République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présentée par :

Guendouz Hanène

Pour l'obtention du diplôme de :

Master

Filière : Mathématique .
Spécialité : Système dynamique .

Thème :

Un autre critère de nilpotence pour les groupes finis

Soutenu publiquement **le 21 juin 2023** devant le jury composé de

Dr. F. Hammani	M.C.B.	Président
Dr. S. Azra	M.C.B.	Encadrant
Dr. Kh. Dekkar	M.C.B.	Examinateur

Promotion 2022/2023

Remerciements

On remercie ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mme Azra Souad, on la remercions pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nous remercions également les enseignants qui nous ont prodigué conseils et encouragements au cours de ces années d'étude.

En fin, nous tenons sincèrement à remercier toute personne qui a participé de près ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A ma très chère mère source de tendresse

A mon très cher père, qui m'encourage

Dans les instants délicats

A mes chères sœurs et à toute ma famille

A mes amies et mes camarades

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du

primaire, du moyen, du secondaire ou de

l'enseignement supérieur

Puisse Dieu vous donne santé, bonheur,

courage et surtout réussite.

Table des matières

Notations

$\Pi(G)$: L'ensemble des diviseurs premiers des ordres des éléments de G.

$O^p(G)$: Le plus petit sous-groupe normal dans G tel que $G/O^p(G)$ soit un p-groupe.

$O_p(G)$: Désigne le p-sous-groupe normal maximal dans $G/O_p(G)$ est caractéristique dans G.

$\Pi(H_i)$: Produit direct des groupes (G_i).

$\{H^G\}$: Classe de conjugaison du sous-groupe H dans G.

$G^{'}$: Sous-groupe dérivé de G.

$Aut(G)$: Groupe des automorphismes de G.

$Int(G)$: Groupe des automorphismes intérieurs de G.

$Out(G)$: Groupe des automorphismes extérieurs de G.

$Orb_G(N)$: Orbite de N dans G.

$Stab_G(N)$: Stabilisateur de N dans G.

Introduction

Il existe beaucoup de propriétés équivalentes à la nilpotence des groupes finis. En particulier, il est bien connu qu'un groupe fini est nilpotent si, et seulement si, tous ses sous-groupes sont sous-normaux, ou encore, un groupe fini est nilpotent si, et seulement si, tous ses sous-groupes maximaux sont normaux.
D'autre caractérisations, moins classiques, existent notamment un résultat démontré par Baumslag et Wiegold montre qu'un groupe fini est nilpotent si, et seulement si, l'ordre du produit de deux éléments d'ordres premiers entre eux est égal au produit des ordres, plus récemment, dans [2] Bianchi et al ; ont montré qu'un groupe fini est nilpotent si, et seulement si le normalisateur de P dans G est nilpotent pour tout p-sous-groupe de Sylow P de G et pour tout $p \in \Pi(G)$.
Ce dernier résultat a été généralisé par Yanming Wang dans [7], en démontrant qu'un groupe fini G est nilpotent si, et seulement si, il admet un sous-groupe normal K tel que le quotient de G par K soit nilpotent et le normalisateur de P dans G sur le centralisateur de P dans G soit un p-groupe pour tout p-sous-groupe de Sylow P de G et pour tout $p \in \Pi(K)$.
Dans notre mémoire, on va exposer en détails les résultats de Y. Wang.
Notre mémoire est formé de deux chapitres. Dans le Chapitre 1, on trouvera un rappel sans démonstrations, les notions fondamentale sur la condition maximale et minimale sur les sous groupes et des principales propriétés des groupes abéliens, résolubles, nilpotent, qui ont été extraites des livres [5] et [6] et nous avons mentionné le théorème de Lagrange et les théorèmes de Sylow.
Dans le second chapitre, ou exposera dans la première section, les différents critères de nilpotence des groupes finis cités plus-haut. Quand à la seconde section, on trouvera les résultats de Y. Wang.

Chapitre 1

Préliminaire

Introduction

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques notions principaux à la théorie des groupes. D'abord on va introduire notion fondamentale sur la condition maximale et minimale sur les sous groupes. Après cela, nous intéresserons aux groupes (Groupes abéliens, abéliens finis, abéliens de type fini, quasicyclique, divisible, nilpotent et résoluble) Enfin, nous terminons par le théorème de Lagrange et les théorèmes de Sylow.

1.1 Condition maximale et condition minimale sur les sous-groupes

Définition 1.1. *Soit G un groupe et soit P une propriété des groupes*

i) *Un sous-groupe $H \leq G$ est dit maximal pour P si H vérifie P et s'il n'existe pas un sous-groupe K de G tel que $H \leq K \leq G$ et K vérifie P. i,e, Si $H \leq K \leq G$ et K vérifie P, alors $K = H$ ou $K = G$.*

ii) *Un sous-groupe $1 \neq H \leq G$ est dit minimal pour P si H vérifie P et s'il n'existe pas un sous-groupe K de G tel que $1 \leq K \leq H$ et K vérifie P. i,e, Si $1 \leq K \leq H$ et K vérifie P, alors $K = 1$ ou $K = H$.*

Définition 1.2.

a) *On dit que G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes s'il n'existe pas de chaine infinie strictement ascendante $H_1 < H_2 < ... < H_i < H_{i+1} < ...$ de sous-groupes de G.*

b) *On dit que G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes s'il n'existe pas de chaine infinie strictement descendante $H_1 > H_2 > ... > H_i > H_{i+1} > ...$ de sous-groupes de G.*

On notera max (resp min) la condition maximale (resp la condition minimale) sur les sous-groupes.

Proposition 1.1.

a) *Un groupe G vérifie max si, et seulement si, tout ensemble non vide de sous-groupe G admet un élément maximal.*

b) *Un groupe G vérifie min si, seulement si, tout ensemble non vide de sous-groupe G admet un élément minimale.*

Théorème 1.1. *Un groupe G vérifie max si, et seulement si, tout sous-groupe de G est de type fini.*

Remarque 1.1. *Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \lhd G$*

(i) *Si G vérifie max (resp min) alors H vérifie max (resp min).*
(ii) *Si G vérifie max (resp min) alors G/N vérifie max (resp min).*
(iii) *Si N et G/N vérifie max (resp min) alors G vérifie max (resp min).*

1.2 Normalisateur et Centralisateur de Groupes

Définition 1.3. ***(Normalisateur d'un groupe)***
Soit G un groupe et H un sous-groupe de G, l'ensemble

$$N_G(H) = \{g \in G \ / \ g^{-1}Hg = H\}$$

s'appelle normalisateur de H dans G
$N_G(H)$ est le plus grande sous groupe de G dans le quel H est normal

Définition 1.4. ***(Centralisateur d'un groupe)***
Soient G un groupe et x un élément de G, on appelle centralisateur de x (dans G) et l'on note $C_G(x)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x

$$C_G(x) = \{g \in G : \ xg = gx, \ \forall x \in G\} \ .$$

1.3 Orbite et Stabilisateur d'un élément

Définition 1.5. ***(Orbite)***
On définit l'orbite d'un élément x de E par $Orb_x = \ \{y \in E \mid \exists g \in G : \ y = \ g.x\}$ l'orbite de x est l'ensemble des éléments de E associés à x sous l'action de G. La relation " y est dans l'orbite de x " est une relation d'équivalence sur E ; les classes d'équivalence sont les orbites. En particulier, les orbites forment une partition de E.

Définition 1.6. ***(Stabilisateur d'un élément)***
Le stabilisateur (ou sous-groupe d'isotropie) d'un élément x de E sous l'action de G est l'ensemble

$$G_x = \ Stab_x = \ \{g \in G| \ g.x = \ x\}$$

des éléments qui laissent x invariant sous leur action. C'est un sous-groupe de G. Les stabilisateurs de deux éléments de la même orbite

sont conjugués via la formule

$$Stab_{g.x} = \; gStab_x g^{-1}.$$

En particulier :

- *ils sont isomorphes donc équipotents.*
- *ils ont même indice.*

D'ailleurs, l'application

$$\begin{array}{rcl} G/Stab_x & \to & Orb_x \\ \bar{g} & \to & g.x \end{array}$$

est une bijection de $G/Stab_x$ sur Orb_x, si bien que l'indice du stabilisateur de n'importe quel point d'une orbite est égal au cardinal de cette orbite (cette propriété sera rappelée plus bas sous le nom de " formule des classes ").

1.4 Groupes abéliens

Définition 1.7. *On dit qu'un groupe $(G, *)$ est abélien ou commutatif lorsque la loi de composition interne de groupe est commutative c'est-à-dire :*

$$Pour\ tout\ (a, b) \in G^2, \;\; a * b = b * a.$$

Exemple 1.1.

— *Le sous groupe d'un groupe G engendré par élément est abélien.*
— *Le groupe $GL_n(A)$ n'est pas abélien. Si $n \geq 2$.*
— $(\mathbb{Z}, +); (\mathbb{Q}, +); (\mathbb{R}, +); (\mathbb{C}, +)$ *sont des groupes commutatifs l'élément neutre est 0 et l'inverse de x et $-x$.*
— $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *muni du produit sont des groupes commutatifs l'élément neutre est 1 et l'inverse de x est $\frac{1}{x}$.*

Remarque 1.2. *Tout sous-groupe d'un groupe abélien est lui-même abélien mais un groupe non abélien peut contenir des sous-groupes abéliens aussi bien que des sous-groupes abéliens.*

1.5 Groupes Cycliques et Groupes abéliens finis

Définition 1.8. *On dit qu'un groupe G est cyclique s'il existe un élément a de G tel que*

$$G = \{a^n / \; n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple 1.2.

- Tout sous groupes d'un groupe cyclique est cyclique
-($\mathbb{Z}$) est cyclique engendré par +1 ou -1

Définition 1.9. *Soit G un groupe abélien fini et soit*

$$\begin{aligned} G \simeq\ & \langle g_{11}\rangle\langle g_{12}\rangle...\langle g_{1r_1}\rangle \\ & \langle g_{21}\rangle\langle g_{22}\rangle...\langle g_{2r_2}\rangle \\ & .... \\ & \langle g_{t1}\rangle\langle g_{t2}\rangle...\langle g_{tr_t}\rangle \end{aligned}$$

un décomposition de G en produit direct d'un nombre fini de sous-groupes cyclique, $\langle g_{ij_i}\rangle$, d'ordre $p_i^{m_{ij}}$ une puissance des nombres premiers, alors

$$\{p_1^{m_{11}},\ p_1^{m_{12}},\ ...,\ p_1^{m_{1r_1}},\ p_2^{m_{21}},\ p_2^{m_{22}},\ ...,\ p_2^{m_{2r_2}},\ ...,\ p_t^{m_{t_1}},\ p_t^{m_{t_2}},\ ...,\ p_t^{m_{tr_t}}\}$$

est appelé l'ensemble des diviseurs élémentaires de G.

Théorème 1.2. *Tout groupe abélien fini G est produit direct d'un nombre fini de sous-groupes cycliques d'ordre des puissances de nombres premiers.*

Théorème 1.3. *Soit G un groupe abélien fini si*

$$\begin{aligned} \langle h_1\rangle\langle h_2\rangle...\langle h_s\rangle & \simeq G \\ & \simeq \langle g_1\rangle\langle g_2\rangle...\langle g_r\rangle \end{aligned}$$

sont deux décompositions de G en produit direct de sous-groupes cycliques d'ordre des puissances de nombres premiers, alors

$$r = s \quad et \quad \circ(h_i) = \circ(g_i)$$

pour tout $i \in \{1, ..., r\}$.

Corollaire 1.1. *Deux groupes abéliens finis isomorphes ont les mêmes diviseurs élémentaires. Réciproquement, si deux groupes abéliens finis ont les mêmes diviseurs élémentaires, alors ils sont isomorphes.*

Remarque 1.3. *Il apparait du Corolaire 1.1 que les groupes abéliens finis sont entièrement décrits, à un isomorphisme près par leurs diviseurs élémentaires.*

Remarque 1.4. *Soit G un groupe abélien d'ordre*

$$n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}....p_t^{k_t} \quad où \quad t \in \mathbb{N}^*$$

et pour tout $1 \leq i \leq t$
p_i est un nombre premier et $k_i \in \mathbb{N}^*$, donc

$$G \simeq P_1P_2...P_t$$

où P_i est le p_i-sous-groupe de Sylow de G d'ordre $p_i^{k_i}$. On sait que le nombre des groupes abéliens d'ordre $p_i^{k_i}$ est égal au nombre de partitions de l'entier k_i. Donc le nombre des groupes abéliens d'ordre n est égal au produit des nombres de partitions des entiers k_i, pour tout $1 \leq i \leq t$.

Théorème 1.4. *Tout groupe abélien fini G est produit direct d'un nombre fini de sous-groupes cyclique*

$$G \simeq \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle ... \langle g_r \rangle$$

d'ordre m_i tel que l'on ait

$$m_r/m_{r-1}\ /.../m_2/\ m_1\ ;\ \ où\ r \in\ \mathbb{N}^*.$$

Théorème 1.5. *Si un groupe abélien fini est tel que :*

$$\begin{aligned} \langle h_1 \rangle \langle h_2 \rangle ... \langle h_s \rangle &\simeq G \\ &\simeq \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle ... \langle g_r \rangle \end{aligned}$$

où

$$r, s \in \mathbb{N}^*\ ; \quad m_i = \circ(g_i)\ \ et \quad n_i = \circ(h_i)$$

vérifient

$$m_r/m_{r-1}\ /.../m_2|m_1$$

et

$$n_s/n_{s-1}\ /.../n_2/n_1$$

alors

$$r = s\ \ et \quad m_i = n_i$$

pour tout $1 \leq i \leq r$.

Définition 1.10. *Soit G un groupe abélien fini est soit*

$$G \simeq \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle ... \langle g_r \rangle$$

une décomposition de G en produit direct de sous-groupes cycliques telle que

$$\circ(g_i) = m_i$$

pour tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$ où $m_i > 0$
sont des entiers vérifiant

$$m_r/m_{r-1}\ /.../m_2/m_1$$

alors

$$\{m_1, m_2, ..., m_r\}$$

est appelé l'ensemble des invariants de G et la décomposition

$$G \simeq \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle ... \langle g_r \rangle$$

est appelé décomposition canonique de G.

Corollaire 1.2. *Deux abéliens finis isomorphes ont les mêmes invariants.*
Réciproquement, si deux groupes abéliens finis ont les mêmes invariant alors sont isomorphes.

Remarque 1.5. *Il apparait du Corollaire 1.2. que les groupes abélien finis sont entièrement décrits, à un isomorphisme près par leurs invariants.*

1.6 groupes abéliens de type fini

Les groupes abéliens de type fini ont une structure assez simple comme dans les résultats suivants.

Théorème 1.6.

(i) Si G est un groupe abélien de type fini, alors G vérifie max.
(ii) Un groupe abélien G est de type fini si, et seulement si, G est produit direct d'un nombre fini de groupes cycliques d'ordre infini ou une puissance d'un nombre premier.
(iii) Tout groupe abélien périodique est de type fini.

1.7 Groupe quasicyclique

H.Prufer a défini un type important de groupes abéliens qui jouent un rôle fondamentale dans la théorie des groupes abéliens, ces groupes s'appellent groupes de Prufer ou groupes de type P^{∞}, ou encore groupes quasicycliques.

Définition 1.11. *Soit P un nombre premier. On appelle groupe quasicyclique tout groupe G engendré par des éléments $a_1, a_2, a_3, ...$ vérifiant*

$$a_1^P = 1;\ a_{i+1}^P = a_i \quad et \quad a_i a_j = a_j a_i$$

pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$ i,e

$$G = \langle a_1, a_2, a_3, ...|\ a_1^P = 1;\ a_{i+1}^P = a_i \quad et \quad a_i a_j = a_j a_i \rangle$$

Le groupe quasicyclique sera noté C_{p^∞}.

Remarque 1.6.

(i) Il est clair que le groupe quasicyclique est un groupe abélien infini.
(ii) L'ordre de tout élément a^i du groupe quasicyclique est p^i.
(iii) Tout sous-groupe propre d'un groupe quasicyclique est cyclique d'ordre une puissance de p.
(iv) Tout groupe quasicyclique vérifie min car tous ses sous-groupe sont finis, mais ne vérifie pas max car il est la réunion d'une chaine infinie strictement ascendant de sous-groupe cyclique d'ordre $p,\ p^2,\ p^3, ...$.

Le théorème suivant nous montre l'importance des groupes quasicycliques pour les groupes abéliens.

Théorème 1.7. *Un groupe abélien G vérifie min si, et seulement si, G est produit direct d'un nombre fini de groupes quasicycliques ou de groupes cycliques d'ordre une puissance d'un nombre.*

1.8 Groupe divisible

Définition 1.12. *Un groupe abélien G est dit divisible si pour tout élément g de G et tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un élément x de G tel que*

$$x^n = g\ ;\quad i,e \quad G^n = G.$$

Exemple 1.3.

(i) Le groupe additif des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est un groupe divisible.
(ii) Le groupe cyclique n'est pas divisible.

Dans ce qui suit on a une caractérisation des groupes abéliens divisible.

Théorème 1.8. *Soit G un groupe abélien, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) G divisible.
(ii) G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.
(iii) $G = G^n$ pour $n \in N^*$.
(iv) $G = G^p$ pour tout nombre premier p.

Théorème 1.9. *Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \trianglelefteq G$.*

(i) Si G est divisible, alors G/N est divisible.
(ii) Si G est divisible, alors H n'est pas nécessairement divisible (les sous-groupes des groupes quasicycliques ne sont pas divisibles).

1.9 Groupes nilpotents

1.9.1 Séries centrales de sous-groupes

Définition 1.13. *Soit*

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$$

une série d'un groupe G

- $\sum$ *est dite normale si $G_i \lhd G$ pour tout $0 \leq i \leq n$.*
- $\sum$ *est dite centrale si elle est normale et si on a*

$$G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$$

pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$.

Théorème 1.10. *Une série*

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_i \lhd ... \lhd G_n = G$$

est centrale si et seulement si

$$[G_i, G] \leq G_{i+1}$$

pour tout : $0 \leq i \leq n-1$ *où*

$$[G_i,\ G] = \ \{[x,g]:\ x \in G_i,\ g \in G\}$$

Définition 1.14. *soit G un groupe, on définit par récurrence sur i des sous-groupes caractéristiques $Z_i(G)$ comme suit :*

$$Z_0(G) = 1,\ Z_1(G) = Z(G),\ ...,\ Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = \ Z(G/Z_i(G))$$

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$
on a

$$1 = Z_0(G) \lhd Z_1(G) \lhd ... \lhd Z_i(G) \lhd Z_{i+1}(G) \lhd ...$$

est une chaine ascendante de sous-groupes, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Z_n(G) = G$ alors

$$\sum : 1 = Z_0(G) \lhd Z_1(G) \lhd ... \lhd Z_i(G) \lhd Z_{i+1}(G) \lhd ... \lhd Z_n(G) = G$$

est une série centrale de G appelée série centrale supérieure de G.

Proposition 1.2. *Si*

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_i \lhd ... \lhd G_n = G$$

est une série centrale dans G alors on a

$$G_i \leq Z_i(G)$$

pour tout, $0 \leq i \leq n$. En particulier

$$Z_n(G) = G$$

Définition 1.15. *Soit G un groupe on définit par récurrence sur i des sous-groupes caractéristiques dans G comme suit :*

$$\gamma_1(G) = G,\ \gamma_2(G) = \ G' = \ [G,G],\ ...,\ \gamma_{i+1}(G) = \ [\gamma_i(G), G]$$

donc on a

$$G = \gamma_1(G) \rhd \gamma_2(G) \rhd ... \rhd \gamma_i(G) \rhd \gamma_{i+1}(G) \rhd ...$$

s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_{n+1}(G) = 1$ alors

$$\sum : 1 = \gamma_{n+1}(G) \lhd \gamma_n(G) \lhd ... \lhd \gamma_2(G) \lhd \gamma_1(G) = G$$

est une série centrale de G appelée série centrale inférieure de G.

La proposition suivante justifie l'appellation de série centrale inférieure

Proposition 1.3. *Si*

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$$

est un série centrale dans G
alors

$$\gamma_i(G) \leq G_{n-(i-1)}$$

pour tout, $1 \leq i \leq n+1$. *En particulier*

$$\gamma_{n+1}(G) = 1$$

Proposition 1.2 et 1.3 ont la conséquence suivante.

Corollaire 1.3. *Les séries centrales supérieure et inférieure d'un groupe G ont même longueur* ℓ *et* ℓ *est la longueur la plus courte d'une série centrale de G.*

1.9.2 Groupes nilpotents

Définition 1.16. *Un groupe G est dit nilpotent s'il admet une série centrale fine, i,e une série finie de sous-groupes normaux*

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ...G_n = G$$

telle que

$$G_{i+1} \setminus G_i \leq Z(G \setminus G_i)$$

pour tout, $0 \leq i \leq n-1$
La longueur de plus coure série centrale de G est appelée classe de nilpotence de G.

Remarque 1.7.

(i) Toute série centrale est une série abélienne donc tout groupe nilpotent est résoluble.
(ii) Tout groupe nilpotent non trivial admet un centre non trivial, i,e si $G \neq 1$ *est nilpotent alors* $Z(G) \neq 1$.

Corollaire 1.4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) G est un groupe nilpotent.
(ii) Il existe $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $Z_n(G) = G$.
(iii) Il existe $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

Remarque 1.8.

- *Si* $G = 1$
  alors
  $$G = Z_0(G) \text{ ou } \gamma_1(G) = 1$$
  donc G est nilpotent de classe 0.

- *Si* $G \neq 1$ *est abélien*
  alors

$$G = Z(G) \text{ ou } G' = \gamma_2(G) = 1$$

donc G est nilpotent de classe 1.

- *Si G est nilpotent*
  alors G admet une série centrale finie qui est donc abélienne d'où G est résoluble.

Théorème 1.11. *Soit G un groupe ; $H \leq G$ et $N \lhd G$*
si G est nilpotent alors il en est de même de H et de G/ N.

Remarque 1.9. *La nilpotence n'est pas stable par extension. En effet, on a $A_3 \lhd S_3$, A_3 et S_3/A_3 sont cycliques mais S_3 n'est pas nilpotent car $Z(S_3)$ est trivial.*

Théorème 1.12. *Tout p-groupe fini est nilpotent où p est un nombre premier.*

Définition 1.17. *Soit G un groupe*

- *On dit que $H \leq G$ est sous-normal dans G et on note H en G s'il existe des sous-groupes $\{H_i\}_{0 \leq i \leq n}$ tels que l'on ait*
$$H = H_o \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_n = G.$$

- *On dit que G vérifie la condition du normalisateur si pour tout $H \leq G$, on a*
$$H \leq N_G(H).$$

Théorème 1.13. *Soit G un groupe fini, G est nilpotent si, et seulement si, G est produit direct de ses sous-groupes de Sylow.*

Théorème 1.14. *Soit G un groupe fini, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *G est nilpotent.*
2) *G est produit de p-groupes.*
3) *Pour tout p premier, G a un unique p-sous-groupe de Sylow.*
4) *Soient p et q deux nombres premiers distincts et soit S_p (resp. S_q) un p-sous-groupe de Sylow de G (resp. un q-sous-groupe de Sylow) alors S_p et S_q se centralisent mutuellement (i,e tout élément de S_p commute avec tout élément de S_q).*
5) *Deux éléments de G d'ordres premiers entre eux commutent.*

Exemple 1.4.

- *Si $G = 1$*
  alors G est nipotent de classe 0.
- *Si $G \neq 1$ est abétien*
  alors G est nilpotent de classe 1. En effet
$$\sum : 1 = G_1 \lhd G = G$$
  est une série dont le quotient
$$G \setminus 1 \simeq G = Z(G) \simeq Z(G \setminus 1)$$
  donc $\sum$ est centrale.
- *Si G est un p-groupe fini, i,e*
$$|G| = p^n$$

où $n \in N$ et p premier, alors G est nilpotent. En effet, il suffit d'utiliser une récurrence sur $|G|$ si $n = 1$
alors

$$|G| = p$$

donc G est cyclique, d'où G nilpotent. Supposons que $n \geq 2$ et que tout p-groupe fini d'ordre strictement inférieure à $|G| = p^n$ est nilpotent. Comme $|G| = p^n$
alors

$$Z(G) = 1$$

donc

$$|G \setminus Z(G)| < |G|$$

par l'hypothèse de récurrence $G \setminus Z(G)$ est nilpotent et admet la série centrale

$$\sum : Z(G) \setminus Z(G) = G_1 \setminus Z(G) \lhd G_2\, Z(G) \lhd .... \lhd G_c \setminus Z(G) = G \setminus Z(G)$$

donc G admet la série centrale

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_c = G$$

ce qui implique que G est nilpotent.

1.10 Groupe résoluble

Définition 1.18. *On dit qu'un groupe G est résoluble s'il admet une série abélienne fini de sous-groupe normaux i,e s'il existe*

$$\sum : 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$$

tel que G_{i+1}/G_i est un groupe abélien pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

Définition 1.19. *Soit G un groupe, pour tous $x, y \in G$, on appelle commutateur de x par y l'élément $x^{-1}y^{-1}xy$ qu'on note $[x, y]$. Le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs dans G est appelé le sous-groupe dérivé de G. on le note G' ou $[G, G]$*

$$G' = \langle \{[x, y] : \ x, y \in G\} \rangle.$$

La proposition suivante donne quelques propriétés du sous-groupe dérivé $G^{'}$ d'un groupe G.

Proposition 1.4. *Soit G un groupe on a :*

1) *G' est caractéristique dans G, c'est-à-dire $f(G') \leq G'$ pour tout automorphisme f de G on note $G' \subset G$. En particulier, $G' \lhd G$.*
2) *Pour tout $N \lhd G$, G/N est abélien si, et seulement si, $G' \leq N$. En particulier, G/G' est abélien.*

Définition 1.20. *Soit G un groupe, on définit par récurrence sur i des sous-groupes $G^{(i)}$ caractéristiques dans G comme suit :*

$$G^{(0)} = G$$

$$G^{(1)} = G', ..., G^{(i+1)} = (G^{(i)})' = [G^{(i)}, G^{(i)}].$$

on a

$$G = G^{(0)} \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G^{(2)} \triangleleft ... \triangleleft G^{(i)} \triangleleft G^{(i+1)} \triangleleft ...$$

est une chaine descendante de sous-groupes
s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(n)} = 1$
alors on a

$$\sum_d : 1 = G^{(n)} \triangleleft G^{(n-1)} \triangleleft ... \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G^{(0)} = G$$

est une série du groupe G dont les quotients $G^{(i)}/(G^{(i)})'$ sont des groupes abéliens. D'où $\sum_d$ est une série abélienne et G est donc résoluble. Cette série $\sum_d$ est appelée la série dérivée de G.

On vient de montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(n)} = 1$, alors G est résoluble. Dans ce qui suit, on va démontrer que la réciproque est vraie aussi. Donnons d'abord quelques propriétés des sous-groupes $G^{(i)}$.

Théorème 1.15. *Soit G un groupe, on a :*

1) *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $G^{(i)} \subset G$.*
2) *Si G est résoluble et si :*
$$\sum : 1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft ... \triangleleft G_n = G$$
est une série abélienne de G
alors
$$G^{(i)} \leq G_{n-i}$$
pour tout $0 \leq i \leq n$. En particulier
$$G^{(n)} = 1.$$

Corollaire 1.5. *Un groupe G est résoluble si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(n)} = 1$. De plus la série dérivée de G est la plus courte série abélienne de G (de longueur minimale).*

Théorème 1.16. *Soit G un groupe résoluble, alors*

(i) *Si $H \leq G$, alors H résoluble.*
(ii) *Si $N \triangleleft G$, alors G/N est résoluble.*
(iii) *Si $N \triangleleft G$, si N et G/N sont résoluble alors G est résoluble.*

Lemme 1.

(i) *Soient G un groupe, H et K deux sous groupes normaux et résolubles de G alors HK est un sous-groupe normale et résoluble de G.*
(ii) *Le produit direct de deux groupes résoluble est résoluble.*

Exemple 1.5. *Si G est un groupe abélien, alors G résoluble car*

$$\sum : 1 \lhd G$$

est une série abélienne de G .
Notons que les groupes résolubles de longueur dérivée au plus égale à 1 sont exactement les groupes abéliens et les groupes résolubles de longueur dérivée au plus à 2 sont appelés les groupes métabéliens.

1.11 Théorème de lagrange

Théorème 1.17. *Pour un groupe G fini et pour tout sous groupe H de G le Cardinal de H divise le Cardinal (encore appelé ordre) de G*

$$Card\ (H)/Card\ (G)$$

le quotient du cardinal de G par le Cardinal de H s'appelle l'indice de H dans G et il est noté $[G : H]$

$$Card(G) = Card(H)[G : H]$$

si H *est un sous-groupe normal de* G*,* $[G : H]$ *est aussi le cardinal du groupe quotient* G/H

1.12 Théorèmes de Sylow

Définition 1.21. *Soient* G *un groupe fini et* p *un nombre premier divisant* $|G|$*, si* $|G| = mp^k$*, où* $m, k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* p *ne divise pas* m*, alors d'après le théorème de Lagrange l'ordre de tout* p*-sous-groupe de* G *ne peut excéder* p^k*. Tout* p*-sous-groupe d'ordre maximal* p^k *est appelé un* p*-sous-groupe de Sylow de* G*.*

Théorème 1.18. *Si* G *est un groupe d'ordre* mp^k*, où* $m, k \in \mathbb{N}^*$ *et* p *est un nombre premier ne divisant pas* m*, alors* G *possède au moins un* p*-sous-groupe de Sylow, c'est-à-dire un sous-groupe d'ordre* p^k*.*

Théorème 1.19. *Si* G *est un groupe d'ordre* mp^k*, où* $m, k \in \mathbb{N}^*$ *et* p *est un nombre premier ne divisant pas* m*, alors tout* p*-sous-groupe de* G *est contenu dans un* p*-sous-groupe de Sylow de* G*.*

Théorème 1.20. *Si* G *est un groupe d'ordre* mp^k*, où* $m, k \in \mathbb{N}^*$ *et* p *est un nombre premier ne divisant pas* m*, alors les* p*-sous-groupes de Sylow de* G *sont deux à deux conjugués, si* n_p *est leur nombre, alors*

$$n_p = |G : N_G(P)|$$

et

$$n_p \equiv 1(p)$$

où P *est un* p*-sous-groupe de Sylow de* G*.*

Corollaire 1.6. *Soient G un groupe d'ordre mp^k, où $m, k \in \mathbb{N}^*$, p un nombre premier ne divisant pas m et P un p-sous-groupe de Sylow de G. On a :*

(i) n_p divise $\mid G : P \mid$.
(ii) $n_p = 1$ si, et seulenemt si, $P \lhd G$.

Théorème 1.21. *Soit G un groupe d'ordre $n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et r, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. Si, pour tout $1 \leq i \leq r$, G n'admet qu'un seul sous-groupe de Sylow P_i, alors*

$$G \simeq P_1...P_r.$$

Exemple 1.6. *Etat donné G un groupe simple d'ordre 132. Je cherche n_3 le nombre de 3-sous-groupes de Sylow de G.*
En appliquant le théorème de Sylow avec
$132 =\ 2^2.3.11$ *on trouve que :*

$$n_3 \equiv\ 1\ mod\ 3$$

et

$$n_3 \mid 2^2.11$$

donc

$$n_3 \in \{1,\ 4,\ 22\}$$

je sais que $n_3 \neq 1$ par contre je ne sais pas du tout choisir entre 4 et 22. J'ai tendance à penser que c'est 22 car l'ordre du 3-Sylow est relativement petit.

Chapitre 2

Une autre caractérisation de la nilpotence des groupes finis

Introduction

Dans ce chapitre, l'un des sujets importants que nous discutions dans cette étude est celui de quelques critères de nilpotence des groupes finis. On commencera par donner des critères classiques très connus de la nilpotence des groupes finis tel que ; un groupe fini est nilpotent si et seulement si tout sous-groupes est sous-normaux. Ensuite, on énoncera un autre critère moins connu que les précédent et qui est du à Baumslag et Wiegold [1]. Et enfin on exposera et on donnera es démonstrations détaillées es résultats de [7] concernant un autre critère de nilpotence des groupes finis.

2.1 Quelque critères de nilpotence des groupes finis

2.1.1 Premier critère

Dans cette sous-section, nous allons exposer un résultat classique et très connu sur la nilpotence des groupes finis.

Théorème 2.1.1. *Si G est un groupe fini, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) *G est nilpotent*
2) *Tout sous-groupe de G est sous-normal*
3) *G vérifie la condition du normalisateur*
4) *Tout sous-groupe maximal dans G est normal*
5) *G est produit direct de ses sous-groupes de Sylow*

Remarque 2.1. *Si G est un groupe nilpotent (pas nécessairement fini) alors on a les propriétés suivantes*

1) *Tout sous-groupe de G est sous-normal*
2) *G vérifie la condition du normalisateur*
3) *Tout sous-groupe maximal dans G est normal*

2.1.2 Deuxième critère

Dans cette sous-section on va voir un deuxième critère de nilpotence des groupes finis

Théorème 2.1. *Soit la propriété suivante dans un groupe fini G :*

$$(P) : \text{Si } x, y \in G \text{ tels que } (o(x), o(y)) = 1 \text{ alors } o(xy) = o(x)o(y)$$

Donc G est nilpotent si et seulement si G vérifie (P)

Remarque 2.2. *Il est facile de voir que si G est nilpotent et fini, alors G vérifie (P)*

2.2 Un autre critère de nilpotence des groupes finis

2.2.1 Quelques définitions et théorèmes que nous utiliserons dans ce chapitre

Conjecture 1. *(de Zassenhaus)*
Un groupe G est d'ordre une puissance d'un nombre premier, si $N_G(P) = P$ pour tous p-sous-groupe de Sylow P de G et pour tout $P \in \Pi(G)$.

Définition 2.1. *Soit p un nombre premier divisant $|G|$, $O^P(G)$ est égal à l'intersection de tous les sous-groupes normaux N tel que G/N soit un p-groupe, donc $G/O^P(G)$ est un p-groupe et $O^P(G)$ est le plus petit sous-groupe normal dans G tel que $G/O^P(G)$ soit un p-groupe.*

Théorème 2.2. *(de Thompson)*
Soit $p \geq 5$ un nombre premier et soit P un p-sous-groupe de Sylow d'un groupe fini G, si $N_G(P)/C_G(P)$ est un p-groupe alors $O^p(G) < G$.

Définition 2.2. *Un groupe G est dit caractéristiquement simple, s'il n'admet pas de sous-groupe caractéristique propre et non-trivial.*

Proposition 2.1. *Si un groupe G est caractéristiquement simple et ayant un sous-groupe normal minimal H, alors H est simple et $G = \Pi H_i$ où chaque H_i est isomorphe à H.*

2.2.2 Un autre critère de nilpotence des groupes finis

Dans cette sous-section, on va énoncer et démontrer un théorème donnant un nouveau critère de nilpotence des groupes finis.

Théorème 2.3. *Un groupe fini G est nilpotent si, et seulement si, il existe un sous-groupe normal K tel que G/K soit nilpotent et $N_G(P)/C_G(P)$ soit un p-groupe pour chaque $p \in \Pi(K)$, où P est un p-sous-groupe de Sylow de K.*

Démonstration 1.
La nécessité *:*
Si G est nilpotent, alors on peut choisir $K = 1$*, il est facile de voir que*

$$G/1 \simeq G$$

est nilpotent et

$$N_G(1)/C_G(1) = G/G \simeq 1$$

pour le sous-groupe de Sylow 1 de G.
La suffisance :
Réciproquement, supposons à contraire que le théorème soit faux et choisissons G comme contre-exemple tel que $|G| + |K|$ *soit minimal, nous divisons la démonstration en six étapes comme suit :*

1. *Il existe un unique sous-groupe normal minimal N dans G tel que* $N \leq K$ *et* G/N *soit nilpotent.*

En fait, on a $K \neq 1$ *donc on peut trouver un sous-groupe normal minimal N de G, contenu dans K.*
En effet, si on considère l'ensemble

$$G = \{H \leq K \;\mid\; H \neq 1 \text{ et } H \lhd G\}$$

alors

$$K \neq 1 \text{ et } K \lhd G$$

donc

$$K \in G \neq \emptyset$$

d'où G admet un élément minimal (par rapport à l'inclusion N), car G est fini donc

$$1 \neq N \leq K$$

et N est normal minimal dans G, considérons

$$\bar{G} = G/N$$

et montrons que $(G/N, K/N)$ *satisfait les hypothèses sur (G, K).*

- ***(a)*** *Il existe* $K/N \trianglelefteq G/N$ *tel que* $(G/N)/(K/N) \simeq G/K$ *soit nilpotent.*

- ***(b)*** $p \in \Pi(K/N) \subseteq \Pi(K)$ *et* $\bar{P}$ *un p-sous-groupe de Sylow de* $\bar{K} = G/N$*, on peut supposer que* $\bar{P} = PN/N$ *où P est un p-sous-groupe de Sylow de K soit*
$$N_{\bar{G}}(\bar{P}) = L/N$$
pour tout : $\ell N \in L/N$
on a
$$(PN/N)^{\ell N} = PN/N$$

donc

$$(\ell N)^{-1}PN/N(\ell N) = PN/N \Longleftrightarrow \{(\ell^{-1}N)(xN)(\ell N) \mid x \in P\} = PN/N$$

$$\Longleftrightarrow \{(\ell^{-1}x\ell)N \mid x \in P\} = PN/N$$

$$\Longleftrightarrow \{x^{\ell}N \mid x^{\ell} \in P^{\ell}\} = PN/N$$

$$\Longleftrightarrow P^{\ell}N/N = PN/N$$

$$\Longleftrightarrow P^{\ell}N = PN.$$

comme P, $P^{\ell} \leq PN \leqslant K$ *et comme P est un p-sous-groupe de Sylow de K, P et* P^{ℓ} *sont deux p-sous-groupes de Sylow de PN.*

d'après le 3$^{\text{ème}}$ *théorème de Sylow il existe* $x \in P$ *et* $a \in N$ *tels que*

$$P^{\ell} = P^{xa} = (P^{x})^{a} = P^{a}$$

d'où

$$(P^{\ell})^{a^{-1}} = (P^{a})^{a^{-1}}$$

donc

$$P^{\ell a^{-1}} = P$$

d'où

$$\ell a^{-1} \in N_G(P)$$

donc

$$\exists y \in N_G(P)$$

tels que

$$\ell a^{-1} = y$$

donc

$$\ell = ya \in N_G(P)N$$

il en résulte que

$$L \leq N_G(P)N$$

d'autre part notons que

$$N_G(P)N/N \leq L/N = N_{G/N}(PN/N)$$

car si $yN \in N_G(P)N/N$*, donc*

$$y \in N_G(P)$$

alors

$$\begin{aligned}(PN/N)^{yN} &= (y^{-1}N)PN/N(yN)\\ &= P^{y}N/N\\ &= PN/N\end{aligned}$$

d'où

$$N_G(P)N \leq L, \text{ donc } L = N_G(P)N$$

d'où

$$L/N = N_G(P)N/N$$

il est clair que

$$C_{\bar{G}}(\bar{P}) \geq C_G(P)N/N$$

par les théorèmes d'isomorphisme standard on a :

$$N_{\bar{G}}(\bar{P})/C_{\bar{G}}(\bar{P}) = N_{G/N}(PN/N)/C_{G/N}(PN/N)$$

$$= N_G(P)N/N/C_{G/N}(PN/N)$$

$$\simeq (N_G(P)N/N)/C_G(P)N/N/(C_{G/N}(PN/N))/C_G(P)N/N$$

d'où

$$N_G(P)N/N/C_G(P)N/N \simeq N_G(P)N/C_G(P)N$$

$$N_G(P)(C_G(P)N)/C_G(P)N \simeq N_G(P)/N_G(P) \cap C_G(P)N$$

$$\simeq N_G(P)/C_G(P)/N_G(P) \cap C_G(P)N/C_G(P)$$

est un p-groupe car il est isomorphe à un groupe quotient de $N_G(P)/C_G(P)$ *et donc* $(G/N, K/N)$ *satisfait les hypothèses sur (G,K)*
on a

$$|G/N| + |K/N| < |G| + |K|$$

donc G/N est nilpotent par la minimalité de G
s'il existe un autre sous-groupe normal minimal N_1 *de G tel que* $N_1 \leq K$*, alors* G/N *et* G/N_1 *sont tous deux nilpotents et donc*

$$G \simeq G/N \cap N_1$$

est nilpotent aussi, ce qui est contradictoire.

2. *G= K et N n'est pas résoluble*

(a) *Par l'absurde, supposons que K soit un sous-groupe propre dans G, le couple (K, K) vérifie les hypothèses de (G, K) car on a*

$$K \lhd K \text{ et } K/K = 1$$

est trivial donc K/K est nilpotent et

$$N_K(P) = \{x \in K|\ x^{-1}Px = \ P\} \subseteq \{x \in G|\ x^{-1}Px = P\} = \ N_G(P)$$

donc

$$N_K(P) \subseteq N_G(P) \cap K$$

si

$$x \in N_G(P) \cap K$$

alors

$$x \in N_G(P) \text{ et } x \in K;\ x \in N_K(P)$$

d'où

$$N_G(P) \cap K \subseteq N_K(P)$$

on en déduit que

$$N_K(P) = N_G(P) \cap K$$

de même on a :

$$C_K(P) = \{x \in K : \forall a \in P,\ xa = ax\} \subseteq \{x \in G :\ \forall a \in P,\ xa = ax\} = C_G(P)$$

donc

$$C_K(P) \subseteq C_G(P) \cap K$$

si

$$x \in C_G(P) \cap K$$

alors

$$x \in C_G(P) \quad \text{et} \quad x \in K$$

donc

$$x \in C_K(P)$$

d'où

$$C_G(P) \cap K \subseteq C_K(P)$$

on en déduit que

$$C_K(P) = C_G(P) \cap K = C_G(P) \cap (N_G(P) \cap K)$$

d'où

$$N_K(P)/C_K(P) = N_G(P) \cap K/C_G(P) \cap (N_G(P) \cap K)$$

$$\simeq C_G(P)(N_G(P) \cap K)/C_G(P)/C_G(P) \leq N_G(P)/C_G(P)$$

qui est un p-groupe pour chaque p-sous-groupe de Sylow P de K de plus, comme

$$|K| < |G|$$

on a

$$|K| + |K| < |G| + |K|$$

donc K est nilpotent par la minimalité de G, il s'ensuit que

$$K \simeq P_1 ... P_r$$

est produit direct de ses sous-groupes de Sylow et que $P_i \lhd G$
pour tout : $1 \leq i \leq r$ *montrons que le couple* $(G/P_i, K/P_i)$ *vérifie les hypothèses du couple (G, K) est nilpotent*
en effet, on a

$$K/P_i \lhd G/P_i$$

et

$$(G/P_i)/(K/P_i) \simeq G/K$$

est nilpotent, notons que les sous-groupes de Sylow de K/P_i *sont* $P_jP_i/P_i \simeq P_j$ *et sont normaux dans* G/P_i *où* $1 \leq j \neq i \leq r$
d'où

$$N_{G/P_i}(P_jP_i/P_i) = G/P_i$$

on a aussi

$$xP_i \in C_{G/P_i}(P_jP_i/P_i) \Longleftrightarrow x \in G, xP_ix_jP_i = x_jP_ixP_i$$

$$\Longleftrightarrow [x, x_j]P_i = P_i$$

$$\Longleftrightarrow [x, x_j] \in P_i$$

or

$$[x, x_j] \in P_j \lhd G$$

donc

$$[x, x_j] \in P_i \cap P_j = 1, \text{ d'où } \ x \in C_G(P_j)$$

on en déduit que

$$C_{G/P_i}(P_jP_i/P_i) = C_G(P_j)P_i/P_i$$

par suit, on obtient

$$N_{G/P_i}(P_jP_i/P_i)/C_{G/P_i}(P_jP_i/P_i) = (G/P_i)/(C_G(P_j)P_i/P_i)$$

$$= (N_G(P_j)/P_i)/(C_G(P_j/P_i)$$

$$\simeq N_G(P_j)/C_G(P_j)$$

qui est un p_j*-groupe, comme*

$$|G/P_i| + |K/P_i| < |G| + |K|$$

on en déduit que G/P_i *est nilpotent par la minimalité de G par suite si* $1 \leq i \neq j \leq r$ *alors* G/P_i *et* G/P_j *sont nilpotent donc*

$$G/P_i \cap P_j \simeq G$$

est nilpotent aussi, ce qui est contradictoire, il en résulte que

$$i{=}\ j,\ r{=}\ 1 \text{ et } K{=}\ P$$

est un p-groupe

soit Q un q-sous-groupe de Sylow de G où $q \neq p$ *par hypothèse*

$$G = N_G(K) \text{ et } N_G(K)/C_G(K)$$

est un p-groupe donc $G/C_G(K)$ *est un p-groupe d'où si* $x \in G$ *alors il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$x^{p^n} \in C_G(K)$$

Soit $x \in Q$ *donc il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $x^{q^m} = 1$ *comme* $q \neq p$ *on a* $(p^n, q^m) = 1$ *donc il existe* $u, v \in \mathbb{Z}$ *tels que*

$$p^n u + q^m v = 1$$

donc

$$x = x^{p^n u + q^m v} = (x^{p^n})^u (x^{q^m})^v = (x^{p^n})^u \in C_G(K)$$

donc

$$Q \leq C_G(K) \text{ d'où } [K, Q] = 1 \text{ comme } N \leq K \text{ on obtient } [N, Q] = 1$$

comme N est un p-sous-groupe de G, il existe un p-sous-groupe de Sylow P_1 *de G tel que* $N \leq P_1$ *puisque* $N \lhd G$
on obtient

$$N \cap Z(P_1) \neq 1$$

car P_1 *est nilpotent*
montrons que $N \cap Z(P_1) \leq Z(G)$ *on a G/N est nilpotent*
donc

$$G/N \simeq P_1/NP_2N/N...P_rN/N$$

d'où pour tout : $x \in G$

$$xN = x_1N.x_2N...x_rN = (x_1x_2...x_r)N$$

donc

$$x = x_1.x_2...x_r \text{ où } x_i \in P_i \text{ et } a \in N, \text{ de plus } [N, Q] = 1$$

pour tout q-sous-groupe de Sylow de G où $q \neq p$ donc

$$[N, P_i] = 1$$

pour tout $2 \leq i \leq r$, on en déduit que si $z \in N \cap Z(P_1)$, alors $z \in N$ donc

$$[z, x_i] = 1$$

pour tout : $2 \leq i \leq r$ et $z \in Z(P_1)$
donc

$$[z, x_1] = 1 \text{ et } [z, a] = 1 \text{ d'où } [z, x] = 1$$

pour tout : $x \in G$
donc

$$N \cap Z(P_1) \leq Z(G) \text{ comme } N \cap Z(P_1) \lhd G$$

on obtient que

$$N \cap Z(P_1) = N$$

car N est normal minimal dans G(1), par suit

$$N \leq Z(G)$$

donc G est nilpotent ce qui est contradictoire par conséquent G= K.

(b) *Par l'absurde, supposons que N soit résoluble on a déduit que G est résoluble car G/N est nilpotent par (1) d'où N en tant que sous-groupe normal minimal de G est un p-sous-groupe abélien élémentaire d'où si p est un p-sous-groupe de Sylow de K= G alors il existe $x \in G$ tel que $N \leq P^x$ ($2^{\text{ème}}$ Théorème de Sylow) donc*

$$N^{x^{-1}} \leq P^{x^{-1}} = P, \text{ d'où } N \leq P$$

on en déduit que P/N est un p-sous-groupe de Sylow de G/N qui est nilpotent donc

$$P/N \lhd G/N \text{ d'où } P \lhd G \text{ puisque } G= K$$

par hypothèse on a

$$N_G(P)/C_G(P) = G/C_G(P)$$

est un p-groupe d'où pour tout $g \in G$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^{p^n} \in C_G(P)$

en particulier si $x \in Q$ alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que

$$x^{p^n} \in C_G(P) \text{ et } x^{p^m} = 1; \ (o(x) = q^m)$$

pour tout q-sous-groupe de Sylow Q de G où $p \neq q$ on a $(p^n, q^m) = 1$ donc il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$p^n u + q^m v = 1$$

donc

$$x = x^{p^n u + q^m v} = (x^{p^n})^u (x^{q^m})^v = (x^{p^n})^u \in C_G(P) \text{ d'où } Q \leqslant C_G(P)$$

montrons que N *est normal minimal dans* P *on a* $N \lhd P$ *soit* $1 \neq L \leq N$ *tel que* $L \lhd P$ *montrons que* $L \lhd G$ *on a*

$$Q \leq C_G(L) \leq N_G(L)$$

et

$$P \leq N_G(L)$$

donc

$$Q, P \leq N_G(L) \text{ d'où } G \leq N_G(L)$$

donc

$$G = N_G(L) \text{ et } L \lhd G$$

par suit L= N par la minimalité de N et donc N est normal minimal dans P comme P est nilpotent on en déduit que

$$N \leq Z(P)$$

donc

$$N \leq C_G(P) \text{ comme } Q \leq C_G(P)$$

on a

$$P \leq C_G(Q) \text{ d'où } N \leq C_G(Q)$$

d'autre part on a

$$G = \langle P,\ Q_1,\ Q_2,\ ...,\ Q_k \rangle$$

donc

$$N \leq C_G(P) \cap C_G(Q_1) \cap ... \cap C_G(Q_k) = C_G(G) = Z(G)$$

d'où

$$N \leq Z(G) \quad \text{et} \quad G/Z(G) \simeq (G/N)/(Z(G)/N)$$

est nilpotent donc G est nilpotent, contradiction par conséquent N n'est pas résoluble.

.

3. *N est un groupe simple non abélien*

si N n'est caractéristique ment simple alors il existe un sous-groupe $M \leq G$ *tel que*

$$1 \neq M \leq N \text{ et } M \subset N$$

comme

$$M \subset N \lhd G$$

on a $M \lhd G$ *ce qui contredit la minimalité de N(1) d'où N est caractéristique ment simple et donc N est un produit direct de groupes simples non abéliens isomorphes* $N_1 N_2 ... N_m$ *maintenant G opère transitivement sur l'ensemble*

$$\Omega = \{N_1,\ N_2,\ ...,\ N_m\}$$

En effet l'application

$$* \ :\ G\Omega \ \longmapsto\ \Omega$$

$$(g, N_i)\ \longmapsto\ g * N_i\ =\ gN_i g^{-1}$$

où

$$N =\ N_1 N_2 ... N_m, N_i \lhd N$$

et

$$N_i \ntriangleleft G,\ N = gNg^{-1} = g(N_1 ... N_m)g^{-1} = gN_1 g^{-1} ... gN_m g^{-1}$$

L'application $(*)$ *vérifie les conditions :*

(a) *Pour tous* $g_1,\ g_2 \in G$ *et* $N_i \in \Omega$ *on a :*

$$\begin{aligned}(g_1 g_2) * N_i &= (g_1 g_2) N_i (g_1 g_2)^{-1}\\ &= (g_1 g_2) N_i (g_2^{-1} g_1^{-1})\\ &= g_1 (g_2 N_i g_2^{-1}) g_1^{-1}\\ &= g_1 * (g_2 N_i g_2^{-1})\\ &= g_1 * (g_2 * N_i)\end{aligned}$$

(b) *Pour tout* $N_i \in \Omega$ *on a*

$$1 * N_i = 1N_i 1 = N_i$$

on a

$$N =\ N_1 ... N_m \text{ où } N_i$$

est simple donc chaque N_i *est indécomposable d'où (1) est une décomposition de Remak du groupe N, comme N est un groupe simple non abélien on a*

$$N = N' \text{ et } Z(N) = 1$$

on en déduit que N n'admet qu'une seule décomposition de Remak, or $N \lhd G$ donc

$$N = N_1^g N_2^g ... N_m^g$$

est une décomposition de Remak pour tout $g \in G$ d'où

$$N_i^g = N_j \text{ où } 1 \leq j \leq m$$

pour tout : $1 \leq i \leq m$
donc

$$\{N_i^G\} = \{N_1, N_2, ..., N_m\} = \Omega$$

Comme on a :

$$Orb_G(N_i) = \{g * N_i : g \in G\} = \{gN_ig^{-1} : g \in G\} = \{N_1, ..., N_m\} = \Omega$$

On en déduit que $(*)$ *est transitive, on a aussi :*

$$Stab_G(N_i) = \{g \in G : g * N_i = N_i\} = \{g \in G : gN_ig^{-1} = N_i\} = N_G(N_i) \geq N$$

soit

$$\begin{gathered} \phi : G \to S(\Omega) \simeq S_m \\ g \longmapsto \phi_g : \Omega \to \Omega \\ N_i \longmapsto \phi_g(N_i) = gN_ig^{-1} = N_j \end{gathered}$$

.
la représentation associée à l'opération $(*)$ *et soit*

$$T = \ker \phi = \cap_{1 \leq i \leq m} \, Stab_G(N_i) = \cap_{1 \leq i \leq \, m} \, N_G(N_i)$$

.

on a $N \leq T \lhd G$, prouvons que T= G si P est un p-sous-groupe de Sylow de G et comme

$$N \lhd G \text{ alors } NP/N$$

est un p-sous-groupe de Sylow de G/N d'où

$$NP/N \lhd G/N$$

car G/N est nilpotent donc

$$NP \lhd G$$

il résulte de l'argument de Frattini que

$$G = N_G(P)NP = N_G(P)N$$

soient $p \in \Pi(N)$ et soit P un sous-groupe de Sylow de G donc $P \cap N$ est un *p-sous-groupe de Sylow de N comme*

$$N = N_1 N_2 ... N_m$$

on a

$$N \cap P = (N_1 \cap P)(N_2 \cap P)...(N_m \cap P) = P_1 P_2 ... P_m$$

où

$$P_i = P \cap N_i = P \cap N \cap N_i$$

est un p-sous-groupe de Sylow de N_i *D'après* ([6], $Theorem 13.2.5$), *pour tout* $p \neq q \in \Pi(G)$, *il existe un q-sous-groupe de Sylow* Q_1 *de* $N_G(P)$ *il existe un q-sous-groupe de Sylow* Q_2 *de* N *tels que* $Q = Q_1 Q_2$ *soit un q-sous-groupe de Sylow de* G *comme* $N_G(P)/C_G(P)$ *est un p-groupe et* $P \lhd N_G(P)$, *on a pour tout* $g \in G$, *il existe* $n \in N$ *tel que* $g^{p^n} \in C_G(P)$, *en particulier si* $x \in Q_1$ *alors il existe*

$$n, m \in N \text{ tels que } x^{p^n} \in C_G(P) \text{ et } x^{q^m} = 1 \ (o(x) = q^m)$$

on a

$$(p^n, q^m) = 1$$

donc il existe

$$u, v \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p^n u + q^m v = 1$$

d'où

$$x = x^{p^n u + q^m v} = (x^{p^n})^u (x^{q^m})^v = (x^{p^n})^u \in C_G(P)$$

et

$$Q_1 \leq C_G(P)$$

donc

$$[Q_1, P] = 1$$

en particulier

$$[Q_1, P_i] = 1 \text{ car } P_i \leq P$$

Pour tout $x \in Q_1$ *comme* Q_1 *est un q-sous-groupe de* $N_G(P)$, *on a*

$$P_i^{Q_1} = P_i \text{ et } P_i^x = P_i$$

donc

$$P_i = P_i \cap P_i^x \leq N_i \cap N_i^x$$

comme

$$N_i \lhd N \quad \text{et} \quad N_i^x \lhd N$$

on a

$$1 \neq N_i \cap N_i^x \lhd N_i$$

qui est simple donc

$$N_i \cap N_i^x = N_i$$

comme

$$1 \neq N_i \lhd N_i^x$$

qui est simple donc

$$N_i = N_i^x \quad d'où \quad x \in N_G(N_i)$$

donc

$$Q_1 \leq N_G(N_i) \text{ pour tout } i= 1,..., m$$

on en déduit que

$$Q_1 \leq \cap_{1 \leq i \leq m} N_G(N_i) = \ker \phi = T$$

comme Q_2 est un q-sous-groupe de Sylow de N et N est un sous-groupe normal

minimal de G et T est un sous-groupe normal de G, donc

$$Q_2 \leq N \leq T$$

et donc

$$Q = Q_1 Q_2 \leq T$$

Ceci est vrai pour tout q-sous-groupe de Sylow Q de G avec $q \neq p$ et $p \in \Pi(N)$ donc

T contient un q-sous-groupe de Sylow de G pour chaque nombre premier de $\Pi(G)/p$

Comme tout groupe d'ordre $p^\alpha q^\beta$ est résoluble (Théorème de Burnside [5, Theorem 8.5.3]) et comme N

n'est pas résoluble alors $|\Pi(N)| > 2$

Il existe un diviseur premier r de $|N|$ tel que $p \neq r$, le mème argument montre

que T contient un p-sous-groupe de Sylow P de G donc T contient au moins

un q-sous-groupe de Sylow pour chaque $q \in \Pi(G)$, donc T= G cela signifie que N_i

est un sous-groupe normal de G et (1) implique que m= 1 et $N = N_1$

est un groupe simple.

.

4. *G/N peut-ètre plongé dans $Out(N)$*

$C_G(N)$ est un sous-groupe normal de G, ne contenant pas N, en effet si $N \leq C_G(N)$, alors N serait abélien ce qui est contradictoire d'après (2) soit l'ensemble

$$\varphi = \{H \leq C_G(N): \ H \neq 1 \ et \ H \lhd G\}$$

si $C_G(N) \neq 1$ alors

$$\varphi \neq \emptyset \ car \ C_G(N) \in \varphi$$

comme φ est fini, il admet un élément minimal M de G donc M est un sous-groupe normal minimal de G, d'après (1) N est l'unique sous-groupe normal minimal de G donc

$$N = M \ d'\text{où} \ N \leq C_G(N)$$

ce qui est contradictoire on en déduit que $C_G(N) = 1$ maintenant on obtient que

$$G \simeq G/1 = N_G(N)/C_G(N) \simeq \Gamma \leq Aut(N)$$

et comme

$$Int(N) \simeq N/Z(N) = N/1 \simeq N$$

car N est simple et non-abélien on en déduit que

$$G/N \simeq A \leq Aut(N)/Int(N).$$
$$= Out(N)$$

5. *Soit p le plus grand diviseur premier de $|N|$, montrons que les p-sous-groupes de Sylow de G sont contenus dans N puisque p est le plus grand diviseur premier de $|N|$ et simple non abélien d'après [2, Proposition], p ne diviseur pas $|Aut(N)|$ d'après [Proposition (2)], donc p ne divise pas $|Out(N)|$, d'où d'après [Proposition (4)] p ne divise pas $|G/N|$ comme*

$$|G| = |N||G/N| = mp^k \ où \ (p, m) = 1$$

on a

$$p|p^k| \ |G/N| \ donc \ |p^k| \ |N|$$

comme P est un p-sous-groupe de Sylow de G, $P \cap N$ est un p-sous-groupe de Sylow de N donc

$$|P \cap N| = p^k = |P| \text{ comme } P \cap N \leq P$$

on obtient que

$$P \cap N = P \text{ donc } P \leq N$$

on en déduit que P est un p-sous-

groupe de Sylow de N si seulement si P est un p-sous-groupe de Sylow de G.

6. *Contradiction finale*

Puisque N est un groupe simple non-abélien d'après le théorème de Burnside le plus grand diviseur premier de $|N|$ n'est pas inférieur à 5 comme

$$N_N(P)/C_N(P) = (N \cap N_G(P))/(N \cap C_G(P))$$

$$= (N \cap N_G(P))/((N \cap N_G(P)) \cap C_G(P)$$

$$\simeq (C_G(P)(N \cap N_G(P))/C_G(P) \leq N_G(P)/C_G(P)$$

est un p-groupe donc

$$N_N(P)/C_N(P)$$

est un p-groupe aussi pour tout p-sous-groupe de

Sylow P de N, il résulte du Théorème de Thompson que N contient un sous-groupe $O^p(N)$ propre non-trivial et normal dans G ce que contredit (1) ce qui achève la démonstration du théorème.

Le théorème précédent admet la conséquence suivante

Corollaire 2.1. *Soit G un groupe fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes*

a) *G est nilpotent.*

b) *Pour tout sous-groupe K de G et pour tout $p \in \Pi(K)$*

$$N_G(P)/C_G(P)$$

est un p-groupe où P est un p-sous-groupe de Sylow de K.

c) *$N_G(P)/C_G(P)$ est un p-groupe pour tout $p \in \Pi(G)$ où P est un p-sous-groupe de Sylow de G.*

d) *$N_G(P)/C_G(P)$ est un p-groupe pour tout $p \in \Pi(G^{'})$ où P est un p-sous-groupe de Sylow de $G^{'}$.*

e) *$N_G(P)/C_G(P)$ est un p-groupe pour tout $p \in \Pi(K_\propto(G))$ où P est un p-sous-groupe de Sylow de $K_\propto(G)$, qui est le dernier terme de la série centrale inférieur de G donc c'est le résiduel nilpotent de G.*

Démonstration 2. *Supposons (1) soit satisfaite c'est à dire G est nilpotent donc*

$$G = P_1...P_r$$

où

$$|P_i| = p_i^{k_i} \text{ pour tout } \ 1 \leq i \leq r$$

d'où

$$|G| = p_1^{k_1}...p_r^{k_r} \text{ et si } \ i \neq j$$

alors

$$P_i \cap P_j = 1 \text{ et } \ [P_i, P_j] \leq P_i \cap P_j = 1$$

car

$$[P_i, P_j] = \langle [x_i, x_j] : \ x_i \in P_i, \ x_j \in P_j \rangle$$

et

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= \ x_i^{-1}x_j^{-1}x_ix_j \\ &= \ x_i^{-1}(x_j^{-1}x_ix_j) \\ &= \ (x_i^{-1}x_j^{-1}x_i)x_j \end{aligned}$$

et puisque

$$x_i^{-1} \in P_i; \ x_j^{-1}x_ix_j \in P_i \lhd G \quad \text{et}$$

$$(x_i^{-1}x_j^{-1}x_i) \in P_j \lhd G, \ x_j \in P_j$$

alors

$$[x_i, x_j] \in P_i \cap P_j = 1$$

donc

$$\forall x_i \in P_i,\ \forall x_j \in P_j :\ x_i x_j = x_j x_i$$

pour tout : $1 \leq i \neq j \leq r$ *il résulte que*

$$P_j \leq C_G(P_i) \quad et \quad P_j \leq N_G(P_i)$$

on a :

$$y \in N_G(P_i) \Leftrightarrow \forall x_i \in P_i :\ y^{-1} x_i y \in P_i$$

donc

$$N_G(P_i)/C_G(P_i) = G/P_1...P_{i-1}P_{i+1}...P_r C_{p_i}(P_i)$$

$$= P_1...P_{i-1}P_{i+1}...P_r P_i/P_1...P_{i-1}P_{i+1}...P_r Z(P_i)$$

Posons $\bar{P}_i = P_1...P_{i-1}P_{i+1}...P_r$ *donc*

$$N_G(P_i)/C_G(P_i) = \bar{P}_i P_i/\bar{P}_i Z(P_i) \simeq (\bar{P}_i P_i/\bar{P}_i)/(\bar{P}_i Z(P_i)/\bar{P}_i)$$

$$\simeq (P_i/\bar{P}_i \cap P_i)/(Z(P_i)/\bar{P}_i \cap Z(P_i)) \simeq P_i/Z(P_i)$$

Comme pour tout $i \neq j$ *on a*

$$P_j \leq C_G(P_i)$$

donc

$$P_1...P_{i-1}P_{i+1}...P_r \leq C_G(P_i)$$

d'où

$$\bar{P}_i \leq C_G(P_i)$$

et donc

$$N_G(P_i)/C_G(P_i) \simeq (N_G(P_i)/\bar{P}_i)/(C_G(P_i)/\bar{P}_i)$$

est un p_i*-groupe car*

$$N_G(P_i)/\bar{P}_i = G/\bar{P}_i \simeq P_i \ \text{ d'où } N_G(P_i)/C_G(P_i)$$

est un p_i*-groupe par suite (3) est satisfaite*
si G est nilpotent et si $K \leq G$ *alors K est nilpotent d'où (2) est vérifiée d'après l'implication précédente en particulier si*

$$K = G' \ \text{ ou } K = K_\infty(G)$$

on a (4) et (5) sont satisfaites, par suite la condition (1) implique les autres conditions

Réciproquement

- *Supposons (2), donc en prenant K= G on obtient que G/K trivial donc nilpotent et* $N_G(P)/C_G(P)$ *est un p-groupe pour tout p-sous-groupe de Sylow de K donc d'après Théorème 2.3, G est nilpotent d'où* $(2) \Rightarrow (1)$.
- *Supposons (3), donc il existe* $K = G \lhd G$ *tel que G/K soit trivial donc nilpotent et pour tout p-sous-groupe de Sylow P de K on a* $N_G(P)/C_G(P)$ *est un p-groupe d'où G est nilpotent d'après Théorème 2.3, par suite* $(3) \Rightarrow (1)$.
- *Supposons (4), comme* $G/G^{'}$ *est nilpotent, il suffit d'appliquer Théorème 2.3 pour* $K = G^{'}$ *pour en déduire que G est nilpotent d'où* $(4) \Rightarrow (1)$.
- *Supposons (5), comme* $G/K_{\propto}(G)$ *est nilpotent, il suffit d'appliquer Théorème 2.3 pour* $K = K_{\propto}(G)$ *pour en déduire que G est nilpotent d'où* $(5) \Rightarrow (1)$.

Bibliographie

[1] B. Baumslag and J. Wiegold. A Sufficient Condition for Nilpotency in a Finite Group, arXiv : 1411.2877v1 (2014), 2 pages

[2] M. Bianchi, A. Mauri and P. Hauck. On finite groups with nilpotent Sylow normalizers. Arch. Math 47 (1986), 193-196

[3] H. Heineken and I. J. Mohamed. A Group with Trivial Centre Satisfying the Normalizre Condition. Journal of Algebra 10 (1968), 368-376

[4] B. Huppert and N. Blackburn. Finite Groups, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982

[5] D. J. S. Robinson. A cours in the theory of groups, (Springer, Berlin, 1996)

[6] W. R. Scott. Groups Theory, Englewood Cliff, New Jersey, 1979

[7] Yanming Wang. A criterion for nilpotency of finite groups, Demonstratio Mathematica, 33 (2000), 261-264

الملخص

في هذه المذكرة سنعرض النتيجة التي توصل اليها يانمينغ وانغ حيث برهن من خلالها ان كل زمرة متهية G تكون عديمة القوة اذا وفقط اذا كانت توجد زمرة جزئية ناظمية K بحيث تكون الزمرة G/K عديمة القوة و $N_G(P)/C_G(P)$ تكون p زمرة لكل $p \in \Pi(K)$ حيث P هي زمرة سيلو الجزئية ل K.

الكلمات المفتاحية زمرة عديمة القوة، زمرة سيلو الجزئية

تصنيف AMS 2010 : $20D15$; $20D10$

Résumé

Dans ce mémoire, on a exposé le résultat de Yanming Wang affirmant que tout groupe fini G est nilpotent si et seulement s'il existe un sous-groupe normal K tel que G/K soit nilpotent et $N_G(P)/C_G(P)$ soit un p-groupe pour chaque $p \in \Pi(K)$, où P est un p-sous-groupe de Sylow de K.

Mots-Clés : Groupe nilpotent, sous-groupe de Sylow, p-groupe

Classification AMS 2010 : 20D15 ; 20D10

Abstract

In this memorandum, we present the result of Yanming Wang stating that every finite group is nilpotent if and only if there exists a normal subgroup K such that G/K is nilpotent and $N_G(P)/C_G(P)$ is a p-group for every $pinPi(K)$, where P is a Sylow p-subgroup of K.

Keywords : Nilpotent group, Sylow subgroup, p-group

AMS 2010 Classification : 20D15 ; 20D10