1-26b)$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (1-26c)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left( -\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (1-26d)$$

Où

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \quad (1-27)$$

Est le nombre d'onde de coupure.

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1-28)$$

est le nombre d'onde du matériau du guide d'onde.

### I.5.2.1 Ondes TEM :

Les ondes TEM sont caractérisées par  $E_z = H_z = 0$ . A partir des équations (1-26), on obtient que tous les champs transversaux soient nuls, à moins que  $k_c^2 = 0$ , ce qui donne un résultat indéterminé. On solutionne les équations de Maxwell pour obtenir :

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k \quad (1-29)$$

Ce qui veut dire que  $k_c = 0$  pour les ondes TEM.

Les ondes TEM peuvent seulement exister lorsque deux ou plusieurs conducteurs sont présents.

L'impédance de l'onde TEM est donnée par :

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (1-30)$$

**I.5.2.2 Ondes TE :**

Les ondes TE sont caractérisées par  $E_z = 0$  et  $H_z \neq 0$ . Dans ce cas-ci,  $k_c \neq 0$ , et

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (1-31)$$

est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide d'onde.

L'impédance de l'onde TE est :

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k\eta}{\beta} \quad (1-32)$$

**I.5.2.3 Ondes TM :**

Les ondes TM sont caractérisées par  $H_z = 0$  et  $E_z \neq 0$ . Dans ce cas-ci,  $k_c \neq 0$ , et

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (1-33)$$

est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide d'onde.

L'impédance de l'onde TM est :

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta\eta}{k} \quad (1-34)$$

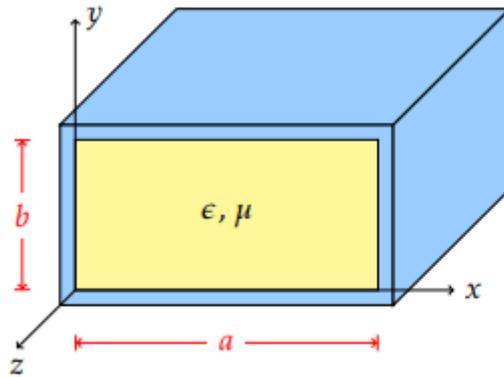
**I.5.3 Guide rectangulaire :**

Les guides d'ondes rectangulaires ont été l'un des premiers types de lignes de transmission utilisées pour transmettre des signaux micro-ondes. Certains composants, tels que des coupleurs, des détecteurs ou des atténuateurs, sont disponibles pour des fréquences allant de 1 GHz à plus de 220 GHz. Malgré la miniaturisation croissante des circuits hyperfréquences, les guides d'ondes rectangulaires sont encore utilisés en raison de leur capacité à transporter une puissance élevée.

Un guide d'ondes rectangulaire est un guide d'ondes avec un seul conducteur, il ne peut donc pas prendre en charge les modes TEM. Étant donné que les modes TE et TM ont des fréquences de coupure, ce type de guide d'ondes a la fréquence de fonctionnement la plus basse.

La figure I.1 montre un exemple de rail rectangulaire. Le guide d'onde est supposé rempli d'un diélectrique de permittivité et de perméabilité  $\mu$ . Par convention, le côté le plus long du rail est sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire

$a > b$ .



*Figure I.1 – Guide rectangulaire*

### Mode TE :

Pour le mode TE, la constante de propagation est :

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (1-35)$$

qui est réel seulement lorsque  $k > k_c$ , et donc la fréquence de coupure est :

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (1-36)$$

Le mode ayant la fréquence de coupure la plus basse est appelé le mode dominant.

Puisque  $a > b$ , le mode dominant est  $TE_{10}$  ( $m = 1, n = 0$ ) :

$$f_{c_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1-37)$$

Le mode  $TE_{00}$  n'existe pas.

A une certaine fréquence d'opération  $f$ , seulement les modes ayant  $f_c < f$  vont se propager ; les autres modes seront fortement atténués. On appelle ces modes ( $f_c > f$ ) évanescents.

De façon générale, on veut qu'il n'y ait qu'un seul mode en propagation dans le guide, soit le mode TE<sub>10</sub>. On choisit donc les dimensions du guide, selon la fréquence d'opération, pour avoir seulement ce mode.

L'atténuation due au conducteur pour le mode TE<sub>10</sub> est :

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a^3 b \beta k \eta} (2b\pi^2 + a^3 k^2) \quad [\text{Np/m}] \quad (1-38)$$

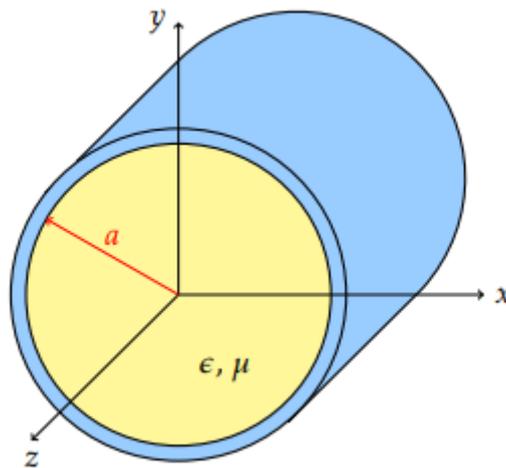
**Mode TM :**

Le mode TM possède la même constante de propagation et la même fréquence de coupure que le mode TE. Cependant, les modes TM<sub>00</sub>, TM<sub>10</sub> et TM<sub>01</sub> n'existent pas. Le plus bas mode TM qui se propage est TM<sub>11</sub>.

**I.5.4 Guide circulaire :**

Les tubes cylindriques peuvent également supporter les ondes TE et TM. Le fonctionnement est similaire au rail rectangulaire. Cependant, la rigidité de cette structure est difficile à garantir, et de tels guides d'ondes sont rarement utilisés dans les applications pratiques.

La figure I.2 montre un exemple de guide circulaire.



*Figure I.2 – Guide circulaire*

**Mode TE :**

Pour le mode TE, la constante de propagation est :

$$\beta = \sqrt{w^2 \mu \epsilon - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2} \quad (1-39)$$

Où  $p'_{nm}$  est la même racine de la dérivée des équations de Bessel,  $J'_n$ . Le tableau suivant donne quelques valeurs de  $p'_{nm}$ .

	$P'_{n1}$	$P'_{n2}$	$P'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

La fréquence de coupure est alors :

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{P'_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1-40)$$

Le premier mode à se propager dans un guide circulaire est celui qui a  $P'_{nm}$  le plus petit. Selon le tableau et l'équation (1-40), le premier mode TE à se propager est donc TE<sub>11</sub>. Puisque  $m \geq 1$ , le mode TE<sub>10</sub> n'existe pas, mais le mode TE<sub>01</sub> existe.

L'atténuation pour le mode TE<sub>11</sub> est :

$$a_c = \frac{R_s}{ak\beta\eta} \left( k_c^2 + \frac{k^2}{P'_{11}{}^2 - 1} \right) [\text{Np/m}] \quad (1-41)$$

### Mode TM :

Les équations pour le mode TM ressemblent à celle du mode TE. La constante de propagation est :

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left( \frac{P'_{nm}}{a} \right)^2} \quad (1-42)$$

ou  $p'_{nm}$  est la même racine des équations de Bessel,  $J'_n$ . Le tableau suivant donne quelques valeurs de  $p'_{nm}$ .

n	$P'_{n1}$	$P'_{n2}$	$P'_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

La fréquence de coupure est :

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{P'_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1-43)$$

Selon le tableau précédent, le premier mode à se propager est  $TM_{01}$  (puisque c'est le plus petit  $p'_{nm}$ ). Cette valeur est plus grande que le plus petit  $p'_{nm}$ , et donc  $TE_{11}$  est le mode dominant du guide circulaire. Il n'y a pas de mode  $TM_{10}$ .

### **I.5.5 REMARQUE :**

Aujourd'hui, les guides d'ondes à section rectangulaire sont principalement utilisés pour les longueurs d'onde dans la gamme UHF lorsque de grandes longueurs de tube sont nécessaires. Pour les fréquences plus élevées, ils ne sont utilisés que pour les liaisons courtes, les guides d'ondes circulaires étant préférables, mais ces propriétés sont plus difficiles à calculer directement, notamment la longueur d'onde de coupure.

### **Utilisations des guides d'ondes :**

Les guides d'ondes sont utilisés dans :

- Les transmetteurs de haute puissance ;
- Les équipements radars ;
- Les fours micro-ondes ;
- Les bloc-convertisseurs à faible bruit des antennes de réception des signaux de télévision.

### **I.6. Propagation de l'onde électromagnétique dans un guide d'onde :**

Lorsque de l'énergie est introduite dans le guide d'onde, un champ électrique (champ  $E$ ) est induit au centre de la paroi large "a". Le champ électrique est le plus fort au centre du guide d'onde et diminue en direction de la paroi étroite "b". Il a la forme sinusoïdale vue en coupe. Un champ magnétique est également induit, qui prend une orientation orthogonale puisqu'il ne peut rester perpendiculaire au conducteur métallique.

Le champ électrique varie dans le temps en fonction de la fréquence du signal et donne des valeurs maximales et minimales dans la direction longitudinale du guide d'onde à des positions correspondant à des demi-longueurs d'onde. L'énergie haute fréquence introduite dans le guide d'ondes produit des ondes électromagnétiques transversales (mode TEM) avec des champs électriques et magnétiques perpendiculaires l'un à l'autre. Ces champs ne restent pas dans leurs états respectifs et se propagent donc dans le guide d'onde. Au fil du temps,

ils changent d'intensité et de polarité au rythme du signal entrant. Ces ondes électromagnétiques voyagent dans des guides d'ondes à une vitesse proche de la lumière (environ 300 millions de mètres par seconde). Par conséquent, leur interaction permet de transférer l'énergie du signal d'entrée vers sa destination.

L'intensité et l'intensité des champs électriques et magnétiques changent en permanence, mais ils sont toujours perpendiculaires les uns aux autres à chaque point du rail. Si le champ électrique est dans la direction de propagation, on l'appelle une onde de mode E ou TM (magnétique transverse). Si le champ magnétique est dans la direction de propagation, on l'appelle une onde en mode H ou TE (transverse électrique).

### I.7. Câbles coaxiaux :



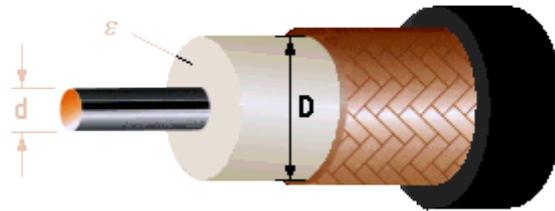
*Figure I.3 - Câble coaxial*

Un câble coaxial est formé de deux conducteurs cylindriques concentriques séparés par un isolant diélectrique. Celui du milieu est généralement un fil solide, tandis que celui de l'extérieur prend la forme d'une enceinte, souvent appelée "bouclier". Le tout est recouvert d'un étui de protection. Les matériaux diélectriques maintiennent une certaine capacité entre deux conducteurs, ce qui est très important dans les transmissions radio. Il est généralement mou et peut facilement se déformer s'il est trop serré ou par le mauvais type de gaine.

Dans un conducteur simple, les champs magnétique et électrique s'étendent à l'infini, ce qui signifie une perte d'énergie. Dans une ligne coaxiale, les deux champs sont confinés dans l'espace entre les conducteurs. Par conséquent, la perte de rayonnement est théoriquement nulle.

Les câbles coaxiaux sont utilisés pour les lignes de transmission et protègent le signal transmis des ondes d'interférence externes. Il en existe deux types, souples et rigides, qui utilisent des matériaux différents.

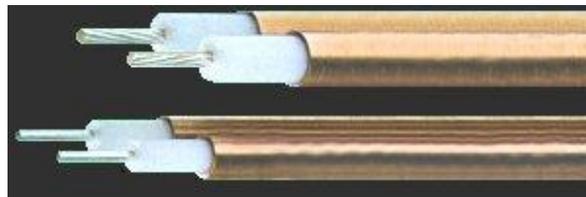
### I.7.1 Câbles coaxiaux flexibles :



*Figure I.4 - Diagramme en coupe d'une ligne coaxial flexible*

Un câble souple est constitué d'un fil souple et d'une couche diélectrique isolante entourée d'un treillis métallique conducteur. Les premiers câbles de ce type utilisaient du caoutchouc comme isolant, mais ce matériau créait une perte de signal excessive aux hautes fréquences.

### I.7.2 Lignes rigides :



*Figure I.5 - Ligne coaxiale semi-rigide*

Un câble coaxial rigide se compose d'un fil intérieur et d'un conducteur tubulaire extérieur. Le conducteur intérieur et le tube extérieur sont séparés par des entretoises à intervalles réguliers. Ces derniers sont en Pyrex, polystyrène ou autres matériaux hautement isolants et n'ont pratiquement pas de pertes diélectriques aux hautes fréquences.

Le principal avantage des câbles coaxiaux rigides est une meilleure réduction des pertes par rayonnement. En fait, les deux conducteurs sont toujours parallèles, ce qui maintient les champs magnétique et électrique dans la ligne, et le câble flexible est capable de rompre ce parallélisme. Un autre avantage est la réduction des perturbations extérieures grâce à "l'effet peau".

Ce type de coaxial a cependant certains désavantages :

- Il est coûteux.
- Il doit être maintenu au sec pour éviter des pertes excessives par drainage entre les deux conducteurs.
- Même si les pertes haute fréquence sont inférieures aux câbles souples, elles suffisent néanmoins à limiter la longueur utile des fils rigides.

Les câbles coaxiaux semi-rigides utilisent une gaine en cuivre plaqué argent comme conducteur extérieur. Ils peuvent être pliés très soigneusement et sont très chers, mais offrent les meilleures performances de tous les câbles coaxiaux.

## **Chapitre II**

---

# **SIMULATION DES CHAMPS ELCTROMAGNETIQUE DANS DES GUIDES CYLINDRIQUE METALLIQUES**

**Introduction :**

Cette partie de modélisation et de simulation va être consacrée à l'étude du comportement électromagnétique et énergétique d'un câble coaxial, composé de deux parties. La première est la partie cœur du câble qui consiste en un fil cylindrique parfaitement conducteur qui sera le siège des courants surfaciques. La deuxième partie du câble est la gaine, qui est un cylindre coaxial vide (creux) d'un rayon inférieur supérieur au rayon extérieur du cœur du câble, les deux cylindres coaxiaux sont séparés par un vide pour en fin de compte constituer un câble coaxial utilisé dans pas mal d'applications industrielles et domestiques.

**II.A. Propagation d'une onde dans le vide le long d'un cylindre conducteur**

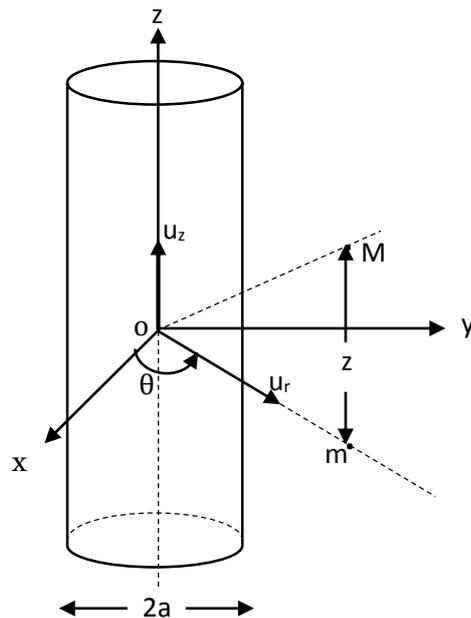
Pour pouvoir déterminer la configuration du champ électrique  $E$  dans un guide cylindrique de rayon  $R$ , les équations de Maxwell sont résolues en tenant compte des conditions frontières (aux limite) à la surface du guide. Si le guide est parfaitement conducteur, ces conditions sont que; les composantes tangentielles du champ électrique ( $E$ ) et la composante normale du champ magnétique ( $B$ ) s'annulent à la surface.

Nous allons considérer un fil cylindrique d'axe  $oz$  avec les caractéristiques suivantes : un diamètre de  $2a$ , parfaitement conducteur et d'une longueur infinie qui baigne dans le milieu vide.

Nous avons aussi une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation  $\omega$  qui se propage dans le vide de cylindre conducteur suivant la direction parallèle à  $Oz$ . Cette onde ( $r, \theta, z$ ) est caractérisée à l'instant  $t$  par les champs électrique et magnétique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(M). \cos (\omega t - k z) \quad (\text{II.1})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(M). \cos (\omega t - k z) \quad (\text{II.2})$$



**Figure II.A : Cylindre conducteur**

Sachant que  $E_o(M)$  et  $B_o(M)$  dépendant seulement aux coordonnées  $(r, \theta, z)$  de  $M$ .

$C$  désigne la célérité de la lumière dans le vide et la perméabilité du vide par  $\mu_0$ .

A partir des données ci-dessus, on va essayer de déterminer huit équations aux dérivées partielles :  $E_r, E_\theta, E_z$  et  $B_r, B_\theta, B_z$  des champs électrique et magnétique en coordonnées cylindriques.

Par la suite, nous allons calculer les composants  $E_\theta, E_z, B_r$  sur l'interface vide-conducteur ( $r = a$ ).

Prenant que l'onde étudiée est transversale et l'amplitude du champ  $E$  est désignée par  $E_m$  à la surface du métal.

De cela, on va déterminer premièrement d'un coté le champ magnétique ( $B$ ) et de l'autre coté le champ électrique ( $E$ ). On va exprimer les lois  $E_o(M)$  et  $B_o(M)$  en fonction de  $a, E_m, c$  et des coordonnées d'espace de  $M$ .

De plus, nous allons déterminer la densité volumique  $i$  et la densité surfacique  $j_s(z, t)$  des courants engendrés dans le fil par l'onde, En déduire (en fonction de  $a, c, E_m, \omega$  et  $\mu_0$ ) l'intensité  $I(z, t)$  du courant dans le conducteur.

Finalement, et à partir des expressions des champs  $E$  et  $B$ , en fonction de  $a, c, E_m, \omega, \mu_0$ , on va calculer :

Premièrement le potentiel scalaire  $V(r, z, t)$  au point  $M$  du vide à l'instant  $t$  ;

Deuxième le potentiel vecteur  $A(r, z, t)$  au point  $M$  du vide à l'instant  $t$  ;

et on va montrer également  $A$  et  $V$  vérifient la condition de jauge de Lorentz, ainsi la relation  $V = |A| \cdot c$

➤ Les équations de Maxwell s'écrivent dans le vide ( $\rho = 0 ; i = 0$ ) :

$$\operatorname{div} E = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

$$\operatorname{rot} B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{II.6})$$

- La symétrie de révolution impose que les composants de  $E$  et  $B$  sont indépendantes de l'angle polaire  $\theta$ , soit  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$  ; il vient donc, en coordonnées cylindrique.

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.8})$$

- Les équations en  $\operatorname{rot} E$  et  $\operatorname{rot} B$  s'écrivent respectivement en projection sur  $u_r$ ,  $u_\theta$ .

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial z} = \frac{\partial B_r}{\partial t} \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t} \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} = \frac{-\partial B_z}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

$$-\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (\text{II.14})$$

Les relations de passage s'écrivent sur l'interface vide-conducteur  $r = a$ , puis que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont nuls à l'intérieur du conducteur supposé parfait,

La continuité de la composante tangentielle du champ  $\mathbf{E}$  pour  $r = a$

$$E_{T \text{ vide}} - E_{T \text{ métal}} = 0 \quad (\text{II.15})$$

soit, 
$$E_{T \text{ vide}}(r = a) = 0 \quad (\text{II.16})$$

Donc : 
$$E_\theta(r = a) = 0 \quad (\text{II.17})$$

et 
$$E_z(r = a) = 0 \quad (\text{II.18})$$

La continuité de la composante normale du champ  $\mathbf{B}$  pour  $r = a$  :

$$B_{N \text{ vide}} - B_{N \text{ métal}} = 0 \quad (\text{II.19})$$

soit 
$$B_{N \text{ vide}}(r = a) = 0 \quad (\text{II.20})$$

Donc : 
$$B_r(r = a) = 0 \quad (\text{II.21})$$

- a) pour l'onde électromagnétique transversale, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans le vide sont perpendiculaires à la direction  $O_z$  de propagation, soit  $E_z \equiv 0$  et  $B_z \equiv 0$ .
- Puisque  $E_z = 0$ , la relation (II.9) se simplifie en  $\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} = 0$  dont l'intégration fournit  $rE_\theta = \text{cte} = 0$ , car  $E_\theta = 0$ , pour  $r = a$ ; donc pour n'importe quelle valeur de  $r$  on a,  $E_\theta = 0$ ; les conditions  $E_z \equiv 0$  et  $E_\theta \equiv 0$  montre donc que **le champ  $\mathbf{E}$  est radial.**
- Puisque  $B_z = 0$ , la relation (II.6) se simplifie en  $\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = 0$  dont l'intégration fournit  $rB_r = \text{cte} = 0$ , car  $B_r = 0$  pour  $r=a$ ; donc pour n'importe quelle valeur de  $r$ , on a  $B_r \equiv 0$ ; les conditions  $B_z \equiv 0$  et  $B_r \equiv 0$  montre que **le champ  $\mathbf{B}$  est ortho radial.**

- b) La relation (II.5) s'écrit, puisque  $E_z = 0$ ,  $\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$  soit, par intégration  $rE_r = cte$  ; le champ électrique (radial) est donc maximal dans le vide pour  $r$  minimal donc pour  $r = a$  ; on en déduit  $rE_0 = a \cdot E_m$  d'où l'amplitude du champ électrique en  $M(r, \theta, z)$  :

$$E_0(r) = \frac{aE_m}{r} u_r \quad (\text{II.22})$$

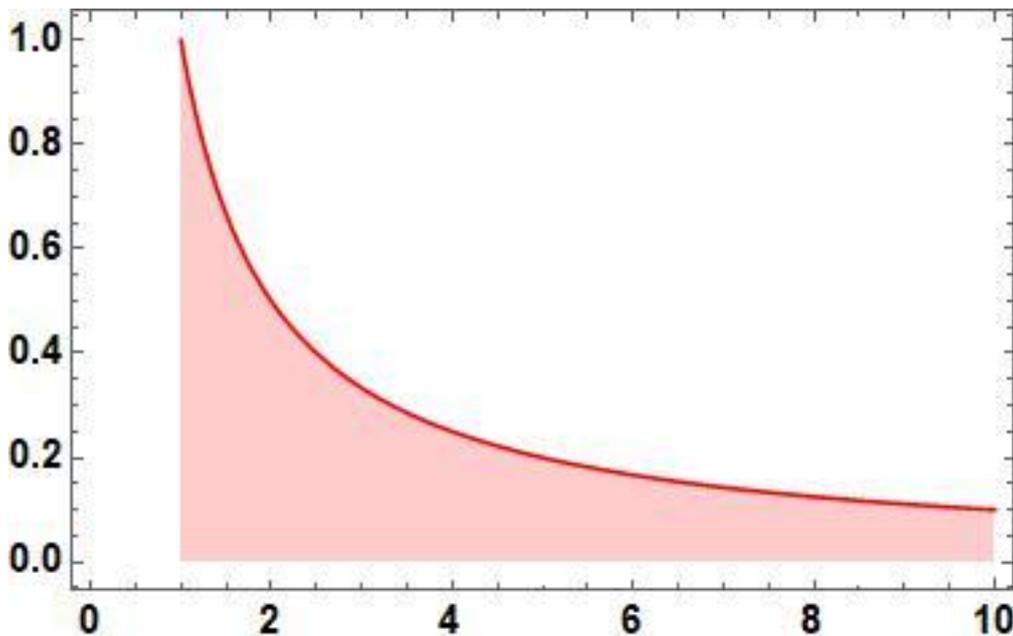


Figure II.A.1 : Présentation de  $E_0(r)$  graphiquement

Puisque  $E_z = 0$ , la relation (II.2) s'écrit  $\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t}$

Soit

$$E_0(r) \cdot k \cdot \sin(\omega t - kz) = B_0 \omega \cdot \sin(\omega t - kz). \quad (\text{II.23})$$

Avec  $k = \frac{\omega}{c}$  dans le vide ; on en déduit l'amplitude du champ magnétique :

$$B_0(r) = \frac{aE_m}{c \cdot r} u_\theta \quad (\text{II.24})$$

Ainsi, les amplitudes  $E_0 (M)$  et  $B_0 (M)$  des champs, en  $\frac{1}{r}$ , ne dépendent que de la distance  $r$  point  $M$  à l'axe  $O_z$  du fil cylindrique.

Le conducteur est supposé parfait (*conductivité  $\gamma$  infinie*) donc la densité volumique de courant est nulle  $\boxed{\vec{j} \equiv 0}$  ; les courants engendrés par l'onde ne pouvant être que **surfaiques**.

La relation de passage qui traduit la discontinuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{B}$  sur la surface du conducteur :

$$B_{T\ vide} - B_{T\ m\acute{e}tal} = \mu_0 j_s \wedge n_{m\acute{e}tal \rightarrow vide} \quad (II.25)$$

Pour :  $r = a$

Où le vecteur unitaire normal  $n_{m\acute{e}tal \rightarrow vide}$  se confond avec le vecteur unitaire radial  $u_r$  et avec  $B_{m\acute{e}tal} = 0$ , donc :

$$B_0(r = a). \cos(\omega t - kz) u_0 = u_0 j_s \wedge u_r \quad (II.26)$$

Avec d'après (II.24)

$$B_0(r = a) = \frac{E_m}{c} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad (II.27)$$

La densité surfacique de courant sur le fil cylindrique est donc axiale et vaut :

$$j_s = \frac{E_m}{\mu_0 c} \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) u_z \quad (II.28)$$

L'intensité du courant dans le conducteur cylindrique est  $= J_s \cdot 2\pi a$ , soit

$$I(z, t) = \frac{2\pi a E_m}{\mu_0 c} \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (II.29)$$

➤ **a)** Le potentiel scalaire associé au champ E radial de l'onde est :

$$v = \int E \cdot dr = -a E_m \cdot \cos(\omega t - kz) \int \frac{dr}{r} \quad (II.30)$$

Soit :

$$v = -a E_m (\ln r) \cdot \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + cte, \quad \text{avec} \quad v(r = a) = 0 \quad (II.31)$$

Donc :

$$v(r, z, t) = a E_m \cdot \ln \frac{a}{r} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (II.32)$$

➤ **b)** La relation locale champ potentiel  $B + rot A$  s'écrit, en projection sur l'axe ortho radial, compte tenu du fait que  $A_r = 0$ , car A est parallèle au courant dirigé suivant  $O_z$  d'après (II.29) :

$$B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad \text{alors} \quad A_z = -\int B_\theta \cdot dr \quad (II.33)$$

Où :

$$A_z = -\frac{a E_m}{c} \cos(\omega t - kz) \int \frac{dr}{r} = -\frac{a E_m}{c} \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \ln r + cte \quad (II.34)$$

$$\text{Avec} \quad A = A_z = 0 \quad \text{pour} \quad r = a \quad (II.35)$$

Donc :

$$A(r, z, t) = \frac{aE_m}{c} \ln \frac{a}{r} \cdot \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) u_z \quad (\text{II.36})$$

On a, d'après (II.31)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\omega a E_m \ln \frac{a}{r} \sin \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (\text{II.37})$$

Et, d'après (II.32)

$$\text{div } A = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\omega a E_m}{c^2} \ln \left( \frac{a}{r} \right) \cdot \sin \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (\text{II.38})$$

Ainsi la relation de jauge de Lorentz ;  $\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} = \mathbf{0}$ , est bien vérifiée.

Enfin, d'après (II.29) et (II.30), on a  $\|A\| = \frac{v}{c}$  ou  $v = \|A\| \cdot c$

Cette relation entre potentiel est à rapprocher de celle (analogue) entre les champs de l'onde :

$$\|E\| = \|B\| \cdot c \quad (\text{II.39})$$

## II.B. Etude de la propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial cylindrique :

### 1- Description du problème

En utilisant les équations statiques de Maxwell dans la forme intégrale, nous exprimons les champs électromagnétiques, la puissance de l'onde électromagnétique se propageant et déduisons l'impédance caractéristique.

Dans cette section, nous allons considérer un câble coaxial constitué d'un cylindre plein (âme) de rayon  $R_1$ , d'axe  $O_z$ , entouré d'un cylindre coaxial (gaine) de rayon intérieur  $R_2$ . L'espace entre les cylindres conducteurs (supposés parfait) est vide.

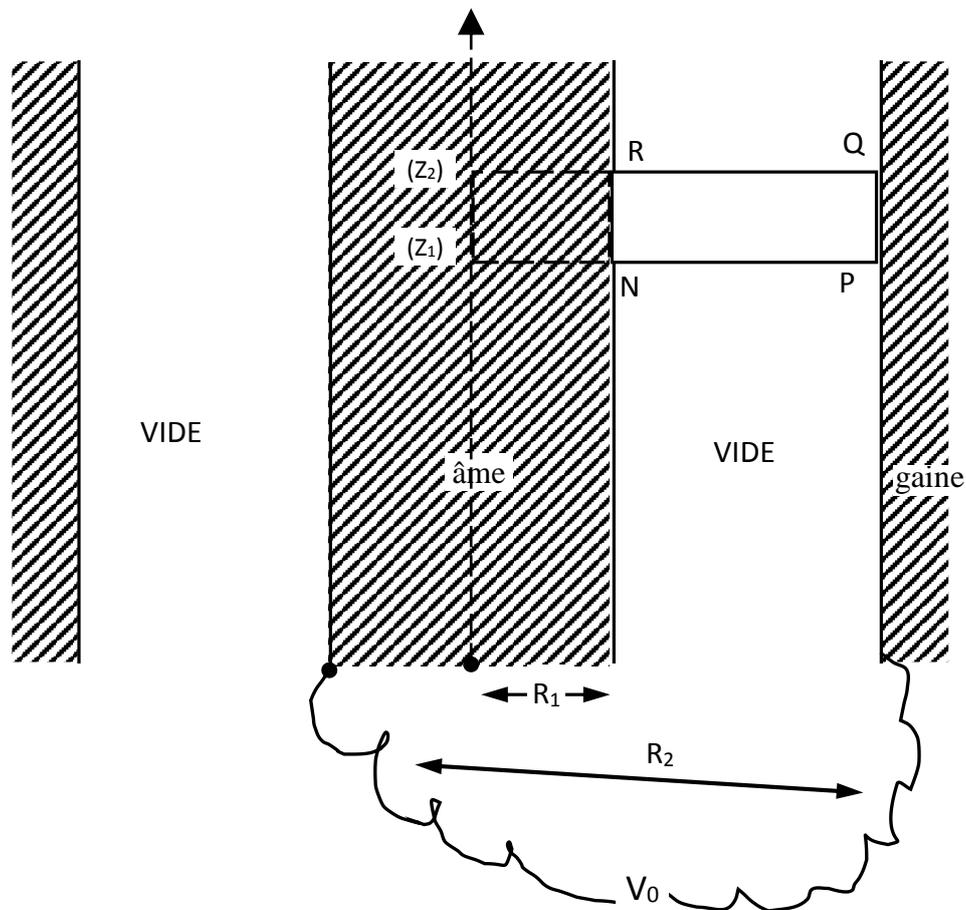
On établit une l'âme et la gaine de la ligne coaxiale, supposé infiniment longue, une d.d.p sinusoïdale  $= V_0 e^{j\omega t}$ , de haute fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , à l'entrée de la ligne ( $z = 0$ ) ; un courant électrique d'intensité :

$$I(z, t) = I_0(z). e^{j\omega t} \quad (\text{II.40})$$

Circule alors dans l'âme, dans le sens des  $z$  croissant, à l'instant  $t$  ;  $I_0(z)$  est une fonction complexe de la coté  $z$  de la section du câble.

Alors le champ  $E(r, z, t)$  au point  $M$  de l'espace vide intra conducteur, repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , est radial.

On notera  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$ , et  $\vec{u}_z$  les vecteurs unitaires radial, ortho radial et axial, On donne  $\epsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$  S.I et la célérité  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} 3 \cdot 10^8$  m/s de la lumière dans le vide.



**Figure II.B : section de câble coaxial**

En se basant sur les données ci-dessus, on va essayer d'exprimer dans l'espace vide intra conducteurs en  $M(r, \theta, z)$  à l'instant  $t$ , à l'aide de la fonction  $I_0(z)$  ou de sa dérivées  $\frac{dI_0}{dz}$ , en premier lieu, le champ magnétique  $B(M, t)$ , après avoir déterminer sa direction.

En deuxième lieu le champ électrique  $E(M, t)$ .

Par la suite, nous calculons la d.d.p instantanée  $v(z, t) = V_{ame} - V_{gaine}$  entre l'âme et la gaine dans la section du câble de cote  $z$ , en fonction de  $\epsilon_0, \omega, \frac{dI_0}{dz}$  et du rapport  $\frac{R_2}{R_1}$ , puis nous essayons de déterminer l'équation différentielle du second ordre en  $I_0(z)$ .

En contre, on exprime la fonction complexe  $I_0(z)$  en fonction de  $\epsilon_0, c, \omega, v_0$  et du rapport  $\frac{R_2}{R_1}$ .

Ensuite, on va déduire en notation réelle, les expressions du champ électrique  $E(r, z, t)$  et de champ magnétique  $B(r, z, t)$ , en fonction de  $c, \omega, v_0$  et  $\frac{R_2}{R_1}$ , dans l'espace vide intra conducteur en  $M(r, \theta, z)$  à l'instant  $t$  et nous calculons aussi sous forme d'un produit, la circulation  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$  du champ électrique le long du contour rectangulaire NPPQRN limité par les plans  $z_1 = cte$  et  $z_2 = cte$  l'âme et la gaine.

Finalement, nous calculons la puissance moyenne  $P$  transportée par le câble coaxial, en fonction de  $\epsilon_0, c, v_0$  et  $\frac{R_2}{R_1}$ , et au même temps nous calculons par deux méthodes, l'impédance caractéristique  $R_c$  de la ligne coaxiale, en fonction de  $\epsilon_0, c$  et  $\frac{R_2}{R_1}$ .

## 2- Modélisation mathématique

a) La symétrie cylindrique du câble coaxial impose que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  entre les cylindres conducteurs sont indépendants de l'angle polaire  $\theta$ , soit  $E(r, z, t)$  et  $B(r, z, t)$ .

L'équation de Maxwell-Faraday  $\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  s'écrit, puisque  $\vec{E}$  est radial ( $E_\theta = E_z = 0$ ), en projection respectivement sur les directions radiale, ortho radiale et axiale :

$$0 = \frac{\partial B_r}{\partial t} \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t} \quad (\text{II.42})$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.43})$$

Soit, par intégration

$$B_r = cte = 0 ; \text{ et } B_z = cte = 0. \quad (\text{II.44})$$

Le champ magnétique  $B(M, t)$  est donc ortho radial (le champ radial est axial sont en fait constants ; on les a choisis nuls, ce qui ne modifie pas les phénomènes puisque  $E$  et  $B$  interviennent par leurs dérivées).

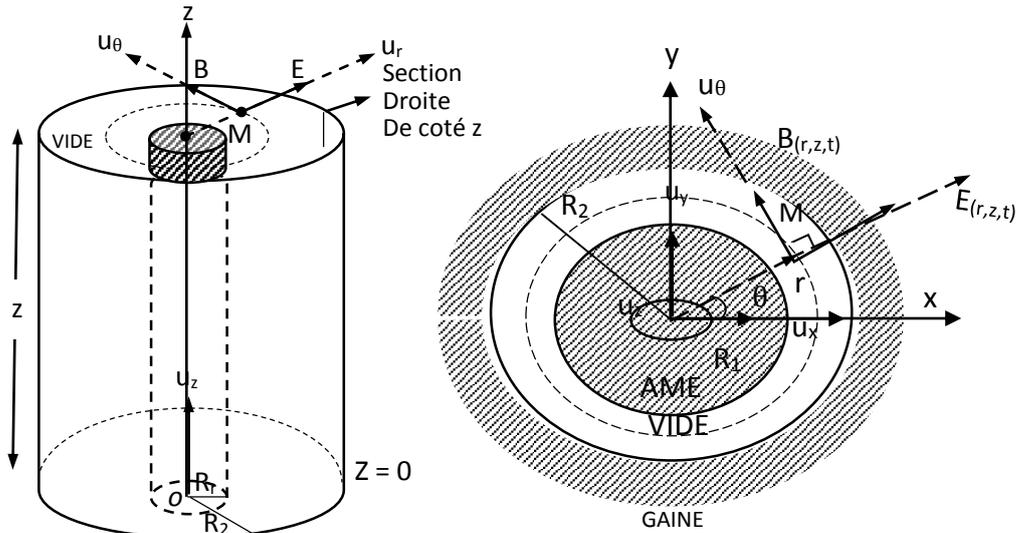


Figure II.B.1 : section horizontale et latérale du câble coaxial

- La circulation du champ  $B$  (ortho radial) le long du contour circulaire ( $c$ ) de rayon ( $R_1 < r < R_2$ ), dans le plan de section du câble de cote  $z$ , est :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint \mu_0 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} + \underbrace{\frac{1}{c^2} \iint \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}}_{=0} \quad (\text{II.45})$$

*car  $E_{\text{radial}} \cdot d\mathbf{s}$  (ou  $O_z$ )*

Avec :

$$\iint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = I(z, t), \text{ donc } B \cdot 2\pi r = \mu_0 I(z, t), \quad (\text{II.46})$$

soit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}, t) = \frac{\mu_0 I_0(z)}{2\pi r} \cdot e^{j\omega t} \mathbf{u}_0 \quad (\text{II.47})$$

b) L'équation de Maxwell-Ampère dans le vide intra conducteurs :  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$  s'écrit, en projection sur l'axe radial,

$$-\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t}, \text{ donc } E_r = -c^2 \int \frac{\partial B_\theta}{\partial z} dt \quad (\text{II.48})$$

Soit : compte tenu de (II.33),

$$E_r = -\frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{dI_0}{dz} \int e^{j\omega t} dt, \quad (\text{II.49})$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1, \quad (\text{II.50})$$

Donc

$$\mathbf{E}(\mathbf{M}, t) = \frac{j}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dI_0}{dZ} e^{j\omega t} \mathbf{u}_r \quad (\text{II.51})$$

La p.p.d entre l'âme et la gaine, dans la section du câble coaxial de cote  $z$ , est :

$$v(z, t) = v_1 - v_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr \quad (\text{II.52})$$

$$\text{Soit, d'après (II.36),} \quad v(z, t) = \frac{j}{2\pi\varepsilon_0\omega} \frac{dI_0}{dZ} e^{j\omega t} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{r} \quad (\text{II.53})$$

Donc :

$$v(z, t) = \frac{j}{2\pi\varepsilon_0\omega} \frac{dI_0}{dZ} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) e^{j\omega t} \quad (\text{II.54})$$

a) L'équation de Maxwell-Faraday, projetées sur l'axe ortho radial, donne (relation II.1) :  $\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t}$ , soit d'après (II.35) et (II.36),

$$\frac{j}{2\pi\varepsilon_0\omega} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 I_0}{dz^2} e^{j\omega t} = -j\omega \frac{\mu_0 I_0(z)}{2\pi r} e^{j\omega t} \quad (\text{II.55})$$

D'où l'équation différentielle du second ordre en  $I_0(z)$ , compte tenu de  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  :

$$\frac{d^2 I_0}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} I_0(z) = 0 \quad (\text{II.56})$$

b) Les racines de l'équation caractéristique de (II.39) sont  $\pm \frac{j\omega}{c}$ , d'où la solution générale de la forme :

$$I_0(z) = I_1 e^{-j\frac{\omega z}{c}} + I_2 e^{j\frac{\omega z}{c}} \quad (\text{II.57})$$

Pour l'ordre de courant qui se propage dans le sens des  $z$  croissants,  $I_0$  ne peut pas physiquement devenir infini si  $z$  croit indéfiniment, donc  $I_2 = 0$ , d'où la loi :

$$I_0(z) = I_1 \cdot e^{-j\frac{\omega z}{c}} \quad (\text{II.58})$$

- Pour déterminer la constante d'intégration  $I_1$ , utilisons la relation (II.54) à l'entrée de la lige coaxiale ( $z = 0$ ) :

$$v_0 e^{j\omega t} = \frac{j}{2\pi \epsilon_0 \omega} \left( \frac{dI_0}{dz} \right)_{z=0} \cdot \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) e^{J\omega t} \quad (\text{II.59})$$

Aves d'après (II.55),

$$\left( \frac{dI_0}{dz} \right)_{z=0} = -j \frac{\omega}{c} I_1, \quad (\text{II.60})$$

donc :

$$v_0 = \frac{I_1}{2\pi \epsilon_0 c} \cdot \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (\text{II.61})$$

D'où  $I_1 = \frac{2\pi \epsilon_0 V_0}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$  et donc :

$$I_0(z) = \frac{2\pi \epsilon_0 c V_0}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} e^{-j \frac{\omega z}{c}} \quad (\text{II.62})$$

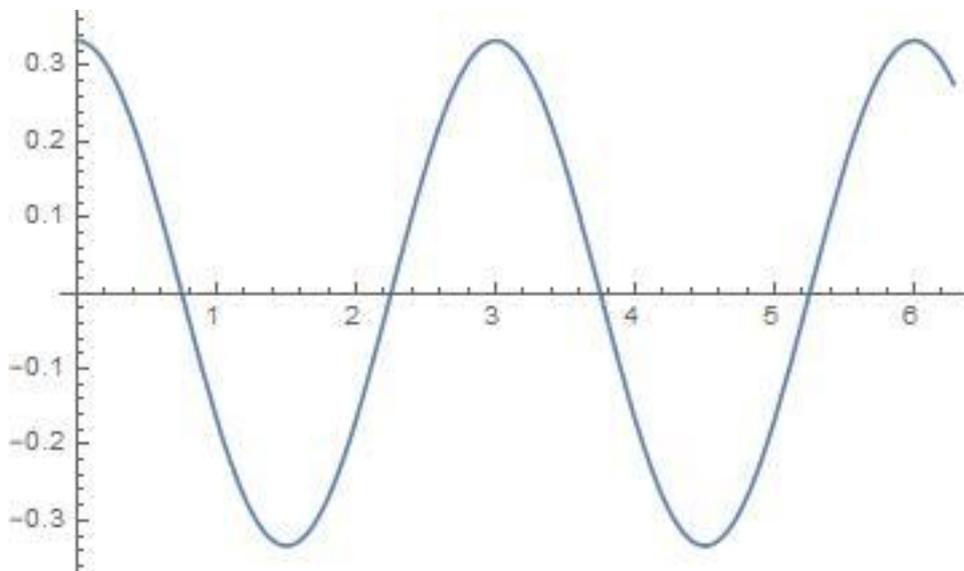
➤ a) D'après (II.46) on a  $\frac{dI_0}{dz} = -j \frac{2\pi \epsilon_0 \omega v_0}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} e^{-j \frac{\omega z}{c}}$  ; la relation (II.53) s'écrit

donc

$$E(M, t) = \frac{v_0}{r \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} e^{j\omega \left( t - \frac{z}{c} \right)} \vec{u}_r \quad (\text{II.63})$$

D'où le champ électrique réel :

$$E(r, z, t) = \frac{v_0}{r \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \vec{u}_r \quad (\text{II.64})$$



**Figure II.B.1** Présentation de  $E(r,z,t)$

- De même, le champ magnétique  $B$  complexe est, d'après (II.35) et (II.40), compte tenu de :  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$B(M, t) = \frac{v_0}{rc \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} \quad (\text{II.65})$$

Ou en notation réelle :

$$B(r, z, t) = \frac{v_0}{rc \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) u_0 \quad (\text{II.66})$$

**Remarque :** les champs  $E(r, z, t)$  et  $B(r, z, t)$  sont orthogonaux, e phase et le rapport de leur module est  $\frac{E}{B} = C$  mais contrairement à une onde plane leurs amplitudes varient en  $\frac{1}{r}$ .

b) Puisque le champ  $E$  est radial, la circulation de  $E$  le long des cotés  $PQ$  et la parallèle à  $O_z$  est nulle ; la circulation cherchée se réduit donc à :

$$\oint_{NPQRN} E. dl = \int_{NP} E(r, z, t). dr + \int_{QR} E(r, z, t). dr \quad (\text{II.67})$$

Soit d'après (II.42) :

$$\int_{NPQRN} E. dl = \frac{v_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \left[ \cos \omega \left( T - \frac{z_1}{c} \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} + \cos \omega \left( t - \frac{z_2}{c} \right) \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} \right] \quad (\text{II.68})$$

$$\text{Ou :} \quad \int_{NPQRN} E. dl = v_0 \left[ \cos \omega \left( T - \frac{z_1}{c} \right) - \cos \omega \left( t - \frac{z_2}{c} \right) \right] \quad (\text{II.69})$$

Et finalement :

$$\oint_{NPQRN} E. dl = -2v_0 \sin \left[ \frac{\omega}{2c} (z_2 - z_1) \right] \cdot \sin \omega \left( t - \frac{z_1+z_2}{2c} \right) \quad (\text{II.70})$$

**2<sup>eme</sup> méthode :**

$$\oint E. dl = \iint \text{rot } E. ds = - \iint \frac{\partial B}{\partial t} . ds \quad (\text{II.71})$$

Et, compte tenu de  $d_s = d_r . d_z . u_\theta$  et de la relation (II.51) on obtient bien par intégration l'expression (II.53).

➤ a) La vecteur de Poynting  $= \frac{E.B}{\mu_0}$ , on notations réelles, est d'après (II.51) et (II.52) :

$$R = \frac{V_0^2}{\mu_0 c r^2 \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \cos^2 \omega \left( T - \frac{z}{c} \right) \vec{u}_z \quad (\text{II.72})$$

Le vecteur de Poynting, dirigé parallèlement à l'axe  $O_z$ , a pour valeur moyenne au cours du temps, puisque  $\langle \cos^2 \omega \left( \frac{t-z}{c} \right) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle R \rangle = \frac{V_0^2}{2\mu_0 c r^2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \vec{u}_z \quad (\text{II.73})$$

- La puissance moyenne transportée par le câble coaxial au flux du vecteur de Poynting moyen à travers un plan de section droite a cote  $z$  :

$$p = \iint \langle |R| \rangle \cdot dr \cdot r \, d\theta = \frac{v_0^2}{2\mu_0 c \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \quad (\text{II.74})$$

Soit, compte tenu de  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$P = \frac{\pi \varepsilon_0 c v_0^2}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (\text{II.75})$$

b) L'impédance caractéristique de la ligne est telle que :

$$p = \left\langle \frac{v_0^2}{R_c} \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{v_0^2}{2R_c} \quad (\text{II.76})$$

Donc :  $R_c = \frac{v_0^2}{2p}$  soit, d'après (II.63) :

$$R_c = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi \varepsilon_0 c} \quad (\text{II.77})$$

**2<sup>eme</sup> méthode** : On peut retrouver ce résultat à partir de la relation  $R_c = \frac{v(z,t)}{I(z,t)}$  on retrouve ainsi l'expression (II.39) à partir de (II.31) et (II.33)

Application numérique :  $p = 51,17 \text{ W}$  ;  $R_c = 96,7 \, \Omega$

### II.C. Propagation guidée d'une onde par un câble coaxial parfait ou avec perte :

On va exprimer le potentiel après avoir déterminé le champ magnétique et électrique, et calculer l'énergie électromagnétique et la puissance moyenne transportée. Enfin, on déduira l'impédance caractéristique.

Dans ce problème, nous prenons une ligne coaxiale de longueur infinie, constitué d'un cylindre conducteur (âme) de rayon  $R_1$  et d'axe  $O_z$ , entouré d'un cylindre de faible épaisseur (gaine) de rayons intérieur  $R_2$  et extérieur  $R_3$  et de même axe.

Sachant qu'une onde radioélectrique a champ radial se propage parallèlement à l'axe  $oz$  dans le vide qui sépare l'âme et la gaine.

$$E(r, z, t) = E_0 e^{j\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} u_r, \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{II.78})$$

Ajoutant à cela l'amplitude du champ  $E$  sur la surface de l'âme ( $r = R_1$ ) est  $E_1$ , en utilisant les coordonnées cylindriques pour repérer un point  $M(r, \theta, z)$  dans la base orthonormée  $(u_r, u_\theta, u_z)$  ; on donne pour un vecteur  $A(A_r, A_\theta, A_z)$  :

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{II.79})$$

$$\text{rot } A = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) u_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) u_\theta + \left[ \left( \frac{1}{r} \right) \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] u_z \quad (\text{II.80})$$

A partir des données citées en haut, on va déterminer la loi  $E_0(r)$  et tracer le graphe  $E_0(r)$  pour  $0 < r < R_3$ .

Ensuite, nous allons déterminer le champ magnétique  $B(r, z, t)$  ortho radial dans le vide intra conducteur de câble.

Puis, on va essayer d'exprimer le potentiel vecteur  $A(r, z, t)$  parallèle à  $O_z$  et le potentiel scalaire  $V(r, z, t)$  de l'onde ; on choisira  $A = 0$  et  $V = 0$  à la surface de l'âme, Montrer que la condition de jauge de Lorentz est satisfaite.

Par la suite, nous calculons la densité volumique moyenne d'énergie  $\langle \frac{dW}{dt} \rangle$  dans le vide intra conducteur et nous calculons également l'énergie électromagnétique emmagasinée sur une hauteur  $h$  de ce linge coaxial, en fonction de  $\epsilon_0, R_1, R_2$ , et  $h$ .

En outre, nous allons essayer de calculer en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $c$ ,  $E_1$ ,  $R_1$  et  $R_2$ , la puissance moyenne transportée par la ligne coaxiale.

On va calculer aussi le courant  $I(z, t)$  qui circule dans l'âme ni négligeant les courants de déplacement dans les conducteurs et déduire l'impédance caractéristique  $Z_c$  de cette ligne en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $c$  et  $\frac{R_2}{R_1}$ .

Il faut prendre en considération que les questions précédentes, l'âme et la gaine sont parfaitement conductrices.

Finalement, nous calculerons la perte relative moyenne  $\frac{dp}{p}$  de puissance du câble sur une hauteur  $d_z$ , sachant que le conducteur cylindrique intérieur a, en réalité, une conductivité finie  $\gamma$ .

Après avoir fait tout cela, nous essayons de déduire en fonction de  $\gamma$ ,  $R_1$  et  $Z_c$ , la longueur  $L$  d'atténuation de l'onde.

- Dans le vide dépourvu de charge, l'équation de Maxwell  $\text{div } E = 0$  s'écrit, en coordonnées cylindriques, puisque le champ  $E$  est radial  $E_\theta = E_z = 0$

$$\text{div } E = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot E)}{\partial r} = 0 ; \text{ soit } r \cdot E_0 = \text{cte} = R_1 E_1 \quad (\text{II.81})$$

Donc, 
$$E_0(r) \cong \frac{E_1 R_1}{r} \quad (\text{II.82})$$

L'amplitude du champ  $E$  radial varie dans le vide en  $\frac{1}{r}$  est décroît donc de  $E_1$  à  $\frac{E_1 R_1}{R_2}$  entre l'âme et la gaine ; de plus ce champ est nul dans les conducteurs parfaits (car  $\gamma = \infty$ ), d'où le graphe  $E_0(r)$

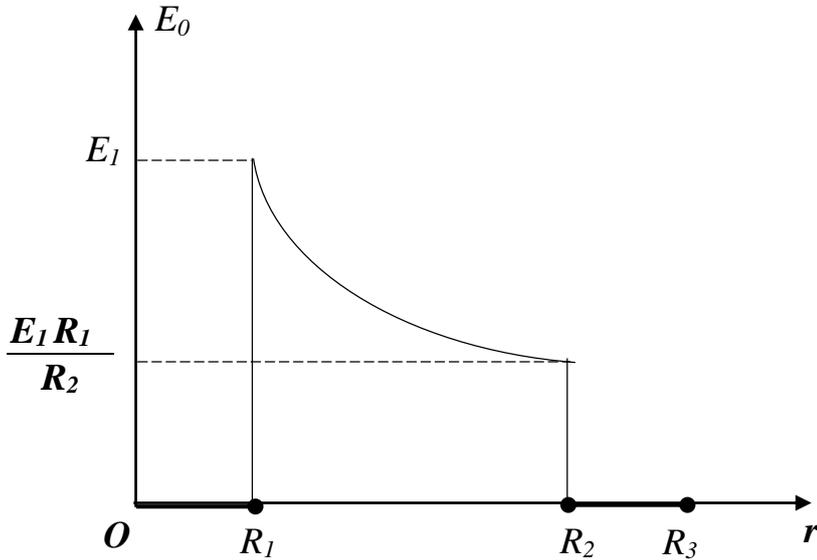


Figure II.C. Le graphe de  $E_0(r)$

➤ L'équation de Maxwell-Faraday  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  s'écrit, puisque  $E_\theta = E_z = \text{cte}$  puisque  $E = E_r$  est indépendant de  $\theta$ .

$$\frac{\partial E}{\partial z} u_\theta = -\frac{\partial B_r}{\partial t} u_r - \frac{\partial B_\theta}{\partial t} u_\theta - \frac{\partial B_z}{\partial t} u_z \quad (\text{II.83})$$

Donc : par intégration,  $B_r = B_z = \text{cte}$  et :

$$B_\theta = -\int \frac{\partial E}{\partial z} dt = j \frac{\omega}{c} E_0(r) \int e^{j\omega(t-\frac{z}{c})} dt ; \quad (\text{II.84})$$

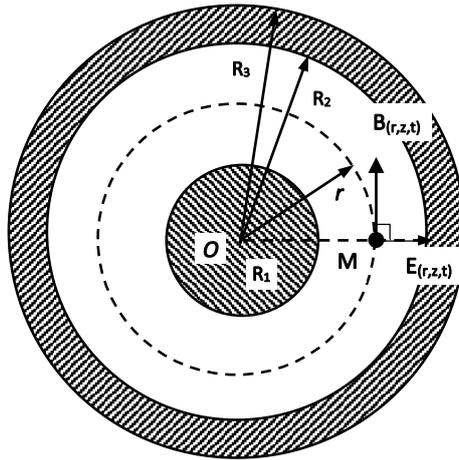
En excluant les champs statiques il vient  $B_r = B_z = 0$ , et :

$$B_\theta = \frac{1}{c} E_0(r) e^{j\omega(t-\frac{z}{c})}, \quad (\text{II.85})$$

donc :

$$B(r, t, z) = \frac{E_1 R_1}{c} \cdot \frac{1}{r} e^{j\omega(t-\frac{z}{c})} u_\theta \quad (\text{II.86})$$

On remarque que les champs  $E$  et  $B$  sont en phase, orthogonaux et le rapport de leurs amplitudes est  $\frac{E}{B} = c$ , mais contrairement à l'onde plane, les amplitudes de  $E$  et sont en  $\frac{1}{r}$ .



**Figure II.C.1** Section du cable coaxial

- Le champ  $B$  de l'onde dérive du potentiel vecteur  $A = A \cdot u_z$  tels que  $B = \text{rot } A$  soit, en projection sur l'axe ortho radial :  $B_\theta = -\frac{\partial A}{\partial r}$  donc, compte tenu de (II.86).

$$A = -\int B_\theta \cdot dr = -\frac{E_1 R_1}{c} e^{j\omega(t-\frac{z}{c})} \int \frac{dr}{r} \quad (\text{II.87})$$

Soit :

$$A(r, z, t) = \left[ -\frac{E_1 R_1}{c} \ln r + cte \right] e^{j\omega(t-\frac{z}{c})} u_z ; \quad (\text{II.88})$$

A la surface de l'âme  $R = R_1$ , on admet  $A = 0$ , donc  $cte = \frac{E_1 R_1}{c} \ln R_1$ , soit :

$$A(r, z, t) = \frac{E_1 R_1}{c} \ln \left( \frac{R_1}{r} \right) e^{j\omega(t-\frac{z}{c})} u_z \quad (\text{II.89})$$

- Projection sur l'axe  $O_z$  la relation champ potentiel ;

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial A}{\partial t} \cdot 0 = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial t} ; \quad (\text{II.90})$$

Donc : compte tenu de (II.89),

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial A}{\partial t} = -j\omega \frac{E_1 R_1}{c} \ln \left( \frac{R_1}{r} \right) e^{j\omega(t-\frac{z}{c})} \quad (\text{II.91})$$

Soit, par intégration, 
$$V = E_1 R_1 \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} + cte \quad (\text{II.92})$$

On admet  $V = 0$  pour  $r = R_1$ , donc  $cte = 0$  d'où le potentiel scalaire :

$$V(r, z, t) = E_1 R_1 \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} \quad (\text{II.93})$$

- On a puisque  $A_r = A_\theta = 0$ ,  $\text{div } A = \frac{\partial A_z}{\partial z}$  soit, d'après (II.89) :

$$\text{div } A = \frac{j\omega E_1 R_1}{c^2} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} \quad (\text{II.94})$$

D'autre part, d'après (II.94), on a :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{j\omega E_1 R_1}{c^2} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} \quad (\text{II.95})$$

La condition de Lorentz  $\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  est donc satisfaite d'après (II.94) et (II.95)

- La densité volumique d'énergie dans l'espace vide intra conducteur du champ est, d'après la remarque de la fin de la 2<sup>ème</sup> questions et compte tenu de  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E^2 \quad (\text{II.96})$$

Ou  $E$  est la partie réelle du champ (obligatoirement car  $E$  intervient par son caractère d'après (3) :

$$E = \frac{E_1 R_1}{r} \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (\text{II.97})$$

Donc : 
$$\frac{dW}{dt} = \frac{\epsilon_0 E_1^2 R_1^2}{r^2} \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (\text{II.98})$$

D'où la densité d'énergie moyenne dans le temps, puisque

$$\langle \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \rangle = \frac{1}{2} \quad (\text{II.99})$$

$$\langle \frac{dW}{dt} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_1^2 R_1^2}{2r^2} \quad (\text{II.100})$$

b) L'énergie électromagnétique contenue dans l'espace vide d'une hauteur  $h$  de la ligne est, puisque le volume élémentaire est :

$$d\tau = dr \cdot r \, d\theta \cdot dz$$

$$W = \iiint \frac{\varepsilon_0 E_1^2 R_1^2}{2r^2} dr \cdot r d\theta \cdot dz = \frac{\varepsilon_0 E_1^2 R_1^2}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \quad (\text{II.101})$$

Soit :

$$W = \pi \varepsilon_0 E_1^2 R_1^2 h \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (\text{II.102})$$

- La valeur de poynting de l'onde radioélectrique est  $R = \frac{E \wedge B}{\mu_0}$  ou  $E$  et  $B$  sont les parties réelles (obligatoirement) des champs complexe correspondants soit, puisque  $= \frac{E}{c}$ ,

$$R = \frac{E^2}{c\mu_0} u_z = \varepsilon_0 c E^2 u_z \quad (\text{II.103})$$

La moyenne temporelle du vecteur de poynting est donc, d'après (II.44),

$$\langle R \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_1^2 R_1^2}{r^2} \langle \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \rangle u_z = \frac{\varepsilon_0 c E_1^2 R_1^2}{2r^2} u_z \quad (\text{II.104})$$

- La puissance moyenne transportée par l'onde radioélectrique est mesurée par le flux du vecteur moyen de poynting à travers une section droite, donc :

$$p = \iint \langle R \rangle \cdot ds = \int_{R_1}^{R_2} \langle |R| \rangle \cdot 2\pi r \cdot dr \quad (\text{II.105})$$

Soit, d'après (II.99) :

$$p = \pi \varepsilon_0 c E_1^2 R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \quad (\text{II.106})$$

Donc

$$p = \pi \varepsilon_0 c E_1^2 R_1^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (\text{II.107})$$

- a) En négligeant les courants de déplacement, ce qui est légitime dans les bons conducteurs, le théorème d'Ampère s'écrit, puisque  $B(r, z, t)$  est ortho radial :

$$\oint B \cdot di = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I , \quad (\text{II.108})$$

Donc :  $I = \frac{2\pi r B}{\mu_0}$  soit, d'après (II.82) et compte tenu de  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ ,

$$I(z, t) = 2\pi \varepsilon_0 c E_1 R_1 e^{J\omega\left(T - \frac{z}{c}\right)} \quad (\text{II.109})$$

- b) L'impédance caractéristique de la ligne est donc :

$$Z_c = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{V_1(R_1, z, t) - V_2(R_2, z, t)}{I(z, t)} \quad (\text{II.110})$$

Soit, d'après (II.90) et (II.108),

$$Z_c = \frac{E_1 R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\epsilon_0 c E_1 R_1} \quad (\text{II.111})$$

Ou 
$$Z_c = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\epsilon_0 c} = 60 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (\text{II.112})$$

➤ La puissance dissipée sur une longueur  $d_z$  de ligne de résistance  $d_r = \frac{1}{\gamma} \frac{d_z}{\pi R_1^2}$  est, d'après (II.94) en notations réelles (obligatoirement)

$$dp = dR \cdot I^2(z, t) = \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d_z}{\pi R_1^2}\right) (2\pi\epsilon_0 c E_1 R_1)^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (\text{II.113})$$

La perte de puissance moyenne dans le temps est donc, sur une hauteur  $d_z$ , puisque  $\langle \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{c}\right) \rangle = \frac{1}{2}$

$$-dp = \langle dp \rangle = \frac{2\pi\epsilon_0^2 c^2 E_1^2}{\gamma} dz \quad (\text{II.114})$$

La perte relative de puissance est donc, d'après (II.99) et (II.60) ;

$$-\frac{dp}{p} = \frac{2\epsilon_0 c}{\gamma R_1^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} dz \quad \text{ou, d'après (II.59),}$$

$$-\frac{dp}{p} = \frac{1}{\gamma \pi R_1^2 Z_c} dz \quad (\text{II.115})$$

L'intégration de (II.65) donne la puissance moyenne, à la cote  $z$  :

$$p(z) = p(0) \cdot e^{-\frac{z}{\gamma \pi R_1^2 Z_c}} \quad (\text{II.116})$$

De la forme  $p = p_0 e^{-\frac{z}{L}}$  avec  $L = \gamma \pi R_1^2 Z_c$

Ou  $L$  est la longueur d'atténuation de la ligne (longueur au bout de laquelle puissance est divisée par  $e = 2.72$ )

Application numérique :  $z_c = 60 \cdot \ln 4 = 83.2 \Omega$  et  $L = 836.2 km$

## **II.D. Conclusion :**

Nous avons étudié dans ce chapitre la propagation d'onde électromagnétique dans les deux régions, cylindrique et coaxiale qu'on va utiliser pour connecter des équipements de transmission de données ou de télécoms.

Nous avons présenté nos résultats de simulation a l'aide du logiciel de simulation Mathematica.

## CONCLUSION GENERALE

Dans le cadre de notre projet de fin d'étude, les travaux réalisés dans ce mémoire ont été consacrés à la Contribution à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans des guides d'ondes cylindriques. Nous avons utilisé le logiciel de simulation Mathematica pour obtenir des résultats réponde à la notion de bonne adaptation guide cylindrique.

Le premier chapitre a permis de proposer des généralités sur les guides d'ondes avec les différents types existants. En outre nous avons développé les équations de Maxwell qui sont la base du rayonnement électromagnétique et nous présentons quelques applications des guides d'ondes.

En fin le deuxième chapitre constitue le cœur du travail réalisé. Il est consacré a la solution du trois problèmes données et à la présentation des résultats de simulation du champs électrique en utilisant le logiciel Mathematica. Nous avons simulé quelques équations.

Les guides d'ondes étudiés montrent que le câble coaxial est la solution idéale lorsqu'il s'agit de transmettre des signaux à des fréquences très élevées sur une ligne dont on veut minimiser les pertes, on fait classiquement appel à des guides d'ondes qui ne sont autres que des tuyaux conducteurs dans lesquels une onde électromagnétique captive transite avec une célérité qui dépend des caractéristiques du guide et de la fréquence.

Le câble coaxial, omniprésent en électronique hautes fréquences, très largement utilisé en téléphonie, radio-télévision, transmission de données, est un des éléments techniques principaux des réseaux câblés. Nous avons vu ici que son apparente simplicité est trompeuse et qu'une bonne connaissance de ses caractéristiques conditionne grandement le succès dans son utilisation.

## Références

- [1] PC \_ Physique-Electromagnétique – Chapitre 4 : Equations de Maxwell.
- [2] LAROUSSE – Encyclopédie [Personnage] – James Clerk Maxwell.
- [3] INSA RENNES – Raphaiël GILLARD, Janvier 2005 – Propagation des ondes électromagnétiques.
- [4] Article sur web : Câbles et guides d'ondes.
- [5] Hydro Québec, ‘ les champs électriques et magnétiques ‘2011.
- [6] E. Et and D.D.Energie, « Equations Locales Equations de Maxwell » .
- [7] D. Pietquin, "Cables," 2005.
- [8] Fabien Ndagijimana, François Gaudaire ‘Au cœur des ondes - Les champs électromagnétiques en question’.
- [9] Christian Wolff, Les Principes du Radar, Notions de base de la théorie des guides d'ondes.
- [10] Au cœur des ondes - Dunod