Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par
Belhocine Wissem

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques appliquées
Spécialité : Analyse mathématique applications

Thème

Inégalité de Hardy dans l'espace $L^{p(\cdot)}$

Soutenu publiquement Juin 2022 devant le jury composé de

Adimi Hadjer	Président
Sidhoum Karima	Encadrant
Bensaid Fares	Co-encadrant
Mecheri Salah	Examinateur
Zeghdane REbiha	Examinateur

Promotion 2021/2022

Dédicace

.... Je dédie ce travaille :

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore **Linda**.

A mon exemple éternel, mon soutien moral, à toi mon père **AbdelHakim**.

A mon frére **Hammoudi**.

A mon mari **Yazid**.

A ma chère sœur **Djamila** et son mari **Adel**.
Pour leurs encouragements permanent et leurs soutiens moral.
Merci d'être toujours là pour moi.

A mon encadreur monsieur **Bensaid Fares**.

A mon neveu, mon petit garçon et la fraise de ma vie **Sajid**.

A mes grands-mères **Sahed Rbiha** et **Bouabdallah Yamna**.

A mon grand père que j'aime **Brahimi Mohamed Tahar**.

A toute la famille **Belhocine** et sans oublié la famille **Brahimi**.

A mes aimables amies, collègues d'étude, et mes sœurs de cœur **Elchaimaa, Rayane, Ibtihel**.

A mon trés cher pays **"L'Algérie"**.

WISSEM

Remerciement

Je remercie **Dieu** le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, Ce mémoire ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de monsieur Bensaid Fares, je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux membres du jury qui m'ont donner l'honneur d'examiner et de juger ce travail.

Je tient à remercier tout particulièrement le soutien actif des membres de ma famille, surtout **Mama** qui m'a toujours encouragé et soutenue.

Enfin, je tient à exprimer vivement mes remerciements avec une profonde gratitude à tous mes enseignants et les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à sa réalisation de ce mémoire, car un projet ne peut être le fruit d'une seule personne.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$: Espace euclidien de dimension n.
dx : Mesure de Lebesgue de dimension n.
$p^{'}$: Désigne l'exposant conjugué de p.
$X^{'}$: Le dual de X.
$X^{''}$: Le bidual de X.
$\langle .,. \rangle$: Le crochet de produit scalaire.
$(.,.)$: Le crochet de dualité.
$L^p_{Loc}(\Omega)$: L'espace des fonctions localement intégrable.
$C_c(\Omega)$: L'espace des fonctions continues.
$C_c^{\infty}(\Omega)$: L'espace des fonctions indéfiniment dérivables.
$\mathcal{P}(\Omega)$: L'espace des fonctions exposant.
$L^0(\Omega)$: L'espace des fonctions mesurable.
X : Espace vectoriel.
X_p : Espace modulaire.
$P^+ := \sup_{x\in\Omega} ess\ p(x)$.
$P^- := \inf_{x\in\Omega} ess\ p(x)$.
$L^{p(.)}(\Omega)$: L'espace de Lebesgue généralisée.
$p^-_{x,n} := \min\{p(x), inf_{t\in\Omega_{x,n}} p(t)\}$.
$p^+_{x,n} := \max\{p(x), sup_{t\in\Omega_{x,n}} p(t)\}$.
$\Omega_{x,n} :=]2^{-n-1}x, 2^{-n}x]$.

INTRODUCTION

Les espaces de Lebesgue à exposant variable sont apparus dans la littérature pour la première fois en 1931 dans un article de **W.Orlicz** [16], la première recherche systématique a été effectuée en 1950 par **H.Nakano**[15], puis poursuivie par **I.Musielak** [14]. Il n'est pas évident de remplacer p par $p(.)$ dans la définition usuelle de la norme dans $L^p(\Omega)$. Cependant, les espaces de Lebesgue peuvent être considérés comme des cas particuliers des espaces d'Orlicz qui appartiennent à une plus grande famille des espaces dits modulaires.

Au cours des dernières décennies l'exposant variable de l'espace de Lebesgue $L^{p(.)}$ a fait l'objet de recherches actives stimulés par le développement des études des problèmes d'élasticité, dynamiques des fluides, le calcul des variations et des équations différentielles.

L'inégalité de Hardy a été publiée et prouvée pour la première fois en 1920, par une mathématicien britannique Godfrey Harold Hardy dans une note de Hardy.

Dans ce mémoire, on va voir une inégalité du type de Hardy dans $L^{p(\cdot)}$, en particulier du travail de **R.A.Mashiyev, B.Cekiç, F.I.Mamedov** [13], qui est une généralisation de l'inégalité de Hardy dans les espaces de Lebesgue classiques. Cette inégalité est donnée dans le sens suivant :
Soient $p(.)$, $q(.)$ et $\alpha(.)$ des log-Hölder continus à l'origine et à l'infini. Si

$$\delta := 1 - \alpha^{+}(p^{-})^{'} > 0 \tag{1}$$

où $\alpha^{+}_{x,n} = max\{\alpha(x), \sup_{t\in\Omega_{x,n}} \alpha(t)\}$, $1 < p^{-} \leq p(x) \leq q(x) \leq q^{+} < \infty$ et $-\infty < \alpha^{-} \leq \alpha(x) < \infty$ pour $x \in]0, \infty[$, alors il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C \left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)} \tag{2}$$

pour toute fonction absolument continue u sur $[0, \infty[$ avec $u(0) = 0$.

Ce mémoire est divisé en trois chapitre :

— Dans le premier chapitre, on donne des rappelles sur les espaces de Lebesgue, quelques propriétés, puis quelques inégalités de Hardy dans L^p.

— Le deuxième chapitre contient un aperçu sur les espaces modulaires et quelques propriétés de base des espace de Lebesgue à exposant variable.

— Dans le troisième chapitre, on a étudier l'inégalité de Hardy dans l'espace de Lebesgue a exposant variable $L^{p(\cdot)}$.

CHAPITRE 1

INÉGALITÉ DE HARDY DANS L'ESPACE L^P

Dans ce chapitre on va faire des rappels sur l'espace de Lebesgue classique L^p et on donne quelques propriétés essentielles, puis l'inégalité de Hardy dans cet espace. Nous nous référons dans ce chapitre à [1], [2], [3], [4], [9], [10], [17], [18].

1.1 Espace de Lebesgue

Définition 1.1.
Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Pour $p \neq \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et pour $p = \infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable } : \exists C > 0 \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

et

$$\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Exemple 1.1.
Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(1 + |\ln(x)|)^2}.$$

On a $f \in L^1(]0,1])$ mais $f \notin L^p(]0,1])$ pour $1 < p < \infty$.
Par changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{x(1-\ln x)^2}dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y(1+\ln y)^2} \\ &= \left[-\frac{1}{1+\ln y}\right]_1^{+\infty} = 1.\end{aligned}$$

Par suite $f \in L^1(]0,1])$ et $\|f\|_{L^1} = 1$.
Pour tout $p > 1$. Comme $x\,|f(x)|^p \sim \frac{1}{x^{p-1}(\ln x)^{2p}}$, quand x tend vers 0.

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x\,|f(x)|^p = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^{p-1}(\ln x)^{2p}} = +\infty.$$

Donc il existe une constante réelle $c > 0$ telle que $|f(x)|^p \geq \dfrac{c}{x}$ pour tout $x \in]0,a]$ avec a$\in]0,1]$, et

$$\int_0^1 |f(x)|^p\,dx \geq c\int_0^a \frac{1}{x}dx = +\infty,$$

par suite $f \notin L^p(]0,1])$.

Théorème 1.1.
L^p est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Démonstration.
Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont évidents.
Supposons que $1 < p < \infty$ et soient $f, g \in L^p$. On a

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p\,|g(x)|^p).$$

Par conséquent $f + g \in L^p$. D'autre part on a

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f+g|^{p-1}\,|f+g| \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}\,|f| + \int_\Omega |f+g|^{p-1}\,|g|\,.$$

Or $|f+g|^{p-1} \in L^q$ et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\,\|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\,\|g\|_{L^p}\,.$$

Donc

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\,.$$

$\square$

Théorème 1.2.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$ donc $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Démonstration. (on peut voir[2]). $\square$

Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par $p^{'}$ l'exposant conjugué de p telle que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Proposition 1.3. *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p,\ p' \leq +\infty$ alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg|\,dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}\,.$$

Démonstration.
Pour le cas $p = 1$ ou $p = \infty$, supposons $p = 1$ donc $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$ telle que

$$\int_\Omega |fg|\,dx \leq \int_\Omega |f|\,|g|\,dx,$$

et comme on a $|g| \leq \|g\|_\infty$ alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega |fg|\,dx &\leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f|\,dx \\ &\leq \|g\|_\infty \|f\|_1\,. \end{aligned}$$

Donc l'inégalité est vérifiée.
Soit $1 < p < \infty$, appliquons **l'inégalité de Young** qui dite
soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, p' \in]1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \qquad \forall a \geq 0, b \geq 0.$$

On sait que la fonction ln est concave, on a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) &\geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{p'}\ln b^{p'} \\ &\geq \ln a + \ln b = \ln(ab). \end{aligned}$$

Donc
$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \quad p.p, x \in \Omega.$$
Il en résulte que $fg \in L^1$ et que
$$\int_\Omega |fg|\, dx = \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{p'}^{p'}. \tag{1.1}$$
Donc d'après (1.1)

1. Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_{p'} = 0$, l'inégalité est vérifiée.
2. Si $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_{p'} = 1$, donc
$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$
3. Si $\|f\|_p > 1$ et $\|g\|_{p'} > 1$, on pose $F = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $G = \frac{g}{\|g\|_{p'}}$ alors $\|F\|_p = 1$ et $\|G\|_{p'} = 1$, donc
$$\|FG\|_1 = \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq 1.$$
Alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

□

Remararque 1.1.
Le cas particulier ou $p = p' = 2$ dans l'inégalité de Hölder, donne l'inégalité de Cauchy Schwartz :
$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.4. *(Inégalité de Minkowski)*
Soient f et g de $L^p(\Omega)$, alors $f+g \in L^p(\Omega)$ et
$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p.$$

Démonstration.
Si $p = 1$, on a l'inégalité suivante
$$|f+g| \leq |f| + |g|.$$

Par l'intégration, on obtient

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

Si $p=\infty$, on a

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f+g| \leq \sup_{x\in\Omega} |f| + \sup_{x\in\Omega} |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Maintenant, pour 1< $p<\infty$, on a

$$|f+g| \leq |f| + |g| .$$

Donc, on peut écrire

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p.$$

Alors

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^p(|f|^p+|g|^p).$$

Donc $f+g\in L^p$.
Comme $p>1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |f+g|^p &= |f+g|\,|f+g|^{p-1} \\ &\leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1} . \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité :

$$\int_\Omega |f+g|^p\,dx \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}\,|f|\,dx + \int_\Omega |f+g|^{p-1}\,|g|\,dx.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\int_\Omega |f+g|^{p'(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |f+g|^{p'(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Soit p' l'exposant conjugué de p

$$p' = \frac{p}{p-1}.$$

alors

$$(p-1)p' = p.$$

Donc

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right),$$

et

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

□

Remararque 1.2.
Pour $0 < p < 1$, l'application $f \mapsto \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme, mais une quasi norme car l'inégalité triangulaire n'est pas vérifie (Minkowski).

1.2 Quelques propriétés de l'espace L^p

Dans cette section, on va donner quelques propriétés de base de l'espace de Lebesgue.

Proposition 1.5.
Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$, si Ω est de mesure finie($|\Omega| < \infty$) alors $L^q(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^p(\Omega)$,

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Démonstration.
Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $r = \dfrac{q}{p}$ et $r' = \dfrac{q}{q-p}$, alors

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{p\frac{q}{p}} \, dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega \mathbb{1}^{\frac{q}{q-p}} dx\right)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p \, |\Omega|^{\frac{q-p}{q}} .$$

Donc

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \, |\Omega|^{\frac{q-p}{q}} < \infty.$$

Par conséquent $f \in L^p(\Omega)$. □

Remararque 1.3.
Si la mesure de Ω n'est pas finie alors

$$L^q(\Omega) \nsubseteq L^p(\Omega) \text{ et } L^p(\Omega) \nsubseteq L^q(\Omega).$$

Exemple 1.2.
Si f est une fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. On va montrer que

$f \in L^q(\Omega)$, on a

$$\int_1^\infty |f(x)|^q \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha q}} dx < \infty.$$

D'après l'intégrale de Riemann, on a $\alpha q > 1$ donc $\alpha > \frac{1}{q}$.
Si $\frac{1}{p} > \alpha > \frac{1}{q}$ alors

$$f \in L^q \quad et \quad f \notin L^p.$$

Remararque 1.4.
Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

1.3 Dualité, réflexivité et séparabilité

Proposition 1.6.
Soit X un espace vectoriel normé. Alors, X est isométriquement isomorphe à un sous espace de son bidual X''. Plus précisément l'application $J_X : X \longrightarrow X''$ définie par $J_X(x)(\phi) = \phi(x)$ est une isométrie linéaire.
L'isométrie $J_X : X \longrightarrow J(X) \subset X''$ est appelée l'injection canonique de X dans X''.

Démonstration. (On peut voir[2]). □

Les théorèmes suivants vont nous permettre l'identifier le dual topologique des espaces L^p.

Théorème 1.7. *(Représentation de Riesz)*
Soit $1 < p < +\infty$ et p' son exposant conjugué. Soit $\varphi \in (L^p)'$, alors il existe un unique $u \in L^{p'}$ tel que $\varphi = \delta_u$ c'est à dire

$$(\varphi, f) = \int uf, \qquad \forall f \in L^p.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'} .$$

Ce théorème est important, car il permet de représenter toute forme linéaire continue sur L^p à l'aide d'une fonction de $L^{p'}$, tel que l'application $\varphi \longrightarrow u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de L^p à $L^{p'}$.

Théorème 1.8.
Soit $\varphi \in (L^1)'$, alors il existe un unique $u \in L^\infty$, tel que

$$(\varphi, f) = \int uf, \qquad \forall f \in L^1.$$

De plus, on a

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'} .$$

Ce théorème permet d'identifier le dual de L^1 à L^∞.

Remararque 1.5.
En particulier l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ est isomorphe à son dual topologique $(L^2(\Omega))'$ pour tout forme linéaire continue $\varphi : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique $f \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\varphi(g) = \int_\Omega fg = \langle f, g\rangle_{L^2}.$$

Ou $\langle ., .\rangle_{L^2}$ est le produit scalaire de L^2.

Définition 1.2. (Espace réflexif)
Soit $J : X \longrightarrow X''$, un espace normé X est dit réflexif si J est surjective de X dans X'' c'est à dire $J(X) = X''$.

Théorème 1.9.
Soit X un espace de Banach tel que X' est réflexif, alors X est réflexif.

Démonstration. (On peut voir [2])

□

Proposition 1.10.

1. *L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.*
2. *L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs.*

Démonstration. (On peut voir [2]) □

Définition 1.3. (Espace séparable)
Un espace normé X est dite séparable s'il contient une partie $F \subset X$ dénombrable et dense.

Théorème 1.11.
Soit X un espace de Banach tel que X' est séparable, alors X est séparable.

Démonstration. (On peut voir [2]) □

Proposition 1.12.

1. *L'espace L^p est séparable pour $1 \leq p \leq +\infty$.*
2. *Tout espace de Hilbert est séparable.*

Démonstration. (On peut voir [2])

□

1.4 Convolution, régularisation et densité

Définition 1.4. (Convolution)
Le produit de convolution de deux fonctions f et g réelles ou complexes, est la fonction si elle existe qu'on note par $f * g$, définie par :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Le théorème suivant nous donne une estimation du produit de convolution de deux fonctions dans L^p.

Théorème 1.13.
Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $Y \longrightarrow f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. de plus

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad et \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Définition 1.5. (Support)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i\in I}, \omega_i \subset \Omega$ tels que pour chaque $i \in I$, $f = 0$ p.p. sur ω_i. On pose $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$, alors $f = 0$ p.p sur ω et par définition, $\mathrm{supp} f = \Omega \setminus \omega$.

Proposition 1.14.
Soient $f \in L^1$ et $g \in L^p$. Alors

$$\mathrm{supp}(f \star g) \subset \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}.$$

Théorème 1.15. *(Régularisation)*
Soient $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.16.
Soient $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que k un entier, alors :

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad et \quad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \quad avec \ |\alpha| \leq k$$

En particulier si $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.17. *(Densité)*
L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$, c'est à dire :

$$\forall f \in L^1(\Omega) \ et \ \forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in C_c(\Omega) \ telle \ que \ \|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Remararque 1.6.

- L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.
- L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.
- L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans le sous espace de L^∞ des fonctions bornées qui tendre vers 0 à l'infinie.

1.5 Inégalité de Hardy : cas continue(intégrale)

Théorème 1.18.
Soient $p > 1$ et $f(x) \geq 0$ mesurable sur $]0, +\infty[$ alors on a

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx, \tag{1.2}$$

avec la constante $B_1 = \left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ est optimale.

Démonstration.
Posons pour tout $x > 0$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

et notons que pour presque tout $x \in [0, \infty]$

$$\frac{\partial F^p(x)}{\partial x} = pF^{p-1}(x)f(x).$$

Pour $a > 0$ et $A < \infty$ arbitraires on a

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx = -\frac{1}{p-1} \int_a^A F(x)^p \frac{\partial(x^{-p+1})}{\partial x} dx.$$

Alors en intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^A \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx &= -\frac{A^{1-p}F(A)^P}{p-1} + \frac{a^{1-p}F(a)^P}{p-1} + \frac{1}{1-p} \int_a^A x^{1-p} \frac{\partial F^p(x)}{\partial x} dx \\ &\leq \frac{a^{1-p}F(a)^P}{p-1} + \frac{p}{p-1} \int_a^A \left(\frac{F(x)}{x} \right)^{p-1} f(x)dx. \end{aligned} \tag{1.3}$$

D'autre part d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)dx \leq \left(\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_a^A f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.4)$$

Considérons maintenant β tel-que $0 < a < \beta < A$ et appliquons les inégalité (1.3) et (1.4) à $F(x) - F(a)$ au lieu de $F(x)$

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_a^A f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

D'où

$$\left(\int_a^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_a^A f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

et à par suite

$$\left(\int_\beta^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a

$$a \longrightarrow 0 \Rightarrow F(a) \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\lim_{A\longrightarrow\infty,\beta\longrightarrow 0} \left(\int_\beta^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\beta^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour montrer que la constante B_1 est optimale, soit $C > 0$ une constante arbitraire telle que :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq C \int_0^\infty f(x)^p dx.$$

Montrons que $C \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$.
Si f est non identiquement nulle on a

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx}{\int_0^\infty f(x)^p dx} \\ &= \frac{N}{D}. \end{aligned}$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ telle que $\varepsilon < p - 1$ alors $\left(\frac{-1+\varepsilon}{p} + 1 > 0\right)$ et considérons dans l'inégalité précédente la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0,1] \\ x^{\frac{-1+\varepsilon}{p}} & si\ x \in [1,\infty]. \end{cases}$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} N &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x 1dt \right)^p dx + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x t^{\frac{-1+\varepsilon}{p}} dt \right)^p dx \\ &= 1 + \frac{1}{\left(\frac{-1+\varepsilon}{p} + 1 \right)^p} \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon} dx \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon \left(\frac{-1+\varepsilon}{p} + 1 \right)^p} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} D &= \int_0^1 1dx + \int_1^\infty \left(x^{\frac{-1+\varepsilon}{p}} \right)^p dx \\ &= 1 + \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon} dx \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{1 + \frac{1}{\varepsilon \left(\frac{-1+\varepsilon}{p} + 1 \right)^p}}{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \frac{\varepsilon + \frac{1}{\left(\frac{-1+\varepsilon}{p} + 1 \right)^p}}{\varepsilon + 1}. \end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{1}{\left(-\frac{1}{p} + 1 \right)^p} \\ &= \left(\frac{p}{p-1} \right)^p. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $B_1 = \left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ est optimale. $\square$

Théorème 1.19. *(Inégalité de Hardy dans l'espace $L^p(0 < p < 1)$)*
Considérons l'inégalité de Hardy :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p x^\alpha dx \leq B_2 \int_0^\infty f(x)^p x^\alpha dx. \tag{1.5}$$

1. *Si* $p > 1$ *et* $\alpha < p-1$, *alors il existe* $B_2 > 0$ *telle que l'inégalité* (1.5) *soit vérifiée.* $\forall f \geq 0$ *mesurable sur* $]0, \infty[$ *ou la constante optimale est* $B_2 = \left(\frac{p}{p-1-\alpha} \right)^p$.
2. *Si* $p > 1$ *et* $\alpha \geq p-1$, *alors* $\forall B_2 > 0$ *l'inégalité* (1.5) *ne peut voir lieu.*
3. *Si* $0 < p < 1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(arbitraire) alors* $\forall B_2 > 0$ *l'inégalité* (1.5) *ne peut voir lieu.*

Démonstration. (on peut voir[12]). $\square$

CHAPITRE 2

ESPACE DE LEBESGUE À EXPOSANTS VARIABLE

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue à exposant variable $L^{p(\cdot)}$, qui généralisent les espaces L^p classiques lorsque l'exposant p n'est pas une constante, mais une fonction $p(.) : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$. Nous nous référons à [5], [6], [7], [11].

2.1 Espace modulaire

Définition 2.1.
Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, l'application $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ est dite semi modulaire sur X si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\rho(0) = 0$.
2. $\rho(-f) = \rho(f) \quad \forall f \in X$.
3. $(\rho(\lambda f) = 0 \quad \forall \lambda > 0) \Rightarrow f = 0$.
4. $\lambda \longrightarrow \rho(\lambda f)$ est continue à gauche sur $[0, \infty[$, ce qui signifie que pour tout $f \in X$ (c'est à dire $\lim_{\lambda \longrightarrow 1^-} \rho(\lambda f) = \rho(f) \quad \forall f \in X$).
5. ρ est convexe pour tout $f, g \in X$ et $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$\rho(\alpha f + (1 - \alpha)g) \leq \alpha \rho(f) + (1 - \alpha)\rho(g).$$

Définition 2.2.
Un semi modulaire ρ est dite modulaire si :

$$\rho(f) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Exemple 2.1.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leq \rho < \infty$ alors

$$\rho(f) = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx,$$

définit un modulaire sur $L^0(\Omega)$ ou $L^0(\Omega)$ est l'ensemble de classe d'équivalence a des fonctions mesurables sur Ω.

- On a $0 \in L^0(\Omega)$et
$$\rho(0) = \int_\Omega |0|^p \, dx = 0.$$
- Soit $f \in L^0(\Omega)$, alors $-f \in L^0(\Omega)$
$$\begin{aligned} \rho(-f) &= \int_\Omega |-f|^p \, dx \\ &= \int_\Omega |f|^p \, dx \\ &= \rho(f). \end{aligned}$$
- Soit $f \in L^0(\Omega)$ et
$$\begin{aligned} \rho(\lambda f) = 0 &\Leftrightarrow \int_\Omega |\lambda f|^p \, dx = 0 \quad \forall \lambda > 0 \\ &\Rightarrow \lambda^p \int_\Omega |f|^p \, dx = 0 \quad \forall \lambda > 0 \\ &\Rightarrow \int_\Omega |f|^p \, dx = 0 \quad \textit{(puisque } \lambda^p > 0\textit{)} \\ &\Rightarrow f = 0 \quad \textit{p.p sur } \Omega \quad \textit{(propriétés d'intégrale)}. \end{aligned}$$
- Soient $f \in L^0(\Omega)$, $\lambda \in]0, 1[$
$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \longrightarrow 1, \lambda < 1} \rho(\lambda f) &= \lim_{\lambda \longrightarrow 1, \lambda < 1} \int_\Omega |\lambda f|^p \, dx \\ &= \int_\Omega |f|^p \, dx \\ &= \rho(f). \end{aligned}$$
- Soient $f \in L^0(\Omega)$ et $\alpha \in [0, 1]$,
$$\begin{aligned} \rho(\alpha f + (1-\alpha) g) &= \int_\Omega |\alpha f + (1-\alpha) g|^p \, dx \\ &\leq \alpha \int_\Omega |f|^p \, dx + (1-\alpha) \int_\Omega |g|^p \, dx \quad \textit{(D'après proposition (1.4))} \end{aligned}$$

Donc

$$\rho(\alpha f + (1-\alpha)g) = \alpha\rho(f) + (1-\alpha)\rho(g).$$

donc $\rho(f)$ est semi modulaire, pour que $\rho(f)$ soit modulaire il faut que $\rho(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ donc

- $\rho(f) = 0 \Rightarrow \int_\Omega |f|^p \, dx = 0 \Rightarrow f = 0 \quad p.p.$

Proposition 2.1.
Soit ρ un semi modulaire sur X, alors pour tout $f \in X$, on a

$$\rho(\theta f) \leq \theta\rho(f) \quad \forall\theta \in [0,1].$$

Démonstration.
Par la convexité de ρ et le fait que $\rho(0) = 0$

$$\begin{aligned} \rho(\theta f) &= \rho(\theta f + (1-\theta)0) \\ &\leq \theta\rho(f) + (1-\theta)\rho(0), \end{aligned}$$

alors

$$\rho(\theta f) \leq \theta\rho(f).$$

□

Définition 2.3.
Si ρ est un modulaire sur X, alors

$$X_\rho = \{f \in X : \exists\lambda > 0, \rho(\lambda f) < \infty\}$$

est appelé espace modulaire associe à ρ.

Proposition 2.2.

— *$f \in X_\rho$ si et seulement si $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \rho(\lambda f) = 0$.*

— *Si ρ est un semi modulaire sur X. Alors X_ρ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 2.3.
Soit ρ un semi modulaire sur X. Alors X_ρ est un espace normé par la norme Luxembourg donné par :

$$\|f\|_\rho = \inf\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}.$$

Proposition 2.4.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ *et soit* $f \in L^p(\Omega)\backslash\{0\}$ *on a*

$$\rho(f) = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx,$$

alors

$$\|f\|_{L^p} = \lambda \Leftrightarrow \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) = 1.$$

Démonstration.
Supposons $\|f\|_{L^p} = \lambda$, on obtient

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \int_\Omega \left|\frac{f}{\|f\|_{L^p}}\right|^p dx &= \int_\Omega \left|\frac{f}{\left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right|^p dx \\
&= \frac{1}{\int_\Omega |f|^p \, dx} \int_\Omega |f|^p \, dx = 1.
\end{aligned}$$

Inversement supposons que $\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) = 1 &\Rightarrow \int_\Omega \left(\frac{f}{\lambda}\right)^p dx = 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{\lambda^p} \int_\Omega |f|^p \, dx = 1 \\
&\Rightarrow \int_\Omega |f|^p \, dx = \lambda^p \\
&\Rightarrow \lambda = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

□

2.2 Fonctions exposant

Définition 2.4.
On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $[1, +\infty]$. Alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelé l'ensemble des fonctions exposant.
On définit les trois sous ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
\Omega_\infty^{p(.)} &= \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}, \\
\Omega_1^{p(.)} &= \{x \in \Omega : p(x) = 1\}, \\
\Omega_*^{p(.)} &= \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}.
\end{aligned}$$

Théorème 2.5.
Soit $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *alors*

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f|^{p(x)}\, dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}.$$

définit un modulaire sur l'espace des fonctions mesurables $L^0(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $X = L^0(\Omega)$, on a

$$\begin{array}{llll} \rho_{p(.)}: & X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & f & \longmapsto & \rho_{p(.)} = \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)}\, dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \end{array}$$

.

- $\rho_{p(.)}(0) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |0|^{p(x)}\, dx + \|0\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} = 0.$
- Soit $f \in X$ alors $-f \in X$

$$\begin{aligned} \rho_{p(.)}(-f) &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |-f|^{p(x)}\, dx + \|-f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \\ &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f|^{p(x)}\, dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \\ &= \rho_{p(.)}(f). \end{aligned}$$

- Soit $f \in X$ on a

$$\begin{aligned} \rho_{p(.)}(\lambda f) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |\lambda f|^{p(x)}\, dx + \|\lambda f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} = 0 \quad \forall \lambda > 0. \\ &\Rightarrow\; \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |\lambda f|^{p(x)}\, dx = 0 \quad \forall \lambda > 0 \ \textit{et}\ \|\lambda f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} = 0 \quad \forall \lambda > 0. \\ &\Rightarrow\; f = 0 \ \textit{p.p sur}\ \Omega \setminus \Omega_\infty \ \textit{et}\ f = 0 \ \textit{sur}\ \Omega_\infty. \\ &\Rightarrow\; f = 0 \ \textit{p.p sur}\ \Omega. \end{aligned}$$

- Soit $k_\lambda(x) = \lambda^{p(x)} |f|^{p(x)}$. Il est clair que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \longrightarrow 1, \lambda \leq 1} k_\lambda(x) &= \lim_{\lambda \longrightarrow 1, \lambda \leq 1} \lambda^{p(x)} |f|^{p(x)} \\ &= |f|^{p(x)},\ x \in \Omega \setminus \Omega_\infty. \end{aligned}$$

On sait que $\lambda \leq 1$ ce qui donne

$$\lambda^{p(x)} |f|^{p(x)} \leq |f(x)|^{p(x)}, x \in \Omega \setminus \Omega_\infty.$$

D'après le théorème de la convergence dominée

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\longrightarrow 1,\lambda<1}\int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|\lambda f|^{p(x)}\,dx &= \int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}\lim_{\lambda\longrightarrow 1,\lambda<1}|\lambda f|^{p(x)}\,dx\\
&= \int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|f(x)|^{p(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\longrightarrow 1,\lambda<1}\rho(\lambda f) &= \lim_{\lambda\longrightarrow 1,\lambda<1}\int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|\lambda f|^{p(x)}\,dx+\lim_{\lambda\longrightarrow 1,\lambda<1}\lambda\,\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}\\
&= \int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|f|^{p(x)}+\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}\\
&= \rho_{p(.)}(f).
\end{aligned}$$

- La quantité

$$\rho_{p(.)}(f)=\int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|f|^{p(x)}\,dx+\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}$$

est convexe car elle est la somme de deux quantités convexes, telle que($\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}$est une norme donc convexe et $\int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|f|^{p(x)}\,dx$ est convexe).

- Soit $f\in X$, on a

$$\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(f)=0 &\Leftrightarrow \int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|f|^{p(x)}\,dx+\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}=0\\
&\Rightarrow \int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|f(x)|^{p(x)}\,dx=0\ et\ \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}=0\\
&\Rightarrow f(x)=0\ p.p\ \ sur\,(\Omega\setminus\Omega_\infty)\ et\ f=0\ p.p\ \ sur\,\Omega_\infty\\
&\Rightarrow f=0\ p.p\ \ sur\,(\Omega\setminus\Omega_\infty)\ et\ f=0\ p.p\ \ sur\,\Omega_\infty\\
&\Rightarrow f=0\ p.p\ \ sur\,\Omega.
\end{aligned}$$

Donc

$$\rho_{p(.)}(f)=0\Longrightarrow f=0.$$

□

2.3 Espace $L^{p(.)}$

Pour la définition des espaces de Lebesgue à exposant variable, il est nécessaire d'introduire la classe des exposants.

Définition 2.5.
On définit pour tout $p \in \mathcal{P}(\Omega, \mu)$:

$$p^{+} = \sup_{x\in\Omega} ess\ p(x) \qquad et \qquad p^{-} = \inf_{x\in\Omega} ess\ p(x).$$

telle que Les fonctions $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont appelés exposants variables sur Ω.

Remararque 2.1.
Si $p^{+} < \infty$, alors on appelle p un exposant variable borné.

Définition 2.6.
Pour $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit $p^{'} \in \mathcal{P}(\Omega)$, par

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p^{'}(x)} = 1.$$

La fonction $p^{'}$ est appelée l'exposant conjugué de l'exposant variable p.

Définition 2.7.
On définit l'espace de Lebesgue à exposants variable $L^{p(\cdot)}$ par :

$$L^{p(\cdot)}(\Omega)=\{f,\ f \text{ est mesurable, } \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty \text{ pour certaines } \lambda > 0\ \},$$

muni de la norme de type Luxembourg

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0, \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}. \tag{2.1}$$

Exemple 2.2.
Soit $\Omega =]0,1[$, $p(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f(x) = 4^{-x}x^{-\frac{x}{2}}$ donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\,dx &= \int_0^1 \left|4^{-x}x^{-\frac{x}{2}}\right|^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left|4^{-1}x^{-\frac{1}{2}}\right| dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{8} < \infty, \end{aligned}$$

d'où $f \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Remararque 2.2.
Dans le cas ou $p(x) = p \in [1, \infty]$ est une constante alors le choix optimale dans

l'expression (2.1) est $\lambda = \|f\|_{L^p}$ c'est à dire l'espace $L^{p(.)}(\Omega)$ coïncide avec l'espace de Lebesgue classique $L^p(\Omega)$.

Exemple 2.3.
Soit $1 \leq p < \infty$ alors l'espace modulaire :

$$\begin{aligned} L_p^0(\Omega) &= \{f \in L^0(\Omega) : \exists \lambda > 0, \rho(\lambda f) = \int_\Omega |\lambda f(x)|^p \, dx < \infty\} \\ &= \{f \in L^0(\Omega) : \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \rho(\lambda f) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \int_\Omega |\lambda f(x)|^p \, dx = 0\}, \end{aligned}$$

coïncide avec l'espace de Lebesgue classique $L^p(\Omega)$.

- Soit $f \in L^p(\Omega)$ alors $f \in L^0(\Omega)$

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Donc il existe $\lambda = 1$ telle que

$$\rho(\lambda f) = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Ce qui implique que $f \in L_p^0(\Omega)$.

- Inversement, soit $f \in L_p^0(\Omega)$ alors $f \in L^0(\Omega)$ et $\exists \lambda > 0$

$$\begin{aligned} \rho(\lambda f) &= \int_\Omega |\lambda f|^p \, dx \\ &= \lambda^p \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega |f|^p \, dx < \infty.$$

Ce qui signifie que $f \in L^p(\Omega)$.

Alors l'espace $L^p(\Omega)$ coïncide avec l'espace $L_p^0(\Omega)$.

Proposition 2.6.
Soit $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $\rho_{p(x)}(f) = \int_\Omega |f|^{p(x)} \, dx$, avec $p^+ < \infty$.

1. *Si $\lambda \geq 1$, on a*

$$\lambda^{p^-} \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p^+} \rho(f).$$

2. *Si $0 < \lambda < 1$, on a*

$$\lambda^{p^+} \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p^-} \rho(f).$$

Démonstration.

1. Pour le cas $\lambda \geq 1$, supposons que
$$p^- < \infty.$$
On a
$$\lambda^{p^-} \leq \lambda^{p(x)} \leq \lambda^{p^+}.$$
On multiplie les membres de l'inégalité par le terme positif $|f|^{p(x)}$, et on intègre
$$\lambda^{p^-} \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx \leq \int_\Omega \lambda^{p(x)} |f|^{p(x)}\, dx \leq \lambda^{p^+} \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx.$$
Et comme on a $\rho_{p(x)}(f) = \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx$, alors
$$\lambda^{p^-} \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p^+} \rho(f).$$

2. Pour le cas $\lambda < 1$, supposons que
$$p^+ < \infty.$$
On a
$$\lambda^{p^+} \leq \lambda^{p(x)} \leq \lambda^{p^-}.$$
On multiplie les membres de l'inégalité par le terme positif $|f|^{p(x)}$, et on intègre
$$\lambda^{p^+} \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx \leq \int_\Omega \lambda^{p(x)} |f|^{p(x)}\, dx \leq \lambda^{p^-} \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx.$$
Et comme on a $\rho_{p(x)}(f) = \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx$, alors
$$\lambda^{p^+} \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p^-} \rho(f).$$

□

Proposition 2.7.
Si $p^+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < \infty$, alors pour $\lambda \geq 1$, on a
$$\rho(\lambda f) \leq \lambda^{p^+(\Omega\setminus\Omega_\infty)} \rho(f).$$

Démonstration.

Pour $\lambda \geq 1$, on a

$$\lambda^{p(x)} \leq \lambda^{p^+(\Omega \setminus \Omega_\infty)}, \ x \in \Omega \setminus \Omega_\infty.$$

On multiplie les membres de l'inégalité par le terme positif $|f(x)|^{p(x)}$, et on intégré sur $\Omega \setminus \Omega_\infty$, on obtient

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \lambda^{p(x)} |f(x)|^{p(x)} \, dx \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \lambda^{p^+(\Omega \setminus \Omega_\infty)} |f(x)|^{p(x)} \, dx.$$

On rajoute le terme $\lambda \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}$, alors

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \lambda^{p(x)} |f(x)|^{p(x)} \, dx + \lambda \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \lambda^{p^+(\Omega \setminus \Omega_\infty)} |f(x)|^{p(x)} \, dx + \lambda \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}.$$

Donc

$$\rho(\lambda f) \leq \lambda^{p^+(\Omega \setminus \Omega_\infty)} \rho(f).$$

□

Proposition 2.8.
Si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} > 0$ alors

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}}}\right) \leq 1.$$

De plus

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}}}\right) = 1.$$

Pour toute $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ non nulle, si et seulement si $p^+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < \infty$.

Démonstration.

— On prend une suite (λ_n) décroissante qui converge vers $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$, d'où la suite $\left(\frac{|f|}{\lambda_n}\right)_n$ est croissante et converge vers $\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}$, d'après le lemme de Fatou et la propriété $(\lim \rho(\lambda f) = \rho(f) \quad \forall f \in X)$:

$$\int_\Omega \left(\frac{f}{\| f \|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)^{p(x)} dx \leq \lim_n \int_\Omega \left(\frac{|f|}{u_n}\right)^{p(x)} dx \leq 1.$$

Finalement on a

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\| f \|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) \leq 1.$$

— Soit $0 < \lambda < \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$, Posons $k = \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \right|^{p(x)} dx$ tel que

$$\left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda} \right)^{p^+} k \leq 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \left|\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right|^{p(x)} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)} dx \\ &\leq \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{p^+} \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)} dx \\ &= \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{p^+} \rho_p\left(\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right). \end{aligned}$$

Si $\rho_{p(.)}\left(\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) < 1$ alors $\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{p(x)}$ Car

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda, \text{ tel que } \rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}.$$

Donc $\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1$, et on peut trouver $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \lambda$ qui contredit la définition de $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ alors

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) \geq 1.$$

Et comme on a

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(.)}}}\right) \leq 1.$$

Alors

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) = 1.$$

□

Remararque 2.3.
Soit $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors

$$(p'(.))^+ = (p^-)' \qquad et \qquad (p'(.))_- = (p^+)'.$$

Dans la proposition suivante on donne une version de l'inégalité de Hölder dans les espaces à exposant variable.

Proposition 2.9.
Pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$, on a $fg \in L^1(\Omega)$ telle que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$, de plus :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq c_p \|f\|_{L^{p(.)}} \|g\|_{L^{p'(.)}},$$

où

$$c_p = \frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} + \|\chi_{\Omega_1}\|_{L^\infty} + \|\chi_{\Omega_*}\|_{L^\infty} + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_{L^\infty}.$$

Démonstration.
le cas $x \in \Omega_*$:

On peut supposer que $\|f\|_{p(x)} \neq 0$, $\|g\|_{p'(x)} \neq 0$ et on a :$|f(x)| < \infty$ et $|g(x)| < \infty$. telle que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p}\right)^+ &= \sup_{x\in\Omega} ess \left(\frac{1}{p(x)}\right) \\ &= \frac{1}{\inf_{x\in\Omega} ess p(x)} \\ &= \frac{1}{p^-}. \end{aligned}$$

On pose $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{p(.)}}}$ et $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'(.)}}}$, en tenant compte de l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^{p(x)}}{p(x)} + \frac{b^{p'(x)}}{p'(x)},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_*} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^{p(.)}} \|g\|_{L^{p'(.)}}} dx &\leq \int_{\Omega_*} \frac{1}{p(x)} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(.)}}}\right)^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} \left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'(.)}}}\right)^{p'(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{p^-}\rho\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(.)}}}\right) + \frac{1}{(p')^-}\rho\left(\frac{g}{\|g\|_{L^{p'(.)}}}\right). \end{aligned}$$

Et puisque :

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p}(.)}}\right) \leq 1 \qquad \rho_{p'(.)}\left(\frac{g}{\|g\|_{L^{p'}(.)}}\right) \leq 1,$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p')^-} &= \frac{1}{(p^+)'} - \frac{1}{p^+} \\ &= 1 - \frac{1}{p^+}. \end{aligned}$$

Alors, on trouve
$$\int_{\Omega_*} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^{p(.)}} \|g\|_{L^{p'(.)}}} dx \leq \frac{1}{p^-} + 1 - \frac{1}{p^+}. \tag{2.2}$$

<u>**le cas** $x \in \Omega_1$ **:**</u>

On a $p(x) = 1$ et $p^{'}(x) = +\infty$ donc d'après l'inégalité de Hölder ordinaire, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |f(x)g(x)|\, dx &\leq \|f\chi_{\Omega_1}\|_{L^1} \|g\chi_{\Omega_1}\|_{L^\infty} \\ &= \|f\chi_{\Omega_1}\|_{L^{p(.)}} \|g\chi_{\Omega_1}\|_{L^{p'(.)}} \\ &\leq \|f\|_{L^{p(.)}} \|g\|_{L^{p'(.)}} .\end{aligned}$$

Donc
$$\int_{\Omega_1} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^{p(.)}} \|g\|_{L^{p'(.)}} . \tag{2.3}$$

<u>**le cas** $x \in \Omega_\infty$ **:**</u>

On a $p^{'}(x) = 1$ et $p(x) = +\infty$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\infty} |f(x)g(x)|\, dx &\leq \|f\chi_{\Omega_\infty}\|_{L^\infty} \|g\chi_{\Omega_\infty}\|_{L^1} \\ &= \|f\chi_{\Omega_\infty}\|_{L^{p(.)}} \|g\chi_{\Omega_\infty}\|_{L^{p'(.)}} \\ &\leq \|f\|_{L^{p(.)}} \|g\|_{L^{p'(.)}} .\end{aligned}$$

Donc
$$\int_{\Omega_\infty} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^{p(.)}} \|g\|_{L^{p'(.)}} . \tag{2.4}$$

En combinant les termes (2.2), (2.3), (2.4) avec $\|\chi_{\Omega_i}\|_{L^\infty}$, on trouve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} + \|\chi_{\Omega_1}\|_{L^\infty} + \|\chi_{\Omega_*}\|_{L^\infty} + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_{L^\infty}\right) \|f\|_{L^{p(.)}} \|g\|_{L^{p'(.)}} ,$$

avec
$$c_p = \frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} + \|\chi_{\Omega_1}\|_{L^\infty} + \|\chi_{\Omega_*}\|_{L^\infty} + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_{L^\infty} .$$

□

Remararque 2.4.
Si $p(x) = p$ une constante, alors $p^+ = p^-$ et $c_p = 1$ on retrouve l'inégalité de Hölder classique.

Maintenant, on donne une version de l'inégalité de Minkowski dans les espaces à exposant variable. Pour cela on se propose de définir une autre norme.

Définition 2.8.
Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, on définit sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante

$$\|f\|_p = \sup_{\rho_{p'(.)}(\varphi)} \left| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \right| < \infty.$$

Proposition 2.10. *(Inégalité de Minkowski)*
Si $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors on a

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Démonstration.
On a

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p &= \sup_{\rho_{p'(.)}(\varphi)} \left| \int_\Omega (f(x)+g(x))\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \sup_{\rho_{p'(.)}(\varphi)} \left| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \right| + \sup_{\rho_{p'(.)}(\varphi)} \left| \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \|f\|_p + \|g\|_p . \end{aligned}$$

□

2.4 Quelques propriétés de l'espace $L^{p(.)}$

Dans cette section, on va donner quelques propriétés de base de l'espace de Lebesgue à exposant variable.

Théorème 2.11.
Soit $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$, $L^{p(.)}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Démonstration. (On peut voir [6]) □

Théorème 2.12.
L'espace dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ est $L^{p'(x)}(\Omega)$ si est seulement si $p \in L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. (On peut voir [5]) □

Théorème 2.13.
L'espace $L^{p(.)}(\Omega)$ est réflexif si est seulement si

$$1 < p \leq p^+ < \infty.$$

Démonstration. (On peut voir [6]) □

Remararque 2.5.
Si $p(x) = p$ telle que p est une constante c'est à dire $(p^- = p^+ = p)$ alors $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Théorème 2.14.
Si $p^+ < \infty$, alors $L^p(.)(\Omega)$ est séparable.

Démonstration. (On peut voir [6])

□

Proposition 2.15.
Soient $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $p^+ < \infty$ et $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, alors $|f|^{p(x)-1} \in L^{p'(x)}$.

Démonstration.
En effet, comme $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ alors

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx < \infty.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\rho_{p'(.)}\left(|f|^{p(x)-1}\right) &= \int_\Omega \left|f^{p(x)-1}\right|^{p'(x)} dx \\
&= \int_\Omega \left|f^{p(x)-1}\right|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} dx \quad \left(p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}\right) \\
&= \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx < \infty \quad \textit{(puisque } f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)).
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|f|^{p(x)-1} \in L^{p'(\cdot)}(\Omega).$$

□

Théorème 2.16. *(Théorème d'injection)*
Soit $0 < |\Omega| < \infty$ et $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $L^{q(\cdot)}$ s'injecte continument dans $L^{p(\cdot)}$ $(L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega))$si est seulement si $p(.) \leq q(.)$ p.p, $x \in \Omega$.

Démonstration. (On peut voir [5])

□

Théorème 2.17. *(Théorème de densité)*
Si $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $p^+ < \infty$, alors l'espace des fonctions bornées sur Ω est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Démonstration. (On peut voir [5])

□

Proposition 2.18.
Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, *alors*

- *L'ensemble* $C(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *est dense dans* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
- *Si* Ω *est un ouvert, alors* $C_c^{\infty}(\Omega)$ *est dense dans* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

CHAPITRE 3

INÉGALITÉ DE HARDY DANS L'ESPACE $L^{P(.)}$

Dans ce chapitre, on va étudier un type de l'inégalité de Hardy dans un espace de lebesgue à exposant variable, bien connue pour les espaces de Lebesgue usuels à p constant, au cas de la variable $p(.)$. De telles inégalités avec variable $p(.)$ sont déjà connues $\alpha =$ constante et $q(x) = p(x) > 1$ sur un intervalle fini dans le cas unidimensionnel. On va détailler le résultat de l'article [13], pour les variables $p(.)$ et $\alpha(.)$, les inégalités de Hardy dans le cas un dimensionnel pour le demi-axe infini $]0, \infty[$ sous les conditions de continuité log-Hölder à l'origine et à l'infini sans l'hypothèse $p(0) \leq p(x)$.

3.1 Préliminaire

Dans cette section nous donnons quelques définitions qui nous seront utiles.

Définition 3.1.
L'exposant $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty[$ est appelé log-Hölder localement continu s'il existe une constante tel que

$$-|p(x) - p(y)| \log |x - y| \leq C, \tag{3.1}$$

pour tout $x, y \in \Omega$ avec $|x - y| \leq \frac{1}{2}$. Cette condition a également été appelée Dini-Lipschitz et faible-Lipschitz.

Définition 3.2.
L'exposant $p(.)$ est dit log-Hölder globalement continu s'il est log-Hölder localement continu et s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|p(x) - p(y)| \log(e + |x|) \leq C, \tag{3.2}$$

pour tout $x, y \in \Omega$, $|y| \geq |x|$ à l'infini.

Remararque 3.1.
La condition (3.2) implique qu'il existe un certain nombre p_∞ tel que $p(x) \longrightarrow p_\infty$ comme $|x| \longrightarrow \infty$.

Définition 3.3.
L'exposant $p :]0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$ est dite log-Hölder continu à l'origine et à l'infini s'il existe constantes $C_i > 0 (i = 1, 2)$ telles que

$$|p(x) - p(0)| \log \frac{1}{x} \leq C_1, \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \tag{3.3}$$

et

$$|p(x) - p_\infty| \log(e + x) \leq C_2, \quad x \in]0, \infty[, \tag{3.4}$$

où $p(0)$ et $p_\infty \in [1, \infty[$.

Définition 3.4.
Soient $p(.)$, $q(.)$ et $\alpha(.)$ des fonctions log-Hölder continues à l'origine et à l'infini,on a

$$1 < p^- \leq p(x) \leq q(x) \leq q^+ < \infty$$

et

$$-\infty < \alpha^- \leq \alpha(x) < \infty,$$

pour $x \in]0, \infty[$.
On note $p^-_{x,n} = \min\{p(x), inf_{t \in \Omega_{x,n}} p(t)\}$ et $p^+_{x,n} = \max\{p(x), sup_{t \in \Omega_{x,n}} p(t)\}$ où $\Omega_{x,n} =]2^{-n-1}x, 2^{-n}x]$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Lemmes et propositions techniques

Dans cette section nous présentons quelques lemmes et propositions importantes.

Proposition 3.1.
Soit $I = [0, M)$ pour $M < \infty$, $p : I \longrightarrow [1, \infty)$ borné, $p(0) > 1$ et

$$\limsup_{x \longrightarrow 0^+} (p(x) - p(0)) \log \frac{1}{x} < \infty.$$

Et $p^-_{(0,x_0)} = p(0)$ pour certains $x_0 \in (0, 1)$. Si $a \in [0, 1 - \frac{1}{p(0)})$, alors l'inégalité de Hardy

$$\left\| \frac{u(x)}{x^{1-a}} \right\|_{p(x)} \leq C \left\| x^\alpha u^{'}(x) \right\|_{p(x)},$$

pour tout $u \in W^{1,p(.)}(I)$ *avec* $u(0) = 0$, *avec*

$$W^{1,p(.)}(I) = \{u \in L^{p(.)}(I), \nabla u \in L^{p(.)}(I)\}. \tag{3.5}$$

Démonstration. (on peut voir[8]). □

Lemme 3.2.
Soit $p :]0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$ *log-Hölder continu à l'origine avec* $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ *et* $\alpha(.)$ *est une fonction arbitrairement bornée et également log-Hölder continue à l'origine. On a*

1. $x^{\frac{p^-_{x,n} - p(x)}{p^-_{x,n}}} \leq e^{\frac{3C_1}{p^-}} + 2^{(\frac{p^+}{p^-} - 1)}$.
2. $x^{(\alpha(x) - \alpha^+_{x,n})} \leq e^{2C_1} + 2^{(\alpha^+ - \alpha^-)}$.

Pour tout $x \in [0, \infty[$.

Démonstration.

1. Supposons que $p^-_{x,n} \neq p(x)$ pour tout $x \in [0, \infty[$ alors on peut écrire :

$$p^-_{x,n} \leq p(y) < \frac{C_1}{\log \frac{1}{x}}, \tag{3.6}$$

telle que $y \in \Omega_{x,n}$ et dépend de x et n.
D'après la condition(3.3), on obtient

$$\left|p^-_{x,n} - p(0)\right| \leq \left|p^-_{x,n} - p(y)\right| + |p(y) - p(0)| \leq \frac{C_1}{\log \frac{1}{x}} + \frac{C_1}{\log \frac{1}{y}} \leq \frac{2C_1}{\log \frac{1}{x}}.$$

Encore une fois, en utilisant la condition (3.3), on obtient

$$\left|p^-_{x,n} - p(x)\right| \leq \left|p^-_{x,n} - p(0)\right| + |p(x) - p(0)| \leq \frac{2C_1}{\log \frac{1}{x}} + \frac{C_1}{\log \frac{1}{x}} \leq \frac{3C_1}{\log \frac{1}{x}},$$

donc

$$\begin{aligned} x^{\frac{p^-_{x,n} - p(x)}{p^-_{x,n}}} &\leq \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{p(x) - p^-_{x,n}}{p^-}} \qquad \textit{car } p^-_{x,n} \leq p^- \\ &\leq \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3C_1}{p^- \log \frac{1}{x}}} \\ &= e^{\frac{3C_1}{p^-}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Maintenant, soit $x \geq \frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{x} \leq 2$ alors

$$\begin{aligned} x^{\frac{p^-_{x,n}-p(x)}{p^-_{x,n}}} &= x^{1-\frac{p(x)}{p^-_{x,n}}} \\ &\leq \left(\frac{1}{x}\right)^{(\frac{p^+}{p^-}-1)} \qquad \textit{car } p^-_{x,n} \leq p^- \textit{ et } p(x) \leq p^+ \\ &\leq 2^{(\frac{p^+}{p^-}-1)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Par la somme de (3.7) et (3.8) on trouve

$$x^{\frac{p^-_{x,n}-p(x)}{p^-_{x,n}}} \leq e^{\frac{3C_1}{p^-}} + 2^{(\frac{p^+}{p^-}-1)}.$$

2. la preuve de 2 est similaire à 1.

$\square$

Lemme 3.3.
Soit $p :]0,\infty[\longrightarrow [1,\infty[$ un log-Hölder continue à l'infini avec $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Ensuite on obtient

$$(1+t^2)^{p(t)-p^-_{x,n}} \leq 2^{p^+-p^-}(e^{8C_2}+1),$$

pour tout $x \in [0,\infty[$

Démonstration.
Commençons par estimer le terme $p(t) - p^-_{x,n}$ pour $t \in \Omega_{x,n}$, $x > 0$

$$\left|p(t) - p^-_{x,n}\right| \leq \left|p^-_{x,n} - p_\infty\right| + \left|p(t) - p_\infty\right|.$$

Maintenant, soit $p^-_{x,n} \neq p(x)$ et x soit fixe, $x \in \Omega_{x,n}$. On peut alors écrire :

$$p^-_{x,n} \leq p(y) < \frac{C_2}{\log(e+t)}. \tag{3.9}$$

De la définition de $p^-_{x,n}$, $\exists y \in \Omega_{x,n}$, où y dépend de t, x et n. Puisque $p(.)$ est log-Hölder continue à l'infini et en utilisant l'inégalité (3.9), on obtient

$$\left|p^-_{x,n} - p_\infty\right| \leq \left|p^-_{x,n} - p(y)\right| + \left|p(y) - p_\infty\right| \leq \frac{C_2}{\log(e+t)} + \frac{C_2}{\log(e+y)}.$$

D'autre part, on peut écrire

$$\frac{C_2}{\log(e+y)} \leq \frac{2C_2}{2\log(e+\frac{t}{2})} = \frac{2C_2}{\log(e+\frac{t}{2})^2} \leq \frac{2C_2}{\log(e+t)},$$

pour $\frac{t}{2} < y < 2t$. Par conséquent, nous obtenons

$$\left|p_{x,n}^{-} - p_\infty\right| \leq \frac{3C_2}{\log(e+t)},$$

alors

$$\left|p_{x,n}^{-} - p(t)\right| \leq \frac{4C_2}{\log(e+t)}.$$

Maintenant, soit $p_{x,n}^{-} = p(x)$. Puisque $t < x$, alors on obtient

$$\begin{aligned}\left|p_{x,n}^{-} - p(t)\right| = |p(x) - p(t)| &\leq |p(x) - p_\infty| + |p(t) - p_\infty| \\ &\leq \frac{C_2}{\log(e+x)} + \frac{C_2}{\log(e+t)} \quad \textit{d'aprés } (3.4) \\ &\leq \frac{2C_2}{\log(e+t)}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$(1+t^2)^{p(t)-p_{x,n}^{-}} \leq (2t^2)^{p(t)-p_{x,n}^{-}} \leq 2^{p^+-p^-} t^{\frac{8C_2}{\log(e+t)}} \leq 2^{p^+-p^-} e^{8C_2}.$$

Et pour $t > 1$ on trouve

$$(1+t^2)^{p(t)-p_{x,n}^{-}} \leq 2^{p^+-p^-}(e^{8C_2}+1).$$

□

3.3 Un type d'inégalité de Hardy dans $L^{p(.)}$

Théorème 3.4.

Soient $p(.)$, $q(.)$ et $\alpha(.)$ des log-Hölder continus à l'origine et à l'infini. Si

$$\delta := 1 - \alpha^+(p^-)' > 0, \tag{3.10}$$

où $\alpha_{x,n}^{+} = max\{\alpha(x), \sup_{t\in\Omega_{x,n}} \alpha(t)\}$, $1 < p^- \leq p(x) \leq q(x) \leq q^+ < \infty$ et $-\infty < \alpha^- \leq \alpha(x) < \infty$ pour $x \in]0,\infty[$, alors il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\left\|x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}}u(x)\right\|_{q(x)} \leq C\left\|x^{\alpha(x)}u'(x)\right\|_{p(x)}. \tag{3.11}$$

Pour toute fonction absolument continue u sur $[0,\infty[$ avec $u(0) = 0$.

Démonstration.

Comme il existe une relation entre la fonction monotone ϑ avec $\vartheta(0) = 0$ et une fonction arbitraire absolument continue u avec $u(0) = 0$,

$$\vartheta(x) := \int_0^x |u'(t)|\, dt \geq \left| \int_0^x u'(t)dt \right| \geq |u(x)|\,,$$

il suffit de prouver le théorème pour les fonctions monotones. On suppose que $\left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)} = 1$ et $\sigma(x) := \alpha(x) - \frac{1}{p'(x)} - \frac{1}{q(x)}$. Ensuite, il faut montrer qu'il existe une constante C indépendante de la Fonction monotone u telle que

$$\left\| x^{\sigma(x)} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C, \tag{3.12}$$

et comme on a pour :

$$\begin{array}{ll}
n = 0 & u(x) - u(\frac{x}{2}) \\
n = 1 & u(\frac{x}{2}) - u(\frac{x}{4}) \\
n = 2 & u(\frac{x}{4}) - u(\frac{x}{8}) \\
n = m-1 & u(\frac{x}{2^{m-1}}) - u(\frac{x}{2^m}) \\
\vdots & \vdots \\
n = m & u(\frac{x}{2^m}) - u(\frac{x}{2^{m+1}}),
\end{array}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{m} \left(u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right) = u(x) - u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right).$$

De l'inégalité de Minkowski, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left\| x^{\sigma(x)} u(x) \right\|_{q(x)} &= \left\| \left[\sum_{n=0}^{m} \left(u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right) + u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right] x^{\sigma(x)} \right\|_{q(x)} \\
&\leq \left\| \left[\sum_{n=0}^{m} \left(u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right) \right] x^{\sigma(x)} \right\|_{q(x)} + \left\| u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) x^{\sigma(x)} \right\|_{q(x)} \\
&\leq \sum_{n=0}^{m} \left\| \left[u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right] x^{\sigma(x)} \right\|_{q(x)} + \left\| u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) x^{\sigma(x)} \right\|_{q(x)} \\
&= \sum_{n=0}^{m} \left\| x^{\sigma(x)} \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} |u'(t)|\, dt \right\|_{q(x)} + \left\| u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) x^{\sigma(x)} \right\|_{q(x)}, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

où $m \in \mathbb{N}$. Maintenant, estimons les deux normes dans la dernière expression. Pour la première norme, on pose

$$J := \int_0^\infty x^{\sigma(x)q(x)} \left(\int_{\Omega_{x,n}} |u'(t)|\, dt \right)^{q(x)} dx \leq C_1.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{x,n}} |u'(t)|\,dt &= \int_{\Omega_{x,n}} t^{\alpha^+_{x,n}} |u'(t)|\, t^{-\alpha^+_{x,n}} dt \\ &\leq \left(\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right)^{\frac{1}{p^-_{x,n}}} \left(\int_{\Omega_{x,n}} t^{-\alpha^+_{x,n}(p^-_{x,n})'} dt\right)^{\frac{1}{(p^-_{x,n})'}},\end{aligned}$$

où $(p^-_{x,n})'$ est l'exposant conjugué de $(p^-_{x,n})$ et $\alpha^+_{x,n} = max\{\alpha(x), \sup_{t\in\Omega_{x,n}} \alpha(t)\}$. De la condition(3.10) on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{x,n}} t^{-\alpha^+_{x,n}(p^-_{x,n})'} dt &= \left[\frac{t^{1-\alpha^+_{x,n}(p^-_{x,n})'}}{1-\alpha^+_{x,n}(p^-_{x,n})'}\right]_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} \\ &\leq C_2(\delta)(2^{-n}x)^{1-\alpha^+_{x,n}(p^-_{x,n})'},\end{aligned}$$

où $C(\delta) > 0$ est indépendant de x et u. A cause de la dernière inégalité, on a

$$J \leq C_3 \int_0^\infty x^{\sigma(x)q(x)} (2^{-n}x)^{\gamma(x)} \left(\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right)^{\frac{q(x)}{p^-_{x,n}}} dx, \tag{3.14}$$

où $\gamma(x) = \frac{1-\alpha^+_{x,n}(p^-_{x,n})' q(x)}{(p^-_{x,n})'}$. Depuis

$$\gamma(x) = (1-\alpha^+_{x,n})q(x) - \frac{q(x)}{p(x)} + \frac{p^-_{x,n} - p(x)}{p^-_{x,n}} \frac{q(x)}{p(x)}.$$

En utilisant le théorème (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}x^{\sigma(x)q(x)}(2^{-n}x)^{\gamma(x)} &= x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}q(x)} (2^{-n}x)^{(1-\alpha^+_{x,n})q(x)-\frac{q(x)}{p(x)}+\frac{p^-_{x,n}-p(x)}{p^-_{x,n}}\frac{q(x)}{p(x)}} \\ &\leq x^{-1} x^{\frac{p^-_{x,n}-p(x)}{p^-_{x,n}}\frac{q(x)}{p(x)}} x^{(\alpha(x)-\alpha^+_{x,n})q(x)} 2^{-n\delta(p^- -1)} \\ &\leq x^{-1}\left(e^{\frac{3C_1}{p^-}} + 2^{(\frac{p^+}{p^-}-1)}\right)\left(e^{2C_1} + 2^{(\alpha^+-\alpha^-)q(x)}\right) 2^{-n\delta(p^- -1)} \\ &\leq \frac{C_4}{x} 2^{-n\delta(p^- -1)},\end{aligned}$$

où $C_4 > 0$ ne dépend que de C_1, δ, p^-, p^+, α^- et α^+. On peut donc écrire à partir de (3.14)

$$J \leq \int_0^\infty \frac{C_5}{x} 2^{-n\delta(p^- -1)} \left(\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right)^{\frac{q(x)}{p^-_{x,n}}} dx. \tag{3.15}$$

Maintenant, soit $G(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t > 0$. Puisque $\alpha(.)$ est log-Hölder continue à l'infini et en utilisant le théorème (3.3), on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt &= \int_{\Omega_{x,n}} \left|\frac{t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)}{G(t)}\right|^{p^-_{x,n}} G(t)^{p^-_{x,n}} dt \\
&\leq \int_{\Omega_{x,n}} \left(\left|\frac{t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)}{G(t)}\right|^{p(t)} G(t)^{p^-_{x,n}} + G(t)^{p^-}\right) dt \\
&\leq \int_{\Omega_{x,n}} \left(\left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p(t)} G(t)^{p^-_{x,n}-p(t)} + G(t)^{p^-}\right) dt \\
&\leq \int_{\Omega_{x,n}} \left(\left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p(t)} 2^{p^+-p^-}(e^{8C_2}+1) + G(t)^{p^-}\right) dt \\
&\leq \int_{\Omega_{x,n}} \left(\left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p(t)} C_6 + G(t)\right) dt \\
&\leq C_7 \int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p(t)} dt + \int_{\Omega_{x,n}} G(t) dt.
\end{aligned}$$

Mais on a supposé que $\left\|x^{\alpha(x)} u'(x)\right\|_{p(x)} = 1$ et on a $\int_{\Omega_{x,n}} G(t)dt \leq \int_0^\infty G(t)dt$ alors

$$\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt \leq C_7 + \frac{\pi}{2} = C_8,$$

où $C_7 > 0$ ne dépend que de C_1, C_2, p^-, q^+, α^- et α^+. Ainsi

$$\left(\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right)^{\frac{q(x)}{p^-_{x,n}}} = \left(\frac{1}{C_8}\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right)^{\frac{q(x)}{p^-_{x,n}}} C_8^{\frac{q(x)}{p^-_{x,n}}}.$$

Et comme on a $p^-_{x,n} = min\{p(x), \inf_{t\in\Omega_{x,n}} p(t)\}$, $q(x) \leq q^+$ alors on peut écrire

$$\left(\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right)^{\frac{q(x)}{p^-_{x,n}}} \leq C_8^{\frac{q^+}{p^-}-1} \left(\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right)^{\frac{q(x)}{p^-_{x,n}}}.$$

Par suite, on a $p^- < q$ donc $\frac{q}{p^-} > 1$ alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right)^{\frac{q(x)}{p^-_{x,n}}} &\leq C_8^{\frac{q^+}{p^-}-1} \left(\int_{\Omega_{x,n}} \left|t^{\alpha^+_{x,n}} u'(t)\right|^{p^-_{x,n}} dt\right) \\
&\leq C_9 \left(\int_{\Omega_{x,n}} \left(C_7 \left|t^{\alpha(t)} u'(t)\right|^{p(t)+G(t)}\right) dt\right) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

A partir des inégalités (3.15) et (3.16), en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
J &\leq \int_0^\infty \frac{C_{10}}{x} 2^{-n\delta(p^- -1)} \left(C_7 \left|t^{\alpha(t)} u'(t)\right|^{p(t)} dt + \int_{\Omega_{x,n}} G(t)dt \right) dx \\
&\leq C_{10} 2^{-n\delta(p^- -1)} \int_0^\infty \left(C_7 \left|t^{\alpha(t)} u'(t)\right|^{p(t)} dt + \int_{\Omega_{x,n}} G(t)dt \right) \frac{dx}{x} \\
&= C_{10} 2^{-n\delta(p^- -1)} \left(\int_0^\infty \left(C_7 \left|t^{\alpha(t)} u'(t)\right|^{p(t)} + G(t) \right) \left(\int_{2^n t}^{2^{n+1} t} \frac{dx}{x} \right) dt \right) \\
&= C_{10} 2^{-n\delta(p^- -1)} \log 2 \left(C_7 \int_0^\infty \left|t^{\alpha(t)} u'(t)\right|^{p(t)} dt + \int_0^\infty G(t)dt \right) \\
&= C_{10} 2^{-n\delta(p^- -1)} \log 2 \left(c_7 + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= C_{11} 2^{-n\delta(p^- -1)},
\end{aligned}$$

où $C_{11} = C_{10}(C_7 + \frac{\pi}{2}) \log 2$. Puisque $p^- > 1$, on a

$$\left\| x^{\sigma(x)} \int_{2^n x}^{2^{n+1} x} |u'(t)|\, dt \right\|_{q(x)} \leq C_{12} 2^{-n\delta_1},$$

où $C_{12} > 0$ et $\delta_1 > 0$ sont indépendants de n et u. De l'inégalité (3.13) on obtient

$$\left\| x^{\sigma(x)} u(x) \right\|_{q(x)} \leq \Sigma_{n=0}^m C_{12} 2^{-n\delta_1} + \left\| u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) x^{\sigma(x)} \right\|_{q(x)}. \tag{3.17}$$

D'après notre hypothèse et le théorème de Lebesgue lorsque $m \longrightarrow \infty$, nous obtenons

$$\left| x^{\sigma(x)} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right|^{q(x)} \leq \left| x^{\sigma(x)} u(x) \right|^{q(x)} \in L^1]0, \infty[.$$

Et

$$\int_0^\infty \left(x^{\sigma(x)} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right)^{q(x)} dx \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\left\| x^{\sigma(x)} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right\|_{q(x)} \longrightarrow 0. \tag{3.18}$$

Comme $m \longrightarrow \infty$. En prenant (3.18) en considération dans l'expression (3.17) comme $m \longrightarrow \infty$, on obtient

$$\left\| x^{\sigma(x)} u(x) \right\|_{q(x)} \leq \sum_{n=0}^\infty C_{12} 2^{-n\delta_1} = C_{13}.$$

□

Corollaire 3.5.
Soient $p(.)$, $q(.)$ et $\alpha(.)$ des log-Hölder continus à l'origine et à l'infini. Si

$$\delta_2 := \alpha^-(p^+)^{'} - 2 + \frac{(p^+)}{(p^-)} > 0, \tag{3.19}$$

où $1 < p^- \leq p(x) \leq q(x) \leq q^+ < \infty$ et $0 < \alpha(x) \leq \alpha^+ < \infty$ pour $x \in [0, \infty[$ alors il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de $\delta_2, C_1, C_2, p^-, q^+$ et α^+, telle que

$$\left\| x^{\alpha(x) - \frac{1}{p'(x)} - \frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C \left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)}. \tag{3.20}$$

Pour toute fonction absolument continue u sur $[0, \infty[$ avec $u(\infty) = \lim_{x \longrightarrow \infty} u(x) = 0$.

Démonstration. (On peut voir [13]). □

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudier l'espace de Lebesgue à exposant variable avec des propriétés, puis on a étudié un type de l'inégalité de Hardy dans cet espace, c'est à dire, les conditions pour lesquelles cette inégalité soit vraie. Les inégalités de type de Hardy ont de nombreuses applications dans l'analyse fonctionnelle, les equations aux dérivées partielles. Ces inégalités peuvent être généralisées dans d'autres espaces fonctionnels à exposant variable comme l'espace de Sobolev, l'espace de Besov ...

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.R.Beesack, *Hardy's inequality and its extensions*,Pasific J.Math, 1961. Voir la page 5

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential*, Springer, New York, 2011. Voir les pages 5, 7, 11, 12

[3] V.I.Burenkov, *Min inequalities in* L^p, Mosco-university, 1989. Voir la page 5

[4] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercice de mathématique pour l'agrégation*, vol analyse 3, Masson, 1995. Voir la page 5

[5] O.Covacik, J.Rakonsnik, *On spaces* $L^p(x)$ *and* $W^{k,p(x)}$,Czechoslovak mathematical journal, vol 41, 1991, 592-612. Voir les pages 18, 31, 32, 33

[6] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces Foundations and Harmonic Analysis*, Springer, New York, 2013. Voir les pages 18, 31, 32

[7] X. Fan, D.Zhao, *On the spaces* $L^{p(x)}(\Omega)$ *and* $W^{m,p(x)}(\Omega)$, Journal of Mathematical Analysis and Applications 263, 2001, 424-446. Voir la page 18

[8] P.Harjulehto, P.Hasto, M.Koskenoja , *Hardy's inequality in variable exposent Sobolev spaces*, Georgian Math Journal 12, 2005, 431-442. Voir la page 36

[9] F. Hirsh , G. Lacombe , *éléments d'analyse Fonctionnelle*, Dunod, Paris, 1997. Voir la page 5

[10] N.Levinson, *Generalizations of inequality of Hardy*,Duke Maths, 1964. Voir la page 5

[11] J. Lukeš, L. Pick, D. Pokorný, *On geometric properties of the space* $L^{p(x)}$,Rev Mat Complut, Springer, 2011, 115-130. Voir la page 18

[12] A.Maligrand, Kunfer, L.E.Persson , *The Hardy inequality about history and somme related results*, Pilson Edition, 2007. Voir la page 17

[13] R.A.Mashiyev, B.Cekiç, F.I.Mamedov , *Hardy's inequality in power-type weighted* $L^{p(x)}]0,\infty[$ *spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 334, 2007, 289-298. Voir les pages 3, 34, 43

[14] J.Musielak , *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer, Berlin, 1983. Voir la page 3

[15] H. Nakano, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*, Maruzen, Tokyo, 1950. Voir la page 3

[16] W. Orlicz, *Über konjugierte Exponentenfolgen*, StudiaMath, 1931. voir la page 3

[17] F. Reinhardt, H. Soeder , *Atlas des mathématiques*,le livre de poche, 1997.voir la page 5

[18] W.Rudin, *Analyse réelle et complexe*,Masson, 1997.voir la page 5

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude d'une inégalité de type de Hardy dans l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(\cdot)}$. Voir, les conditions sur $p(\cdot)$, p^-, q^+, $\alpha(x)$ et δ telle que

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C \left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)}.$$

Mots clés: espaces de Lebesgue classique, Espace modulaire, Espaces de Lebesgue généralisé, Inégalité de Hardy.

Abstract

In this dissertation we are interested in the study of a Hardy type inequality in the Lebesgue space with variable exponent $L^{p(\cdot)}$. See, conditions on $p(\cdot)$, p^-, q^+, $\alpha(x)$ and δ such that

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C \left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)}.$$

Keywords: classical Lebesgue spaces, Modular space, Generalized Lebesgue spaces, Hardy inequality.

ملخص

في هذه المذكرة، نهتم بدراسة متباينة من نوع هاردي في فضاء لوبيغ ذات الاس المتغير. اي نرى، الشروط على $p(\cdot)$، p^-، q^+، $\alpha(x)$ و δ بحيث

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C \left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)}.$$

كلمات مفتاحية: فضاءات لوبيغ الكلاسيكية، فضاءات معيارية، فضاءات لوبيغ العامة، متباينة هاردي.