الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد البشير الإبراهيمي برج بوعريريج

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

UNIVERSITE MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI
BORDJ BOU ARRERIDJ

الاقتصاد القياسي المالي

الانحدار الخطي البسيط – الانحدار الخطي المتعدد – المشاكل القياسية

مطبوعة محكمة موجهة لطلبة السنة أولى ماستر

تخصص مالية وتجارة دولية

إعداد:

الدكتور: رحالي بلقاسم

قسم: علوم التسيير

2021/2020

سلسلة المطبوعات الجامعية المحكمة

مقدمــة

مقدمة:

تحتل الدراسات القياسية مكانة هامة وبارزة في التحليل الاقتصادي، على اعتبار أن الاقتصاد القياسي جزء مهم في علم الاقتصاد الحديث يهتم باستخدام الأساليب الكمية في التحليل الاقتصادي، من خلال بحثه في اختبار النظرية والفرضيات الاقتصادية وتقييمها باستخدام الأساليب الإحصائية.

تكمن الأهمية البالغة للاقتصاد القياسي في تزويد الباحثين والمهتمين بالقضايا الاقتصادية والاجتماعية بإمكانية تفسير الظواهر والتنبؤ بقيم المتغيرات مستقبلا، من خلال استخدام الأساليب الاحصائية في الاقتصاد، وما يترتب عليه من بحث في الوسائل الاحصائية وطرق الاستدلال الاحصائي، إلى جانب البحث في التحليلات الاحصائية الأخرى.

وانطلاقا من أهمية هذه المادة العلمية بالنسبة للباحثين في مختلف الميادين، فقد قمنا بتأليف هذه المطبوعة، والتي تضم في أجزائها مجموعة من الدروس والمحاضرات التي تعتبر من مبادئ الاقتصاد القياسي، والتي يحتاجها الباحث والمهتم بالاقتصاد القياسي، خاصة طلبة السنة أولى ماستر بصفة عامة، وتخصص مالية وتجارة دولية على وجه الخصوص، مع مراعاة برنامج المقياس وفق المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي. المطبوعة أيضا موجهة لكل الطلبة والباحثين المهتمين بمجال الاقتصاد القياسي بكل مستوياتهم.

تتضمن هذه المطبوعة ستة محاور مدعمة بأمثلة تطبيقية وسلاسل تمارين في نهاية كل محور، يتناول المحور الأول منها عموميات حول الاقتصاد القياسي، من خلال التطرق إلى مفهوم هذا العلم، علاقته بالعلوم الأخرى، تطبيقاته ونماذجه، ومنهج البحث فيه. أما المحور الثاني فيتطرق إلى أبسط أنواع النماذج القياسية، ألا وهو النموذج الخطي البسيط، من خلال تقديمه، تقدير معلماته، خصائص مقدراته، تقييمه والتنبؤ من خلاله. ويخصص المحور الثالث للنموذج الخطي المتعدد، أيضا من خلال تقديمه، تقدير معلماته، خصائص مقدراته، تقييمه والتنبؤ من خلاله. أما المحاور الموالية فهي مخصصة للمشاكل القياسية التي قد تعترض الباحث أثناء التقييم والاختبار القياسي للنماذج المقدرة، حيث يتناول المحور الرابع مشكلة التعدد الخطي، من خلال التعرف على طبيعتها، الكشف عنها وكيفية معالجتها. أما المحور الخامس فيتناول مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء، بالتطرق إلى طبيعة المشكلة، اختبارات الكشف عنها وكيفية التعامل معها، لنتطرق في المحور الأخير لمشكلة عدم ثبات التباين، وبنفس المنهجية السابقة سنتناول طبيعة المشكلة، الكشف عنها ومعالجتها. لتختم هذه المطبوعة بمجموعة من الجداول الاحصائية التي يحتاجها الباحث لتقييم النموذج القياسي، سواءا احصائيا أو قياسيا.

د. رحالي بلقاسم

المحور الأول:

مدخل إلى الاقتصاد القياسي

مقدمة:

مع التطورات الكبيرة التي عرفتها الأسواق المالية، أصبح اتخاذ القرار على مستواها لا يقتصر فقط على الدراسات النظرية، بل أصبح من الضروري استخدام الأساليب الرياضية والإحصائية لتحليل السلوك الدوري لمؤشرات أسواق البورصة أو تعظيم قيمة المحفظة المالية أو بناء استراتيجية معينة في السوق. حيث أصبح الاقتصاد القياسي من أهم أدوات اتخاذ القرار في الأسواق المالية، خاصة فيما يخص التنبؤ بعوائد السوق واختبار الكفاءة المعلوماتية أو اختبار تكامل البورصات أو نماذج تسعير الأصول المالية وتطبيقها على مستوى محافظ القطاعات في البورصات وغيرها من المواضيع، لما له من أهمية يستمدها من نتائج التطبيقات المختلفة وإمكانية توظيفها للتحكم في الظواهر المالية المدروسة، فالقرارات المتخذة استنادا إلى نتائج الدراسات القياسية تكون رشيدة لأنها تستند إلى نتائج وعلاقات دقيقة ومعنوية وتقديرات منطقية ومختبرة، بالإضافة إلى ذلك، يمكن من خلال النماذج القياسية التنبؤ بتغيرات الظاهرة المالية المدروسة وبتغير العوامل المؤثرة عليها وبتغير الصدمات الخارجية

أولا: مفهوم الاقتصاد القياسي Econometrics :

تعني كلمة Econometrics القياس (metrics في اليونانية) في الاقتصاد، ويتضمن الاقتصاد القياسي جميع الأساليب الاحصائية والرياضية التي تستخدم في تحليل البيانات الاقتصادية[1]، يهتم بتقدير العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية من الناحية الكمية. وهناك الكثير من التعريفات لهذا المصطلح وعلى الرغم من اختلافها بالصيغة إلا أنها تشترك بأنها تعتبر الاقتصاد القياسي نوعا خاصا من التحليل الاقتصادي يستخدم كلا من النظرية الاقتصادية والرياضيات الاقتصادية والإحصاء للوصول إلى نتائجه، أي أنه يطبق العلوم الرياضية وعلم الإحصاء على النظرية الاقتصادية.

وقد عرف ثلاثة من كبار الفكر القياسي: Samuelson، Koopmans، Stone الاقتصاد القياسي بأنه فرع من فروع علم الاقتصاد، يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية، المبنى على أساس التماسك بين النظرية والمشاهدات، متخذا في ذلك أساليب استدلال ملائمة.[2]

وهناك آراء مختلفة حول نشأة الاقتصاد القياسي منها ما يقول إنها تعود إلى الاقتصادي البريطاني William Petty أواخر القرن السابع عشر، ومنها ما يقول إنها تعود إلى الإحصائي الألماني Ernest Engel (1821-1896) الذي وضع قوانينه الخاصة بالدخل والاستهلاك في ضوء بيانات ميزانية الأسرة، والاقتصادي الأمريكي W. M. Pearson (1919) الذي نشر طريقته الخاصة بتحليل الدورات الاقتصادية، التي طبقت في عدد من البلدان الرأسمالية[3]. في أواخر القرن 19 وضع الاقتصادي الفرنسي Leon Walras الأسس العلمية لظهور علم الاقتصاد القياسي، لينال بعده وفي القرن العشرين الاقتصاديين Ragner Frisch & Tinbergen أول جائزة نوبل في الاقتصاد لأبحاثهما المتعلقة بعلم الاقتصاد القياسي، كما نال الاقتصادي Lawrence Robert Klein نفس الجائزة لاستخدامه نماذج الاقتصاد القياسي في تحليل السياسات الاقتصادية.

ونظرا لأهمية الاقتصاد القياسي في التحليل الاقتصادي تأسست في أميركا عام 1930 الجمعية الدولية للقياس الاقتصادي، وحقق بعدها الاقتصاد القياسي تقدما سريعا وتطورا كبيرا في دراسة الظواهر الاقتصادية المختلفة وتقدير دوال

---

[1] - خالد محمد السواعي، مبادئ الاقتصاد القياسي، دار الكتاب الثقافي، أربد، الأردن، 2018، ص 17.

[2] - محمد محمد عطوة يوسف، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، المكتبة العصرية، المنصورة، 2002، ص 15

[3] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مقدمة تحليلية في مشاكل الانحدار باستخدام برمجية Eviews، الجزء الثاني، جامعة ديالي، العراق، 2015، ص 02.

الإنتاج والتكاليف والنماذج القياسية التي تصف العلاقات الاقتصادية على مستوى الاقتصاد الكلي والجزئي. وساعد تطور وتوسع استخدام الحاسبات الالكترونية وبرامج التحليل على فتح آفاق جديدة بوجه هذا العلم.

ثانيا: علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى

للاقتصاد القياسي علاقة وثيقة مع كل من علوم النظرية الاقتصادية والرياضيات الاقتصادية والإحصاء كما يلي:

1- النظرية الاقتصادية(Economic Theory) :

حيث تشير النظرية الاقتصادية إلى وجود علاقات معينة بين متغيرات اقتصادية، كعلاقة فيليبس بين معدل البطالة ومعدل التضخم. أي أن النظرية الاقتصادية تزودنا بطبيعة واتجاه العلاقة بين المتغيرات، والاقتصاد القياسي يحدد ويقيس هذه العلاقة كميا.

2- الاقتصاد الرياضي:(Mathematical Economics):

يقتصر دوره على صياغة العلاقة التي تم تحديدها اعتمادا على النظرية الاقتصادية على شكل رموز ومعادلات رياضية، ومسألة قياس متغيرات هذه المعادلات وإثبات ملاءمتها للظاهرة المدروسة من مهمات الاقتصاد القياسي.

3- الإحصاء (Statistics):

يتمثل دوره في تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات المدروسة واللازمة للدراسة، وكذلك تطبيق الاختبارات الإحصائية المختلفة على معالم النماذج لبيان معنوية تأثير كل عامل من العوامل على الظاهرة المدروسة، ومعنوية العلاقة وتعبيرها عن الظاهرة المدروسة ومعالجة أخطاء التقدير تمهيداً لتبني هذه العلاقات.

ثالثا: تطبيقات الاقتصاد القياسي

يعتبر مجال تطبيق الاقتصاد القياسي واسعا جدا حيث يشمل كافة الظواهر الاقتصادية:

- **على مستوى الاقتصاد الجزئي:** حيث يمكن استخدام تطبيقاته لتحديد دوال الإنتاج والتكاليف على مستوى المؤسسة وكافة اشتقاقاتها مثل دوال الناتج المتوسط والناتج الحدي والتكلفة المتوسطة والحدية. وكذلك يقيس تأثير العوامل المؤثرة على الإنتاج كميا، ويحدد الحدود المثلى من كل عامل التي يجب إدخالها في العملية الإنتاجية، ويحدد التوليفة المثلى من العوامل مجتمعة التي تحقق أفضل عائد.
- **على مستوى الاقتصاد الكلي:** يمكن باستخدام النماذج القياسية تقدير دوال الاستهلاك والطلب للسلع المختلفة على المستوى الكلي. وكذلك دوال الإنتاج (بصيغها غير الخطية المختلفة). كما يمكن بناء نماذج قياسية (متعددة المعادلات) توصف الاقتصاد ككل وتتضمن دوال الدخل القومي والاستثمار والاستهلاك والتجارة الخارجية (الصادرات والواردات).

رابعا: النماذج القياسية Econometrics models

تعتبر النماذج القياسية أهم أدوات الاقتصاد القياسي المستخدمة لتوصيف الظواهر الاقتصادية المدروسة لذلك لا بد من توضيح مفهوم النماذج القياسية:

– **النموذج القياسي:** هو عبارة عن علاقة(معادلة) أو منظومة من العلاقات الرياضية التي تربط بين المتغيرات الاقتصادية وتسهل وصف طبيعة العلاقة بينها بصورة خالية من التفاصيل والتعقيد وممثلة للواقع، ويضاف إلى متغيرات النموذج المتغير العشوائي الذي يمثل تأثير العوامل غير القابلة للقياس والتقدير على الظاهرة المدروسة، فيدرج تأثير هذه المجموعة من العوامل تحت اسم المتغير العشوائي[1]. يرمز للمتغيرات برموز رياضية فالمتغير التابع مثلا يرمز له عادة بالرمز (Y) ويرمز للمتغيرات المستقلة بالرموز (X_1, X_2, X_3....) حيث تمارس المتغيرات المستقلة تأثيرها على المتغير التابع، وتسمى هذه العلاقة بالعلاقة الدالية أي أن كل تغير في قيمة المتغير المستقل يؤدي إلى تغير في قيمة المتغير التابع.

واستنادا إلى العلاقة التي تربط بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة من جهة، وعدد المتغيرات المستقلة من جهة أخرى فإنه يمكننا التمييز بين الحالات التالية:

1-المتغير التابع يفسر بمتغير مستقل واحد وباقي العوامل المؤثرة تكون على شكل متغير عشوائي. في هذه الحالة يمكن التمييز بين:

1-1- **النموذج الخطي البسيط:** ويأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$$

سمي النموذج خطيا لأن العلاقة بين المتغير التابع والمستقل علاقة خطية، وسمي البسيط لأن عدد المتغيرات المستقلة متغير واحد فقط، و $\alpha \,\&\, \beta$ معلمات أو معاملات النموذج.

1-2- النموذج غير الخطي البسيط: في هذه الحالة توجد عدة أشكال للنماذج غير الخطية، منها : النموذج الأسي، النموذج اللوجستي ....إلخ.

2-**النموذج الخطي المتعدد**: حيث أن المتغير التابع يفسر بعدة متغيرات مستقلة إضافة إلى المتغير العشوائي، ويأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \cdots\cdots + \beta_k \cdot X_{kt} + \varepsilon_t$$

3- المتغير التابع تفسره قيمه السابقة : ويمكن كتابة النموذج على الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot Y_{t-1} + \beta_2 \cdot Y_{t-2} + \cdots\cdots + \beta_k \cdot Y_{t-k} + \varepsilon_t$$

4- المتغير التابع يفسر بعنصر الزمن : وهو ما يعرف بنماذج السلاسل الزمنية، وتأخذ الشكل التالي: $Y_t = f(t)$

خامسا: أهداف الاقتصاد القياسي

هناك ثلاثة أهداف أساسية للاقتصاد القياسي، وهي:[2]

1- تحليل واختبار النظريات الاقتصادية المختلفة:

تحليل واختبار النظريات الاقتصادية، يعتبر هدفا رئيسيا من أهداف الاقتصاد القياسي، ولا يمكن اعتبار النظرية الاقتصادية صحيحة ومقبولة ما لم تجتاز اختبارا كميا (عدديا) يوضح قوة النموذج ويفسر قوة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

2- رسم السياسات واتخاذ القرارات:

يساهم الاقتصاد القياسي برسم السياسات و اتخاذ القرارات عن طريق الحصول على قيم عددية لمعاملات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات، لتساعد رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات الحالية من حيث توفيره لصيغ وأساليب

---

[1] - لحسن عبد الله باشيوة، بحوث العمليات وتطبيقاته، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2011، ص 470.

[2] - حسين علي بخيت، سحر فتح الله، الاقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2006، ص 19.

مختلفة لتقدير المرونات والمعاملات الفنية والتكلفة الحدية و الإيرادات الحدية وغير ذلك، وعلى هذا الأساس فإن معرفة القيم العددية لمعاملات النموذج المقدر تساعد على إجراء المقارنات واتخاذ القرار المناسب سواء على مستوى المؤسسة أو الدولة.

3- التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل:

يساعد الاقتصاد القياسي رجال الأعمال والحكومات في وضع السياسات من خلال توفير القيم العددية لمعاملات المتغيرات الاقتصادية والتنبؤ بما ستكون عليه الظاهرة الاقتصادية مستقبلا.

ومثل هذه التنبؤات تمكن واضعي السياسات ومتخذي القرار من تنظيم الحياة الاقتصادية واتخاذ إجراءات معينة للتأثير في متغيرات إقتصادية معينة، مثال ذلك لو أرادت الحكومة أن تحدد مستوى التوظيف فمن الضروري أن تعرف وتحدد مستوى التوظيف الحالي، إضافة إلى معرفة وضعه في المستقبل. كذلك إذا أرادت الحكومة معرفة الآثار المحتملة للسياسة النقدية على التضخم والبطالة، وما هو الأثر المتوقع لزيادة أسعار السلع البديلة أو المكملة على الكمية المطلوبة من السلع الأصلية. حيث يمكن القول أن الاقتصاد القياسي سوف يحدد مستوى التوظيف فيما إذا كان مرتفعا أو منخفضا، وكذلك يجيب على بقية الأسئلة المتعلقة بالمستقبل.

سادسا: منهج البحث في الاقتصاد القياسي

يمر أي بحث قياسي بأربعة مراحل هي: تعيين النموذج، تقدير معلمات النموذج، تقييم معلمات النموذج واختبار مقدرة النموذج على التنبؤ. و يمكن شرح هذه المراحل فيما يلي:

1- تعيين النموذج:[1]

يقصد بتعيين النموذج صياغة العلاقات محل الدراسة في صورة رياضية، حتى يمكن قياس معاملاتها باستخدام ما يسمى بالطرق القياسية، و تنطوي هذه المرحلة على الخطوات التالية:

1-1- تحديد متغيرات النموذج:

حيث تنطوي هذه المرحلة على تحديد المتغير التابع والمتغيرات المستقلة (التفسيرية)، وبإمكان الباحث تحديد المتغيرات التي يحتويها النموذج عند دراسة ظاهرة اقتصادية معينة من خلال مصادر عديدة، منها النظرية الاقتصادية، الدراسات القياسية في نفس المجال، المعلومات المتعلقة بالظاهرة. إلا أنه ونظرا لصعوبة حصر جميع المتغيرات المستقلة المؤثرة في المتغير التابع، يقتصر الباحث على إدراج المتغيرات الأكثر أهمية فقط، أما باقي المتغيرات فإنها تدرج ضمن ما يعرف بالمتغير العشوائي.

1-2- تحديد الشكل الرياضي للنموذج:

يقصد بالشكل الرياضي للنموذج عدد المعادلات التي يحتويها النموذج (نموذج المعادلة الواحدة والنموذج متعدد المعادلات)، و درجة خطية النموذج (خطي أو غير خطي)، و درجة تجانس كل معادلة[2]. ونظرا لكثرة النماذج القياسية فإن النظرية الاقتصادية نادرا ما تعطينا الشكل الرياضي للعلاقات التي نريد صياغتها في شكل رياضي، باستثناء تلك المتعلقة بنظريات الاستهلاك، الاستثمار، .....إلخ.

وتكتسي مرحلة تحديد الشكل الرياضي للنموذج أهمية بالغة ، بحكم أن أي خطأ في تحديد هذا الشكل يؤدي أخطاء في قياس وتقدير العلاقة محل البحث.

---

[1] - عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، الدار الجامعية، الاسكندرية، 2005، ص 16.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص44.

ولتجاوز ما لا تقدمه النظرية الاقتصادية عن الشكل الرياضي للعلاقة بين المتغيرات المدروسة، فإن الباحث يمكنه الاعتماد على عدة أساليب تعينه على التحديد الصحيح لهذا الشكل، فبعد جمع البيانات عن متغيرات الدراسة، يقوم الباحث بعرضها على شكل سحابة نقاط من محورين، المحور الأفقي يتضمن قيم أحد المتغيرات المستقلة، بينما يتضمن المحور العمودي قيم المتغير التابع. وعلى هذا الأساس يمكن للباحث اختيار الشكل الرياضي المناسب للنموذج المتضمن متغيرين فقط، أحدهما تابع والآخر مستقل. ففي حالة أكثر من متغير مستقل، وحتى ولو كانت العلاقة بين المتغير التابع وكل متغير مستقل علاقة خطية، فلا يوجد ما يضمن أن تبقى هذه العلاقة خطية عند إدراج كل المتغيرات المستقلة دفعة واحدة في النموذج. وعليه فإن الباحث يقوم بتجريب وتقدير مختلف الصيغ الرياضية للنموذج المراد بناؤه، ثم يختار الصيغة التي تعطي نتائج أكثر معقولية من الناحية الاقتصادية والاحصائية.

أما بالنسبة لمعادلات النموذج، فالباحث يعتمد على عدة أسس وعوامل تحدد عدد هذه المعادلات، نذكر من أهمها:[1]

- تعقيد الظاهرة: إذا كان للمتغيرات المدروسة علاقات متشابكة فيما بينها، ما يجعل من الظاهرة المدروسة جد معقدة، فإن استخدام نموذج معادلة واحدة لتفسير سلوكها قد يعطي نتائج خاطئة، حيث أنه من الأفضل استخدام نموذج متعدد المعادلات، يأخذ العلاقات المتشابكة بعين الاعتبار.
- الهدف من تقدير النموذج: ويعتبر أحد العوامل الرئيسية المحددة لعدد معادلات النموذج، فإذا كان الهدف قياس التأثير المتبادل بين مجموعة من المتغيرات، فإن هذا يتطلب بناء نموذج متعدد المعادلات، وإذا كان الهدف قياس التأثير من متغير إلى آخر مع اهمال الأثر العكسي، فإن نموذج المعادلة الواحدة يفي بالغرض.
- توفر البيانات: من العوامل المحددة ايضا لعدد معادلات النموذج نجد توفر بيانات المتغيرات المراد ادراجها في معادلات النموذج، ففي بعض الحالات قد يضطر الباحث لإسقاط علاقة أو أكثر نظرا لدم توفر بيانات عنها، أو لعدة القدرة على قياسها.

1-3- تحديد التوقعات القبلية:

إن تحديد توقعات نظرية مسبقة عن إشارة و حجم معلمات العلاقة الاقتصادية محل القياس، أمر جد مهم لمرحلة ما بعد التقدير، حيث يتم اختبار المدلول الاقتصادي للمعلمات المقدرة من خلال مقارنتها مع التوقعات القبلية من حيث إشارتها و حجمها.

2- تقدير معلمات النموذج:

بعد صياغة العلاقات محل البحث في شكل رياضي خلال مرحلة التعيين، نقوم بتقدير معلمات النموذج، وذلك بالاعتماد على بيانات واقعية يتم جمعها عن المتغيرات التي يتضمنها النموذج، و على تقنيات قياسية تستخدم في عملية القياس، و أثناء هذه المرحلة نقوم بما يلي:

2-1- تجميع البيانات:

يقوم الباحث بجمع البيانات عن متغيرات النموذج من مصادر متعددة، حيث نجد أن هذه البيانات يمكن أن تأخذ أحد الأشكال التالية:

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، المرجع السابق، ص 45.

- **بيانات السلاسل الزمنية:**

هي البيانات المأخوذة عبر الزمن أو عبر سلسلة زمنية معينة، أو بعبارة أخرى هي البيانات المأخوذة في اللحظات المتعاقبة أو الدقائق، الساعات، الأيام، الأسابيع، الأشهر، السنوات....إلخ[1]. وعلى هذا الأساس فالبيانات الزمنية تكون مرتبة وفق زمن حدوثها ويمكن أن يكون لها تكرار زمني مختلف (سنوية، سداسية، فصلية، شهرية ....)، ويرمز لمؤشر الزمن بالرمز t ، فمثلا إذا كان Y يرمز للناتج المحلي في الجزائر من 2000 إلى 2016، فإننا نرمز له بالرمز:

$$Y_t \qquad / t = 2000 \cdots 2016$$

السنة	2000	2001		2015	2016
الناتج المحلي	.....	.....		.....	....

تمتاز بيانات السلاسل الزمنية بخاصية ارتباطها بماضيها القريب، مما يجعل من نمذجتها أمرا معقدا، حيث يتم أخذ عنصر الزمن في الحسبان، من خلال اعتبار الماضي القريب للسلسلة كمتغير مستقل يفسر سلوكها في الحاضر.

- **البيانات المقطعية:**

تتكون مجموعة البيانات المقطعية في عينة الأفراد، أو القطاع العائلي، أو الشركات، أو الدول، أو المناطق، أو المدن، أو أي نوع من الوحدات في نقطة محددة من الزمن. وفي بعض الحلات لا تتماثل الفترة الزمنية للبيانات بالضبط[2]. ويرمز لرقم الوحدة عادة بالرمز i، فمثلا إذا كان Y يمثل الناتج المحلي لعينة حجمها 20 دولة، فإننا نرمز له بالرمز:

$$Y_i \qquad / i = 1 \cdots\cdots\cdots 20$$

الدولة	1	2	....	19	20
الناتج المحلي	.....	.....	....	.....	....

- **البيانات الطولية (بيانات السلاسل الزمنية المقطعية):**

تتكون بيانات PANEL من سلاسل زمنية لكل طرف مقطعي في مجموعة البيانات[3]، كأن نأخذ مثلا تطور الناتج المحلي لـ10 دول عربية خلال الفترة 2000-2016، فإننا نرمز له بالرمز:

$$Y_t^i \qquad / t = 2000 \cdots\cdots\cdots 2016 \qquad et \qquad i = 1 \cdots\cdots\cdots 20$$

الدولة	1			2			....	20		
السنة	2000	....	2016	2000	....	2016	....	2000	....	2016
الناتج م	.....	....	.....	.....	....	.....	....	....	....	....

2-2- اختيار طريقة القياس الملائمة:

من بين الطرق المكن استخدامها في عملية التقدير نجد: طريقة المعادلة الواحدة وطريقة المعادلات الآنية، حيث تستخدم الأولى في تقدير معلمات نموذج مكون من معادلة واحدة، أو تقدير معلمات نموذج مكون من مجموعة من المعادلات، على أن تقدر كل واحدة على حدى، ومن أهم هذه الطرق نجد طريقة المربعات الصغرى العادية. بينما تستخدم الثانية (طريقة المعادلات الآنية) في تقدير النموذج المشكل من مجموعة من المعادلات ذات التأثير المتبادل، ومن أهمها طريقة المربعات

[1] - عدنان داود محمد العذاري، الاقتصاد القياسي نظرية وحلول، الطبعة الأولى، دار جرير للنشر والتوزيع، عمان، 2010، ص 14.

[2] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص 26.

[3] - المرجع السابق، ص 29.

الصغرى العادية ذات المرحلتين وطريقة م ص ع ذات الثلاث مراحل، حيث تختلف هذه الطرق حسب مدى ملاءمتها لعملية القياس، وذلك تبعا لعدة عوامل منها طبيعة العلاقة محل الدراسة، وخصائص المقدرات التي تنتج عن كل طريقة، كما تختلف أيضا من حيث كمية البيانات التي تتطلبها كل طريقة وتكاليف البحث.

تقييم معلمات النموذج:

بعد الانتهاء من تقدير القيم الرقمية لمعلمات النموذج، نقوم بتقييم المعلمات المقدرة، أي تحديد ما إذا كانت قيم هذه المعلمات لها مدلول أو معنى من الناحية الاقتصادية، وما إذا كانت مقبولة من الناحية الإحصائية والقياسية، و هذا بالاعتماد على المعايير التالية:[1]

1- المعايير الاقتصادية:

إن هذه المعايير تحددها مبادئ النظرية الاقتصادية والمنطق الاقتصادي، وتتعلق بإشارة وحجم معاملات العلاقات الاقتصادية، بحث أن النظرية الاقتصادية تفرض قيودا على بعض إشارات وقيم معاملات العلاقات الاقتصادية (مثل القيود على المرونات أو المضاعفات أو الميول الحدية...الخ)، فإذا كانت التقديرات مخالفة للقيود النظرية ينبغي عندئذ رفض النموذج، مالم يكن هناك سبب جوهري يدعو الباحث للتمسك بالإشارة أو القيمة المخالفة للنظرية، وعليه توضيح سبب قبوله للنموذج رغم مخالفته لمتطلبات النظرية الاقتصادية، فقد يعود سبب مخالفته لافتراضات النظرية الاقتصادية إلى عدم كفاءة البيانات المستخدمة أو صغر حجم العينة.

فعلى سبيل المثال أن النظرية الكينزية تقرر أن الاستهلاك يتحدد في الاجل القصير بالدخل، حيث كلما زاد الدخل زاد الاستهلاك، كما تفترض هذه النظرية أن الدخل يتوزع بين الاستهلاك والادخار، ومن ثم فغن الزيادة في الدخل تتوزع بين زيادة الاستهلاك وزيادة الادخار. وتفترض النظرية أيضا أن استهلاك المجتمع في الاجل القصير لا يمكن أن يكون سالبا او منعدما حتى انخفض الدخل إلى الصفر.

ويمكن ترجمة ما تقرره هذه النظرية إلى صيغة رياضية كمايلي:

$$C = c_0 + b \cdot Y$$

حيث: C: يمثل الاستهلاك، Y: يمثل الدخل.

ووفقا لهذه النظرية من المتوقع أن تكون $c_0 > 0$، وهذا يعني أن المجتمع لابد أن يستهلك، حتى ولو انخفض دخله الكلي إلى الصفر في الأجل القصير، ويتم هذا بالاعتماد على الاقتراض الخارجي، أو السحب من المدخرات السابقة. إضافة إلى ذلك فإن: $0 < b < 1$، أي أن الميل الحدي للاستهلاك يجب أن يكون موجبا وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد.

وهكذا فإن نظرية الاستهلاك الكينزية قد وضعت معايير وقيود اقتصادية خاصة بإشارة وحجم المعلمتين c_0 و b، ويتعين على أي محاولة لقياس دالة الاستهلاك في الأجل القصير أن تعطي نتائج تتفق مع هذه المعايير حتى يتم قبولها اقتصاديا.

2- المعايير الإحصائية:

بعد اجتياز النموذج للمعايير الاقتصادية ينتقل الباحث إلى معايير النظرية الاحصائية، للتأكد من أن جميع معلمات النموذج وجميع معادلاته ذات معنوية احصائية. وهناك بعض الاختبارات الاحصائية لقياس جودة النموذج المقدر وكذا ملاءمته لواقع البيانات، من أهمها نجد:

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص ص 52-56، بتصرف.

- **معامل التحديد** R^2 : يعد هذا المعامل من أهم مقاييس القدرة التفسيرية والتنبؤية للنموذج المقدر، وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح، أي: $0 \leq R^2 \leq 1$ ، وكلما اقترب من الواحد الصحيح تكون القدرة التفسيرية والتنبؤية عالية. وغالبا ما يستخدم معامل التحديد المصحح، والذي يرمز له بالرمز $\overline{R}^2$ بدلا من R^2 ، كونه يتمتع بخصائص أكثر أهمية في توضيح القدرة التفسيرية للنموذج.
- **اختبار FISHER**: يستخدم لاختبار المعنوية الكلية للنموذج، وتبيان قوة العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع.
- **اختبار STUDENT**: يستخدم لبيان معنوية تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع، وذلك بعد مقارنة الاحصائية المحسوبة مع الاحصائية المجدولة، فإذا كانت الأولى أكبر من الثانية فإن ذلك يدل على أهمية المتغير المستقل في تفسير انحرافات المتغير التابع.

3- المعايير القياسية:

تهدف هذه المعايير إلى التأكد من أن الافتراضات التي تقوم عليها المعايير الإحصائية منطبقة مع الواقع، فإذا كانت هذه الافتراضات متوفرة في الواقع، فالمعلمات ستكتسب صفات معينة أهمها: عدم التحيز والاتساق، أما إذا لم تتحقق هذه الافتراضات فالمعلمات المقدرة ستفقد بعض الصفات السابقة، بل و يؤدي إلى عدم صلاحية المعايير الإحصائية نفسها لقياس مدى الثقة في المعلمات المقدرة، منها: اختبارات الارتباط الذاتي، اختبارات التعدد الخطي، اختبارات ثبات التباين.

- **اختبارات الارتباط الذاتي:** ومن أهمها اختبار DURBIN-WATSON، والذي يستخدم لغرض معرفة ما إذا كان هناك ارتباط تسلسلي بين الانحرافات عن الخط المقدر أم لا، أي هل هناك تأثير لقيم السنوات الماضية على قيم السنوات الحالية، والقاعدة العامة هي كلما اقتربت احصائية DURBIN-WATSON من 2 فهذا يدل على عدم وجود ارتباط ذاتي (AUTOCORRELATION)، وهو فرض استقلالية الأخطاء.
- **اختبارات التعدد الخطي:** ومن أهمها اختبار KLEIN للكشف عن مشكلة التعدد الخطي (MULTICOLINEARITY) التي تشير إلى وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة، ومن آثار هذه المشكلة نجد عدم دقة مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية، وأن الخطأ المعياري لهذه المقدرات يكون مرتفعا بشكل كبير. ويتم تطبيق هذا الاختبار بمقارنة معاملات الارتباط الجزئية للمتغيرات المستقلة مع معامل التحديد، حيث يشير هذا الاختبار إلى وجود مشكلة التعدد الخطي في حالة ما إذا كانت معاملات الارتباط الجزئية أكبر من معامل التحديد.
- **اختبارات ثبات التباين:** ومن أهمها اختبار GOLDFELD-QUANDT للكشف عن عدم ثبات التباين (HETEROSCEDASTICITY)، حيث يؤثر اختلاف وعدم ثبات التباين على تباين المعلمات المقدرة، فيسبب وجود عدم ثبات التباين الحصول على مقدرات بتباين أقل من التقدير (UNDERESTIMATE)، وبالتالي الحصول على نتائج للاختبارات الاحصائية الواردة سابقا أكبر من المتوقع، وبالتالي فإن عدم ثبات التباين له تأثير واسع على اختبار الفرضيات. يقوم هذا الاختبار على أن تباين البواقي إذا كان ثابتا لجميع المشاهدات، فإن تباين جزء من أجزاء العينة سيكون مساويا لتباين جزء آخر من العينة. لكي يكون الاختبار قابلا للتطبيق، يتعين تحديد المتغير المستقل المرتبط بتباين البواقي.

تقييم قدرة النموذج على التنبؤ:

يمكن تعريف التنبؤ أنه تقدير كمي للقيم المتوقعة للمتغيرات التابعة في المستقبل، بناءا على ما هو متاح من معلومات عن الماضي و الحاضر، والتنبؤ يفترض أن سلوك الظواهر الاقتصادية في المستقبل القريب ما هو إلا امتداد لسلوكها في الماضي

القريب، ومنه فإن حدوث تغيرات فجائية لم تكن متوقعة من الممكن أن تؤدي إلى عدم دقة التنبؤ الخاص بمستقبل الظواهر الاقتصادية.

لقد أوضحنا سابقا أن من أهداف الاقتصاد القياسي هو التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل، لذا يتعين اختبار مدى قدرة النموذج القياسي على التنبؤ قبل استخدامه في هذا الغرض. فمن الممكن أن يجتاز النموذج جميع الاختبارات السابقة ولكنه لا يكون صالحا للتنبؤ.

ولاختبار مقدرة النموذج على التنبؤ لابد من اختبار مدى استقرار المعلمات المقدرة عبر الزمن، واختبار مدى حساسية هذه المقدرات للتغير في حجم العينة. ومنن الأساليب المستخدمة في اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ نجد:

1- اختبار معنوية الفرق:

يعتمد هذا الاختبار على التنبؤ بعد التحقق (EX-POST FORECAST) في اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ، فإذا كانت القيمة المتوقعة تساوي القيمة الفعلية للمتغير المتنبئ به، أو أن الفرق بينهما غير جوهري، فإن مقدرة النموذج على التنبؤ تكون عالية جدا، أما إذا كان الفرق بينهما جوهريا، فإن هذا يشير إلى ضعف القدرة التنبؤية للنموذج القياسي.

2- معامل عدم التساوي لـ: THEIL:

يعتمد هذا المعامل على الفرق بين تغير القيم الفعلية والقيم التنبؤية، فكلما اقتربت قيمة معامل THEIL من الصفر، كلما دل ذلك على القدرة التنبؤية الكبيرة للنموذج، وكلما زادت قيمة معامل THEIL عن الواحد كلما دل ذلك على انخفاض القدرة التنبؤية للنموذج. وإذا تساوت قيمته مع الواحد أشار ذلك إلى ثبات القيم المتوقعة للمتغير التابع عبر الزمن.

3- معامل جانس:

إن هذا المعامل يقيس مقدرة النموذج على التنبؤ خلال فترة العينة وخلال فترة ما بعد العينة، وتتراوح قيمته ما بين الصفر والمالانهاية، وكلما زادت قيمة هذا المعامل كلما دل ذلك على ضعف القدرة التنبؤية للنموذج، وعندما يكون مساويا للواحد فإن ذلك يعني أن قدرة التنبؤ في الماضي تتساوى معها في المستقبل.

4- متوسط مربع الخطأ:

يستخدم هذا المقياس للمقارنة بين القدرة التنبؤية لأكثر من نموذج، ويكون أفضل نموذج هو النموذج الذي يعطي أقل متوسط لمربعات الخطأ.

المحور الثاني:

النموذج الخطي البسيط

مقدمة

يعتبر الانحدار أحد الأساليب الاحصائية التي تستخدم في قياس العلاقات الاقتصادية، حيث يختص بقياس العلاقة بين متغير ما يسمى بالمتغير التابع ومتغير آخر أو مجموعة من المتغيرات تسمى بالمتغيرات المستقلة أو التفسيرية. ويلاحظ في هذا الصدد أن الانحدار كأسلوب قياس ليس هو الذي يحدد أي المتغيرات تابع وأيها مستقل، وإنما يستعين البحاث في تحديد ذلك إما بالنظرية الاقتصادية أو الملاحظة، فمن النظرية الاقتصادية يمكن للباحث أن يعرف أن كمية النقود متغير مستقل وأن التضخم متغير تابع، كما يمكنه من الملاحظة أن يعرف أن التلوث ممثلا في انبعاثات ثاني أكسيد الكربون متغير تابع وأن حجم النشاط الاقتصادي متغير مستقل.

تنقسم نماذج الانحدار إلى قسمين رئيسيين، خطية وغير خطية، والخطية بدورها تنقسم الى خطية بسيطة وخطية متعددة، وأساس التفرقة بين البسيطة والمتعددة هو عدد المتغيرات المستقلة المدرجة بالنموذج، فالنماذج الخطية البسيطة تقيس العلاقة بين متغيرين أحدهما تابع والآخر مستقل، أما الخطية المتعددة فتقيس العلاقة بين متغير تابع واحد وأكثر من متغير مستقل.

أولا: تقديم النموذج

1- شكل النموذج:

يأخذ النموذج الخطي البسيط الشكل التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$$

حيث: Y : المتغير التابع، أو المتغير الداخلي.

X : المتغير المفسر، أو المتغير المستقل.

ε : المتغير العشوائي.

α و β: معلمات للتقدير.

t : مؤشر الزمن.

تمثل المعلمة α الجزء الثابت، وهو الجزء المقطوع من المحور الرأسي، وهو عبارة عن قيمة متوسط المتغير التابع لما تنعدم قيمة المتغير المستقل، بينما تمثل المعلمة β معامل الانحدار أو ميل الخط المستقيم، وتعبر عن مقدار التغير في المتغير التابع نتيجة لتغير المتغير المستقل بوحدة واحدة، وتبين اشارتها إذا ما كانت العلاقة بين المتغير التابع والمستقل علاقة طردية أو عكسية.

إن إدخال المتغير العشوائي ε_t في النموذج القياسي له عدة مسوغات أهمها أنه عبارة عن مجموعة شاملة تتضمن كل تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها بسهولة، قد يمثل هذا الحد المتغيرات التي لا يمكن إدراجها في النموذج لعدم توفر البيانات، أو أخطاء في القياس في البيانات، أو العشوائية الموجودة في السلوك البشري.[1]

---

[1] - مها محمد زكي، الاقتصاد القياسي بالأمثلة، الطبعة الأولى، حميثرا للنشر والترجمة، القاهرة، 2019، ص 32.

ومع ذلك فإن إدخال المتغير العشوائي ε_t في النموذج القياسي يقتضي وضع بعض الافتراضات التي تتعلق بوسطه الحسابي (أو قيمته المتوقعة) وتباينه وتغاير قيمه المختلفة فيما بينها وتغاير قيمه المختلفة مع قيم المتغير (أو المتغيرات) المستقل في النموذج.

2- فرضيات النموذج:

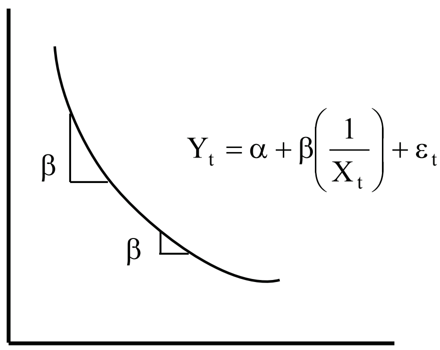
قبل تناول فرضيات النموذج الخطي البسيط نحاول أن نبرز مفهوم الخطية في تحليل الانحدار، حيث أن الخطية بصفة عامة يمكن تفسيرها في كل من:

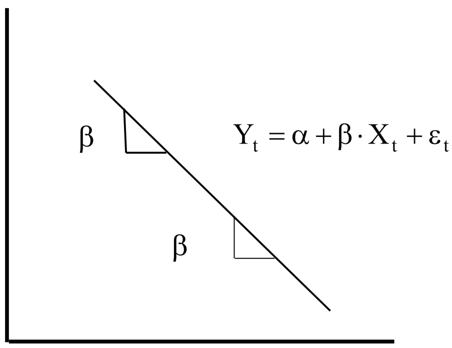
- **الخطية في المتغيرات:** من خلال خطية المقدرات يمكن فهم أن المتغيرات المستقلة يجب أن تكون خطية، أي أن أسها يجب أن يساوي الواحد (1)، مما يجعل من النماذج التالية نماذج غير خطية:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^2 + \varepsilon_t \qquad \cdots(01)$$

$$Y_t = \alpha + \beta\left(\frac{1}{X_t}\right) + \varepsilon_t \qquad \cdots(02)$$

فإذا قمنا مثلا بتقدير كل من النموذج الخطي الأساسي $\left(Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t\right)$ والنموذج الغير الخطي الثاني $\left(Y_t = \alpha + \beta\left(\frac{1}{X_t}\right) + \varepsilon_t\right)$، فإننا نجد أن الميل يكون ثابتا في النموذج الخطي، بينما يكون متغيرا بتغير قيم X في النموذج الغير خطي، كما هو موضح في الشكل التالي:





- **الخطية في المعلمات:** أن المتغير التابع هو دالة خطية للمعلمات، سواء كانت المتغيرات المستقلة خطية أم لا، فنقول عن النموذج أنه خطي إذا كانت المعلمات تظهر بأس يساوي الواحد (1)، لذا فبالرجوع إلى النموذجين (01) و(02) نجد أنهما خطيين بعض النظر عن خطية أو عدم خطية المتغير المستقل X، بينما نجد أن النموذج التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta^2 \cdot X_t + \varepsilon_t$$

هو نموذج غير خطي لأن المعلمة β تظهر بأس يساوي 2.

بالنسبة للنموذج الخطي الذي سوف نتعامل معه في الاقتصاد القياسي نقصد به النموذج الخطي في المعالم، لأن النموذج غير الخطي في المتغيرات المستقلة يسهل التعامل معه من خلال تحويله إلى نموذج خطي.

1-2- الفرضيات الاحتمالية:

إن الطريقة المستعملة في تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي البسيط هي طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS"، التي تم وضعها من طرف : Carl Friedrich Gauss، بناءا على بعض الفرضيات التي تجعل منها الطريقة الأكثر استعمالا، و تدور هذه الفرضيات حول طبيعة وشكل المتغير العشوائي، وهي:

- $E(\varepsilon_t)=0 \quad \forall t$: وتنص هذه الفرضية على أن الأخطاء لا تدخل في تفسير Y ، حيث تعبر عن قيم عشوائية تأخذ قيما سالبة، موجبة أو معدومة، لا يمكن قياسها وتحديدها بدقة، تخضع للقوانين الاحتمالية، حيث أن أملها الرياضي أو متوسطها يكون معدوما.
- $V(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\delta_\varepsilon^2 \quad \forall t$: ثبات أو تجانس التباين (Homoscedasticity). أي أن تشتت الأخطاء حول متوسطها المعدوم
- $Cov(\varepsilon_i\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0 \quad \forall i\neq j$: عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء، أي أن التباينات المشتركة بين الأخطاء تكون معدومة.
- $Cov(x_t.\varepsilon_t)=0$: عدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي.
- $\varepsilon_t \rightarrow N(0\,.\,\delta_\varepsilon^2)$: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي هو التوزيع الطبيعي.

2-2- فرضيات أخرى:

- المتغيرات Y و X محددة بدون خطأ.
- قيم المتغير X غير عشوائية.

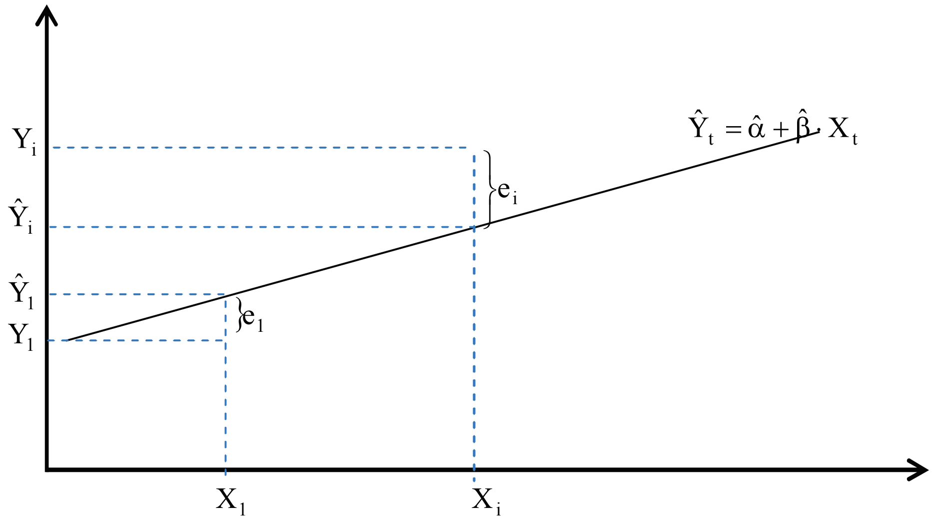
ثانيا: تقدير النموذج الخطي البسيط

يتم تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط بطريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least Squares)، التي تهدف إلى الحصول على مقدرات $\hat{\alpha}$. $\hat{\beta}$ تعطي مجموع مربعات انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية في أدنى قيمة له.

ليكن النموذج: $Y_t=\alpha+\beta\cdot X_t+\varepsilon_t$ ، و تحت فرضيات طريقة المربعات الصغرى العادية نجد:

- النموذج المقدر: $\hat{Y}_t=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\cdot X_t$.
- انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية: $e_t=Y_t-\hat{Y}_t=Y-\hat{\alpha}-\hat{\beta}\cdot X_t$.
- مجموع مربعات البواقي: $\sum e_t^2=\sum(Y_t-\hat{\alpha}-\hat{\beta}\div X_t)^2$.

تهدف طريقة المربعات الصغرى العادية إلى إيجاد التوليفة الخطية $\hat{\alpha}+\hat{\beta}\cdot X_t$ التي تعطي قيمة $\hat{Y}_t$ جد قريبة من القيمة الفعلية Y_t ، ومنه فإننا سنحاول إيجاد هذه التوليفة بحيث يكون $\sum e_t=\sum(Y_t-\hat{Y}_t)$ في أدنى قيمة له. لكن بالمقابل فإن هذا المعيار يعتبر غير كاف لأنه مهما كانت قيم e_t فإن مجموعها يساوي الصفر، أي: $\sum e_t=0$ ؟، ولهذا فإننا سنستعمل معيارا آخر هو $\sum e_t^2$ ، وهو المبدأ الأساسي لطريقة المربعات الصغرى العادية حيث تهدف إلى جعل $\sum e_t^2$ في أدنى قيمة لها أي إيجاد $Min\sum e_t^2$.



فنقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ: $\sum e_t^2$ بالنسبة إلى $\hat{\alpha}$. $\hat{\beta}$، و نجعلها مساوية للصفر.

نضع: $S = \sum e_t^2 = \sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t)^2$.

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{\partial \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t)^2}{\partial \hat{\alpha}} = -2 \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \Rightarrow -2 \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t) = 0$$

$$\Rightarrow \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot X_t)$$

$$\Rightarrow \sum Y_t - \sum \hat{\alpha} - \hat{\beta} \sum X_t = 0$$

$$\Rightarrow n \cdot \overline{Y} - n \cdot \hat{\alpha} - \hat{\beta} \cdot n \cdot \overline{X} = 0$$

$$\Rightarrow n \cdot \hat{\alpha} = n \cdot \overline{Y} - \hat{\beta} \cdot n \cdot \overline{X}$$

ومنه:

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta} \cdot \overline{X}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t)^2}{\partial \hat{\beta}} = -2 \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t) \cdot X_t$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = 0 \Rightarrow -2 \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t) \cdot X_t = 0$$

$$\Rightarrow \sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t) \cdot X_t = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - \hat{\alpha} \sum X_t - \hat{\beta} \sum X_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - (\overline{Y} - \hat{\beta} \overline{X}) \sum X_t - \hat{\beta} \sum X_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - \overline{Y} \sum X_t + \hat{\beta} \overline{X} \sum X_t - \hat{\beta} \sum X_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - n \overline{X} \overline{Y} - \hat{\beta} (\sum X_t^2 - n \overline{X}^2) = 0$$

ومنه:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_t Y_t - n \overline{Y} \overline{X}}{\sum X_t^2 - n \overline{X}^2} = \frac{\sum (Y_t - \overline{Y}) \cdot (X_t - \overline{X})}{\sum (X_t - \overline{X})^2} = \frac{Cov(X_t . Y_t)}{V(X_t)}$$

مثال:

افترض أن محللا ماليا قام بتقدير الانحراف المعياري لمعدلات العائد الخاصة بعدد 15 محفظة مالية ذات أحجام مختلفة خلال فترة 10 شهور فوجدها على النحو الموضح بالجدول التالي:

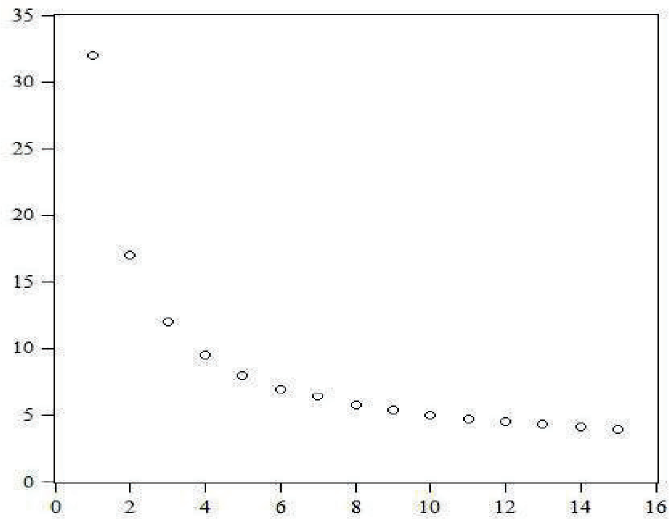
المحفظة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
الانحراف المعياري	7	5.4	12	9.5	4.3	32	6.4	5.75	17	4	4.7	4.5	8	4.2	5
درجة التنوع	6	9	3	4	13	1	7	8	2	15	11	12	5	14	10

المطلوب:

- مثل بيانيا بيانات الجدول بسحابة النقاط، ماذا تستنتج؟
- قدر النموذج الخطي البسيط الذي يقيس أثر درجة التنوع على درجة المخاطرة.
- حساب القيم المقدرة واستنتاج بواقي التقدير.
- سحابة النقاط:

الحل:

برسم شكل الانتشار بين درجة المخاطرة ودرجة التنوع نجد أنها غير خطية على النحو التالي:



ومن ثم فإن صيغة التحويل لمقلوب هي إحدى الصيغ الملائمة لتقدير هذه العلاقة. بوضع:

Y_i : درجة المخاطرة، v_i : درجة التنوع

فيكون النموذج الخطي الذي نعمل على تقديره كمايلي:

$$Y_i = \alpha + \beta \cdot \frac{1}{v_i} + \varepsilon_i = \alpha + \beta \cdot X_i + \varepsilon_i$$

أما مقدرات طريقة OLS لهذا النموذج فتعطى كما يلي:

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(Y_i - \overline{Y})\cdot(X_i - \overline{X})}{\sum(X_i - \overline{X})^2}$$

العمليات الحسابية موضحة بالجدول الموالي:

	Y_i	v_i	X_i	$X_i - \overline{X}$	$Y_i - \overline{Y}$	$(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$	$(X_i - \overline{X})^2$	$\hat{Y}_i$	e_i	$(Y_i - \overline{Y})^2$
1	7	6	0.1666	-0.0545	-1.65	0.09	0.0029	7.014	-0.014	2.72
2	5.4	9	0.1111	-0.110	-3.25	0.357	0.0121	5.439	0.050	10.56
3	12	3	0.3333	0.112	3.35	0.375	0.0125	12.01	-0.01	11.22
4	9.5	4	0.25	0.028	0.85	0.024	0.0008	9.512	-0.012	0.72
5	4.3	13	0.0769	-0.144	-4.35	0.627	0.0208	4.324	-0.024	18.92
6	32	1	1	0.778	23.35	18.18	0.6065	31.99	0.005	545.22
7	6.4	7	0.1428	-0.078	-2.25	0.176	0.0061	6.301	0.098	5.06
8	5.75	8	0.125	-0.096	-2.9	0.279	0.0092	5.765	-0.015	8.41
9	17	2	0.5	0.278	8.35	2.327	0.0077	17.00	-0.006	69.72
10	4	15	0.0666	-0.154	-4.65	0.718	0.0238	4.017	-0.017	21.62
11	4.7	11	0.0909	-0.130	-3.95	0.514	0.0169	4.743	-0.043	15.60
12	4.5	12	0.0833	-0.137	-4.15	0.572	0.0190	4.516	-0.016	17.22
13	8	5	0.2	-0.021	-0.65	0.013	0.0004	8.014	-0.014	0.42
14	4.2	14	0.0714	-0.149	-4.45	0.666	0.0224	4.159	0.04	19.8
15	5	10	0.1	-0.121	-3.65	0.442	0.0146	5.016	-0.016	13.32
$\sum$	**129.75**	**120**	**3.3182**	**0**	**0**	**25.371**	**0.8463**	**129.75**	**0**	**760.565**

لدينا:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{15} = \frac{3.3182}{15} = 0.2212$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{15} = \frac{129.75}{15} = 8.65$$

ومنه نجد:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(Y_t - \overline{Y})\cdot(X_t - \overline{X})}{\sum(X_t - \overline{X})^2} = \frac{24.371}{0.8463} = 29.9761$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\cdot\overline{X} = 8.65 - 29.97(0.2212) = 2.018$$

وبالتالي يكون النموذج الخطي البسيط المقدر كمايلي:

$$\hat{Y}_i = 2.018 + 29.97 \cdot X_i$$

- حساب القيم المقدرة $\hat{Y}_t$ واستنتاج بواقي التقدير e_t.

لدينا:

$$\hat{Y}_i = 2.018 + 29.97 \cdot X_i$$

$$\hat{Y}_1 = 2.018 + 29.97 \cdot X_1 = 2.018 + 29.97 \cdot (0.1666) = 7.014 \quad \Rightarrow e_1 = Y_1 - \hat{Y}_1 = 7 - 7.014 = -0.014$$

$$\hat{Y}_2 = 2.018 + 29.97 \cdot X_2 = 2.018 + 29.97 \cdot (0.1111) = 5.439 \quad \Rightarrow e_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 = 5.4 - 5.439 = 0.05$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\hat{Y}_{15} = 2.018 + 29.97 \cdot X_{15} = 2.018 + 29.97 \cdot (0.100) = 5.016 \quad \Rightarrow e_{15} = Y_{15} - \hat{Y}_{15} = 5 - 5.016 = -0.016$$

ملاحظة:

لدينا:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_t = Y_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}) - \hat{\beta}X_t = Y_t - \bar{Y} + \hat{\beta}\bar{X} - \hat{\beta}X_t = Y_t - \bar{Y} - \hat{\beta}(X_t - \bar{X})$$

$$\Rightarrow \sum e_t = \sum\left(Y_t - \bar{Y} - \hat{\beta}(X_t - \bar{X})\right) = \sum(Y_t - \bar{Y}) - \hat{\beta}\sum(X_t - \bar{X}) = 0 - \hat{\beta}(0) = 0$$

لدينا أيضا:

$$\sum e_t = 0 \quad \Rightarrow \sum e_t = \sum(Y_t - \hat{Y}_t) = 0 \Rightarrow \sum Y_t - \sum \hat{Y}_t = 0 \Rightarrow \sum Y_t = \sum \hat{Y}_t$$

ثالثا: خصائص مقدرات OLS

المقدرات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هي متغيرات عشوائية، تحسب بدلالة كل من المتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_t، وتأخذ قيما حقيقية في العينة بعد تعويض Y_t و X_t بقيمها الحقيقية، حيث تعتبر المعلمات دالة خطية للمتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_t، والتي تعتبر أول خاصية من خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية، بالإضافة إلى خصائص أخرى سنوجزها فيما يلي:

1- خاصية عدم التحيز (Unbiased):

يقصد بالتحيز الفرق الموجود بين مقدر معين وتوقعه الرياضي(أمله الرياضي)، فإذا كان هذا الفرق مختلفا عن الصفر نقول عن ذلك المقدر بأنه مقدر متحيز، وإذا كان هذا الفرق معدوما فإن هذا المقدر مقدر غير متحيز. فيكون $\hat{\theta}$ مقدرا غير متحيز لـ θ إذا حقق الشرط التالي: $E(\hat{\theta}) = \theta$.

بنفس التعريف نقول أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هي مقدرات غير متحيزة إذا حققت الشرطين التاليين:

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha \qquad \text{and} \qquad E(\hat{\beta}) = \beta$$

1-1- بالنسبة لــ: $\hat{\beta}$:

$$E(\hat{\beta}) = E\left[\frac{\sum(Y_t - \overline{Y})(X_t - \overline{X})}{\sum(X_t - \overline{X})^2}\right]$$

نضع: $\sum(X_t - \overline{X}) = \sum x_t$

ومنه:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}) &= E\left[\frac{\sum(Y_t - \overline{Y})\cdot x_t}{\sum x_t^2}\right] = E\left[\frac{\sum x_t Y_t - \overline{Y}\sum x_t}{\sum x_t^2}\right] \\
&= E\left[\frac{\sum x_t\cdot(\alpha + \beta\cdot X_t + \varepsilon_t)}{\sum x_t^2}\right] = E\left[\frac{\alpha\sum x_t + \beta\sum x_t\cdot X_t + \sum x_t\varepsilon_t}{\sum x_t^2}\right] \\
&= E\left[\frac{\beta\sum x_t^2 + \sum x_t\varepsilon_t}{\sum x_t^2}\right] \\
&= \beta + E\left[\frac{\sum x_t\varepsilon_t}{\sum x_t^2}\right] = \beta + \left[\frac{\sum x_t E(\varepsilon_t)}{\sum x_t^2}\right]
\end{aligned}$$

ومنه: $E(\hat{\beta}) = \beta$ ، إذن $\hat{\beta}$ مقدر غير متحيز لـ: β

1-2- بالنسبة لــ: $\hat{\alpha}$

$$E(\hat{\alpha}) = E(\overline{Y} - \hat{\beta}\cdot\overline{X})$$

لدينا: $\overline{Y} = \alpha + \beta\cdot\overline{X} + \overline{\varepsilon}$

ومنه:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\alpha}) &= E(\alpha + \beta\cdot\overline{X} + \overline{\varepsilon} - \hat{\beta}\cdot\overline{X}) \\
&= E(\alpha - (\hat{\beta} - \beta)\cdot\overline{X} + \overline{\varepsilon}) \\
&= \alpha - E(\hat{\beta} - \beta)\cdot\overline{X} + E(\overline{\varepsilon}) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

إذن: $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ ، ومنه: $\hat{\alpha}$ مقدر غير متحيز لـ: α

2- أفضل مقدرات خطية غير متحيزة BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATORS 'BLUE' :

تنطلق هذه الفكرة من نظرية GAUSS-MARKOV والتي تقول أنه من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرتا طريقة المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ أفضل مقدرتين خطيتين وغير متحيزتين، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع

بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى[1]. وتتضمن هذه النظرية خاصية أقل تباين للمقدرات (MINIMAL VARIANCE)، ويمكن إثبات هذه الخاصية بعد ايجاد تباين مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية كمايلي:

2-1- تباين $\hat{\beta}$:

$$V(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^2 = E(\hat{\beta} - \beta)^2$$
$$= E\left[\beta + \frac{\sum x_t \varepsilon_t}{\left[\sum x_t^2\right]^2} - \beta\right]^2 = E\left[\frac{\sum x_t \varepsilon_t}{\left[\sum x_t^2\right]^2}\right]^2$$
$$= E\left[\frac{\left[\sum x_t \varepsilon_t\right]^2}{\left[\sum x_t^2\right]^2}\right] = E\left[\frac{\sum x_t^2 \varepsilon_t^2 + 2\sum\sum x_i \varepsilon_i x_j \varepsilon_j}{\left[\sum x_t^2\right]^2}\right]$$
$$= \left[\frac{\sum x_t^2 \cdot E(\varepsilon_t^2)}{\left[\sum x_t^2\right]^2}\right] = \frac{\delta_\varepsilon^2 \sum x_t^2}{\left[\sum x_t^2\right]^2}$$

ومنه:

$$V(\hat{\beta}) = \delta_\varepsilon^2 \left[{1}/{\sum x_t^2} \right]$$

2-2- تباين $\hat{\alpha}$:

$$V(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2 = E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 = E\left[\alpha - \left[\hat{\beta} - \beta\right]\overline{X} + \overline{\varepsilon} - \alpha\right]^2 = E\left[-\left[\hat{\beta} - \beta\right]\overline{X} + \overline{\varepsilon}\right]^2$$
$$= E\left[\left[\hat{\beta} - \beta\right]^2 \overline{X}^2 + \overline{\varepsilon}^2 - 2\overline{X}\overline{\varepsilon}\left[\hat{\beta} - \beta\right]\right] = \overline{X}^2 \cdot E\left[\hat{\beta} - \beta\right]^2 + E\left[\overline{\varepsilon}^2\right] - 2\overline{X} \cdot E\left[\overline{\varepsilon}\right] \cdot E\left[\hat{\beta} - \beta\right]$$
$$= \overline{X}^2 \left[\frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum x_t^2}\right] + \frac{\delta_\varepsilon^2}{n} = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2} + \frac{1}{n}\right]$$

ومنه:

$$V(\hat{\alpha}) = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2} + \frac{1}{n}\right]$$

بعد حساب تباين المقدرات سنعمل على إثبات خاصية أقل تباين كمايلي:

- بالنسبة لـ: $V(\hat{\beta})$

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum x_t^2} = \frac{\delta_\varepsilon^2 / n}{\sum x_t^2 / n}$$

بما أن: δ_ε^2 ثابت حسب فرضيات النموذج فإن:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\delta_\varepsilon^2 / n \right) = 0$$

من جهة أخرى لدينا:

[1] - شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2011، ص 25.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum x_t^2/n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum(X_t-\bar{X})^2/n\right)=\lim_{n\to+\infty}V(X)\neq 0$$

وبالتالي نجد أن:

$$\lim_{n\to+\infty}V(\hat{\beta})=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum x_t^2}\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(01)$$

- بالنسبة لـ: $V(\hat{\alpha})$

$$V(\hat{\alpha})=\delta_\varepsilon^2\left[\frac{\bar{X}^2}{\sum x_t^2}+\frac{1}{n}\right]=\delta_\varepsilon^2\left[\frac{\bar{X}^2/n}{\sum x_t^2/n}+\frac{1}{n}\right]=\delta_\varepsilon^2\left[\frac{\bar{X}^2/n}{V(X_t)}+\frac{1}{n}\right]$$

لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\bar{X}^2/n\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\bar{X}^2/n}{V(X_t)}\right)=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}V(\hat{\alpha})=\delta_\varepsilon^2\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\bar{X}^2/n}{V(X_t)}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\delta_\varepsilon^2[0+0]=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(02)$$

من (01) و(02) نستنتج أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية تمتاز بخاصية أقل تباين ممكن.

3- خاصية الاتساق (Consistent):

نقول عن مقدر $\hat{\theta}$ بأنه مقدر متسق (Consistent Estimator)، إذا حقق الشرطين التاليين:

$$i/\quad E(\hat{\theta})=\theta \qquad\qquad ii/\quad \lim_{n\to+\infty}V(\hat{\theta})=0$$

مما سبق نجد أن:

المقدر $\hat{\alpha}$ يحقق الشرطين:

$$i/\quad E(\hat{\alpha})=\alpha \qquad\qquad ii/\quad \lim_{n\to+\infty}V(\hat{\alpha})=0$$

المقدر $\hat{\beta}$ يحقق الشرطين:

$$i/\quad E(\hat{\beta})=\beta \qquad\qquad ii/\quad \lim_{n\to+\infty}V(\hat{\beta})=0$$

إذن نستنتج أن المقدرات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هي مقدرات متسقة للمعلمتين α و β على الترتيب.

4- التباين المشترك بين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$:

$$Cov(\hat{\alpha}.\hat{\beta})=E\left[[\hat{\alpha}-E(\hat{\alpha})]\cdot[\hat{\beta}-E(\hat{\beta})]\right]=E\left[\left[-\bar{X}(\hat{\beta}-\beta)+\bar{\varepsilon}\right]\cdot\left[\hat{\beta}-\beta\right]\right]$$

$$=E\left[\left[-\bar{X}(\hat{\beta}-\beta)^2\right]+\left[\bar{\varepsilon}(\hat{\beta}-\beta)\right]\right]=-\bar{X}\cdot E\left[\hat{\beta}-\beta\right]^2=-\bar{X}\cdot V(\hat{\beta})=-\bar{X}\left[\delta_\varepsilon^2/\sum x_t^2\right]$$

ومنه:
$$Cov(\hat{\alpha}.\hat{\beta}) = \delta_{\varepsilon}^{2}\left[-\bar{X}\big/\sum x_t^2\right]$$

1- تقدير تباين المتغير العشوائي ε_t:

من خلال النتائج السابقة يتضح لنا أنه يمكننا تقدير كل من α و β، إلا أنه لا يمكننا إيجاد تباين كل مقدر، لأنه بدلالة تباين المتغير العشوائي المجهول.

لدينا:
$$\begin{cases} Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \\ \\ \bar{Y} = \alpha + \beta \bar{X} + \bar{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow Y_t - \bar{Y} = \beta(X_t - \bar{X}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$

ولدينا:
$$\begin{cases} Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t + e_t \\ \\ \bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \bar{X} \end{cases} \Rightarrow Y_t - \bar{Y} = \hat{\beta}(X_t - \bar{X}) + e_t \Rightarrow e_t = Y_t - \bar{Y} - \hat{\beta}(X_t - \bar{X})$$

بالتعويض نجد:
$$e_t = \beta(X_t - \bar{X}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) - \hat{\beta}(X_t - \bar{X}) = -(\hat{\beta} - \beta)(X_t - \bar{X}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$
$$e_t^2 = (\beta - \hat{\beta})^2 (X_t - \bar{X})^2 + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 - 2\left[(\hat{\beta} - \beta)(X_t - \bar{X})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right]$$
$$\sum e_t^2 = (\beta - \hat{\beta})^2 \sum (X_t - \bar{X})^2 + \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 - 2\sum (\hat{\beta} - \beta)(X_t - \bar{X})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$
$$E(\sum e_t^2) = E(\beta - \hat{\beta})^2 \sum (X_t - \bar{X})^2 + E\left(\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right) - 2E\left(\sum (\hat{\beta} - \beta)(X_t - \bar{X})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right)$$

نقوم بحساب التوقع لكل طرف على حدى:
$$E(\beta - \hat{\beta})^2 \sum (X_t - \bar{X})^2 = v(\hat{\beta}) \sum (X_t - \bar{X})^2 = \frac{\delta_{\varepsilon}^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} \sum (X_t - \bar{X})^2 = \delta_{\varepsilon}^2$$
$$E\left(\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right) = E\left(\sum (\varepsilon_t^2 + \bar{\varepsilon}^2 - 2\bar{\varepsilon}\varepsilon_t)\right) = E\left(\sum \varepsilon_t^2 + n\bar{\varepsilon}^2 - 2\bar{\varepsilon}\sum \varepsilon_t\right) = E\left(\sum \varepsilon_t^2 + n\bar{\varepsilon}^2 - 2n\bar{\varepsilon}^2\right)$$
$$= \sum E(\varepsilon_t^2) - nE(\bar{\varepsilon}^2) = n\delta_{\varepsilon}^2 - nE\left(\frac{\sum \varepsilon_t}{n}\right)^2 = n\delta_{\varepsilon}^2 + n\left(\frac{E(\sum \varepsilon_t)^2}{n^2}\right)$$
$$= n\delta_{\varepsilon}^2 - n\left(\frac{n\delta_{\varepsilon}^2}{n^2}\right) = n\delta_{\varepsilon}^2 - \delta_{\varepsilon}^2 = (n-1)\delta_{\varepsilon}^2$$
$$E\left(\sum (\hat{\beta} - \beta)(X_t - \bar{X})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right) = E\sum\left[\frac{\sum (X_t - \bar{X})\varepsilon_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2}(X_t - \bar{X})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right]$$
$$= E\left[\left(\frac{\sum (X_t - \bar{X})^2 \varepsilon_t^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}\right)\right] = \frac{\sum (X_t - \bar{X})^2 \delta_{\varepsilon}^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \delta_{\varepsilon}^2$$

إذن:
$$E(\sum e_t^2) = \delta_{\varepsilon}^2 + (n-1)\delta_{\varepsilon}^2 - 2\delta_{\varepsilon}^2 = (n-2)\delta_{\varepsilon}^2$$

وبالتالي يكون $\sum e_t^2$ مقدرا متحيزا لـ δ_{ε}^2. ويمكن استنتاج المقدر غير المتحيز لـ δ_{ε}^2 كمايلي:

$$\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sum e_t^2}{n-2}$$

ومنه يكون التباين المقدر لـ: $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ كمايلي:

$$\hat{V}(\hat{\alpha}) = \hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2} = \hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}\left[\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2} + \frac{1}{n}\right]$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2} = \hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}\left[{1}/{\sum x_t^2}\right]$$

<u>مثال</u>: من المثال السابق قدر تباين المتغير العشوائي، ثم استنتج التباين المقدر للمقدرات

	e_i	e_i^2
	-0.014	0.0002
	0.050	0.0025
	-0.01	0.0001
	-0.012	0.0001
	-0.024	0.0006
	0.005	0.0000
	0.098	0.0097
	-0.015	0.0002
	-0.006	0.0000
	-0.017	0.0002
	-0.043	0.0019
	-0.016	0.0002
	-0.014	0.0001
	0.04	0.0016
	-0.016	0.0002
$\sum$	**0**	**0.01834**

وبالتالي نجد:

$$\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{0.01834}{15-2} = 0.001410$$

أما التباينات المقدرة للمقدرات فتكون كمايلي:

$$\hat{V}(\hat{\alpha}) = \hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^2 = \hat{\delta}_\varepsilon^2\left[\frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2}+\frac{1}{n}\right] = 0.001410\cdot\left[\frac{(0.2212)^2}{0.8463}+\frac{1}{15}\right] = 0.00017 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\alpha}} = \sqrt{0.00017} = 0.01325$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\delta}_{\hat{\beta}}^2 = \hat{\delta}_\varepsilon^2\left[1\Big/\sum x_i^2\right] = 0.001410\cdot\left[\frac{1}{0.8463}\right] = 0.0016 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.0016} = 0.0408$$

2- بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج:

بعد تحديد توزيع كل من المقدرات $\hat{\alpha}$ و$\hat{\beta}$، سنعمل على تكوين مجالات ثقة تنتمي إليها معلمات النموذج، وهذا عند مستوى معنوية معين، حيث احتمال أن تنتمي معلمة النموذج إلى مجال الثقة يساوي الواحد مطروحا منه مستوى المعنوية.

نعلم أنه في حالة العينات الكبيرة $(n \geq 30)$ وكان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي كمايلي:

$$X \to N(\mu \,.\, \delta_X^2)$$

فإنه حسب نظرية النهايات المركزية:

$$Z = \frac{X-\mu}{\delta_x} \to N(0\,.\,1)$$

وبما أن المقدرات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ تتبع أيضا التوزيع الطبيعي، بمتوسط وتباين وجدناهما سابقا فإن:

$$\hat{\alpha} \to N\left(\alpha\,.\delta_\varepsilon^2\left(\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2}+\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2\left(\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2}+\frac{1}{n}\right)}} \to N(0\,.\,1)$$

$$\hat{\beta} \to N\left(\beta\,.\delta_\varepsilon^2\left(\frac{1}{\sum x_t^2}\right)\right) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2\left(\frac{1}{\sum x_t^2}\right)}} \to N(0\,.\,1)$$

بالمقابل نعلم أن تباين المتغير العشوائي مجهول، حيث يتم تقديره بالعلاقة: $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2}$.

وبما أن: $(n-2)\cdot\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \to \chi_{n-2}^2$

وبالتالي يتم الانتقال من التوزيع الطبيعي إلى توزيع STUDENT كما يلي:

$$\frac{N(0.1)}{\sqrt{\chi_{n-2}^2\big/n-2}} \to St\,(n-2)$$

بالعودة إلى المقدرات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نجد:

$$\frac{\dfrac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2\left(\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2}+\frac{1}{n}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)\cdot\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}}{(n-2)}}} = \frac{\dfrac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2\left(\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2}+\frac{1}{n}\right)}}}{\sqrt{\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2\left(\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2}+\frac{1}{n}\right)}}\cdot\sqrt{\frac{\delta_\varepsilon^2}{\hat{\delta}_\varepsilon^2}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\delta}_\varepsilon^2\left(\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2}+\frac{1}{n}\right)}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^2}} \to St(n-2)$$

$$\frac{\dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\delta_{\varepsilon}^{2}\left(\dfrac{1}{\sum x_{t}^{2}}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)\cdot\dfrac{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\delta_{\varepsilon}^{2}}}{(n-2)}}}=\frac{\dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\delta_{\varepsilon}^{2}\left(\dfrac{1}{\sum x_{t}^{2}}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\delta_{\varepsilon}^{2}}}}=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\delta_{\varepsilon}^{2}\left(\dfrac{1}{\sum x_{t}^{2}}\right)}}\cdot\sqrt{\frac{\delta_{\varepsilon}^{2}}{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}}=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}\left(\dfrac{1}{\sum x_{t}^{2}}\right)}}=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}}\rightarrow St(n-2)$$

بعد ايجاد التوزيع الاحتمالي للمقدرات $\hat{\alpha}$ و$\hat{\beta}$ يمكننا بناء مجالات ثقة تنتمي إليها معلمات النموذج، وهذا عند مستوى معنوية α (يجب التمييز بين مستوى المعنوية α ومعلمة النموذج α) كمايلي:

- بالنسبة للمعلمة α:

$$P\left(-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}}\leq St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}\leq\hat{\alpha}-\alpha\leq St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\hat{\alpha}-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}\leq\alpha\leq\hat{\alpha}+St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\alpha\in\left[\hat{\alpha}-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}\ .\ \hat{\alpha}+St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}\right]\right)=1-\alpha$$

- بالنسبة للمعلمة β:

$$P\left(-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}}\leq St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}\leq\hat{\beta}-\beta\leq St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\hat{\beta}-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}\leq\beta\leq\hat{\beta}+St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\beta\in\left[\hat{\beta}-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}\ .\ \hat{\beta}+St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}\right]\right)=1-\alpha$$

مثال: من المثال السابق يمكن بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$ كمايلي:

- بالنسبة للمعلمة α:

$$P\left(\alpha\in\left[\hat{\alpha}-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}\ .\ \hat{\alpha}+St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}\right]\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\alpha\in\left[2.018-St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{0.00017}\ .\ 2.018+St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{0.00017}\right]\right)=1-0.05=0.95$$

من جدول Student نجد أن القيمة المجدولة عند درجة حرية (15-2=8) وعند مستوى معنوية $\alpha=5\%$ هي:

$$St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}=St_{15-2}^{\frac{5}{2}}=St_{13}^{2.5\%}=2.160$$

وبالتالي يكون مجال الثقة للمعلمة α كما يلي:

$$P(\alpha \in [2.018 - 2.160 \cdot \sqrt{0.00017} \quad . \quad 2.018 + 2.160 \cdot \sqrt{0.00017}]) = 0.95$$
$$P(\alpha \in [1.9898 \quad . \quad 2.0461]) = 0.95$$

- بالنسبة للمعلمة β:

$$P\left(\beta \in \left[\hat{\beta} - St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^2} \quad . \quad \hat{\beta} + St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^2}\right]\right) = 1 - \alpha$$
$$\Rightarrow P(\beta \in [29.97 - 2.160 \cdot \sqrt{0.0016} \quad . \quad 29.97 + 2.160\sqrt{0.0016}]) = 0.95$$
$$\Rightarrow P(\beta \in [29.8836 \quad . \quad 30.0564]) = 0.95$$

رابعا: تقييم النموذج الخطي البسيط

يتم تقييم نموذج الانحدار الخطي البسيط باستعمال المعايير التالية:

1- المعايير الاقتصادية:

تتعلق بحجم وإشارة المعلمات المقدرة، لأن النظرية الاقتصادية تضع قيودا مسبقة على حجم وإشارة المعلمات، فإذا ما جاءت هذه المعلمات على عكس نما تقرره النظرية مسبقا فإن هذا يمكن أن يكون مبررا كافيا لرفض هذه المعلمات.

2- المعايير الإحصائية:

تتمثل هذه المعايير فيما يلي:

2-1- تحليل التباين ومعامل التحديد:

تعتبر بواقي التقدير e_t مقياسا لمدى تمثيل النموذج المقدر للنموذج الحقيقي، وهو ما يعرف بجودة التوفيق، فكلما كانت البواقي كبيرة قلت وضعفت جودة التمثيل والعكس صحيح.

لدينا:

$$Y_t = \hat{Y}_t + e_t$$
$$\Rightarrow Y_t - \overline{Y} = \hat{Y}_t - \overline{Y} + e_t$$
$$\Rightarrow (Y_t - \overline{Y})^2 = (\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 + 2(\hat{Y}_t - \overline{Y}) \cdot e_t + e_t^2$$
$$\Rightarrow \Sigma(Y_t - \overline{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 + 2\Sigma(\hat{Y}_t - \overline{Y}) \cdot e_t + \Sigma e_t^2$$

بالمقابل لدينا: $\Sigma(\hat{Y}_t - \overline{Y}) \cdot e_t = 0$، وبالتالي نجد:

$$\Sigma(Y_t - \overline{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 + \Sigma e_t^2$$

هذه المعادلة الأخيرة تعرف بمعادلة تحليل التباين، وهي تتكون من ثلاث أجزاء كما يلي:

$\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2$: مجموع مربعات الانحرافات الكلية (TOTAL SUM OF SQUARES (TSS)).

$\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2$: مجموع مربعات الانحرافات المفسرة (EXPLAINED SUM OF SQUARES (ESS)).

Σe_t^2: مجموع مربعات البواقي (RESIDUAL SUM OF SQUARES (RSS))

ومنه يمكن إعادة صياغة معادلة تحليل التباين على النحو التالي:

$$TSS = ESS + RSS$$

انطلاقا من معادلة تحليل التباين يمكن استخلاص مؤشر تقاس به القدرة التفسيرية للنموذج، والمتمثل في ما يعرف بمعامل التحديد، والذي نرمز له بالرمز R^2، وهو مؤشر يقيس النسبة المفسرة من التغير الكلي بدلالة خط الانحدار، أي نسبة مجموع مربعات الانحرافات المفسرة إلى مجموع مربعات الانحرافات الكلية، تتراوح قيمته بين الصفر والواحد، أي: $0 \le R^2 \le 1$، فكلما اقترب R^2 من الواحد، تكون للنموذج قدرة تفسيرية عالية، وكلما اقترب من الصفر، دل ذلك على ضعف القدرة التفسيرية للنموذج. بصيغة رياضية يكتب معامل التحديد كما يلي:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2}$$

$$\frac{TSS}{TSS} = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS} \Rightarrow 1 = R^2 + \frac{RSS}{TSS} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\Sigma e_t^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2}$$

كما توجد أيضا علاقات أخرى تستعمل لإيجاد معامل التحديد، نذكر من أهمها:

$$R^2 = \frac{\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2} = \frac{\Sigma((\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_t)-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\overline{X}))^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2} = \frac{\Sigma(\hat{\beta}X_t-\hat{\beta}\overline{X})^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2}$$

$$= \frac{\Sigma\hat{\beta}^2(X_t-\overline{X})^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}^2\,\Sigma(X_t-\overline{X})^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}^2\,\dfrac{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}{n}}{\dfrac{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2}{n}} = \frac{\hat{\beta}^2 V(X_t)}{V(Y_t)}$$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^2 V(X_t)}{V(Y_t)} = \frac{\left(\dfrac{cov(X_t.Y_t)}{V(X_t)}\right)^2 V(X_t)}{V(Y_t)} = \frac{\dfrac{(cov(X_t.Y_t))^2}{V(X_t)}}{V(Y_t)} = \frac{(cov(X_t.Y_t))^2}{V(X_t)\cdot V(Y_t)}$$

$$= \left(\frac{cov(X_t.Y_t)}{\sqrt{V(X_t)}\cdot\sqrt{\cdot V(Y_t)}}\right)^2 = (r_{X_t\,.\,Y_t})^2$$

تشير العلاقة الأخيرة إلى أن معامل التحديد في النموذج الخطي البسيط (متغيرين فقط، أحدهما تابع والآخر مستقل) ما هو إلا مربع معامل الارتباط الخطي البسيط بين متغيري النموذج.

أما جدول تحليل التباين ANALYSIS OF VARIANCE (ANOVA) فيأخذ الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
المتغير المستقل X_t	$ESS=\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2$	1	$\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2/1$
البواقي e_t	$RSS=\sum e_t^2$	$n-2$	$\sum e_t^2/n-2$
المجموع	$TSS=\sum(Y_t-\overline{Y})^2$	$n-1$	

مثال: من المثال السابق أوجد معامل التحديد R^2، ثم كون جدول ANOVA

بعد تقدير النموذج وبعد تقدير تباين المتغير العشوائي، فإن أسرع علاقة لإيجاد معامل التحديد هي:

$$R^2=1-\frac{\sum e_i^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2}=1-\frac{0.01834}{760.565}=0.9999$$

$$R^2=\frac{\hat{\beta}^2\sum(X_i-\overline{X})^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2}=\frac{(29.9761)^2(0.8463)}{760.565}=\frac{760.546}{760.565}=0.9999$$

$$R^2=\left(r_{X_t.Y_t}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{cov}(X_i.Y_i)}{\sqrt{V(X_i)}\cdot\sqrt{\cdot V(Y_i)}}\right)^2=\left(\frac{\frac{25.371}{15}}{\sqrt{\frac{0.8463}{15}}\sqrt{\frac{760.565}{15}}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{25.371}{\sqrt{0.8463}\sqrt{760.565}}\right)^2=\left(\frac{25.371}{25.372}\right)^2=(0.9999)^2=0.9999$$

$R^2=0.9999$، أي أن للنموذج جودة توفيق عالية، وأن قدرته التفسيرية مرتفعة، كما نستنتج من معامل التحديد أيضا أن 99.99% من تغيرات درجة المخاطرة مفسر بتغيرات درجة التنوع، أما النسبة المتبقية والمقدرة بـ: 00.01% فهي مفسرة بعوامل أخرى غير مدرجة بالنموذج.

أما جدول تحليل التباين ANOVA فيكون كمايلي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
المتغير المستقل X_t	$ESS=760.546$	1	$760.546/1=760.546$
البواقي e_t	$RSS=0.01834$	$15-2=3$	$0.0834/13=0.00141$
المجموع	$TSS=760.565$	$15-1=14$	

2-2- اختبارات المعنوية:

تتمثل هذه الاختبارات فيما يلي:

2-2-1- اختبار STUDENT:

يستعمل هذا الاختبار لدراسة المعنوية الجزئية لمعلمات النموذج عند مستوى معنوية معين، حيث نختبر المعنوية الاحصائية لمعامل الانحدار (β)، والتي تسمح بالحكم على معنوية العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل، كما نختبر المعنوية الاحصائية للحد الثابت (α)، والتي تسمح بالحكم على جدوى وجود الحد الثابت في النموذج من عدمها.

بالنسبة لــ β

يأخذ اختبار STUDENT الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

تشير فرضية العدم H_0 إلى عدم وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل، بينما تشير الفرضية البديلة H_1 إلى وجود علاقة ذات دلالة احصائية.

مما سبق لدينا:

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}}}} \rightarrow St(n-2)$$

تحت ظل الفرضية $H_0 : \beta = 0$ نجد أن $\frac{\hat{\beta}-0}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}}}}$ تتبع أيضا توزيع STUDENT بدرجة حرية تساوي $(n-2)$، حيث يقوم هذا الاختبار على مقارنة إحصائية STUDENT المحسوبة $St_{cal} = \left|\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}}}}\right|$ مع الإحصائية المجدولة من جدول STUDENT عند درجة حرية $(n-2)$ ومستوى معنوية $\alpha/2$، أي $St_{tab} = St^{\alpha/2}_{n-2}$. (في حالة $(n-2) > 30$ فإن $St_{tab} = 1.96$).

أما قرار الاختبار فيكون كما يلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal} \geq St_{tab}$، و منه $\beta \neq 0$، وبالتالي وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.
- نقبل الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal} < St_{tab}$، و منه $\beta = 0$، وبالتالي عدم وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.
- بالنسبة لــ α

يأخذ اختبار STUDENT الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \end{cases}$$

تشير فرضية العدم H_0 إلى عدم وجود دلالة احصائية لإدراج الحد الثابت في النموذج ، بينما تشير الفرضية البديلة H_1 إلى أن وجود الحد الثابت في النموذج له دلالة احصائية.

مما سبق لدينا:

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}} \rightarrow St(n-2)$$

تحت ظل الفرضية $H_0:\alpha=0$ نجد أن $\frac{\hat{\alpha}-0}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}}$ تتبع أيضا توزيع STUDENT بدرجة حرية تساوي $(n-2)$، حيث يقوم هذا الاختبار على مقارنة إحصائيةSTUDENT المحسوبة $St_{cal}=\left|\frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}^{2}}}\right|$ مع الإحصائية المجدولة من جدول STUDENT عند درجة حرية $(n-2)$ ومستوى معنوية $\alpha/2$، أي $St_{tab}=St_{n-2}^{\alpha/2}$.

أما قرار الاختبار فيكون كما يلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal}\geq St_{tab}$، و منه $\alpha\neq 0$، وبالتالي وجود الحد الثابت في النموذج له دلالة احصائية.
- نقبل الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal}<St_{tab}$، و منه $\alpha=0$، وبالتالي عدم وجود دلالة احصائية لإدارج الحد الثابت في النموذج.

مثال: من المثال السابق يمكننا اجراء اختبار STUDENT عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$ كمايلي:

✍ بالنسبة لــ: β

يأخذ اختبار STUDENT الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0:\beta=0 \\ H_1:\beta\neq 0 \end{cases}$$

إحصائيةSTUDENT المحسوبة:

$$St_{cal}=\left|\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^{2}}}\right|=\left|\frac{29.97}{0.040}\right|=734.20$$

إحصائيةSTUDENT المجدولة:

$$St_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}=St_{15-2}^{\frac{5}{2}}=St_{15}^{2.5\%}=2.160$$

القرار: نلاحظ أن $St_{cal}\geq St_{tab}$، وبالتالي نقبل الفرضية $\beta\neq 0$، أي وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين الانفاق على الاعلانات وعوائد المبيعات في هذه الشركة.

✍ بالنسبة لــ: α

يأخذ اختبار STUDENT الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0:\alpha=0 \\ H_1:\alpha\neq 0 \end{cases}$$

إحصائية STUDENT المحسوبة:

$$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\alpha}}}} \right| = \left| \frac{2.018}{0.0132} \right| = 152.33$$

إحصائية STUDENT المجدولة:

$$St^{\frac{\alpha}{2}}_{n-2} = St^{\frac{5}{2}}_{10-2} = St^{2.5\%}_{8} = 2.160$$

القرار: نلاحظ أن $St_{cal} \geq St_{tab}$، وبالتالي نقبل الفرضية $\alpha \neq 0$، أي وجود الحد الثابت في النموذج له دلالة احصائية.

2-2-2- اختبار FISHER:

يوضح لنا هذا الاختبار المعنوية الكلية للنموذج بصورة عامة، و يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = \beta = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \quad \vee \quad \beta = 0 \end{cases}$$

نقوم بحساب إحصائية FISHER التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / 2-1}{(1-R^2) / n-2}$$

الإحصائية F_{cal} تتبع توزيع FISHER بدرجة حرية $v_1 = 1$ و $v_2 = n-2$، أي $F^{\alpha=5\%}_{(1.n-2)}$.

و يكون قرار الاختبار كمايلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $F_{cal} \geq F^{\alpha=5\%}_{(1.n-2)}$، و منه $\alpha \neq 0$ أو $\beta \neq 0$.
- نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $F_{cal} < F^{\alpha=5\%}_{(1.n-2)}$، و منه $\alpha = 0$ و $\beta = 0$.

مثال: من المثال السابق يكون اختبار FISHER عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ كما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = \beta = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \quad \vee \beta = 0 \end{cases}$$

إحصائية FISHER المحسوبة:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / 2-1}{(1-R^2) / n-2} = \frac{0.9999 / 1}{(1-0.9999) / 15-2} = 539056.7$$

إحصائية FISHER المجدولة:

$$F^{\alpha=5\%}_{(1.n-2)} = F^{\alpha=5\%}_{(1.15)} = 4.67$$

القرار: نلاحظ أن $F_{cal} \geq F_{tab}$ ، وبالتالي نقبل الفرضية $\beta = 0 \quad \vee \quad H_1 : \alpha \neq 0$ ، أي أن النموذج ككل له معنوية إحصائية عند مستوى $\alpha = 5\%$.

خامسا: التنبؤ في النموذج الخطي البسيط

بعد تقدير معلمات النموذج الخطي البسيط، يكون في الامكان حساب التنبؤ لأفق معين، فالنموذج المقدر للفترة $t = 1 \cdots\cdots n$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t + e_t$$

بافتراض أن المتغير المستقل X يأخذ قيمة معلومة في اللحظة $(n+1)$، أي X_{n+1} ، فإن التنبؤ بقيمة المتغير التابع Y في اللحظة $n+1$ يكون كما يلي:

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_{n+1}$$

خطأ التنبؤ يعطى كما يلي:

$$e_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = (\alpha + \beta X_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_{n+1}) = (\alpha - \hat{\alpha}) + (\beta - \hat{\beta}) X_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

ولدينا:

$$E(e_{n+1}) = E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) = E\big((\alpha - \hat{\alpha}) + (\beta - \hat{\beta}) X_{n+1} + \varepsilon_{n+1}\big)$$
$$= E(\alpha - \hat{\alpha}) + E(\beta - \hat{\beta}) X_{n+1} + E(\varepsilon_{n+1}) = 0$$
$$V(e_{n+1}) = V(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) = V\big((\alpha - \hat{\alpha}) + (\beta - \hat{\beta}) X_{n+1} + \varepsilon_{n+1}\big) = V\big(-(\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta) X_{n+1} + \varepsilon_{n+1}\big)$$
$$= V(-(\hat{\alpha} - \alpha)) + V\big(-(\hat{\beta} - \beta) X_{n+1}\big) + V(\varepsilon_{n+1}) + 2Cov\big((-(\hat{\alpha} - \alpha))(-(\hat{\beta} - \beta) X_{n+1})\big)$$
$$= V(\hat{\alpha}) + X_{n+1}^2 V(\hat{\beta}) + \delta_\varepsilon^2 + 2X_{n+1} Cov(\hat{\alpha}.\hat{\beta}.)$$

مما سبق لدينا:

$$V(\hat{\alpha}) = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2} + \frac{1}{n}\right] = \overline{X}^2 V(\hat{\beta}) + \frac{\delta_\varepsilon^2}{n}$$

$$V(\hat{\beta}) = \delta_\varepsilon^2 \left[1 \Big/ \sum x_t^2\right]$$

$$Cov(\hat{\alpha}.\hat{\beta}) = \delta_\varepsilon^2 \left[-\overline{X} \Big/ \sum x_t^2\right] = -\overline{X} V(\hat{\beta})$$

بالتعويض نجد:

$$V(e_{n+h}) = \overline{X}^2 V(\hat{\beta}) + \frac{\delta_\varepsilon^2}{n} + X_{n+1}^2 V(\hat{\beta}) + \delta_\varepsilon^2 - 2\overline{X} X_{n+1} V(\hat{\beta}) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{n} + \delta_\varepsilon^2 + \left(\overline{X}^2 + X_{n+1}^2 - 2\overline{X} X_{n+1}\right) V(\hat{\beta})$$
$$= \frac{\delta_\varepsilon^2}{n} + \delta_\varepsilon^2 + (X_{n+1} - \overline{X})^2 V(\hat{\beta}) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{n} + \delta_\varepsilon^2 + (X_{n+1} - \overline{X})^2 \left(\frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum (X_t - \overline{X})^2}\right)$$
$$= \left(\frac{(X_{n+1} - \overline{X})^2}{\sum (X_t - \overline{X})^2} + \frac{1}{n} + 1\right) \delta_\varepsilon^2$$

من فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء نستنتج:

$$e_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} \to N\left(0 \quad . \quad \left(\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}+\frac{1}{n}+1\right)\delta_\varepsilon^2\right)$$

$$\frac{Y_{n+1}-\hat{Y}_{n+1}}{\sqrt{\left(\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}+\frac{1}{n}+1\right)\delta_\varepsilon^2}} \to N(0.1)$$

بالمقابل نعلم أن تباين المتغير العشوائي مجهول، حيث يتم تقديره بالعلاقة: $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2}$.

وبما أن:

$$(n-2)\cdot\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \to \chi^2_{n-2}$$

وبالتالي يتم الانتقال من التوزيع الطبيعي إلى توزيع STUDENT كما يلي:

$$\frac{N(0.1)}{\sqrt{\chi^2_{n-2}/n-2}} \to St\,(n-2)$$

نجد أن:

$$\frac{\dfrac{Y_{n+1}-\hat{Y}_{n+1}}{\sqrt{\left(\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}+\frac{1}{n}+1\right)\delta_\varepsilon^2}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)\cdot\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}}{n-2}}} \to St(n-2)$$

$$\frac{Y_{n+1}-\hat{Y}_{n+1}}{\sqrt{\left(\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}+\frac{1}{n}+1\right)\delta_\varepsilon^2}}\sqrt{\frac{\delta_\varepsilon^2}{\hat{\delta}_\varepsilon^2}} = \frac{Y_{n+1}-\hat{Y}_{n+1}}{\sqrt{\left(\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}+\frac{1}{n}+1\right)\hat{\delta}_\varepsilon^2}} \to St(n-2)$$

وبالتالي يمكن بناء مجال ثقة لـ: Y_{n+1} عند مستوى معنوية معين كما يلي:

$$Y_{n+1} \in \left[\hat{Y}_{n+1} \pm St^{\alpha/2}_{(n-2)}\sqrt{\left(\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}+\frac{1}{n}+1\right)\hat{\delta}_\varepsilon^2}\right]$$

$$Y_{n+1} \in \left[\hat{Y}_{n+1} - St^{\alpha/2}_{(n-2)}\sqrt{\left(\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}+\frac{1}{n}+1\right)\hat{\delta}_\varepsilon^2} \quad . \quad \hat{Y}_{n+1} + St^{\alpha/2}_{(n-2)}\sqrt{\left(\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}+\frac{1}{n}+1\right)\hat{\delta}_\varepsilon^2}\right]$$

مثال: من المثال السابق أوجد درجة المخاطرة لمحفظة تبلغ درجة تنوعها 17.

$$\hat{Y}_{16} = \hat{Y}_{15+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_{15+1} = 2.018 + 27.97\left(\frac{1}{17}\right) = 3.7821$$

أما مجال الثقة فيكون كمايلي:

لدينا:

$$n = 15$$

$$\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2} = 0.001410$$

$$\sum (X_t - \overline{X})^2 = 0.8463$$

$$\overline{X} = 0.2212$$

$$St_{13}^{2.5\%} = 2.160$$

$$X_{16} = 1/17$$

$$\hat{Y}_{16} = 3.7821$$

إذن:

$$Y_{2019} \in \left[3.7821 \pm 2.160 \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{1}{17} - 0.2212 \right)^2}{0.8463} + \frac{1}{15} + 1 \right) \cdot 0.001410} \right]$$

$$Y_{2019} \in \left[3.7821 - 2.160\sqrt{0.001547} \quad . \quad 3.7821 + 2.160\sqrt{0.001547} \right]$$

$$Y_{2019} \in \left[3.7821 - 0.0849 \quad . \quad 3.7821 + 0.0849 \right]$$

$$Y_{2019} \in \left[3.6971 \quad . \quad 3.8670 \right]$$

تمارين المحور الثاني

التمرين الأول:

ليكن لديك النموذج الخطي البسيط التالي:

$$Y_t = \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$$

حيث ε_t متغير عشوائي من خصائصه:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad . \quad V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \delta_\varepsilon^2 \quad . \quad Cov(\varepsilon_i . \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad . \quad \varepsilon_t \to N(0 . \delta_\varepsilon^2)$$

المطلوب:

1- ما هي الفرضيات الواجب توفرها لتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معلمات هذا النموذج؟

2- في ظل توفر هذه الشروط، ما هي مقدرات أو تقديرات β ؟

3- برهن أن هذه المقدرات مقدرات غير متحيزة.

4- أوجد تباين هذه المقدرات.

5- أثبت أن: $R^2 = \hat{\beta}^2 \cdot \left(\frac{\delta_X^2}{\delta_Y^2}\right)$. حيث: σ_x^2: تباين X و δ_Y^2: تباين Y.

التمرين الثاني:

قام باحث بتقدير نموذج اقتصادي يؤخذ الإنتاج الشهري كمتغير تابع وتكاليف الإنتاج كمتغير مستقل، فحصل على النتائج التالية:

$$\hat{Y}_t = \underset{(65.02)}{4250} + \underset{(0.1)}{1} \cdot X_t$$

$$n = 52$$

حيث: (.) الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة.

المطلوب:

1- برهن أن $R^2 = 2/3$.

2- اختبر المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

حلول تمارين المحور الثاني:

حل التمرين الأول:

ليكن لديك النموذج الخطي البسيط التالي:

$$Y_t = \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$$

حيث ε_t متغير عشوائي من خصائصه:

$$E(\varepsilon_t)=0 \quad . \quad V(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\delta_\varepsilon^2 \quad . \quad Cov(\varepsilon_i . \varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0 \quad \forall i \neq j \quad . \quad \varepsilon_t \to N(0 . \delta_\varepsilon^2)$$

1- الفرضيات الواجب توفرها لتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معلمات هذا النموذج هي:

1-1- الفرضيات الاحتمالية: تدور هذه الفرضيات حول طبيعة وشكل المتغير العشوائي، وهي:

- $E(\varepsilon_t)=0 \quad \forall t$
- $V(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\delta_\varepsilon^2 \quad \forall t$
- $Cov(\varepsilon_i\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0 \quad \forall i \neq j$
- $Cov(x_t . \varepsilon_t)=0$
- $\varepsilon_t \to N(0 . \delta_\varepsilon^2)$

1-2- فرضيات أخرى:

- المتغيرات Y و X محددة بدون خطأ.
- قيم المتغير X غير عشوائية.

2- ظل توفر هذه الشروط تكون مقدرات أو تقديرات β كمايلي:

- النموذج المقدر: $\hat{Y}_t = \hat{\beta} \cdot X_t$.
- انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y - \hat{\beta} \cdot X_t$.
- مجموع مربعات البواقي: $\sum e_t^2 = \Sigma(Y_t - \hat{\beta} \div X_t)^2$.

فنقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ: $\sum e_t^2$ بالنسبة إلى $\hat{\beta}$، و نجعلها مساوية للصفر.

نضع: $S = \sum e_t^2 = \Sigma(Y - \hat{\beta} \cdot X_t)^2$.

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial \Sigma(Y_t - \hat{\beta}X_t)^2}{\partial \hat{\beta}} = -2\Sigma(Y_t - \hat{\beta}X_t) \cdot X_t$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = 0 \Rightarrow -2\Sigma(Y_t - \hat{\beta}X_t) \cdot X_t = 0 \Rightarrow \Sigma(Y_t - \hat{\beta}X_t) \cdot X_t = 0 \Rightarrow \sum Y_t X_t - \hat{\beta}\sum X_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum Y_t X_t - \hat{\beta}\sum X_t^2 = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum Y_t X_t}{\sum X_t^2}$$

3- البرهان أن هذه المقدرات مقدرات غير متحيزة.

$$E(\hat{\beta}) = E\left[\frac{\sum Y_t \cdot X_t}{\sum X_t^2}\right] = E\left[\frac{\sum X_t \cdot (\beta \cdot X_t + \varepsilon_t)}{\sum X_t^2}\right] = E\left[\frac{\beta \sum \cdot X_t^2 + \sum X_t \varepsilon_t}{\sum X_t^2}\right]$$

$$= \beta + E\left[\frac{\sum X_t \varepsilon_t}{\sum X_t^2}\right] = \beta + \left[\frac{\sum X_t E(\varepsilon_t)}{\sum X_t^2}\right] = \beta$$

ومنه: $E(\hat{\beta}) = \beta$ ، إذن $\hat{\beta}$ مقدر غير متحيز لـ: β

-4 إيجاد تباين هذه المقدرات.

$$V(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^2 = E(\hat{\beta} - \beta)^2$$

$$= E\left[\beta + \frac{\sum X_t \varepsilon_t}{\left[\sum X_t^2\right]} - \beta\right]^2 = E\left[\frac{\sum X_t \varepsilon_t}{\left[\sum X_t^2\right]}\right]^2$$

$$= E\left[\frac{\left[\sum X_t \varepsilon_t\right]^2}{\left[\sum X_t^2\right]^2}\right] = E\left[\frac{\sum X_t^2 \varepsilon_t^2 + 2\sum\sum X_i \varepsilon_i X_j \varepsilon_j}{\left[\sum X_t^2\right]^2}\right]$$

$$= \left[\frac{\sum X_t^2 \cdot E(\varepsilon_t^2)}{\left[\sum X_t^2\right]^2}\right] = \frac{\delta_\varepsilon^2 \sum X_t^2}{\left[\sum X_t^2\right]^2} = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum X_t^2}$$

-5 إثبات أن: $R^2 = \hat{\beta}^2 \cdot \left(\frac{\delta_X^2}{\delta_Y^2}\right)$. حيث: σ_x^2: تباين X و δ_Y^2: تباين Y .

لدينا:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2} = \frac{\sum(\hat{\beta}X_t - \hat{\beta}\overline{X})^2}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2} = \frac{\sum \hat{\beta}^2 (X_t - \overline{X})^2}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum(X_t - \overline{X})^2}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}^2 \frac{\sum(X_t - \overline{X})^2}{n}}{\frac{\sum(Y_t - \overline{Y})^2}{n}} = \hat{\beta}^2 \cdot \left(\frac{\delta_X^2}{\delta_Y^2}\right)$$

حل التمرين الثاني:

قام باحث بتقدير نموذج اقتصادي يؤخذ الإنتاج الشهري كمتغير تابع وتكاليف الإنتاج كمتغير مستقل، فحصل على النتائج التالية:

$$\hat{Y}_t = \underset{(65.02)}{4250} + \underset{(0.1)}{1} \cdot X_t$$

$$n = 52$$

حيث: (.) الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة.

-1 البرهان أن $R^2 = 2/3$:

لدينا: $R^2 = \hat{\beta}^2 \frac{\sum(X_t - \overline{X})^2}{\sum(Y_t - Y)^2}$ ، وحسب معطيات التمرين لدينا:

$$\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})} = 0.1 \Rightarrow \hat{V}(\hat{\beta}) = 0.01$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}\right) = \frac{\Sigma e_t^2}{n-2}\left(\frac{1}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}\right)$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = 0.01 = \frac{\Sigma e_t^2}{50}\left(\frac{1}{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}\right) \Rightarrow \Sigma e_t^2 = 0.01\cdot 50\cdot \Sigma(X_t-\overline{X})^2 = \frac{1}{2}\Sigma(X_t-\overline{X})^2$$

ولدينا أيضا:

$$\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2 + \Sigma e_t^2$$
$$= \hat{\beta}^2\,\Sigma(X_t-\overline{X})^2 + \Sigma e_t^2$$

من معطيات التمرين نجد:

$$\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2 = 1\cdot\Sigma(X_t-\overline{X})^2 + \frac{1}{2}\cdot\Sigma(X_t-\overline{X})^2$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\Sigma(X_t-\overline{X})^2$$

ولدينا:

$$R^2 = \hat{\beta}^2\frac{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}{\Sigma(Y_t-Y)^2} = 1\cdot\frac{\Sigma(X_t-\overline{X})^2}{\frac{3}{2}\cdot\Sigma(X_t-\overline{X})^2} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

2- اختبار المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = \beta = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0 \end{cases}$$

- إحصائيةFISHER المحسوبة:

$$F_{cal} = \frac{R^2/1}{(1-R^2)/n-2} = \frac{\frac{2}{3}/1}{(1-\frac{2}{3})/50} = 100$$

إحصائيةFISHER المجدولة:

$$F_{cal} = F^{\alpha}_{(1.n-2)} = F^{5\%}_{(1.50)} = 4.04$$

القرار: نلاحظ أن $F_{cal} \geq F_{tab}$، وبالتالي نقبل الفرضية $\beta = 0 \quad \vee \quad H_1 : \alpha \neq 0$، أي أن النموذج ككل له معنوية إحصائية عند مستوى $\alpha = 5\%$.

المحور الثالث:

النموذج الخطي المتعدد

مقدمة

يوضح الانحدار الخطي المتعدد العلاقة بين متغير تابع ومجموعة من المتغيرات المستقلة، هذا ما يعني أن أي تغير في المتغيرات المستقلة يتبعها تغير في المتغير التابع. وتشير خطية العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع إلى أن أثر المتغير المستقل على المتغير التابع لا يختلف عن أثر متغير أخر، فيفترض أن جميع الأفراد يتصرفون بنفس الطريقة، أو أن تفضيلات الأفراد متماثلة. ونظرا لأن هذا الافتراض لا يمثل الحقيقة فإن استخدام الانحدار الخطي المتعدد ينطوي على وجود نوع من الخطأ في التقدير، ولذا فإننا ندخل في علاقة الانحدار حدا يعرف بالحد العشوائي ε_t.

أولا: تقديم النموذج

1- شكل النموذج:

تأخذ علاقة الانحدار الخطي المتعدد الشكل التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$

ويمكن كتابته على الشكل المصفوفاتي التالي:

$$
\begin{array}{l}
Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots\cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\
Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots\cdots + \beta_k X_{k2} + \varepsilon_2 \\
\vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \vdots \\
\vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \vdots \\
Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_b
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}
$$

$$Y \;=\; X \quad \beta \;+\; \varepsilon$$

حيث: Y: شعاع مشاهدات المتغير التابع $(n \times 1)$.

X: مصفوفة مشاهدات المتغيرات المستقلة $(n \times k)$.

β: شعاع المعلمات $(k \times 1)$.

ε: شعاع المتغير العشوائي $(n \times 1)$.

2- فرضيات النموذج:

إن الطريقة المستعملة في تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي المتعدد هي طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS"، ولهذا فإن هذه الفرضيات تتعلق بهذه الطريقة وكلها تدور حول طبيعة وشكل المتغير العشوائي، وهي:

- $E(\varepsilon)=0$: متوسط قيم المتغير العشوائي معدوم، وهو ما يمكن التعبير عنه كمايلي:

$$E(\varepsilon)=0=\begin{pmatrix}E(\varepsilon_1)\\E(\varepsilon_2)\\\vdots\\\vdots\\E(\varepsilon_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

- $E(\varepsilon\varepsilon')=\delta_\varepsilon^2 I_n$ ، أي تباين المتغير العشوائي ثابت، وأن التباينات المشتركة بين قيمه معدومة. أي:

$$V(\varepsilon_i)=E(\varepsilon_i^2)=\delta_\varepsilon^2 \qquad \forall i=1.....n$$
$$Cov(\varepsilon_i.\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0 \quad \forall i\neq j$$

هذه الفرضية يمكن التعبير عنها من خلال مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء، والتي تكون كما يلي:

$$\Omega_\varepsilon=E(\varepsilon\varepsilon')=E\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\vdots\\\varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\cdots\cdots\varepsilon_n\end{pmatrix}\right)=E\begin{pmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_1\varepsilon_n & \varepsilon_2\varepsilon_n & \cdots & \cdots & \varepsilon_n^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ E(\varepsilon_1\varepsilon_n) & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_n^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \delta_\varepsilon^2 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \delta_\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

$$=\delta_\varepsilon^2\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}=\delta_\varepsilon^2 I_n$$

- $\varepsilon\to N(0\,.\,\delta^2 I_n)$: أي أن الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم وتباين يساوي $\delta^2 I_n$ ، أي:

$$\varepsilon\to N\left[\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ .\ \delta_\varepsilon^2\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}\right]$$

- $Cov(X.\varepsilon)=0$: عدم وجود ارتباط بين أشعة مصفوفة المتغيرات المستقلة وشعاع الخطأ العشوائي.
- $\left(\frac{X'X}{n}\right)$: تؤول إلى مصفوفة منتهية وغير أحادية.

- أشعة المصفوفة X مستقلة، هذا ما يسمح بالتخلص من مشكل الامتداد الخطي وحساب $(X'X)^{-1}$.

ثانيا: تقدير النموذج الخطي المتعدد

يتم تقدير النموذج الخطي المتعدد بطريقة المربعات الصغرى العادية، التي تهدف إلى الحصول على مقدرات $\hat{\beta}_1 . \hat{\beta}_2 \cdots\cdots \hat{\beta}_k$ تعطي مجموع مربعات انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية في أدنى قيمة له.

ليكن النموذج: $Y = X\beta + \varepsilon$ ، وتحت فرضيات طريقة المربعات الصغرى العادية نجد:

- النموذج المقدر: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$.
- انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية: $e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$.
- مجموع مربعات البواقي: $e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$.

وكما هو معلوم أن طريقة المربعات الصغرى العادية تهدف إلى جعل $e'e$ في أدنى قيمة لها، أي إيجاد $\text{Min } e'e$ ، فنقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ: $e'e$ بالنسبة إلى $\hat{\beta}_1 . \hat{\beta}_2 \cdots\cdots \hat{\beta}_k$ ، ونجعلها مساوية للصفر.

لدينا: $e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$.

ولدينا القيمتين: $Y'X\hat{\beta}$ و $\hat{\beta}'X'Y$ متساويتين فنجد: $e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$.

نقوم بإيجاد: $\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = 0$.

$$\frac{d\,e'e}{d\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$
$$= -X'Y + X'X\hat{\beta} = 0$$

ومنه:
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

ملاحظة: $X'(Y - X\hat{\beta}) = X'e = 0 \quad \Rightarrow X'Y - X'X\hat{\beta} = 0$ ، ومنه فإن: X و e متعامدة.

$$e = (Y - X\hat{\beta}) = Y - X(X'X)^{-1}X'Y = (I - X(X'X)^{-1}X')Y = MY$$

حيث: M مصفوفة متناظرة ومستقلة، أي: $M = M^2 = M^3 = \cdots\cdots$ و $MX = 0$.

فمن النموذج الذي يأخذ شكل مصفوفات نجد أن الشعاع المقدر $\hat{\beta}$ يكون كما يلي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & \cdots & \sum X_{kt} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \cdots & \sum X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{kt} & \sum X_{2t}X_{kt} & \cdots & \sum X_{kt}^2 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \vdots \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & \cdots & \sum X_{kt} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \cdots & \sum X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{kt} & \sum X_{2t}X_{kt} & \cdots & \sum X_{kt}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \vdots \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

مثال: قصد دراسة أثر بعض المتغيرات الاقتصادية الكلية على أداء سوق مالي معين، توفرت لديك البيانات التالية لمدة 10 سنوات:

نسبة المعروض النقدي إلى الناتج المحلي الاجمالي	سعر الفائدة	التغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم	t
0.6	8	7	1
0.8	5	4.5	2
0.5	13	7.5	3
0.8	7	5.5	4
0.7	9	6	5
0.5	12	7.5	6
0.6	10	6.5	7
0.8	11	6.5	8
0.9	6	5	9
0.9	4	4	10

بوضع:

Y_t : التغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم

X_{2t} : سعر الفائدة

X_{3t} : نسبة المعروض النقدي إلى الناتج المحلي الاجمالي

المطلوب: قدر النموذج التالي $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS. ثم استنتج القيم المقدرة وبواقي التقدير.

لدينا:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{210} & X_{310} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix}$$

$$Y_{(10\times1)} = X_{(10\times3)} \quad \beta_{(3\times1)} + \varepsilon_{(10\times1)}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 10 & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 85 & 7.1 \\ 85 & 805 & 57 \\ 7.1 & 57 & 5.25 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(X'X) = (-1)^{1+1}(10)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 805 & 57 \\ 57 & 5.25 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(85)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 85 & 57 \\ 7.1 & 5.25 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}(7.1)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 85 & 805 \\ 7.1 & 57 \end{pmatrix}$$

$$= 10[805\cdot5.25 - 57\cdot57] - 85[85\cdot5.25 - 57\cdot7.1] + 7.1[85\cdot57 - 805\cdot7.1] = 60.2$$

$$\Rightarrow (X'X)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(X'X)}\mathrm{Adj}(X'X) = \frac{1}{60.2}\begin{pmatrix} +977.25 & -41.55 & +(-870.5) \\ -41.55 & +2.09 & -(-33.5) \\ +(-870.5) & -(-33.5) & +825 \end{pmatrix}^{/}$$

$$= \begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 541 \\ 41.1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 541 \\ 41.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.29 \\ 0.24 \\ -3.30 \end{pmatrix}$$

ومنه يكون النموذج المقدر كما يلي:

$$\hat{Y}_t = 6.29 + 0.24\cdot X_{2t} - 3.30\cdot X_{3t}$$

من نتائج التقدير يكون التفسير كما يلي:

- $\hat{\beta}_1 = 6.29$: أي أن هناك مقدار ثابت من التغير في التغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم في هذا السوق مقداره 6.29 و ن.

- $\hat{\beta}_2 = +0.24$: أي أن هناك علاقة طردية بين سعر الفائدة و التغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم، فكلما تغير سعر الفائدة بوحدة واحدة يتغير التغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم في نفس الاتجاه بـ: 0.24 وحدة.

- $\hat{\beta}_3 = -3.30$: أي أن هناك علاقة عكسية بين نسبة المعروض النقدي إلى الناتج المحلي الاجمالي و التغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم، فكلما تغيرت نسبة المعروض النقدي إلى الناتج المحلي الاجمالي بوحدة واحدة يتغير التغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم في الاتجاه العكسي بـ: 3.30 وحدة.

أما القيم المقدرة $\hat{Y}$ وبواقي التقدير e فتكون كمايلي:

$$\hat{Y}_1 = 6.29 + 0.24\cdot(X_{21} = 4) - 3.30\cdot(X_{31} = 0.9) = 4.28 \Rightarrow e_1 = Y_1 - \hat{Y}_1 = 4 - 4.28 = -0.28$$
$$\hat{Y}_2 = 6.29 + 0.24\cdot(X_{22} = 5) - 3.30\cdot(X_{32} = 0.8) = 4.85 \Rightarrow e_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 = 4.5 - 4.85 = -0.35$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\hat{Y}_{10} = 6.29 + 0.24\cdot(X_{210} = 13) - 3.30\cdot(X_{310} = 0.5) = 7.78 \Rightarrow e_{10} = Y_{10} - \hat{Y}_{10} = 7.5 - 7.78 = -0.28$$

وهو ما يوضحه الجدول التالي:

	$\hat{Y}$	e
	4.28	-0.2850
	4.85	-0.3571
	4.76	0.2318
	5.34	0.1598
	6.15	-0.1538
	6.24	0.7571
	6.72	-0.2259
	6.30	0.19369
	7.53	-0.03953
	7.78	-0.2810
$\sum$	**60**	**00**

ثالثا: خصائص مقدرات OLS

تعتبر خاصية خطية المقدرات أولى خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية، فقد بينا سابقا أن:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

نرمز بـ: A للمصفوفة $(X'X)^{-1}X'$، وهي مصفوفة ذات البعد $(k\times n)$. وبالتالي نجد أن: $\hat{\beta} = AY$

حيث:

$$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_N\end{pmatrix} \text{ و } A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta}=\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1=a_{11}Y_1+a_{12}Y_2+\cdots\cdots+a_{1n}Y_n=\sum a_{1i}Y_i\\\hat{\beta}_2=a_{21}Y_1+a_{22}Y_2+\cdots\cdots+a_{2n}Y_n=\sum a_{2i}Y_i\\\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\\hat{\beta}_k=a_{k1}Y_1+a_{k2}Y_2+\cdots\cdots+a_{kn}Y_n=\sum a_{ki}Y_i\end{pmatrix}$$

أي أن مقدر كل معلمة من معلمات النموذج الخطي المتعدد هو على شكل خطي مع قيم المتغير التابع. أما باقي الخصائص فيمكن تبيانها كما يلي:

1- خاصية عدم التحيز (Unbiased):

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta})&=E\left[(X'X)^{-1}X'Y\right]=E\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)\right]=E\left[(X'X)^{-1}X'X\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]\\&=E\left[\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]=\beta+X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)=\beta\end{aligned}$$

ومنه: $\hat{\beta}$ مقدر غير متحيز لـ: β

2- أفضل مقدرات خطية غير متحيزة Best Linear Unbiased Estimators 'BLUE' :

حسب نظرية Gauss-Markov والتي تشير إلى أنه من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، فإن مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية هي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة بباقي المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى.

ولإثبات ما جاءت به هذه النظرية نقوم أولا بإيجاد تباين مقدرات النموذج.

$$\begin{aligned}\Omega_{\hat{\beta}}&=V(\hat{\beta})=E\left[(\hat{\beta}-E(\hat{\beta}))(\hat{\beta}-E(\hat{\beta}))'\right]=E\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right]=E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right]\\&=(X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}=\Omega_\varepsilon(X'X)^{-1}=\delta_\varepsilon^2I_n(X'X)^{-1}=\delta_\varepsilon^2(X'X)^{-1}\end{aligned}$$

بعد حساب تباين المقدرات سنعمل على اثبات خاصية أقل تباين كمايلي:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\frac{\delta_\varepsilon^2}{n}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\Omega_{\hat{\beta}}=0$$

3- خاصية الاتساق (CONSISTENT):

نقول عن مقدر $\hat{\theta}$ بأنه مقدر متسق (CONSISTENT ESTIMATOR)، إذا حقق الشرطين التاليين:

$$i/ \quad E(\hat{\theta}) = \theta \qquad\qquad ii/ \quad \lim_{n\to+\infty} V(\hat{\theta}) = 0$$

مما سبق نجد أن:

المقدر $\hat{\beta}$ يحقق الشرطين:

$$i/ \quad E(\hat{\beta}) = \beta \qquad\qquad ii/ \quad \lim_{n\to+\infty} V(\hat{\beta}) = 0$$

إذن نستنتج أن المقدر $\hat{\beta}$ هو مقدر متسق لشعاع المعلمات β

4- تقدير تباين المتغير العشوائي ε_t:

لدينا:

$$e = MY = M(X\beta + \varepsilon) = MX\beta + M\varepsilon = M\varepsilon$$

ولدينا:

$$e'e = (M\varepsilon)'(M\varepsilon) = \varepsilon' M'M\varepsilon = \varepsilon' M\varepsilon$$

نقوم بحساب الأمل الرياضي لـ: $e'e$ فنجد:

$$\begin{aligned} E(e'e) = E(\varepsilon' M\varepsilon) = E(\text{trac}\,(\varepsilon M\varepsilon')) = E(\text{tracM}\ \varepsilon\varepsilon') = \text{tracME}\ (\varepsilon\varepsilon') \\ = \text{tracM}\ (\delta_\varepsilon^2 I) = \delta_\varepsilon^2\,\text{tracM} \\ = \delta_\varepsilon^2\left[\text{tracI}_{\,n} - \text{trac}\left[X(X'X)^{-1}X'\right]\right] \\ = \delta_\varepsilon^2\left[n-k\right] \end{aligned}$$

من خلال هذه النتيجة نستنتج أن $e'e$ مقدر متحيز لـ: δ_ε^2. إذن المقدر غير المتحيز لـ: δ_ε^2 هو: $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = e'e/_{n-k}$

وبالتالي يصبح التباين المقدر لـ: $\hat{\beta}$ كمايلي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\delta}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$$

مثال: من المثال السابق يمكن تقدير تباين الخطأ العشوائي كما يلي:

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-k} = \frac{\begin{pmatrix} -0.28 & -0.35 & \cdots & -0.28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.28 \\ -0.35 \\ \vdots \\ -0.28 \end{pmatrix}}{10-3} = \frac{1.05}{7} = 0.1505$$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك المقدر لشعاع المقدرات فيكون كما يلي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1} = 0.1505\begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\delta}_{\beta_1}^{2} = 0.1505(16.23) = 2.44 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{2.44} = 1.56$$

$$\hat{\delta}_{\beta_2}^{2} = 0.1505(0.034) = 0.005 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{0.005} = 0.07$$

$$\hat{\delta}_{\beta_3}^{2} = 0.1505(13.70) = 2.06 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\beta}_3} = \sqrt{2.44} = 1.43$$

5- بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج:

بعد تحديد ومعرفة خصائص الشعاع $\hat{\beta}$، سنعمل على بناء مجالات ثقة تنتمي إليها معلمات النموذج، وهذا عند مستوى معنوية معين، حيث احتمال أن تنتمي معلمة النموذج إلى مجال الثقة يساوي $1-\alpha$

نعلم أن:

$$\hat{\beta} \rightarrow N\left(\beta \,.\, \delta_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}\right)$$
$$\hat{\beta}_i \rightarrow N\left(\beta_i . \delta_{\varepsilon}^{2} a_{ii}\right)$$

فإنه حسب نظرية النهايات المركزية:

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\delta_{\varepsilon}^{2} a_{ii}}} \rightarrow N(0\,.\,1)$$

بالمقابل نعلم أن تباين المتغير العشوائي مجهول، حيث يتم تقديره بالعلاقة: $\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'e}{n-k}$.

وبما أن: $(n-k)\cdot\frac{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\delta_{\varepsilon}^{2}} \rightarrow \chi_{n-k}^{2}$

وبالتالي يتم الانتقال من التوزيع الطبيعي إلى توزيع STUDENT كما يلي:

$$\frac{N(0.1)}{\sqrt{\chi_{n-k}^{2} / n-k}} \rightarrow St\,(n-k)$$

بالعودة إلى المقدرات $\hat{\beta}_i$ نجد:

$$\frac{\dfrac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\delta_{\varepsilon}^{2} a_{ii}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-k)\cdot\dfrac{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\delta_{\varepsilon}^{2}}}{(n-k)}}} = \frac{\dfrac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\delta_{\varepsilon}^{2} a_{ii}}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\delta_{\varepsilon}^{2}}}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\delta_{\varepsilon}^{2} a_{ii}}}\cdot\sqrt{\frac{\delta_{\varepsilon}^{2}}{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2} a_{ii}}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^{2}}} \rightarrow St(n-k)$$

بعد ايجاد التوزيع الاحتمالي للمقدرات $\hat{\beta}_i$ يمكننا بناء مجالات ثقة تنتمي إليها معلمات النموذج، وهذا عند مستوى معنوية α كمايلي:

$$P\left(-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}} \le St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2} \le \hat{\beta}_i-\beta_i \le St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\hat{\beta}_i-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2} \le \beta_i \le \hat{\beta}_i+St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\beta_i\in\left[\hat{\beta}_i-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\quad.\quad\hat{\beta}_i+St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\right]\right)=1-\alpha$$

مثال: من المثال السابق يمكن بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج كمايلي:

β_i	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}$	$St_{(n-k)}^{\frac{\alpha}{2}}$	$\hat{\beta}_i-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2$	$\hat{\beta}_i+St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}$
β_1	$\hat{\beta}_1=6.29$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_1}=1.56$	$St_{(10-3)}^{2.5\%}=2.365$	$6.29-2.365\cdot(1.56)$	$6.29+2.365\cdot(1.56)$
β_2	$\hat{\beta}_2=0.24$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_2}=0.07$		$0.24-2.365\cdot(0.07)$	$0.24+2.365\cdot(0.07)$
β_3	$\hat{\beta}_3=-3.30$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_3}=1.43$		$-3.30-2.365\cdot(1.43)$	$-3.30+2.365\cdot(1.43)$

وبالتالي نجد:

$$\beta_1\in[2.60\quad.\quad9.97]$$
$$\beta_2\in[0.07\quad.\quad0.40]$$
$$\beta_3\in[-6.68\quad.\quad0.08]$$

رابعا: تقييم النموذج الخطي المتعدد

يتم تقييم نموذج الانحدار الخطي المتعدد باستعمال المعايير الثلاثة السابقة:

1- المعايير الاقتصادية:

تتعلق بحجم وإشارة المعلمات المقدرة، لأن النظرية الاقتصادية تضع قيودا مسبقة على حجم وإشارة المعلمات، فإذا ما جاءت هذه المعلمات على عكس ما تقرره النظرية مسبقا فإن هذا يمكن أن يكون مبررا كافيا لرفض هذه المعلمات.

2- المعايير الإحصائية:

تتمثل هذه المعايير فيما يلي:

2-1- تحليل التباين ومعامل التحديد:

كما رأينا في حالة النموذج الخطي البسيط، فإنه يمكن استنتاج معادلة تحليل التباين في حالة النموذج الخطي المتعدد كمايلي:

$$(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})=(Y-\hat{Y}+\hat{Y}-\overline{Y})'(Y-\hat{Y}+\hat{Y}-\overline{Y})=((Y-\hat{Y})'+(\hat{Y}-\overline{Y})')((Y-\hat{Y})+(\hat{Y}-\overline{Y}))$$
$$=(Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y})+(Y-\hat{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+(\hat{Y}-\overline{Y})'(Y-\hat{Y})+(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})$$
$$=(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+(Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y})+2\cdot\left[(Y-\hat{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})=0=\right]$$
$$=(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+(e)'(e)=(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+e'e$$

وبالتالي يمكن صياغة معادلة تحليل التباين على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y}) &= (\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+e'e\\ TSS &= ESS + RSS\\ \Sigma(Y_t-\overline{Y})^2 &= \Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2+\Sigma e_t^2\end{aligned}$$

حيث:

$\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2=(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})$: مجموع مربعات الانحرافات الكلية (Total Sum of Squares (TSS)).

$\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2=(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})$: مجموع مربعات الانحرافات المفسرة (Explained Sum of Squares (ESS)).

$\Sigma e_t^2=e'e$: مجموع مربعات البواقي (Residual Sum of Squares (RSS))

أما جدول تحليل التباين (Analysis Of Variance (ANOVA فيأخذ الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
المتغيرات المستقلة	$ESS=\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2$	k	$\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2/k$
البواقـــي e_t	$RSS=\Sigma e_t^2$	$n-k$	$\Sigma e_t^2/n-k$
المجـــموع	$TSS=\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2$	$n-1$	

في حالة النموذج الخطي المتعدد يمكن قياس القدرة التفسيرية للنموذج وجودة توفيقه من خلال معامل التحديد المتعدد R^2، حيث يشير هذا المعامل إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير التابع بدلالة المتغيرات التفسيرية المدرجة في نموذج الانحدار المتعدد، ويمكن حسابه انطلاقا من معادلة تحليل التباين التي تعطى بالشكل التالي:

$$R^2=\frac{(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})}=\frac{\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2}$$
$$=\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}-\overline{Y}^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2}$$
$$=1-\frac{(e-\overline{e})'(e-\overline{e})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})}=1-\frac{\Sigma e_t^2}{\Sigma(Y_t-\overline{Y})^2}$$

يتأثر معامل التحديد بعدد المتغيرات المستقلة، ولهذا يمكن أن نصحح قيمة معامل التحديد عن طريق أخذ درجات الحرية في الحسبان عند حسابه، حيث أن درجة الحرية $(n-k)$ تقل مع زيادة عدد المتغيرات التفسيرية وثبات حجم العينة.

وتصبح قيمة معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$ كما يلي: $\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1-R^2)$

تتراوح قيمة معامل التحديد بين الصفر والواحد، فإذا كان يساوي الواحد فهذا يعني أن القدرة التفسيرية جيدة، وأن جودة التوفيق عند حدها الأقصى، أما إذا كان يساوي الصفر فهذا يعني أن القدرة التفسيرية للنموذج منعدمة، وأن جودة التوفيق عند حدها الأدنى.

مثال: من المثال السابق نجد أن معامل التحديد يساوي:

$$R^2 = \frac{(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})} = \frac{\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}{\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2} = \frac{12.44}{13.5} = 0.9219$$

أو:

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})} = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\Sigma(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2} = 1 - \frac{1.05}{13.5} = 0.9219$$

أما معامل التحديد المصحح فيساوي:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1-R^2) = 1 - \frac{10-1}{10-3}(1-0.9219) = 0.8995$$

$R^2 = 0.9219$، أي أن للنموذج قدرة تفسيرية عالية، كما أن 92.19% من تغيرات التغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم مفسرة بتغيرات سعر الفائدة و نسبة المعروض النقدي إلى الناتج المحلي الاجمالي، بينما 07.81% المتبقية فهي مفسرة بعوامل أخرى.

أما جدول تحليل التباين فيأخذ الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
المتغيرات المستقلة	$ESS = 12.44$	3	$12.44/3 = 4.14$
البواقـــي e_t	$RSS = 1.05$	$10-3=7$	$1.05/7 = 0.15$
المجـــموع	$TSS = 13.5$	$10-1=9$	

2-2- اختبارات المعنوية:

تتمثل هذه الاختبارات فيما يلي:

2-2-1- اختبار Student: يستعمل هذا الاختبار لدراسة المعنوية الجزئية لمعلمات النموذج عند مستوى معنوية معين، فإذا كان لدينا النموذج: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$، وكانت $\hat{\beta}_1$، $\hat{\beta}_2 \cdots\cdots \hat{\beta}_k$ المعلمات المقدرة للنموذج.

لاختبار العلاقة الموجودة بين المتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_{it} (معنوية كل معلمة على حدى)، نقوم بإجراء الاختبار التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_1 : \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

مما سبق لدينا:

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}_i}}} \to St(n-k)$$

تحت ظل الفرضية $H_0 : \beta_i = 0$ نجد أن $\frac{\hat{\beta}_i - 0}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}_i}}}$ تتبع أيضا توزيع STUDENT بدرجة حرية تساوي $(n-k)$، حيث يقوم هذا الاختبار على مقارنة إحصائيةSTUDENT المحسوبة $St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}_i}}} \right|$ مع الإحصائية المجدولة من جدول STUDENT عند درجة حرية $(n-k)$ ومستوى معنوية $\%/2$، أي $St_{tab} = St^{\%/2}_{n-k}$. (في حالة $(n-k) > 30$ فإن $St_{tab} = 1.96$).

أما قرار الاختبار فيكون كما يلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal} \geq St_{tab}$، و منه $\beta_i \neq 0$، وبالتالي وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_{it}.
- نقبل الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal} < St_{tab}$، و منه $\beta_i = 0$، وبالتالي عدم وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_{it}.

2-2-2- اختبار FISHER : يوضح لنا هذا الاختبار المعنوية الكلية للنموذج بصورة عامة، و يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \exists \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

نقوم بحساب إحصائيةFISHER التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / k-1}{(1-R^2) / n-k}$$

الإحصائية F_{cal} تتبع توزيع FISHER بدرجة حرية $v_1 = k-1$ و $v_2 = n-k$، أي $F_{tab} = F^{\alpha=5\%}_{(k-1,n-k)}$.

ويكون قرار الاختبار كمايلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $F_{cal} \geq F_{(k-1.n-k)}^{\alpha=5\%}$، ومنه: $\exists \beta_i \neq 0$، وبالتالي فالنموذج ككل له معنوية احصائية.

- نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $F_{cal} < F_{(k-1.n-k)}^{\alpha=5\%}$، ومنه: $\forall i = 1......k \quad \beta_i = 0$، وبالتالي فالنموذج ككل ليس له معنوية احصائية.

مثال: من المثال السابق أدرس صلاحية النموذج الاحصائية الجزئية والكلية عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

- **المعنوية الجزئية**: من خلال اختبار STUDENT لمعلمات النموذج، وهو ما يوضحه الجدول التالي:

المعلمة	شكل الاختبار	St_{cal}	St_{tab}	القـرار
β_1	$H_0: \beta_1 = 0 \quad / \quad H_1: \beta_1 \neq 0$	4.02	$St_{(10-3)}^{2.5\%} = 2.365$	نقبل $H_1: \beta_1 \neq 0$
β_2	$H_0: \beta_2 = 0 \quad / \quad H_1: \beta_2 \neq 0$	3.34		نقبل $H_1: \beta_2 \neq 0$
β_3	$H_0: \beta_3 = 0 \quad / \quad H_1: \beta_3 \neq 0$	2.38		نقبل $H_1: \beta_3 \neq 0$

- المعنوية الكلية: من خلال اختبار FISHER، والذي يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_1: \exists \beta_i \neq 0 \quad i = 1 \cdots 3 \end{cases}$$

إحصائية FISHER المحسوبة تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / k-1}{(1-R^2) / n-k} = \frac{0.9219 / 3-1}{(1-0.9219) / 10-3} = 41.32$$

إحصائية FISHER المجدولة:

$$F_{tab} = F_{(k-1.n-k)}^{\alpha=5\%} = F_{(2.7)}^{\alpha=5\%} = 4.737$$

القرار:

نلاحظ أن $F_{cal} > F_{(2.7)}^{\alpha=5\%}$، وبالتالي نقبل الفرضية H_1، أي: $\exists \beta_i \neq 0$، ومنه فالنموذج ككل له معنوية احصائية.

2-1- اختبار فيشر للقيود المتعددة: WALD TEST:

يستعمل اختبار STUDENT لاختبار فرضية من قيد واحد، أما في حالة القيود المتعددة فالواجب تطبيق اختبار فيشر كمايلي:

لتكن فرضية العدم والفرضية البديلة في شكل مصوفات والتي تضع قيودا على مجموعة من المعلمات كمايلي:

$$\begin{cases} H_0: R\beta = r \\ H_1: R\beta \neq r \end{cases}$$

حيث:

R: مصفوفة بعدها $(q\times k)$، β: شعاع المعلمات $(k\times 1)$.

r: شعاع بعده $(q\times 1)$، ويمثل عدد القيود، وهو أيضا عدد أسطر المصفوفة R.

أما خصائص الشعاع $R\hat{\beta}$ فهي كمايلي:

المتوسط:

$$i/\quad E(R\hat{\beta}) = RE(\hat{\beta}) = R\beta$$
$$ii/\quad \Omega_{R\hat{\beta}} = R'\delta_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}R = \delta_{\varepsilon}^{2}R'(X'X)^{-1}R$$

ومن فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء نجد أن: $R\hat{\beta} \to N(R\beta\ .\ \delta_{\varepsilon}^{2}R'(X'X)^{-1}R)$

وبتطبيق نظرية النهاية المركزية نجد أن: $\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)\left(\delta_{\varepsilon}^{2}R'(X'X)^{-1}R\right)^{-1} \to N(0.1)$

وبالتربيع نجد: $\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)'\left(\delta_{\varepsilon}^{2}R'(X'X)^{-1}R\right)^{-1}\left(R\hat{\beta}-R\beta\right) \to \chi_{q}^{2}$

وبما أن: $\dfrac{(n-k)\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\delta_{\varepsilon}^{2}} \to \chi_{n-k}^{2}$

بالقسمة نجد إحصائية FISHER المحسوبة تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{(R\hat{\beta}-R\beta)'(\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(R\hat{\beta}-R\beta)\Big/q}{\dfrac{(n-k)\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}}{\delta_{\varepsilon}^{2}}\Big/n-k} \to F_{(q\,.\,n-k)}^{\alpha}$$

تحت ظل الفرضية H_0 وبالتبسيط نجد:

$$F_{cal} = (R\hat{\beta}-r)'(\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(R\hat{\beta}-r)\Big/q \to F_{(q\,.\,n-k)}^{\alpha}$$

أو أيضا:

$$F_{cal} = \frac{(R\hat{\beta}-r)'(R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(R\hat{\beta}-r)\Big/q}{e'e\Big/n-k} \to F_{(q\,.\,n-k)}^{\alpha}$$

القرار:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $F_{cal} \geq F_{(q.n-k)}^{\alpha=5\%}$، ومنه: $R\beta \neq r$.

- نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $F_{cal} < F_{(q.n-k)}^{\alpha=5\%}$، ومنه: $R\beta = r$.

مثال: من المثال السابق اختبر الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ H_1 : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

نكتب فرضية العدم من الشكل: $R\beta = r$

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{r}$$

حيث: R: مصفوفة بعدها (3×3) ، β: شعاع المعلمات (3×1) ، r: شعاع بعده (3×1).

احصائية FISHER المحسوبة تعطى كمايلي:

$$F_{cal} = \frac{(R\hat{\beta}-r)'(R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(R\hat{\beta}-r)/q}{e'e/n-k} \rightarrow F^{\alpha}_{(q\,.\,n-k)}$$

$$(R\hat{\beta}-r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6.29 \\ 0.24 \\ -3.30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.29 \\ -0.76 \\ -0.30 \end{pmatrix}$$

$$(R\hat{\beta}-r)' = (0.29 \quad -0.76 \quad -0.30)$$

$$(R'(XX)^{-1}R)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 85 & 7.1 \\ 85 & 805 & 57 \\ 7.1 & 57 & 5.25 \end{pmatrix}$$

$$F_{cal} = \frac{(0.29 \quad -0.76 \quad -0.30) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 85 & 7.1 \\ 85 & 805 & 57 \\ 7.1 & 57 & 5.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.29 \\ -0.76 \\ -0.30 \end{pmatrix} /3}{1.05/10-3} = \frac{453.57/3}{0.15} = 1007.93$$

احصائية FISHER المجدولة تعطى كمايلي:

$$F_{tab} = F^{\alpha=5\%}_{(q.n-k)} = F^{\alpha=5\%}_{(3.7)} = 4.35$$

نلاحظ أن: $\left[F_{(3.7)}^{\alpha=5\%}=4.35\right]\geq\left[F_{cal}=1007.93\right]$، ومنه نقبل الفرضية H_1، أي: $R\beta\neq r$، وبالتالي فإن: $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}6\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$

2-4- اختبارات التغير الهيكلي:

عند استخدام نموذج انحدار على بيانات سلاسل زمنية، يمكن أن يحدث تغير هيكلي في العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة، ويقصد بالتغير الهيكلي في هذه الحالة أن قيمة معلمات النموذج لا تبقى كما هي خلال كل الفترة الزمنية، فقد يحدث التغير الهيكلي نتيجة لقوة خارجية، أو نتيجة لتغير السياسات الاقتصادية، كالتحول من نظام اقتصادي إلى آخر، أو أي أسباب أخرى.

وتعرف هذه الاختبارات أيضا باختبارات استقرار معلمات النموذج، وتهدف إلى معرفة مدى استقرارية معلمات النموذج عبر الزمن.. من أهم هذه الاختبارات نذكر:

2-4-1- اختبار CHOW"/"CHOW FORECAST TEST":

يسمح هذا الاختبار بمعرفة إذا ما كانت معلمات النموذج تتغير مع الزمن أم لا، ولتطبيق هذا الاختبار يجب معرفة وتحديد زمن التغير في حالة بيانات السلاسل الزمنية، أو معرفة المفردة التي حصل عندها التغير في حالة البيانات المقطعية. وبالتالي فهذا الاختبار يسمح بمعرفة إذا كانت المعلمات المقدرة قبل التغير هي نفسها بعد التغير. ويمر هذا الاختبار بالمراحل التالية:

- **المرحلة الأولى:**

- تقسيم المشاهدات إلى عينتين، العينة الأولى طولها n_1 مشاهدة، والعينة الثانية طولها n_2 مشاهدة، حيث: $n_1+n_2=n$.
- تقدير نموذجين لكل عينة بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t=\beta_1^{(1)}+\beta_2^{(1)}X_{2t}+\beta_3^{(1)}X_{3t}+\cdots\cdots+\beta_k^{(1)}X_{kt}+\varepsilon_t \qquad /t=1\cdots\cdots n_1$$

$$Y_t=\beta_1^{(2)}+\beta_2^{(2)}X_{2t}+\beta_3^{(2)}X_{3t}+\cdots\cdots+\beta_k^{(2)}X_{kt}+\varepsilon_t \qquad /t=n_1+1\cdots\cdots n_2$$

- ✓ حساب مجموع مربعات بواقي التقدير للنموذجين السابقين، أي حساب RSS_1 و RSS_2.
- ✓ تقدير النموذج على طول الفترة الزمنية الكلية والمقدرة بـ: n مشاهدة:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\cdots\cdots+\beta_kX_{kt}+\varepsilon_t \qquad /t=1\cdots\cdots n$$

- ✓ حساب مجموع مربعات بواقي التقدير للنموذج السابق، أي حساب RSS.

- **المرحلة الثانية**: نقوم باختبار الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0:\begin{cases}\beta_1=\beta_1^{(1)}=\beta_1^{(2)}\\ \beta_2=\beta_2^{(1)}=\beta_2^{(2)}\\ \vdots\quad\ \vdots\quad\ \vdots\\ \beta_k=\beta_k^{(1)}=\beta_k^{(2)}\end{cases}\\ H_1:\ \exists i\ \ /\beta_i\neq\beta_i^{(1)}\neq\beta_i^{(2)}\end{cases}$$

إيجاد إحصائية FISHER المحسوبة، والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{[RSS - (RSS_1 + RSS_2)]/df_1}{(RSS_1 + RSS_2)/df_2}$$

حيث:

$$df_1 = (n-k) - [(n_1 - k) + (n_2 - k)] = k$$
$$df_1 = (n_1 - k) + (n_2 - k) = n - 2k$$

إيجاد إحصائية FISHER المجدولة بدرجة حرية $v_1 = k$ و $v_2 = n - 2k$، أي $F_{tab} = F_{(k.n-2k)}^{\alpha=5\%}$.

القرار:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $F_{cal} \geq F_{(k.n-2k)}^{\alpha=5\%}$، ومنه: $\exists i \; / \beta_i \neq \beta_i^{(1)} \neq \beta_i^{(2)}$، وبالتالي فالنموذج غير مستقر، أي هناك تغير هيكلي.

- نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $F_{cal} < F_{(k.n-2k)}^{\alpha=5\%}$، ومنه: $\forall i = 1......k \quad \beta_i = \beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)}$، وبالتالي فالنموذج مستقر، أي لا يوجد تغير هيكلي.

<u>مثال</u>: من المثال السابق كان النموذج المقدر كمايلي:

$$\hat{Y}_t = \underset{(1.56)}{6.29} + \underset{(0.07)}{0.24} \cdot X_{2t} - \underset{(1.43)}{3.30} \cdot X_{3t}$$
$$n = 10 \quad TSS = 13.5 \quad ESS = 12.44 \quad RSS = 1.05$$

بافتراض أن هناك شك بحدوث تغير هيكلي بداية من السنة السادسة، فإن اختبار CHOW يكون كمايلي:

- المرحلة الأولى: تقدير نموذجين لكل عينة مع حساب مجموع مربعات بواقي التقدير:

نموذج الفترة الأولى:

$$\hat{Y}_t = \underset{(1.77)}{1.33} + \underset{(0.07)}{0.44} \cdot X_{2t} + \underset{(1.68)}{1.11} \cdot X_{3t}$$
$$n_1 = 5 \quad TSS_1 = 2.5 \quad ESS_1 = 2.44 \quad RSS_1 = 0.055$$

نموذج الفترة الثانية:

$$\hat{Y}_t = \underset{(1.62)}{7.96} + \underset{(0.09)}{0.07} \cdot X_{2t} - \underset{(1.54)}{2.95} \cdot X_{3t}$$
$$n_2 = 5 \quad TSS_2 = 1.00 \quad ESS_2 = 0.741 \quad RSS_2 = 0.258$$

- المرحلة الثانية: نقوم باختبار الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \begin{cases} \beta_1 = \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)} \\ \beta_2 = \beta_2^{(1)} = \beta_2^{(2)} \\ \beta_3 = \beta_3^{(1)} = \beta_3^{(2)} \end{cases} \\ H_1 : \ \exists i \ \ / \beta_i \neq \beta_i^{(1)} \neq \beta_i^{(2)} \end{cases}$$

إيجاد إحصائية FISHER المحسوبة:

$$F_{cal} = \frac{[RSS - (RSS_1 + RSS_2)]/k}{(RSS_1 + RSS_2)/n - 2k} = \frac{[1.05 - (0.055 + 0.258)]/3}{(0.055 + 0.258)/10 - 2(3)} = \frac{0.245}{0.078} = 3.13$$

إيجاد إحصائية FISHER المجدولة:

$$F_{tab} = F_{(k.n-2k)}^{\alpha=5\%} = F_{(3.10-2(3))}^{\alpha=5\%} = F_{(3.4)}^{\alpha=5\%} = 6.59$$

القرار:

نلاحظ أن $(F_{cal} = 3.13) < (F_{(3.4)}^{\alpha=5\%} = 6.59)$ وبالتالي نرفض الفرضية H_1، أي نقبل أن: $\forall i = 1......k \quad \beta_i = \beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)}$ وبالتالي فالنموذج مستقر، أي لا يوجد تغير هيكلي.

2-4-2- اختبارات الاستقرارية المعتمدة على البواقي المتكررة:

يفترض اختبار التغير الهيكلي لـ:CHOW أن نقطة التغير معلومة، بالمقابل فإن الاختبارات المتعمدة على البواقي المتكررة فهي تسمح بتحديد هل هناك تغير هيكلي أم لا من جهة، كما تسمح بتحديد نقطة التغير الهيكلي من جهة أخرى. ومن أهمها نجد: اختبار البواقي المتكررة RECURSIVE RESIDUALS:[1]

تعتمد فكرة البواقي المتكررة على التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع Y_t لما نستعمل $r-1$ مشاهدة فقط.، ثم حساب بواقي التقدير، أي:

$$e_r = Y_r - \left[\hat{\beta}_1^{r-1} + \hat{\beta}_2^{r-1} X_{2r} + \hat{\beta}_3^{r-1} X_{3r} + \cdots + \hat{\beta}_k^{r-1} X_{kr}\right]$$

حيث: $\hat{\beta}_i^{r-1}$: هي مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية للنموذج من خلال عينة مشاهدات حجمها $r-1$.

بداية التقدير تكون من $r = k+1$.

تباين التنبؤ يكون: $V(e_r) = \hat{\delta}_{\varepsilon_{r-1}}^2 \left[1 + X_r'(X_{r-1}'X_{r-1})^{-1} X_r\right]$

[1] - WILLIAM H. GREENE, Econometric Analysis, Fifth Edition, Pearson Education, New Jersey, USA, 2002, 135.

البواقي المتكررة w_r تعطى بالعلاقة التالية:

$$w_r = \frac{e_r}{\sqrt{1 + X_r^{'}(X_{r-1}^{'}X_{r-1})^{-1}X_r}}$$

تحت فرضية الاستقرارية البواقي المتكررة تتبع التوزيع الطبيعي، أي: $w_r \to N(0.\delta_{w_r}^2)$

ويكون قرار الاختبار كمايلي:

$$si\ w_r \in \left[-2\sqrt{\hat{\delta}_{\varepsilon_{r-1}}^2\left[1 + X_r^{'}(X_{r-1}^{'}X_{r-1})^{-1}X_r\right]}\quad .\quad +2\sqrt{\hat{\delta}_{\varepsilon_{r-1}}^2\left[1 + X_r^{'}(X_{r-1}^{'}X_{r-1})^{-1}X_r\right]}\right] \qquad \forall\ r = k+1 \cdots n$$

فيكون النموذج مستقرا، وبالتالي عدم وجود تغير هيكلي.

$$si\ \exists\ r\ /\ w_r \notin \left[-2\sqrt{\hat{\delta}_{\varepsilon_{r-1}}^2\left[1 + X_r^{'}(X_{r-1}^{'}X_{r-1})^{-1}X_r\right]}\quad .\quad +2\sqrt{\hat{\delta}_{\varepsilon_{r-1}}^2\left[1 + X_r^{'}(X_{r-1}^{'}X_{r-1})^{-1}X_r\right]}\right] \qquad \forall\ r = k+1 \cdots n$$

فيكون النموذج غير مستقر، وبالتالي وجود تغير هيكلي عند النقطة r.

مثال: من المثال السابق اختبر وجود تغير هيكلي اعتمادا على اختبار البواقي المكررة.

الشكل العام للنموذج هو: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \varepsilon_t$

من النموذج نجد أن عدد معلمات النموذج هو ثلاث معلمات، وبالتالي فإننا نقوم بتقدير كل النماذج على عينات مشاهدات أصغرها عددا هو $r = k+1 = 4$، أي نموذج للفترة $t = 1...4$، ونموذج للفترة $t = 1...5$، وهكذا إلى غاية الفترة $t = 1...10$.

نتائج تقدير مختلف النماذج مدرجة بالجدول الموالي:

الفترة	$t = 1...4$	$t = 1...5$	$t = 1...6$	$t = 1...7$	$t = 1...8$	$t = 1...9$	$t = 1...10$
$\hat{\beta}_1$	2.00	1.333	7.25	7.473	6.552	6.307	6.294
$\hat{\beta}_2$	0.50	0.444	0.281	0.216	0.266	0.258	0.241
$\hat{\beta}_3$	0.00	1.111	-4.788	-4.605	-3.839	-3.468	-3.305
$\hat{\delta}_\varepsilon$	0.00	0.166	0.441	0.459	0.417	0.394	0.388

حساب بواقي التقدير:

$$e_5 = Y_5 - \left[\hat{\beta}_1^{5-1} + \hat{\beta}_2^{5-1}X_{25} + \hat{\beta}_3^{5-1}X_{35}\right] = Y_5 - \left[\hat{\beta}_1^4 + \hat{\beta}_2^4 X_{25} + \hat{\beta}_3^4 X_{35}\right]$$
$$= 6 - [2.00 + 0.50 \cdot 9 + 0.00 \cdot 0.70] = -0.50$$

$$\left(X_{04}{}'X_{04}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 22 & 0.34\\ 22 & 126 & 18.6\\ 0.34 & 18.6 & 2.9\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}121.5 & -3.5 & -120\\ -3.5 & 0.25 & 2.5\\ -120 & 2.5 & 125\end{pmatrix}$$

$$X_5=(1 \quad 9 \quad 0.7)$$

$$w_5=\frac{e_5}{\sqrt{1+X_5'(X_4'X_4)^{-1}X_5}}=\frac{-0.50}{\sqrt{1+3.50}}=-0.235$$

$$\left[-2\hat{\delta}_{\varepsilon_{5-1}}\sqrt{\left[1+X_5'(X_{5-1}'X_{5-1})^{-1}X_5\right]} \quad . \quad +2\hat{\delta}_{\varepsilon_{5-1}}\sqrt{\left[1+X_5'(X_{5-1}'X_{5-1})^{-1}X_5\right]}\right]$$

$$=\left[-2\cdot 0\cdot\sqrt{[1+3.5]} \quad . \quad +2\cdot 0\cdot\sqrt{[1+3.5]}\right]=[0 \,.\, 0]$$

$$e_6=Y_6-\left[\hat{\beta}_1^{6-1}+\hat{\beta}_2^{6-1}X_{26}+\hat{\beta}_3^{6-1}X_{36}\right]=Y_6-\left[\hat{\beta}_1^5+\hat{\beta}_2^5X_{26}+\hat{\beta}_3^6X_{36}\right]$$

$$=7-[1.333+0.444\cdot 8+1.111\cdot 0.60]=1.448$$

$$\left(X_{05}{}'X_{05}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 31 & 4.1\\ 31 & 207 & 24.9\\ 4.1 & 24.9 & 3.39\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}113.5 & -4.16667 & -106.667\\ -4.16667 & 0.19444 & 3.61111\\ -106.667 & 3.61111 & 102.778\end{pmatrix}$$

$$X_6=(1 \quad 8 \quad 0.6)$$

$$w_6=\frac{e_6}{\sqrt{1+X_6'(X_5'X_5)^{-1}X_6}}=\frac{1.448}{\sqrt{1+2.944}}=0.7273$$

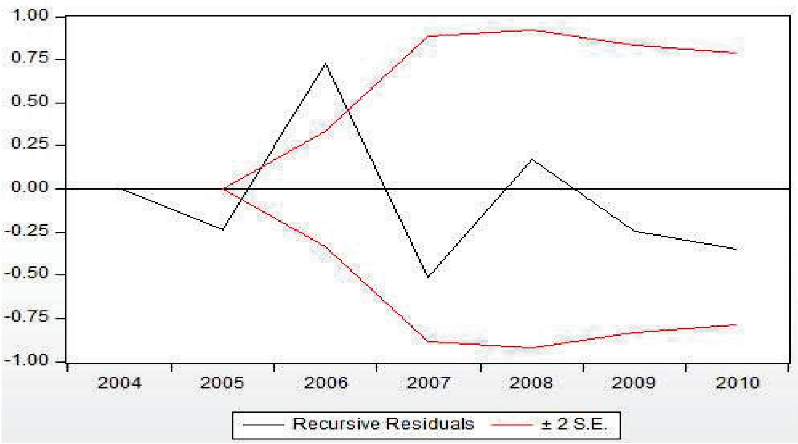
$$\left[-2\hat{\delta}_{\varepsilon_{6-1}}\sqrt{\left[1+X_6'(X_{6-1}'X_{6-1})^{-1}X_5\right]} \quad . \quad +2\hat{\delta}_{\varepsilon_{6-1}}\sqrt{\left[1+X_6'(X_{6-1}'X_{6-1})^{-1}X_6\right]}\right]$$

$$=\left[-2\cdot 0.166\cdot\sqrt{[1+2.944]} \quad . \quad +2\cdot 0.166\cdot\sqrt{[1+2.944]}\right]=[-0.33 \quad . \quad 0.33]$$

والجدول التالي يبين البواقي المتكررة w_r كمايلي:

الفترة	5	6	7	8	9	10
w_t	-0.236	0.727	-0.509	0.169	-0.243	-0.350
$-2\sqrt{\hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1+X_r'(X_{r-1}'X_{r-1})^{-1}X_r\right]}$	0	-0.33	-0.883	-0.919	-0.835	-0.788
$+2\sqrt{\hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1+X_r'(X_{r-1}'X_{r-1})^{-1}X_r\right]}$	0	0.33	0.883	0.919	0.835	0.788

وهو ما يبينه الشكل التالي:



من خلال الجدول والتمثيل البياني نجد أن :

$$w_5 \notin [0 \quad . \quad 0] \qquad\qquad w_6 \notin [-0.33 \quad . \quad 0.33]$$

وبالتالي وجود تغير هيكلي سنتي 2005 و2006 على التوالي.

خامسا: التنبؤ باستعمال النموذج الخطي المتعدد:

نظرا لأن المتغيرات التفسيرية (المستقلة) محددة خارج النموذج الخطي المتعدد المقدر، وبمعرفتنا بالقيم المستقبلية لهذه المتغيرات، فإنه يمكننا التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع. فإذا افترضنا أن المتغيرات المستقلة معرفة من أجل المشاهدة $n+h$ $(h=1.2.3....)$ ، فيكون التنبؤ المستقبلي يقيم المتغير التابع لفترة واحدة كمايلي:

$$\hat{Y}_n(1)=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2.n+1}+\hat{\beta}_3X_{3.n+1}+\cdots\cdots+\hat{\beta}_kX_{k.n+1}$$

التنبؤ لفترتين في المستقبل:

$$\hat{Y}_n(2)=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2.n+2}+\hat{\beta}_3X_{3.n+2}+\cdots\cdots+\hat{\beta}_kX_{k.n+2}$$

التنبؤ لفترات h في المستقبل:

$$\hat{Y}_n(h)=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2.n+h}+\hat{\beta}_3X_{3.n+h}+\cdots\cdots+\hat{\beta}_kX_{k.n+h}$$

حيث: $h=1.2.3....H$ يسمى بأفق التنبؤ.

وعليه نصل إلى التنبؤ للفترة H في المستقبل كما يلي:

$$\hat{Y}_n(H)=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2.n+H}+\hat{\beta}_3X_{3.n+H}+\cdots\cdots+\hat{\beta}_kX_{k.n+H}$$

إذن إذا أردنا التنبؤ بمجموعة من المشاهدات المستقبلية بأفق تنبؤ يساوي H فترة زمنية، فإن شعاع القيم التنبؤية للمتغير التابع يكون كمايلي:

$$\hat{Y}_n(H)=\begin{pmatrix}\hat{Y}_n(1)\\ \hat{Y}_n(2)\\ \vdots\\ \hat{Y}_n(H)\end{pmatrix}_{(H.1)}$$

أما مصفوفة المتغيرات المفسرة المستقبلية فتكون كما يلي:

$$X_{n+H}=\begin{pmatrix}1 & X_{2.n+1} & X_{3.n+1} & \cdots & X_{k.n+1}\\ 1 & X_{2.n+2} & X_{3.n+2} & \cdots & X_{k.n+2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_{2.n+H} & X_{3.n+H} & \cdots & X_{k.n+H}\end{pmatrix}_{(H.k)}$$

وبالتالي يمكن كتابة النموذج الخطي العام المتنبأ به على الشكل التالي:

$$Y_n(H) = X_{n+H} \cdot \beta + \varepsilon_{n+H}$$

بينما النموذج المقدر فيأخذ الشكل التالي:

$$\hat{Y}_n(H) = X_{n+H} \cdot \hat{\beta}$$

ومنه يكون متوسط مقدر التنبؤ كمايلي:

$$E\left(\hat{Y}_n(H)\right) = X_{n+H} \cdot E(\hat{\beta}) = X_{n+H} \cdot \beta = E\left(Y_n(H)\right)$$

ومنه نقول أن $E\left(\hat{Y}_n(H)\right)$ عبارة عن تنبؤ غير متحيز للعبارة: $X_{n+H} \cdot \beta = E\left(Y_n(H)\right)$.

ليكون التباين:

$$Var\left(\hat{Y}_n(H)\right) = E\left(\left(\hat{Y}_n(H) - X_{n+H} \cdot \beta\right)\left(\hat{Y}_n(H) - X_{n+H} \cdot \beta\right)'\right) = \delta_\varepsilon^2 X_{n+H}(X'X)^{-1} X'_{n+H}$$

أما شعاع أخطاء التنبؤ فيكون كمايلي:

$$\hat{e}_{n+H} = Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H) \Rightarrow E(\hat{e}_{n+H}) = E(Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H)) = 0$$

أما تباين شعاع أخطاء التنبؤ فيعطى كما يلي:

$$Var(\hat{e}_{n+H}) = Var(Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H)) \Rightarrow E\left[\left(-X_{n+H}\left(\hat{\beta} - \beta\right) + \varepsilon_{n+H}\right)\left(-X_{n+H}\left(\hat{\beta} - \beta\right) + \varepsilon_{n+H}\right)'\right]$$
$$= \delta_\varepsilon^2 X'_{n+H}(X'X)^{-1} X_{n+H} + \delta_\varepsilon^2 I_H = \delta_\varepsilon^2\left(X'_{n+H}(X'X)^{-1} X_{n+H} + I_H\right)$$

ويكون هذا التنبؤ هو أحسن تنبؤ خطي غير متحيز (BLUP) يمكن الحصول عليه، حيث إذا عرفنا $\tilde{Y}_n(H)$ تنبؤ آخر خطي لعينة مشاهدات المتغير التابع مع متوسط خطأ التنبؤ مساو للصفر، $E(Y_{n+H} - \tilde{Y}_n(H)) = 0$، تكون لدينا المتراجحة:

$$Var(Y_{n+H} - \tilde{Y}_n(H)) - Var(Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H)) \geq 0$$

ومنه يمكننا القول أن: $\hat{Y}_n(H) = X_{n+H} \cdot \hat{\beta}$ هو أحسن تنبؤ خطي غير متحيز.

وتكون اختبارات التنبؤ عن طريق إيجاد التوزيع الذي يعتبر فرضية العدم والقائلة بأن النموذج الخطي العام يبقى محافظا على شكله من الفترة الأولى إلى غاية الفترة $n+H$، أي:

$$H_0: \quad \hat{Y} = X\hat{\beta} \quad t = 1. \ldots\ldots n.\ n+1.\ n+2 \ldots\ldots\ldots n+h \ldots\ldots\ldots n+H$$

وذلك ضد الفرضية البديلة، والتي تنص على أن نموذج العينة الأولى n يختلف عن نموذج التنبؤ للفترة H.

$$F=\frac{\left(Y_{n+H}-\hat{Y}_n(H)\right)'\left[X'_{n+H}(X'X)^{-1}X_{n+H}+I_H\right]^{-1}\left(Y_{n+H}-\hat{Y}_n(H)\right)/H}{\hat{\delta}_\varepsilon^2}\to F^{\alpha}_{(H.n-k)}$$

وإذا كان $H=1$ يصبح التوزيع أعلاه كما يلي:

$$F=\frac{\left(Y_{n+1}-\hat{Y}_n(1)\right)'\left[X'_{n+1}(X'X)^{-1}X_{n+1}+I_1\right]^{-1}\left(Y_{n+1}-\hat{Y}_n(1)\right)}{\hat{\delta}_\varepsilon^2}\to F^{\alpha}_{(1.n-k)}$$

<u>مثال</u>: بالرجوع الى المثال السابق واذا علمنا أن القيم المستقبلية (الفترة 11) لكل من سعر الفائدة و نسبة المعروض النقدي إلى الناتج المحلي الاجمالي هي 12 و0.80 على التوالي، فيمكن التنبؤ بالتغير في الرقم القياسي لأسعار الأسهم في هذا السوق للفترة 11 كمايلي:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{11}&=\hat{Y}_{10}(1)=6.29+0.24\cdot X_{2.11}-3.30\cdot X_{3.11}\\&=6.29+0.25\cdot(12)-3.30\cdot(0.80)\\&=6.65\end{aligned}$$

لإيجاد مجال الثقة للتنبؤ يجب حساب الانحراف المعياري لخطأ التنبؤ كمايلي:

$$0.1505\begin{pmatrix}16.23&-0.690&-14.46\\-0.690&0.034&0.556\\-14.46&0.556&13.70\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}V\hat{a}r(\hat{e}_{n+H})&=\hat{\delta}_\varepsilon^2\left(X'_{n+H}(X'X)^{-1}X_{n+H}+I_H\right)\\&=(0.1505)\left((1\quad 12\quad 0.80)\begin{pmatrix}16.23&-0.690&-14.46\\-0.690&0.034&0.556\\-14.46&0.556&13.70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\12\\0.80\end{pmatrix}+1\right)\\&=(0.1505)\left((-3.762\quad 0.1628\quad 3.172)\begin{pmatrix}1\\12\\0.80\end{pmatrix}+1\right)=(0.1505)(1.7292)=0.2602\end{aligned}$$

وبالتالي يكون الانحراف المعياري لخطأ التنبؤ: $\hat{\delta}_{\hat{e}_{n+H}}=\sqrt{0.2602}=0.51$

إذن مجال الثقة يكون كمايلي:

$$\begin{aligned}Y_n(1)&\in\left[\hat{Y}_n(1)-St^{2.5\%}_{(n-k)}\hat{\delta}_{\hat{e}_{n+1}}\ .\ \hat{Y}_n(1)+St^{2.5\%}_{(n-k)}\hat{\delta}_{\hat{e}_{n+1}}\right]\\(Y_{10}(1)=Y_{11})&\in\left[6.65-2.365(0.51)\ .\ 6.65+2.365(0.51)\right]\\Y_{11}&\in[5.44\ .\ 7.85]\end{aligned}$$

تمارين المحور الثالث

التمرين الأول:

ليكن لديك النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

المطلوب:

1- ما هي فرضيات طريقة OLS لتقدير معلمات هذا النموذج؟
2- أكتب النموذج على شكل مصفوفات.
3- قدر معلمات النموذج.
4- قدر تباين المتغير العشوائي ε_t.
5- أثبت أن : $R^2 = \dfrac{\hat{\beta}' X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$

التمرين الثاني:

ليكن لديك النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \beta_4 \cdot X_{4t} + \varepsilon_t$$

بعد القيام بالعمليات الحسابية على معطيات المتغير التابع والمتغيرات المستقلة تم التوصل إلى النتائج التالية:

$$X'X = \begin{pmatrix} 12 & 130 & 80 & 86.5 \\ & 1756 & 1101 & 1202.5 \\ & & 709 & 766.25 \\ & & & 838.25 \end{pmatrix} \qquad X'Y = \begin{pmatrix} 378 \\ 4669 \\ 2917 \\ 3171 \end{pmatrix} \qquad Y'Y = 12868$$

المطلوب:

1- تقدير النموذج التالي والمستنتج من النموذج السابق: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_4 X_{4t} + \varepsilon_t$

2- اختبار المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

3- اختبار الفرضيات: .

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 1 \\ H_1 : \beta_2 \neq 1 \end{cases}$$

حلول تمارين المحور الثالث:

حل التمرين الأول:

ليكن لديك النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

1- فرضيات طريقة OLS لتقدير معلمات هذا النموذج هي:

- $E(\varepsilon) = 0$: متوسط قيم المتغير العشوائي معدوم، وهو ما يمكن التعبير عنه كمايلي:

$$E(\varepsilon) = 0 = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $E(\varepsilon\varepsilon') = \delta_\varepsilon^2 I_n$ ، أي تباين المتغير العشوائي ثابت، وأن التباينات المشتركة بين قيمه معدومة. أي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = E\left(\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \cdots\cdots \varepsilon_n \end{pmatrix}\right) = E\begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1\varepsilon_n & \varepsilon_2\varepsilon_n & \cdots & \cdots & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ E(\varepsilon_1\varepsilon_n) & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_\varepsilon^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \delta_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$= \delta_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \delta_\varepsilon^2 I_n$$

- $\varepsilon \to N(0 . \delta^2 I_n)$: أي أن الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم وتباين يساوي $\delta^2 I_n$ ، أي:

$$\varepsilon \to N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} . \; \delta_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right]$$

- $Cov(X.\varepsilon) = 0$: عدم وجود ارتباط بين أشعة مصفوفة المتغيرات المستقلة وشعاع الخطأ العشوائي.

- $\left(\frac{X'X}{n}\right)$: تؤول إلى مصفوفة منتهية وغير أحادية.
- أشعة المصفوفة X مستقلة، هذا ما يسمح بالتخلص من مشكل الامتداد الخطي وحساب $(X'X)^{-1}$.

2- كتابة النموذج على شكل مصفوفات.

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots\cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots\cdots + \beta_k X_{k2} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
Y_n &= \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_b
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$Y = X \quad \beta + \varepsilon$$

حيث: Y: شعاع مشاهدات المتغير التابع $(n\times1)$.

X: مصفوفة مشاهدات المتغيرات المستقلة $(n\times(k-1))$.

β: شعاع المعلمات $((k-1)\times1)$.

ε: شعاع المتغير العشوائي $(n\times1)$.

3- تقدير معلمات النموذج:

- النموذج المقدر: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$.
- انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية: $e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$.
- مجموع مربعات البواقي: $e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$.

لدينا: $e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$.

ولدينا القيمتين: $Y'X\hat{\beta}$ و $\hat{\beta}'X'Y$ متساويتين فنجد: $e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$.

نقوم بإيجاد: $\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d\,e'e}{d\hat{\beta}} &= -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \\
&= -X'Y + X'X\hat{\beta} = 0
\end{aligned}$$

ومنه: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$

4- تقدير تباين المتغير العشوائي ε_t:

$$e = (Y - X\hat{\beta}) = Y - X(X'X)^{-1}X'Y = (I - X(X'X)^{-1}X')Y = MY$$

حيث: M مصفوفة متناظرة ومستقلة، أي: $M = M^2 = M^3 = \cdots\cdots$ و $MX = 0$.

ولدينا:

$$e'e = (M\varepsilon)'(M\varepsilon) = \varepsilon' M'M\varepsilon = \varepsilon' M\varepsilon$$

نقوم بحساب الأمل الرياضي لـ: $e'e$ فنجد:

$$\begin{aligned}
E(e'e) &= E(\varepsilon' M \varepsilon) = E(\operatorname{trac}(\varepsilon M \varepsilon')) = E(\operatorname{trac}M\ \varepsilon\varepsilon') = \operatorname{trac}ME\ (\varepsilon\varepsilon') \\
&= \operatorname{trac}M\ (\delta_\varepsilon^2 I) = \delta_\varepsilon^2 \operatorname{trac}M \\
&= \delta_\varepsilon^2 \left[\operatorname{trac}I_{\ n} - \operatorname{trac}\left[X(X'X)^{-1}X'\right]\right] \\
&= \delta_\varepsilon^2 [n - k]
\end{aligned}$$

من خلال هذه النتيجة نستنتج أن $e'e$ مقدر متحيز لـ: δ_ε^2. إذن المقدر غير المتحيز لـ: δ_ε^2 هو: $\hat{\delta}_\varepsilon^2 = e'e/_{n-k}$

5- إثبات أن: $R^2 = \dfrac{\hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$

$$R^2 = \frac{(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})} = \frac{(\hat{Y}'-\overline{Y})(\hat{Y}-\overline{Y})}{(Y'-\overline{Y})(Y-\overline{Y})} = \frac{(\hat{\beta}'X'-\overline{Y})(X\hat{\beta}-\overline{Y})}{(Y'-\overline{Y})(Y-\overline{Y})} = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'\overline{Y} - \overline{Y}X\hat{\beta} + \overline{Y}^2}{Y'Y - Y'\overline{Y} - \overline{Y}Y' + \overline{Y}^2}$$

$$= \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2} = \frac{\hat{\beta}'X'X(X'X)^{-1}X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2} = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$$

حل التمرين الثاني:

1- تقدير النموذج:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_4 \cdot X_{4t} + \varepsilon_t$$

لدينا:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum X_{1t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{1t} & \sum X_{1t}^2 & \sum X_{1t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{1t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 130 & 86.5 \\ 130 & 1756 & 1202.5 \\ 86.5 & 1202.5 & 838.25 \end{pmatrix}$$

إذن: $\det(X'X) = 50498$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{50498} \begin{pmatrix} 25960.75 & -4956.25 & 4431 \\ -4956.25 & 2576.75 & -3185 \\ 4331 & -3185 & 4172 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0.5140 & -0.0981 & 0.0877 \\ -0.0981 & 0.0510 & -0.0630 \\ 0.0877 & -0.0630 & 0.0826 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{1t}Y_t \\ \sum X_{3t}Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 378 \\ 4669 \\ 3171 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0.5140 & -0.0981 & 0.0877 \\ -0.0981 & 0.0510 & -0.0630 \\ 0.0877 & -0.0630 & 0.08628 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 378 \\ 4669 \\ 3171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.35 \\ 1.26 \\ 0.92 \end{pmatrix}$$

فيكون النموذج المقدر كما يلي:

$$\hat{Y}_t = 14.35 + 1.26 \cdot X_{2t} + 0.92 \cdot X_{4t}$$

2- اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

1-2- حساب معامل التحديد R^2:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2} = \frac{(14.35 \quad . \quad 1.26 \quad . \quad 0.92)\begin{pmatrix} 378 \\ 4669 \\ 3171 \end{pmatrix} - 12\left(\frac{378}{12}\right)^2}{12868 - 12\left(\frac{378}{12}\right)^2} = \frac{12707.9 - 11907}{12868 - 11907} = \frac{800.9}{961} = 0.84$$

أي أن للنموذج قدرة تفسيرية جيدة، كما أن 84% من تغيرات Y_t مفسرة بتغيرات كل من X_{2t} و X_{4t}.

2-2- اختبار فيشر:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0 \\ H_1 : \exists i / \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

- إحصائيةFISHER المحسوبة:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / k-1}{(1-R^2) / n-k} = \frac{0.84 / 3-1}{(1-0.84) / 12-3} = 42$$

- إحصائيةFISHER المجدولة:

$$F_{cal} = F^{\alpha}_{(k-1.n-k)} = F^{5\%}_{(2.9)} = 4.26$$

نلاحظ أن: $F^{5\%}_{(2.9)} < F_{cal}$، ومنه نقبل الفرضية H_1، أي أن النموذج ككل له معنوية إحصائية.

3- اختبار الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 1 \\ H_1 : \beta_2 \neq 1 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\delta}^2_{\varepsilon}(X'X)^{-1}$$

$$\hat{\delta}^2_{\varepsilon} = \frac{e'e}{n-k} = \frac{160.10}{9} = 17.79$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = 17.79 \cdot \begin{pmatrix} 0.5140 & -0.0981 & 0.0877 \\ -0.0981 & 0.0510 & -0.063 \\ 0.0877 & -0.0630 & 0.0826 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.14 & -1.74 & 1.56 \\ -1.74 & 0.90 & -1.12 \\ 1.56 & -1.12 & 1.46 \end{pmatrix}$$

- احصائية Student المحسوبة:

$$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_2)}} \right| = \left| \frac{1.26 - 1}{\sqrt{0.90}} \right| = 0.27$$

- احصائية Student المجدولة:

$$St^{2.5\%}_{(n-k)} = St^{2.5\%}_{(9)} = 2.306$$

ومنه نلاحظ أن $St^{2.5\%}_{(9)} < St_{cal}$، ومنه نقبل الفرضية H_0 أي أن $\beta_2 = 1$.

المحور الرابع:

التعـــدد الخـــطي

مقدمة

إن تحليل الانحدار المتعدد الذي يضم عدة متغيرات مستقلة، قد ينشئ مشاكل قياسية مسببة تشوها للنموذج المقدر، بسبب البيانات المأخوذة ونوعيتها، فاستخدام البيانات الخاطئة والمرتبة وفقا لترتيب معين أو سلوك بعض من المتغيرات سلوكا باتجاه واحد، يجعل هذه المتغيرات تترابط فيما بينها، وحقيقة هذا الأمر يظهر في بيانات السلاسل الزمنية أكثر مما يظهر في الأنواع الأخرى من البيانات، فعند تقدير النموذج الذي تعتريه هذه المشكلة قد تكون معامل التحديد R^2 عالية جدا، وقد تصل إلى 100%، وبالتالي فإن إحصائية FISHER المحسوبة F_{cal} تكون عالية جدا، وعدم معنوية معلمات النموذج نظرا لصغر قيمة احصائية STUDENT المحسوبة St_{cal}، ما ينتج انحدارا مزيفا لا يعكس حقيقة الظاهرة المدروسة.

أولا: طبيعة مشكلة التعدد الخطي

إن مشكلة التعدد الخطي التي تواجه النماذج الخطية المتعدد قد تأخذ أحد النوعين التاليين:

- **الإرتباط الخطي التام PREFECT MULTICOLLINEARITY:** في حال حدوث ارتباط خطي تام بين المتغيرات المستقلة في النموذج، فإنه يستحيل أصلا تقدير النموذج، لأن محدد المصفوفة $(X'X)$ يكون مساويا للصفر، أي $\text{Det}(X'X)=0$. فلو كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\varepsilon_t$$

ولو افترضنا أن هناك ارتباطا خطيا تاما بين X_{2t} و X_{3t} كما يلي: $X_{3t}=2\cdot X_{2t}$، فإن النموذج السابق يمكن صياغته كمايلي:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3(2\cdot X_{2t})+\varepsilon_t$$

والذي يأخذ الشكل المصفوفاتي التالي:

$$\begin{pmatrix} Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & X_{21} & 2X_{21}\\ 1 & X_{22} & 2X_{22}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{2n} & 2X_{2n} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y=\begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}\\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & 2\sum X_{2t}^2\\ 2\sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}^2 & 4\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum Y_t\\ \sum X_{2t}Y_t\\ 2\sum X_{2t}Y_t \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(X'X)=\begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & 2\sum X_{2t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & 2\sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}^2 & 4\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(X'X)=(-1)^{1+1}(n)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t}^2 & 2\sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t}^2 & 4\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix}+(-1)^{1+2}(\sum X_{2t})\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t} & 4\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}(2\sum X_{2t})\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix}$$

$$=n\cdot\left[4\cdot\left(\sum X_{2t}^2\right)^2-4\cdot\left(\sum X_{2t}^2\right)^2\right]-(\sum X_{2t})\cdot\left[4\cdot\left(\sum X_{2t}^2\right)^2-4\cdot\left(\sum X_{2t}^2\right)^2\right]$$

$$+(2\sum X_{2t})\cdot\left[2\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2-2\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2\right]=0$$

وبالتالي فإن محدد المصفوفة $(X'X)$ يساوي صفر، ولا يمكن الحصول على معكوس هذه المصفوفة، وبالتالي استحالة تقدير هذا النموذج في حالة الارتباط الخطي التام.

- **الارتباط الخطي الغير تام Imperfect Multicollinearity:** في حالة الارتباط الخطي غير التام يمكن تقدير معالم النموذج، لأنه يمكننا ايجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$، طالما أن محددها غير معدوم. ولا يمكن التأكد منه إلا باختبارات الكشف عن هذه المشكلة.

فلو كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\varepsilon_t$$

ولو افترضنا أن هناك ارتباطا خطيا غير تام بين X_{2t} و X_{3t} كما يلي: $X_{3t}=X_{2t}+1$، فإن النموذج السابق يمكن صياغته كمايلي:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3(X_{2t}+1)+\varepsilon_t$$

والذي يأخذ الشكل المصفوفاتي التالي:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{21}+1 \\ 1 & X_{22} & X_{22}+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{2n}+1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y=\begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & n+\sum X_{2t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \\ n+\sum X_{2t} & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}^2+2\sum X_{2t}+n \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ 2\sum X_{2t}Y_t \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(X'X)=\begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & n+\sum X_{2t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \\ n+\sum X_{2t} & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}^2+2\sum X_{2t}+n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(X'X) &= (-1)^{1+1}(n)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \\ \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}^2+2\sum X_{2t}+n \end{pmatrix} \\ &+(-1)^{1+2}(\sum X_{2t})\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t} & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \\ n+\sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2+2\sum X_{2t}+n \end{pmatrix} \\ &+(-1)^{1+3}(n+\sum X_{2t})\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 \\ n+\sum X_{2t} & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(X'X) &= n\cdot\left[\left((\sum X_{2t}^2)^2+2\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2+n\sum X_{2t}^2\right)-\left((\sum X_{2t})^2+2\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2+(\sum X_{2t}^2)^2\right)\right] \\ &-(\sum X_{2t})\cdot\left[\left(\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2+2(\sum X_{2t})^2+n\sum X_{2t}\right)-\left(n\sum X_{2t}+n\sum X_{2t}^2+(\sum X_{2t})^2+\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2\right)\right] \\ &+(n+\sum X_{2t})\cdot\left[\left((\sum X_{2t})^2+\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2\right)-\left(n\sum X_{2t}^2+\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2\right)\right] \\ &= n\left[(n-1)\sum X_{2t}^2\right]-(\sum X_{2t})\left[(2-n)(\sum X_{2t})^2\right]+(n+\sum X_{2t})\left[(\sum X_{2t})^2-n\sum X_{2t}^2\right]\neq 0 \end{aligned}$$

1- أسباب مشكلة التعدد الخطي:

من أهم الأسباب التي تؤدي إلى نشوء مشكلة التعدد الخطي نذكر مايلي:[1]

- اتجاه المتغيرات الاقتصادية للتغير معا مع مرور الزمن، فإذا أخذنا المتغيرات الاقتصادية التالية: الدخل، الاستهلاك، الاستثمار والعمالة، فنجد أنها بمرور الزمن ستتزايد، وبما أنه هناك ارتباط بين هذه المتغيرات، فالتعدد الخطي واقع لا محالة.
- إدراج متغيرات ذات ابطاء زمني كمتغيرات مستقلة في النموذج الخطي المتعدد، فدخل الفترة الحالية مثلا يتحدد جزئيا بدخل الفترة السابقة، وهذا ما يعني أن هناك ارتباط بين القيم المتتالية لمتغير معين، وبالتالي نشوء مشكلة التعدد الخطي.

2- نتائج مشكلة التعدد الخطي:

من أثار مشكلة التعدد الخطي على النموذج نجد:[2]

- محدد المصفوفة $(X'X)$ صغير نسبيا وقريب من الصفر، مما يعطي معكوسا بعناصر كبيرة نسبيا، ما يؤدي الى الحصول على تباينات للمعلمات كبيرة جدا، ما يودي إلى تضاؤل احصائية STUDENT المحسوبة St_{cal}، وبالتالي عدم معنوية المعلمات المقدرة، والاتجاه نحو قبول فرضية العدم ورفض الفرضية البديلة.
- وجود علاقة طردية بين معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة وارتفاع تباين المعلمات المقدرة.

[1] - شيخي محمد، مرجع سبق ذكره، ص 90.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 345، بتصرف.

- ارتفاع قيمة معامل التحديد، مما يوجه الباحث الى الاعتقاد بأن المتغيرات المستقلة لها قدرة عالية على تفسير التغيرات الحاصلة في المتغير التابع، وهو ما يؤكده اختبار FISHER، حيث أن إحصائية FISHER المحسوبة F_{cal} تكون عالية جدا. إلا أن عدم معنوية المعلمات المقدرة يؤكد أن اختبار معامل التحديد واختبار FISHER أعطى نتائج مضللة.

ثانيا: الكشف عن مشكلة التعدد الخطي

توجد عدة اختبارات تستخدم للكشف عن مشكلة **التعدد الخطي**، منها:

1- قياس التعدد الخطي أو شرط الأعداد CONDITION NUMBERS:[1]

من خلال النموذج التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ ، يكون لدينا:

$$\begin{cases} Var(\hat{\beta}_2) = \dfrac{\delta_\varepsilon^2}{\sum X_{2t}^2 (1 - R_2^2)} \\ Var(\hat{\beta}_3) = \dfrac{\delta_\varepsilon^2}{\sum X_{3t}^2 (1 - R_3^2)} \\ Cov(\hat{\beta}_2 . \hat{\beta}_3) = \dfrac{\delta_\varepsilon^2 \, R_1^2}{\sum X_{2t} X_{3t} (1 - R_2^2)} \end{cases}$$

حيث أن R_2^2 و R_3^2 هو مربع معامل الارتباط المتعدد بين المتغيرين المستقلين X_{2t} و X_{3t} ، بينما في حالة توسيع النموذج إلى k متغير مستقل $(k > 2)$ ، يصبح R_i^2 مربع معامل الارتباط المتعدد ما بين المتغير المستقل X_{it} وباقي المتغيرات المستقلة الأخرى.

وبالتالي يمكننا استنتاج قانون عام لتباين معلمات النموذج المقدرة كمايلي:

$$Var(\hat{\beta}_i) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum X_{it}^2 (1 - R_i^2)} \qquad i = 2 \cdots\cdots k$$

وتكون قيمة $Var(\hat{\beta}_i)$ كبيرة كلما كانت δ_ε^2 كبيرة، $\sum X_{it}^2$ صغيرة، R_i^2 كبيرة. ومنه نعرف مقياسا جديدا يسمى: "معامل تضخيم التباين (V.I.F) VARIANCE INFLATION FACTOR"، ومقياسا آخر يسمى: "شرط العدد CONDITION NUMBERS"، وهما مقياسان يحددان درجة التعدد الخطي.

ويعطى معامل تضخيم التباين بالعلاقة التالية: $V.I.F(\hat{\beta}_i) = \dfrac{1}{1 - R_i^2}$.

وبناءا عليه يمكن كتابة مايلي: $i = 2 \cdots\cdots k \qquad Var(\hat{\beta}_i) = \dfrac{\delta_\varepsilon^2}{\sum X_{it}^2} V.I.F(\hat{\beta}_i)$

وبالتالي: $i = 2 \cdots\cdots k \qquad V.I.F(\hat{\beta}_i) = \dfrac{\sum X_{it}^2}{\delta_\varepsilon^2} Var(\hat{\beta}_i)$

---

[1] - شيخي محمد، مرجع سبق ذكره، ص ص 92-94.

انطلاقا من الانتقادات الموجهة لمعامل الارتباط، يكون مقياس V.I.F غير كاف لتحديد التعدد الخطي، ومنه نذكر مقياس شرط الأعداد المطور من طرف WELSCH (1980)، والذي يقيس حساسية مقدرات الانحدار للتغيرات الصغيرة في التباينات، ويعرف شرط الأعداد على أنه الجذر التربيعي لحاصل قسمة أكبر قيمة على لأصغر قيمة من القيم المميزة للمصفوفة $(X'X)$، وهو عل الشكل: $K(X)=\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$.

فكلما كانت القيمة السابقة أقرب إلى الواحد، كلما كان هذا مؤشرا على عدم وجود مشكلة تعدد خطي معقدة. ومع هذا فإن المقياسين ليسا كافيين للحكم على مدى خطورة مشكلة التعدد الخطي، حيث أن القانون الخاص بـ: V.I.F يأخذ بعين الاعتبار الارتباطات بين المتغيرات المستقلة فقط، كما أن شرط العدد يمكن أن يتغير بإعادة تحويل المتغيرات المستقلة، والتي ليست دائما صحيحة. ويصلح المقياسان للاستعمال عند حذف بعض المتغيرات وفرض قيود على المعلمات، فقط في الحالات التي يكون فيها $R_i^2 \approx 1$، أو لما تكون القيمة المميزة الصغرى λ_{min} قريبة من الصفر، ونقدر النموذج في هذه الحالة تبعا لبعض القيود المفروضة على معلماته. ويقترح THEIL مقياسا آخر لقياس درجة الارتباط بين المتغيرات، ومنه درجة التعدد الخطي على الشكل التالي:

$$m = R^2 - \sum_{i=2}^{k}\left(R^2 - R_{-i}^2\right)$$

حيث أن R^2 هو معامل التحديد المضاعف المعرف سابقا، أما R_{-i}^2 فهو مربع معامل الارتباط المتعدد من انحدار Y_t على كل المتغيرات المستقلة باستثناء المتغير X_{it}، لكن ما يعاب على هذه الطريقة أن m يمكن أن تكن سالبة، ما يجعل التحليل أصعب.

2- اختبار كلاين "KLEIN TEST":

يشير KLEIN إلى أن الارتباط الداخلي ما بين المتغيرات المستقلة ليس بالضرورة مولدا لمشكلة التعدد الخطي مالم تكن قيمة هذا الارتباط أكبر من قيمة الارتباط الكلي، فحسب هذا الاختبار فوجود الامتداد الخطي يمثل مشكلة إذا كان: $r_{X_{it}.X_{jt}}^2 \geq R_{Y_t.X_{2t}......X_{kt}}^2$.[1]

حيث: $r_{X_{it}.X_{jt}}^2$: معامل الارتباط بين المتغيرين المستقلين X_{it} و X_{jt}.

$R_{Y_t.X_{2t}......X_{kt}}^2$: معامل التحديد لمعادلة انحدار Y_t على المتغيرات المستقلة.

ويعاب على هذا الاختبار أن درجة الارتباط بين المتغيرات التفسيرية لا تعتبر معيارا دقيقا لمدى التأثير الذي يحدثه وجود التعدد الخطي على قيم المعلمات المقدرة وقيم الأخطاء المعيارية، فقد تكون معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرات المستقلة منخفضة بالرغم من وجود مشكلة تعدد خطي كبيرة.

[1] - Régis Bourbonnais, Économétrie, Cours Et Exercices Corrigés, 9e Edition, Dunod, Paris, 2015, P116.

3- اختبار FARRAR-GLAUBER:

نعتبر النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \cdots + \beta_k \cdot X_{kt} + \varepsilon_t$$

لكشف عن مشكلة التعدد الخطي من خلال هذا الاختبار، نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: تحديد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة وحساب محدد هذه المصفوفة.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_{2t}.X_{3t}} & r_{X_{2t}.X_{4t}} & \cdots & r_{X_{2t}.X_{kt}} \\ r_{X_{3t}.X_{2t}} & 1 & r_{X_{3t}.X_{3t4t}} & \cdots & r_{X_{3t}.X_{kt}} \\ r_{X_{4t}.X_{2t}} & r_{X_{4t}.X_{3t}} & 1 & \cdots & r_{X_{4t}.X_{kt}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{X_{kt}.X_{2t}} & r_{X_{kt}.X_{3t}} & r_{X_{kt}.X_{4t}} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

- إذا كانت قيمة المحدد تؤول إلى الصفر، فإن خطر التعدد الخطي يكون كبيرا.

- إذا كانت قيمة المحدد تؤول إلى الواحد، فإن خطر التعدد الخطي يكون ضعيفا، والمتغيرات المستقلة متعامدة.

الخطوة الثانية: المرحلة الثانية من هذا الاختبار تعتمد على إجراء اختبار χ^2.

$$\begin{cases} H_0 : D = 1 \\ H_1 : D < 1 \end{cases}$$

قيمة χ^2 المحسوبة انطلاقا من العينة تعطى بـ[1]: $\chi^2_{cal} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5)\right] LnD$

حيث: n: عدد المشاهدات. k: عدد معلمات النموذج. Ln: اللوغاريتم النيبيري.

الإحصائية χ^2_{cal} تتبع توزيع $Khi-deux$ بدرجة حرية تساوي $\frac{1}{2}k(k-1)$.

نرفض H_0 إذا كان $\chi^2_{cal} > \chi^2_{\frac{1}{2}k(k-1)}$، أي يوجد خطر التعدد الخطي.

4- معامل التحديد واختبارات المعنوية:

يلاحظ أنه إذا كان معامل التحديد لمعادلة انحدار ما مرتفعا جدا ومعظم المعلمات المقدرة غير معنوية إحصائيا، فإن هذا يعتبر مؤشرا عن وجود مشكلة التعدد الخطي.

[1] - Régis Bourbonnais, op cit, P 116.

ثالثا: معالجة مشكل التعدد الخطي

عند وجود مشكلة التعدد الخطي يمكن اقتراح الحلول التالية:

- محاولة توسيع حجم العينة، وذلك بإضافة بيانات كافية عن متغيرات الظاهرة المدروسة، إذ تزداد التقديرات دقة بزيادة عدد البيانات التي تعتمد عليها عملية التقدير، نظرا لوجود علاقة عكسية بين حجم العينة وقيمة التباين، فكلما كبر حجم العينة كلما تم الحصول على معلومات إضافية تساعد على تخفيض حجم التباينات[1]. مع الاشارة إلى أن زيادة حجم العينة ببيانات جديدة لا تختلف معنويا عن البيانيات المتوفرة قد يؤدي إلى تفاقم مشكل التعدد الخطي.
- حذف متغيرات من النموذج: عندما يكون هناك تداخل خطي بين متغيرين مستقلين، يلجأ الباحث أحيانا إلى حذف أحد المتغيرين للتخلص من هذا التداخل[2]. كذلك التخلص أو التخفيف من مشكل التعدد الخطي من خلال اللجوء إلى النظرية الاقتصادية، وما تقترحه من قيود حول بعض المعلمات.
- إضافة عدد حقيقي ثابت c مختار بشكل عشوائي إلى القطر الأول للمصفوفة $X'X$، أي: $X'X+cI_n$، وهو ما يؤدي إلى التخفيف من مشكل التعدد الخطي[3].

رابعا: التعامل مع مشكلة التعدد الخطي

من خلال مشكلة التعدد الخطي يتضح أن الدراسات القياسية التطبيقية قد تعطي العديد من النماذج التي يمكن بناؤها لدراسة ظاهرة اقتصادية معينة، وذلك من خلال اختيار المتغيرات المستقلة التي يجب ادراجها في النموذج (حذفها) لشرح المتغير التابع. في هذه الحالة نستعمل إحدى الطرق التالية لاختيار النموذج الأمثل:

طريقة كل الانحدارات الممكنة:

تعتمد هذه الطريقة على تقدير كل التوفيقات الممكنة ((2^k-1) توفيقة)، والنموذج الأمثل هو أحد النماذج التي لا تحتوي إلا على المتغيرات المعنوية، والذي يكون فيه المعيارين AIC و SC في أدنى قيمة لهما، حيث:

$$AIC=Ln\left(\frac{RSS}{n}\right)+\frac{2k}{n}$$

$$SC=Ln\left(\frac{RSS}{n}\right)+\frac{kLn(n)}{n}$$

حيث: Ln: اللوغاريتم النيبيري، RSS: مجموع مربعات البواقي للنموذج المقدر، n: عدد المشاهدات، k: عدد المتغيرات المستقلة في النموذج.

[1] - حسين علي بخيت، سحر فتح الله، مرجع سبق ذكره، ص 253.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 408.

[3] - Régis Bourbonnais, Op cit, P118.

طريقة الاختيار المتتابع "Forward Regression":

تعتمد هذه الطريقة على اختيار المتغير التفسيري الذي يكون معامل ارتباطه مع المتغير التابع هو الأكبر في مرحلة أولى، ثم حساب معامل الارتباط الجزئي $r^2_{Y.X_i.X_j}$ من أجل $j \neq i$، واختيار المتغير المفسر الذي يكون معامل ارتباطه هو الأكبر، ويتم التوقف إذا كانت St_{cal} أقل من القيمة الحرجة.

طريقة الانحدار خطوة بخطوة "Stepwise Regression":

هذه الطريقة مطابقة للطريقة السابقة، إلا أنه بعد إدخال المتغير التفسيري نقوم باختبار معنوية المتغيرات المدخلة، ونقوم بإقصاء المتغيرات التي تكون غير معنوية.

طريقة Stagewise Regression:

هي طريقة من طرق اختيار المتغيرات التفسيرية، تسمح بجعل الارتباط بين السلاسل التفسيرية ضعيفا، وهذا من خلال دراسة البواقي.

المرحلة الأولى:

- اختيار المتغيرة التفسيرية التي يكون معامل ارتباطها مع Y_t هو الأكبر، ولتكن X_{it}.

المرحلة الثانية:

- حساب بواقي انحدار Y_t على X_{it} بالعلاقة التالية: $e_{1t} = Y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_{it}$.
- حساب معاملات الارتباط البسيطة بين e_{1t} والمتغيرات التفسيرية.
- اختيار المتغيرة التفسيرية التي يكون معامل ارتباطها مع e_{1t} هو الأكبر، ولتكن X_{jt}.

المرحلة الثالثة:

- حساب بواقي انحدار Y_t على X_{it} و X_{jt} بالعلاقة التالية: $e_{2t} = Y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_{it} - \hat{\alpha}_2 X_{jt}$.
- حساب معاملات الارتباط البسيطة بين e_{2t} والمتغيرات التفسيرية.
- اختيار المتغيرة التفسيرية التي يكون معامل ارتباطها مع e_{2t} هو الأكبر، وهكذا.

هذه الطريقة تصبح غير صالحة إذا كانت معاملات الارتباط لا تختلف معنويا عن الصفر.

تمارين المحور الرابع

التمرين الأول:

لتكن لديك البيانات التالية لخمسة متغيرات Y_t ، X_{2t} ، X_{3t} ، X_{4t} ، X_{5t} كمايلي:

Y_t	X_{2t}	X_{3t}	X_{4t}	X_{5t}
6.0	40.1	5.5	108	63
6.0	40.3	4.7	93	72
6.5	47.5	5.2	108	86
7.1	49.2	6.8	100	100
7.2	52.3	7.3	99	107
7.6	58.0	8.7	99	111
8.0	61.3	10.2	101	114
9.0	62.5	14.1	97	116
9.0	64.7	17.1	93	119
9.3	66.8	21.3	102	121

المطلوب: اختبر وجود التعدد الخطي في النموذج التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \beta_4 \cdot X_{4t} + \beta_5 \cdot X_{5t} + \varepsilon_t$ باستخدام اختبار FARRAR-GLAUBER.

التمرين الثاني:

يريد باحث تفسير المتغير Y_t بأربع متغيرات مستقلة X_{2t} ، X_{3t} ، X_{4t} ، X_{5t}، ويريد اختبار التعدد الخطي بين هذه المتغيرات المستقلة، حيث توفرت لديه البيانات التالية:

Y_t	X_{2t}	X_{3t}	X_{4t}	X_{5t}
8.40	82.90	17.10	92.00	94.00
9.60	88.00	21.30	93.00	96.00
10.40	99.90	25.10	96.00	97.00
11.40	105.30	29.00	94.00	97.00
12.20	117.70	34.00	100.00	100.00
14.20	131.00	40.00	101.00	101.00
15.80	148.20	44.00	105.00	101.00
17.90	161.80	49.00	112.00	109.00
19.30	174.20	51.00	112.00	111.00
20.80	184.70	53.00	112.00	111.00

المطلوب:

اختبر وجود مشكلة التعدد الخطي باستخدام اختبار KLEIN، واختبار FARRAR-GLAUBER.

حلول تمارين المحور الرابع

حل التمرين الأول:

لكشف عن مشكلة التعدد الخطي من خلال هذا اختبار **FARRAR-GLAUBER**، نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى:

- تحديد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة:

$$r_{X_i . X_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0.87 & -0.29 & 0.95 \\ 0.87 & 1 & -0.27 & 0.76 \\ -0.29 & -0.27 & 1 & 0.37 \\ 0.95 & 0.76 & 0.37 & 1 \end{pmatrix}$$

- حساب محدد المصفوفة $r_{X_i . X_j}$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0.87 & -0.29 & 0.95 \\ 0.87 & 1 & -0.27 & 0.76 \\ -0.29 & -0.27 & 1 & 0.37 \\ 0.95 & 0.76 & 0.37 & 1 \end{vmatrix} = \frac{256703}{3125000} = 0.0821$$

الخطوة الثانية: المرحلة الثانية من هذا الاختبار تعتمد على إجراء اختبار χ^2.

$$\begin{cases} H_0 : D = 1 \\ H_1 : D < 1 \end{cases}$$

قيمة χ^2 المحسوبة انطلاقا من العينة تعطى بـ:

$$\chi^2_{cal} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5)\right] \text{LnD}$$

$$= -\left[10 - 1 - \frac{1}{6}(2(4)+5)\right] \text{Ln}(0.0821) = -[6.83 \cdot (-2.49)] = +17.07$$

لدينا: $\chi^2_{\frac{1}{2}k(k-1)} = \chi^2_{\frac{1}{2}4(4-1)} = \chi^2_6 = 12.592$

نلاحظ أن: $\left(\chi^2_6 = 12.592\right) < \left(\chi^2_{cal} = 17.07\right)$، ومنه نرفض H_0، أي يوجد خطر التعدد الخطي.

حل التمرين الثاني:

1- الكشف عن مشكلة التعدد الخطي باستخدام اختبار KLEIN:

الخطوة الأولى: تقدير النموذج وحساب معامل التحديد: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \beta_4 \cdot X_{4t} + \beta_5 \cdot X_{5t} + \varepsilon_t$

باستعمال طريقة OLS كانت نتائج التقدير كمايلي:

$$\hat{Y}_t = -4.26 + 0.11 \cdot X_{2t} + 0.0001 \cdot X_{3t} - 0.12 \cdot X_{4t} + 0.15 \cdot X_{5t}$$

$$n = 10 \qquad R^2 = 0.9980 \qquad F_{cal} = 626.38$$

الخطوة الثانية: تحديد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة:

$$r_{X_i \cdot X_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9883 & 0.9803 & 0.9658 \\ 0.9883 & 1 & 0.9699 & 0.9437 \\ 0.9803 & 0.9699 & 1 & 0.9758 \\ 0.9658 & 0.9437 & 0.9758 & 1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن: $\forall \quad i \neq j$ $\left(R^2_{Y_t \cdot X_{2t} \ldots\ldots X_{5t}} = 0.9980\right) < r^2_{X_{it} \cdot X_{jt}}$، وبالتالي لا توجد مشكلة التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة في هذا النموذج.

2- الكشف عن مشكلة التعدد الخطي باستخدام اختبار FARRAR-GLAUBER:

الخطوة الأولى:

تحديد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة:

$$r_{X_i \cdot X_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9883 & 0.9803 & 0.9658 \\ 0.9883 & 1 & 0.9699 & 0.9437 \\ 0.9803 & 0.9699 & 1 & 0.9758 \\ 0.9658 & 0.9437 & 0.9758 & 1 \end{pmatrix}$$

حساب محدد المصفوفة $r_{X_i \cdot X_j}$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0.9883 & 0.9803 & 0.9658 \\ 0.9883 & 1 & 0.9699 & 0.9437 \\ 0.9803 & 0.9699 & 1 & 0.9758 \\ 0.9658 & 0.9437 & 0.9758 & 1 \end{vmatrix} = 0.000035$$

الخطوة الثانية: المرحلة الثانية من هذا الاختبار تعتمد على إجراء اختبار χ^2.

$$\begin{cases} H_0 : D = 1 \\ H_1 : D < 1 \end{cases}$$

قيمة χ^2 المحسوبة انطلاقا من العينة تعطى بـ:

$$\chi^2_{cal} = -\left[n-1-\frac{1}{6}(2k+5)\right]\text{LnD}$$

$$= -\left[10-1-\frac{1}{6}(2(4)+5)\right]\text{Ln}(0.000035) = -[6.83\cdot(-10.23)] = +69.94$$

لدينا: $\chi^2_{\frac{1}{2}k(k-1)} = \chi^2_{\frac{1}{2}4(4-1)} = \chi^2_6 = 12.592$

نلاحظ أن: $\left(\chi^2_6 = 12.592\right) < \left(\chi^2_{cal} = 69.94\right)$، ومنه نرفض H_0، أي يوجد خطر التعدد الخطي.

المحور الخامس:

الارتباط الذاتي

مقدمة:

يعد الارتباط الذاتي AUTOCORRELATION نوعا خاصا من أنواع الارتباطات الاعتيادية، فعند الحديث عن حالة الارتباط بين متغير تابع وآخر مستقل، فإننا نقيس ذلك بمعامل الارتباط CORRÉLATION COEFFICIENT، وعند الحديث عن درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة مع بعضها البعض، فإننا نستعين بمصفوفة معاملات الارتباط الجزئية PARTIAL CORRELATION COEFFICIENTS MATRIX.

أما الارتباط الذاتي الذي نحن بصدد تناوله فينحصر في العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي ε_t، أي درجة الارتباط بين قيمه في الفترة t والفترة $(t-1)$، أو قيمته في الفترة اللاحقة $(t+1)$، ضمن سلسلة مشاهدات هذا المتغير.

أولا: طبيعة مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء

يشير الارتباط الذاتي بوجه عام إلى وجود ارتباط بين القيم المشاهدة لنفس المتغير، وعادة ما يشير هذا المصطلح في نماذج الانحدار إلى وجود ارتباط بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي. فمن بين الفرضيات الكلاسيكية للنماذج الخطية نجد فرضية استقلال الاخطاء فيما بينها، وبالتالي فمصفوفة التباين والتباين المشترك تعطى كمايلي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = E\left(\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \cdots\cdots \varepsilon_n \end{pmatrix}\right) = E\begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1\varepsilon_n & \varepsilon_2\varepsilon_n & \cdots & \cdots & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ E(\varepsilon_1\varepsilon_n) & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_\varepsilon^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \delta_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \delta_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \delta_\varepsilon^2 I_n$$

في حالة عدم تحقق هذه الفرضية فهذا يدل على وجود ارتباط ذاتي للأخطاء، فمصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء $\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') \neq \delta_\varepsilon^2 I_n$، لا تتضمن الصفر خارج قطرها، وكنتيجة لذلك تكون المقدرات متحيزة وتباينها ليس هو الأدنى.

1- أشكال الارتباط الذاتي:

يمكن تصنيف الارتباط الذاتي إلى عدة أنواع، نذكر منها ما يأتي:

1-1- **الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى 'AR(1)' FIRST ORDER AUTOCORRELATION SCHEME:** عندما يكون الارتباط الذاتي للخطأ العشوائي أو المتغير العشوائي من الدرجة الأولى، فإنه يكون غير مستقل ويتبع النموذج التالي:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

حيث: ρ معلمة تقيس درجة الارتباط، و $-1 \le \rho \le 1$.

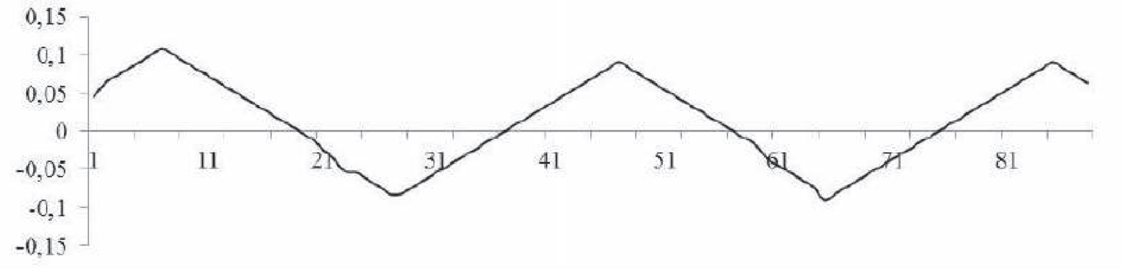
2-1- **الارتباط الذاتي من الدرجة m 'AR(M)' M ORDER AUTOCORRELATION SCHEME:** في هذه الحالة يرتبط حد الخطأ العشوائي للفترة الحالية t بالحدود العشوائية للفترات السابقة حتى الفترة m، وهو ما يمكن توضيحه بالصيغة التالية:

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \rho_3\varepsilon_{t-3} + \cdots\cdots + \rho_m\varepsilon_{t-m} + u_t$$

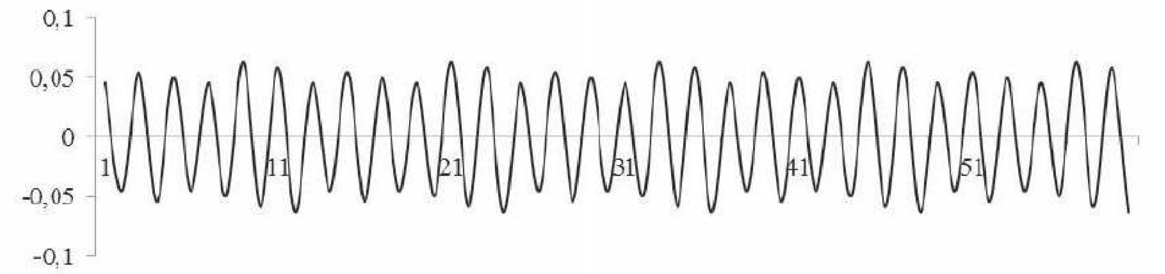
1-3- الارتباط الذاتي الموجب والارتباط الذاتي السالب Positive Autocorrelation and Negative Autocorrelation:

وفقا لهذا التصنيف يصنف الارتباط الذاتي إلى موجب وسالب حسب إشارة القيم المتتالية للمتغير العشوائي كمايلي:

- **الارتباط الذاتي الموجب Positive Autocorrelation**: يحدث هذا النوع في حالة ما أخذت القيم المتتالية للمتغير العشوائي نفس الإشارة، فقد تكون موجبة لفترات وقد تكون سالبة لفترات أخرى.



- **الارتباط الذاتي السالب Negative Autocorrelation**: يحدث هذا النوع في حالة ما أخذت القيم المتتالية للمتغير العشوائي إشارات متناوبة، فقد تكون موجبة لفترة وتكون سالبة في الفترة الموالية.



2- أسباب حدوث الارتباط الذاتي:

- حذف بعض المتغيرات التفسيرية ذات القيم المرتبطة ذاتيا، فمن المعروف أن حذف بعض المتغيرات من نموذج الانحدار يترتب عليه ما يسمى بخطأ الحذف، وهذا ينعكس بدوره في قيم الحد العشوائي[1]. فإذا افترضنا أن المتغير التابع Y_t مرتبط بالمتغيرين X_{2t} و X_{3t}، وأننا اسقطنا بطريق الخطأ المتغير X_{3t} ولم ندرجه في النموذج، فسيتم إلتقاط تأثير المتغير X_{3t} بحد الخطأ أو المتغير العشوائي ε_t، خاصة اذا كان المتغير X_{3t} يمثل سلسلة زمنية عبارة عن امتداد لماضيها القريب، أي X_{3t} يعتمد على X_{3t-1} و X_{3t-2}، هذا ما يؤدي الى ارتباط محتوم بين ε_t و ε_{t-1} و ε_{t-2}.
- سوء توصيف النموذج (Misspecification)، كأن يرتبط المتغير التابع Y_t بالمتغير X_{2t} بعلاقة تربيعية من الشكل: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t}^2 + \varepsilon_t$، في حين أننا حددنا وقدرنا نموذجا خطيا من الشكل: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t$ فإننا سنحصل على حدود خطأ توصيف خطي يعتمد في الأساس على X_{2t}^2، فإذا زاد X_{2t} أو تناقص خلال الزمن فإن ε_t ستتصرف بنفس التصرف، محدثة ارتباطا ذاتيا.[2]
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية، أي الأخطاء المنهجية في القياس.

---

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 67.

[2] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص 279.

ثانيا: تقدير معامل الارتباط الذاتي:

هناك العديد من الطرق لتقدير معامل الارتباط الذاتي، نذكر من أهمها:

1- **طريقة COCHRANE-OREUTTE:** قدم كلل من COCHRANE وOREUTTE بحثا مشتركا سنة 1949 حول طريقة تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ ، حيث اقترحا أن يتم تقديره وفق العلاقة التالية:[1]

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t \cdot e_{t-1}}{\sum e_{t-1}^2}$$

حيث: e : تمثل بواقي تقدير النموذج، أي: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ و $e_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1}$.

2- **طريقة DURBIN-WATSON:** حسب هذه الطريقة يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ من خلال احصائية DURBIN-WATSON، والتي يرمز لها عادة بالرمز DW ، والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = 2 \cdot (1 - \hat{\rho})$$

وبالتالي يمكن تقدير معامل الارتباط الذاتي كما يلي:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$$

3- **طريقة THEIL-NAGAR:** وهي طريقة مطورة لطريقة DURBIN-WATSON في تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ، إذ أخذ الباحثان THEIL وNAGAR في بحثهما سنة 1961 عدد المتغيرات المستقلة k وحجم العينة n في تقدير هذا المعامل، من خلال الصيغة التالية:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left(1 - \frac{DW}{2}\right) + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

ثالثا: آثار مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء:

تتمثل أهم الآثار الناتجة عن مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء فيمايلي:[2]

- لا يؤثر وجود الارتباط الذاتي على تحيز المعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)، حيث تبقى هذه المقدرات مقدرات غير متحيزة. كما تبقى متسقة، إلا أنها تفقد خاصية الكفاءة.
- ينتج عن مشكل الارتباط الذاتي صغر حجم الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة بطريقة (OLS)، ما يؤدي إلى:
  - تضخيم معنوية المعلمات المقدرة، المبالغة في قيمة معامل التحديد.
  - عدم دقة مجالات الثقة للمعلمات المقدرة، لإعتمادها على الأخطاء المعيارية في حسابها.
  - عدم صلاحية اختباري STUDENT وFISHER، كون تباين المتغير العشوائي المقدر يكون متحيزا نحو الأسفل، وبالتالي تكون تباين المتغير العشوائي أقل من تباينه الفعلي.

[1] - شيخي محمد، مرجع سبق ذكره، ص 105.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 68.

- يصبح التنبؤ غير دقيق، لاعتماده على التباين المقدر للمتغير العشوائي، حيث يمكن الحصول على تنبؤات أكثر دقة باستخدام طرق أخرى في تقدير النموذج، كطريقة المربعات الصغرى المعممة Method of Generalized Least Square (GLS).
- تصبح التقديرات حساسة للتقلب من عينة إلى أخرى.

رابعا: الكشف عن مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء:

للكشف عن وجود هذا المشكل يتعين علينا التمييز بين درجات الارتباط الذاتي كما يلي:

1- اختبارات الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى:

للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى هناك العديد من الاختبارات، لعل أهمها ما يلي:

1-1- اختبار Durbin-Watson:

يعتبر هذا الاختبار أكثر الاختبارات استخداما في مختلف العينات، حيث توجد اختبارات أخرى أقوى من اختبار DW من الناحية الاحصائية، إلا أنها تكتسب هذه القوة في حالة العينات كبيرة الحجم فقط، لذلك يفضل اختبار DW على الكثير من الاختبارات الأخرى، فضلا على أنه سهل وبسيط الفكرة والتطبيق، مع الاشارة إلى أنه مخصص للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط.

فإذا كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$، والذي يعاني من مشكل ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى، حسب الشكل التالي: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + \mu_t$.

حيث: ρ: معامل الارتباط الذاتي للأخطاء

μ_t: متغير عشوائي، من خصائصه: $E(\mu_t) = 0 \quad . \quad V(\mu_t) = \delta_\mu^2 \quad . \quad E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad \forall\, i \neq j$

فإن اختبار DW يستخدم لاختبار ثلاث فروض كمايلي:

- وجود ارتباط ذاتي موجب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho > 0 \end{cases}$$

- وجود ارتباط ذاتي سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho < 0 \end{cases}$$

- وجود ارتباط ذاتي موجب أو سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

وتنحصر خطوات هذا الاختبار في النقاط التالية:

- تقدير معلمات النموذج الخطي بطريقة المربعات الصغرى العادية.
- ايجاد بواقي التقدير كمايلي: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- حساب الإحصائية DW التي تعطى بالعلاقة التالية: $DW = \sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_t^2$.

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t^2 + e_{t-1}^2 - 2e_t e_{t-1})}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \approx 2 - \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$\approx 2 - 2\rho \approx 2(1-\rho)$$

بعد حساب DW نقرنها مع القيمتين المجدولتين، d_1 التي تمثل الحد الأدنى لانعدام الارتباط الذاتي، و d_2 التي تمثل الحد الأقصى لانعدام الارتباط الذاتي، وذلك حسب عدد المشاهدات n، وعدد المتغيرات التفسيرية في النموذج عند درجة معنوية 5%.

ويتم قبول ورفض الفرضيتين حسب المخطط التالي:[1]

$\rho > 0$	?	$\rho = 0$	$\rho = 0$	?	$\rho < 0$
0 — d_l	d_l — d_u	d_u — 2	2 — $4-d_u$	$4-d_u$ — $4-d_l$	$4-d_l$ — 4

قيمة DW الوسطية هي 2 وعندها ينعدم الارتباط الذاتي، أي: $\rho = 0$.

ويتم قبول ورفض H_0 حسب الحالات التالية:

$0 < DW < d_l$ وجود ارتباط ذاتي موجب.

$d_l < DW < d_u$ مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

$d_u < DW < 4 - d_u$ عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_u < DW < 4 - d_l$ مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_l < DW < 4$ وجود ارتباط ذاتي سالب.

شروط استخدام اختبار DURBIN-WATSON:

هناك عدد من الشروط الواجب توفرها ليكون استخدام هذا الاختبار صحيحا، وهي:[2]

- الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط، والذي يأخذ الشكل التالي: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + \mu_t$، أي لا يصلح للكشف عن الارتباط الذاتي من درجة أعلى من الدرجة الأولى.
- لابد أن يحتوى النموذج على حد ثابت، كأن يأخذ النموذج الشكل التالي:

---

[1] - Régis Bourbonnais, Op cit, P129.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص96.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

أما إذا كان النموذج لا يحتوي على حد ثابت، فيتعين إعادة تقديره بوجود هذا الحد، للتأكد من وجود أو عدم وجود الارتباط الذاتي للأخطاء.

- أن لا يظهر المتغير التابع بفترات إبطاء في جملة المتغيرات المستقلة.

مثال: قصد دراسة أثر بعض المتغيرات الاقتصادية الكلية على أداء سوق مالي معين، توفرت لدينا البيانات التالية والخاصة بتطور كل من القيمة السوقية والاستثمار الأجنبي المباشر والناتج المحلي الاجمالي، بالمليون دولار خلال الفترة 1990-2018.

السنة	القيمة السوقية	الاستثمار الأجنبي المباشر	الناتج المحلي الاجمالي	السنة	القيمة السوقية	الاستثمار الأجنبي المباشر	الناتج المحلي الاجمالي
1990	472.7	136.49	34300.5	2005	7563.6	2052.00	407040
1991	752.3	212.10	41527	2006	8520.6	2428.49	482760
1992	918.8	420.13	51590	2007	9408.29	3108.5	599460
1993	1005.4	476.62	62742.7	2008	11043.7	4175.7	695600
1994	1274	566.32	72351.4	2009	10034.3	4246.3	717310
1995	1743.8	759.61	79956.2	2010	12049.5	4466.89	816280
1996	2256.6	724.60	91505.8	2011	14384.8	5731.4	992920
1997	2243.9	845.19	108151.8	2012	16643.8	7058.1	1101510
1998	2444.2	875.73	159246.1	2013	17242.5	6024.2	1194150
1999	2825.6	961.68	178935	2014	17228.6	6995.7	1368680
2000	3698.7	1178.12	202250	2015	16702.1	7656.3	1370450
2001	3754.8	1321.02	247350	2016	17406.8	7297.4	1381630
2002	4023.8	1550.64	290150	2017	18876.6	7389.3	1497460
2003	4700.39	1690.19	335490	2018	21041.103	7258.9	1568733
2004	6150.4	1891.79	373803.7				

وبافتراض أننا قدرنا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

حيث: Y_t: القيمة السوقية، X_{2t}: الاستثمار الأجنبي المباشر، X_{3t}: الناتج المحلي الاجمالي.

باستخدام طريقة OLS كانت نتائج تقدير هذا النموذج كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.511 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.00972 \cdot X_{3t}$$

$$(2.9637) \qquad (3.9049) \qquad (4.1450)$$

$$n = 29 \qquad\qquad R^2 = 0.9832 \qquad\qquad F_{cal} = 764.40$$

المطلوب: اختبر وجود الارتباط الذاتي للأخطاء باستخدام اختبار DURBIN-WATSON عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

- حساب القيم المقدرة وبواقي التقدير:

السنة	Y_t	$\hat{Y}_t$	e_t	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1990	472,7	1187.37	-714,67			510753.20
1991	752,3	1302.71	-550,41	164.26	26981.34	302951.16
1992	918,8	1524.57	-605,77	-55.36	3064.72	366957.29
1993	1005.4	1666.68	-661.28	-55.51	3082.12	437300.31
1994	1274	1813.58	-539.58	121.70	14811.20	291152.59
1995	1743.8	2002.75	-258.95	280.62	78752.73	67058.41
1996	2256.6	2094.17	162.42	421.37	177558.34	26380.36
1997	2243.9	2327.91	-84.01	-246.43	60730.85	7058.68
1998	2444.2	2842.90	-398.70	-314.68	99027.96	158964.14
1999	2825.6	3085.57	-259.97	138.72	19245.71	67586.55
2000	3698.7	3441.29	257.40	517.38	267682.88	66258.18
2001	3754.8	3964.98	-210.18	-467.58	218639.99	44176.85
2002	4023.8	4518.00	-494.20	-284.02	80670.54	244242.05
2003	4700.4	5042.03	-341.64	152.56	23275.80	116720.91
2004	6150.4	5534.73	615.66	957.30	916438.82	379041.76
2005	7563.6	5953.39	1610.20	994.53	989108.99	2592754.57
2006	8520.6	6914.05	1606.54	-3.65	13.38	2580987.73
2007	9408.3	8454.09	954.19	-652.35	425565.62	910481.16
2008	11043.7	10025.06	1018.63	64.44	4152.77	1037614.07
2009	10034.3	10278.23	-243.93	-1262.57	1594085.22	59505.47
2010	12049.5	11372.01	677.48	921.42	849027.77	458992.13
2011	14384.8	13843.29	541.50	-135.98	18491.10	293230.46
2012	16643.8	15690.01	953.78	412.28	169975.49	909712.38
2013	17242.5	15974.36	1268.13	314.34	98811.25	1608156.27
2014	17228.6	18250.45	-1021.85	-2289.98	5244043.01	1044190.79
2015	16702.1	18661.48	-1959.38	-937.52	878960.97	3839192.42
2016	17406.8	18556.22	-1149.42	809.95	656033.30	1321182.19
2017	18876.6	19737.20	-860.60	288.81	83416.69	740645.12
2018	21041.10	20352.44	688.65	1549.26	2400228.96	474252.34
$\sum$	**236411.712**	**236411.712**	**00.00**		**15401877.7**	**20957499.7**

- حساب الإحصائية DW التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{15401877.7}{20957499.7} = 0.7349$$

ولدينا: عدد المشاهدات في النموذج: $n = 29$ ، عدد المتغيرات المستقلة في النموذج: $k = 2$

من جدول DURBIN-WATSON نجد القيم الحرجة d_l و d_u عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ كمايلي:

$$d_u = 1.56 \text{ و } d_l = 1.27$$

فنلاحظ أن:

$$(0) < (DW = 0.7349) < (d_l = 1.27)$$

وهو ما يدل على عدم وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى بين الأخطاء.

1-2- اختبار DURBIN'S H TEST لإبطاء المتغير التابع:

قلنا سابقا أن اختبار DW غير قابل للتطبيق عندما يتضمن النموذج إبطاء للمتغير التابع كمتغير تفسيري، فإذا كان النموذج المراد اختباره يأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

فإنه لا يمكننا تطبيق اختبار DW، وعليه صمم DURBIN (1970) إحصائية اختبار يمكن استخدامها لمثل هذا النموذج، وتأخذ هذه الاحصائية الشكل التالي:[1]

$$h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}$$

حيث: n: عدد المشاهدات، DW: إحصائية DURBIN-WATSON، $\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2$: التباين المقدر لمعلمة إبطاء المتغير التابع، مع ملاحظة أن هذه الإحصائية في العينات الكبيرة تتبع التوزيع الطبيعي، وتشمل خطوات اختبار H TEST مايلي:

- تقدير النموذج الخطي باستخدام OLS ثم الحصول على البواقي وحساب الاحصائية DW.
- شكل الاختبار: يكون كمايلي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

[1] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص 294.

- حساب الاحصائية H-STATISTICS من العلاقة: $h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}$.

- **قرار الاختبار:** من خلال مقارنة الاحصائية h بالقيم الحرجة (في العينات الكبيرة وعند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ تكون القيمة الحرجة $Z = \pm 1.96$):
  - نرفض H_0 إذا كان $|h| \geq 1.96$، أي وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.
  - نرفض H_1 إذا كان $|h| < 1.96$، أي عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

مثال: من البيانات السابقة والخاصة بتطور كل من القيمة السوقية والاستثمار الأجنبي المباشر والناتج المحلي الاجمالي في اقتصاد معين، وبافتراض أننا قدرنا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث: Y_t: القيمة السوقية، X_{2t}: الاستثمار الأجنبي المباشر ، X_{3t}: الناتج المحلي الاجمالي، Y_{t-1}: إبطاء القيمة السوقية بفترة واحدة.

باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية كانت نتائج تقدير هذا النموذج كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 546.069 + 0.2386 \cdot X_{2_t} + 0.00364 \cdot X_{3t} + 0.646 \cdot Y_{t-1}$$
$$(3.865)$$

$n = 28$ $\quad R^2 = 0.9872$ $\quad F_{cal} = 619.40$ $\quad DW = 1.2847$

المطلوب: اختبر وجود الارتباط الذاتي للأخطاء باستخدام اختبار DURBIN'S H TEST عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$

- شكل الاختبار: يكون كمايلي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

- حساب الاحصائية H-STATISTICS من العلاقة: $h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}$.

لدينا: $\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2 = ?$ $\quad DW = 1.2847$ $\quad n = 28$

ولدينا إحصائية STUDENT المحسوبة للمعلمة $\hat{\gamma}$ تساوي: 3.865

$$St_{cal} = \left|\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}}\right| = \left|\frac{0.646}{\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}}\right| = 3.865 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\gamma}} = \frac{0.646}{3.865} = 0.1671 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2 = (0.1671)^2 = 0.0279$$

وبالتالي يمكن حساب الاحصائية H-STATISTICS كمايلي:

$$h=\left(1-\frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1-n\hat{\delta}^2_{\hat{\gamma}}}}=\left(1-\frac{1.2847}{2}\right)\sqrt{\frac{28}{1-28(0.0279)}}=0.3576\sqrt{\frac{28}{0.2188}}=0.3576\cdot(11.31)=4.0453$$

- **القرار:** من خلال مقارنة الاحصائية h بالقيمة الحرجة عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$ نجد: $|h|\geq 1.96$، وبالتالي نرفض H_0، أي وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

2- اختبارات الارتباط الذاتي من درجة أعلى من الدرجة الأول:

من بين الاختبارات التي تستخدم للكشف عن الارتباط الذاتي لدرجة أعلى من الدرجة الأولى نجد مايلي:

2-1- اختبار BREUSCH-GODFREY:

نظرا للعيوب الناتجة عن اختبار DURBIN-WATSON طور كل من BREUSCH (1978) وGODFREY (1978) اختبار LM، والذي يتميز بكونه يسمح باختبار الارتباط الذاتي لدرجات مختلفة، حيث أن الارتباط الذاتي من الدرجة m يمكن صياغته وفق العلاقة التالية:

$$\varepsilon_t=\rho_1\cdot\varepsilon_{t-1}+\rho_2\cdot\varepsilon_{t-2}+\cdots\cdots+\rho_m\cdot\varepsilon_{t-m}+\mu_t$$

حيث: $/i=1\cdots\cdots m$ ρ_i: معاملات الارتباط الذاتي للأخطاء.

μ_t: متغير عشوائي، من خصائصه: $E(\mu_t)=0$. $V(\mu_t)=\delta^2_\mu$. $E(\mu_i\mu_j)=0 \quad \forall i\neq j$

بالتعويض في النموذج الخطي المتعدد نجد:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2\cdot X_{2t}+\beta_3\cdot X_{3t}+\cdots\cdots+\beta_k\cdot X_{kt}+\rho_1\cdot\varepsilon_{t-1}+\rho_2\cdot\varepsilon_{t-2}+\cdots\cdots+\rho_m\cdot\varepsilon_{t-m}+\mu_t$$

وتكون فرضية استقلالية الأخطاء (عدم وجود ارتباط ذاتي) كمايلي:

$$H_0:\rho_1=\rho_2=\cdots\cdots=\rho_m=0 \qquad /i=1\cdots\cdots m$$

بينما الفرضية البديلة تكون كمايلي:

$$H_1:\exists i \quad / \quad \rho_i\neq 0 \qquad i=1\cdots\cdots m$$

لإجراء هذا الاختبار نتبع بالخطوات التالية:

- تقدير النموذج الخطي المتعدد بطريقة OLS، ثم حساب بواقي التقدير:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\cdots\cdots+\beta_kX_{kt}+\mu_t$$
$$e_t=Y_t-\hat{Y}_t=Y_t-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_{2t}-\hat{\beta}_3X_{3t}-\cdots\cdots-\hat{\beta}_kX_{kt}$$

- تقدير النموذج التالي بطريقة OLS، وحساب معامل التحديد R^2

$$e_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k \cdot X_{kt} + \rho_1 \cdot e_{t-1} + \rho_2 \cdot e_{t-2} + \cdots\cdots + \rho_m \cdot e_{t-m} + \mu_t$$

- حساب الاحصائية LM M(LAGRANGE MULTIPLLER):

$$LM = n \cdot R^2$$

الاحصائية LM تتبع توزيع $khi - deux$ بدرجة حرية m، أي: $LM \to \chi^2_m$.

- **القرار:**

- إذا كانت: $LM \geq \chi^2_m$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية $H_1 : \exists i \;\; / \;\; \rho_i \neq 0$، أي وجود ارتباط ذاتي.
- إذا كانت: $LM < \chi^2_m$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots\cdots = \rho_m = 0$، أي عدم وجود ارتباط ذاتي.

مثال: من نفس البيانات السابقة والنموذج المقدر سابقا، والذي كان كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.511 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.00972 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

حيث: Y_t: القيمة السوقية، X_{2t}: الاستثمار الأجنبي المباشر ، X_{3t}: الناتج المحلي الاجمالي

المطلوب: اختبر وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية باستخدام اختبار BREUSCH-GODFREY.

- تقدير النموذج التالي بطريقة OLS، وحساب معامل التحديد R^2:

$$e_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \rho_1 \cdot e_{t-1} + \rho_2 \cdot e_{t-2} + \mu_t$$

وكانت نتائج التقدير كما يلي:

$$\hat{e}_t = -6.964 - 0.029 \cdot X_{2t} + 0.020 \cdot X_{3t} + 0.843 \cdot e_{t-1} - 0.332 \cdot e_{t-2}$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.4396 \qquad F_{cal} = 4.708$$

- حساب الاحصائية LM (LAGRANGE MULTIPLLER):

$$LM = n \cdot R^2 = 29 \cdot (0.4396) = 12.75$$

- القرار: نلاحظ أن: $(LM = 12.75) \geq (\chi^2_2 = 5.9915)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$، وبالتالي نقبل الفرضية $H_1 : \exists i \;\; / \;\; \rho_i \neq 0 \quad i = 1.2$، أي وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية.

2-2- اختبار BOX-PIERCE:

هناك اختبار بسيط للكشف عن الارتباط الذاتي للأخطاء لرتبة أعلى من الدرجة الأولى، فإذا كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ ، والذي يعاني من مشكل الارتباط الذاتي من الدرجة m ، والذي يمكن صياغته وفق العلاقة التالية:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \cdots\cdots + \rho_m \cdot \varepsilon_{t-m} + \mu_t$$

حيث: $/ i = 1 \cdots\cdots m$ ρ_i: معاملات الارتباط الذاتي للأخطاء.

μ_t: متغير عشوائي، من خصائصه: $E(\mu_t) = 0$. $V(\mu_t) = \delta^2_\mu$. $E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad \forall\, i \neq j$

فإنه يرمز لدالة الارتباط الذاتي بتأخير m بالرمز ρ_m وتعطى بالعلاقة التالية: $\rho_m = \dfrac{\gamma_m}{\gamma_0} = \dfrac{cov(\varepsilon_t . \varepsilon_{t-m})}{\delta^2_\varepsilon}$.

فمن أجل $m = 0$ يكون $\rho_m = 1$ ، وتتراوح معاملات دالة الارتباط الذاتي بين 1- و 1. ويسمى التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي بمختلف التأخيرات بـ: CORRÉLOGRAMME .

يقوم هذا الاختبار على عدة خطوات، تتمثل في:

- تقدير النموذج الخطي المتعدد بطريقة OLS، ثم حساب بواقي التقدير:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \mu_t$$
$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \hat{\beta}_3 X_{3t} - \cdots\cdots - \hat{\beta}_k X_{kt}$$

- حساب معاملات دالة الارتباط الذاتي بالعلاقة التالية:

$$\hat{\rho}_m = \frac{\hat{\gamma}_m}{\hat{\gamma}_0} = \frac{cov(e_t . e_{t-m})}{\delta^2_e} = \frac{\dfrac{(\sum(e_t - \bar{e})(e_{t-m} - \bar{e})}{n}}{\dfrac{\sum(e_t - \bar{e})^2}{n}} = \frac{\sum e_t e_{t-m}}{\sum e_t^2}$$

أما الدلالة الإحصائية لدالة الارتباط الذاتي فقد أكد الإحصائي BARLETT أنه في حالة غياب مشكل الارتباط الذاتي فإن معاملات دالة الارتباط الذاتي تتبع التوزيع الطبيعي: $\hat{\rho}_m \to N\left(0 \;.\; \dfrac{1}{n}\right)$. بمعنى أنه في العينات الكبيرة $(n \geq 30)$ فان معاملات دالة الارتباط الذاتي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم وتباين يساوي $\dfrac{1}{n}$. وبالتالي يمكننا تكوين مجال ثقة لدالة الارتباط ρ_m عند $\alpha = 5\%$ كمايلي:

$$\rho_m \in \left[\hat{\rho}_m \pm 1.96\sqrt{1/n}\right]$$

أما فرضيات الاختبار فتكون كمايلي:

$H_0 = \rho_m = 0$: معامل دالة الارتباط الذاتي معدوم

$H_1 = \rho_m \neq 0$: معامل دالة الارتباط الذاتي غير معدوم

أما قرار الاختبار فيكون كمايلي:

- إذا كان الصفر ضمن حدود مجال الثقة فإننا نقبل الفرضية $H_0 = \rho_m = 0$ ، أي أن معامل دالة الارتباط الذاتي معدوم، وبالتالي لا يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة m .

- إذا كان الصفر خارج حدود مجال الثقة فإننا نقبل الفرضية $H_1 = \rho_m \neq 0$، أي أن معامل دالة الارتباط الذاتي غير معدوم، وبالتالي يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة m.

وتكمن صعوبة إجراء هذا الاختبار في العينات الكبيرة حيث يكون طول التأخير كبيرا، فمثلا في سلسلة زمنية من 200 مشاهدة يكون طول التأخير على الأقل 50 مشاهدة، وبالتالي نكون ملزمين بحساب 50 معامل ارتباط ذاتي وإيجاد مجال الثقة لكل معامل وإجراء الاختبار لكل معامل على حدى. لذا يجب استعمال اختبار آخر يعرف بـ: إحصائية Q لـ: Box-Pierce والتي تختبر المعنوية الإحصائية لكل معاملات دالة الارتباط الذاتي لمختلف التأخيرات في نفس الوقت، وتعطى هذه الإحصائية بالعلاقة التالية: $Q = n\sum_{i=1}^{m}\hat{\rho}_i^2$.

حيث: n: حجم العينة، m : درجة الارتباط الذاتي.

هذه الإحصائية Q توزيع Khi-Deux بدرجة حرية m، ويكون قرار الاختبار بناءا على مقارنة الإحصائية Q مع القيمة المجدولة χ_m^2 عند مستوى معنوية معين $(\alpha = 5\%)$.

- إذا كانت $Q \geq \chi_m^2$ فإننا نقبل الفرضية على أنه يوجد على الأقل معامل من معاملات دالة الارتباط الذاتي غير معدوم، وبالتالي وجود ارتباط ذاتي للأخطاء.
- إذا كانت $Q < \chi_m^2$ فإننا نقبل الفرضية على أنه لا يوجد أي معامل من معاملات دالة الارتباط الذاتي غير معدوم، وبالتالي عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء.

<u>مثال</u>: من نفس البيانات السابقة والنموذج المقدر سابقا، والذي كان كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.511 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.00972 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

<u>المطلوب</u>: اختبر وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية باستخدام اختبار **Box-Pierce**.

لدينا:

السنة	e_t	e_{t-1}	e_{t-2}	e_t^2	$e_t \cdot e_{t-1}$	$e_t \cdot e_{t-2}$
1990	-714.67			510753.20		
1991	-550.41	-714.67		302951.16	393361.51	
1992	-605.77	-550.41	-714.67	366957.29	333421.86	432925.64
1993	-661.28	-605.77	-550.41	437300.31	400587.74	363978.90
1994	-539.58	-661.28	-605.77	291152.59	356820.85	326864.75
1995	-258.95	-539.58	-661.28	67058.41	139729.13	171244.46
1996	162.42	-258.95	-539.58	26380.36	-42059.78	-87639.66
1997	-84.01	162.42	-258.95	7058.68	-13645.90	21756.47
1998	-398.70	-84.01	162.42	158964.14	33497.42	-64757.48
1999	-259.97	-398.70	-84.01	67586.55	103652.49	21841.98
2000	257.40	-259.97	-398.70	66258.18	-66919.07	-102628.82
2001	-210.18	257.40	-259.97	44176.85	-54102.47	54642.12
2002	-494.20	-210.18	257.40	244242.05	103874.18	-127212.56
2003	-341.64	-494.20	-210.18	116720.91	168843.58	71807.81
2004	615.66	-341.64	-494.20	379041.76	-210338.06	-304266.23
2005	1610.20	615.66	-341.64	2592754.57	991343.67	-550116.98
2006	1606.54	1610.20	615.66	2580987.73	2586864.46	989091.58
2007	954.19	1606.54	1610.20	910481.16	1532951.63	1536442.06
2008	1018.63	954.19	1606.54	1037614.07	971971.22	1636480.73
2009	-243.93	1018.63	954.19	59505.47	-248482.83	-232763.00
2010	677.48	-243.93	1018.63	458992.13	-165265.07	690113.53
2011	541.50	677.48	-243.93	293230.46	366865.75	-132093.97
2012	953.78	541.50	677.48	909712.38	516483.67	646181.72
2013	1268.13	953.78	541.50	1608156.27	1209528.69	686702.56
2014	-1021.85	1268.13	953.78	1044190.79	-1295847.97	-974634.95
2015	-1959.38	-1021.85	1268.13	3839192.42	2002211.12	-2484757.81
2016	-1149.42	-1959.38	-1021.85	1321182.19	2252170.65	1174549.39
2017	-860.60	-1149.42	-1959.38	740645.12	989205.31	1686261.88
2018	688.65	-860.60	-1149.42	474252.34	-592665.74	-791564.11
$\sum$	**00.00**			**20957499.7**	**12764058.1**	**4658450.04**

- شكل الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = 0 \\ H_1 : \exists i \quad / \quad \rho_i \neq 0 \qquad i = 1.2 \end{cases}$$

- حساب معاملات دالة الارتباط الذاتي من الدرجة 1 و2:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\text{cov}(e_t.e_{t-1})}{\delta_e^2} = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2} = \frac{12764058.1}{20957499.7} = 0.6090$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\text{cov}(e_t.e_{t-2})}{\delta_e^2} = \frac{\sum e_t e_{t-2}}{\sum e_t^2} = \frac{4658450.04}{20957499.7} = 0.2222$$

- حساب الاحصائية Q:

$$Q = n\sum_{i=1}^{m=2}\hat{\rho}_i^2 = 29 \cdot \left[(0.6090)^2 + (0.2222)^2\right] = 12.1899$$

القرار: نلاحظ أن: $(Q = 12.1899) \geq (\chi_2^2 = 5.9915)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$، وبالتالي نقبل الفرضية $H_1 : \exists i \quad / \quad \rho_i \neq 0 \quad i = 1.2$، أي وجود ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الثانية.

خامسا: التعامل مع مشكل الارتباط الذاتي بين الأخطاء

لنفترض أن النموذج الأصلي يأخذ الصيغة التالية:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad (I)$$

بعد إجراء اختبار DW تبين وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

لدينا: $$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{2t-1} + \beta_3 X_{3t-1} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt-1} + \varepsilon_{t-1} \qquad (II)$$

بضرب (II) في $\hat{\rho}$ نجد: $$\hat{\rho}Y_{t-1} = \hat{\rho}\beta_1 + \beta_2\hat{\rho}X_{2t-1} + \beta_3\hat{\rho}X_{3t-1} + \cdots\cdots + \beta_k\hat{\rho}X_{kt-1} + \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}$$

نقوم بطرح (II) من (I) فنجد:

$$\begin{aligned} Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} &= \beta_1(1-\hat{\rho}) + \beta_2(X_{2t} - \hat{\rho}X_{2t-1}) + \cdots + \beta_k(X_{kt} - \hat{\rho}X_{kt-1}) + (\varepsilon_t - \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}) \\ Y_t^* &= \quad \beta_1^* \quad + \quad \beta_2 X_{2t}^* + \cdots\cdots\cdots\cdots + \beta_k X_{kt}^* \quad + \quad v_t \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned} Y_t^* &= Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} \\ X_{2t}^* &= X_{2t} - \hat{\rho}X_{2t-1} \\ &\vdots \\ X_{kt}^* &= X_{kt} - \hat{\rho}X_{kt-1} \end{aligned}$$

بمعاينة هذه المعادلة نجد أننا إذا قمنا باستخدامها في التقدير فإننا نزيل أثر الارتباط الذاتي من البيانات ممثلا في $\hat{\rho}$ ، وفي هذه الحالة نحصل على القيم المقدرة $\hat{\beta}_1^*$. $\hat{\beta}_2$ .... $\hat{\beta}_k$ بعد استبعاد أثر الارتباط الذاتي. هذه الطريقة تعرف بطريقة شبه الفروقات من الدرجة الأولى.

ونستخدم القيم المعدلة بدلا من القيم الأصلية Y_t . X_{it} ، عند استخدام طريقة المربعات الصغرى في عملية التقدير، ولعل هذا يؤذي إلى فقدان مشاهدة من المشاهدات وهي المشاهدة الأولى، وفي هذه الحالة يتم تعويضها بـ: $Y_1\sqrt{1-\hat{\rho}^2}$ بالنسبة لـ: Y_1 و $x_{i1}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}$ بالنسبة لـ: X_{i1}.[1]

[1] - شيخي محمد، مرجع سبق ذكره، ص104.

تمارين المحور الخامس

التمرين الأول:

لتكن لديك البيانات التالية والتي تمثل عدد سنوات الخدمة X_i والأجر الشهري Y_i بالألف دج لعينة من 08 موظفين بمصلحة إدارية معينة:

الموظف	X_i	Y_i
1	4	25.6
2	8	32.7
3	12	45.4
4	16	53.9
5	20	59.0
6	24	62.6
7	28	65.0
8	32	65.5

المطلوب:

1- قدر النموذج الخطي البسيط التالي: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$.

2- اختبر وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى بين الأخطاء باستخدام اختبار DW .

3- قدر معامل الارتباط الذاتي ρ.

4- استخدم طريقة شبه الفروقات للتصحيح النموذج من مشكلة الارتباط الذاتي .

التمرين الثاني:

لتقدير دالة الادخار في اقتصاد معين تم تعيين معادلة الادخار كمايلي:

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot GDP_t + \beta_3 \cdot r_t + \varepsilon_i$$

حيث: S_t: الادخار الاجمالي المتاح في السنة t

GDP_t: الناتج المحلي الاجمالي في السنة t

r_t: أسعر الفائدة على الودائع طويلة الأجل السنة t

تم تقدير النموذج بطريقة OLS، فكانت النتائج كمايلي:

$$\hat{S}_t = 606.247 + 0.180 \cdot GDP_t - 61.053 \cdot r_t$$

السنة	GDP_t	S_t	r_t
1990	1970.5	253.9	8.5
1991	2240.5	380.1	7.5
1992	2286.7	318.5	7.5
1993	1349.5	418.9	8.0
1994	2425.4	531.5	8.0
1995	2670.9	318.2	8.2
1996	2958.0	424.8	7.8
1997	3610.5	611.0	7.0
1998	3884.2	956.3	6.9
1999	4357.4	1143.2	7.3
2000	4714.7	1374.4	8.0
2001	4911.3	1341.9	8.9
2002	5137.4	1342.3	8.9
2003	5609.9	1239.5	8.3
2004	5778.1	1533.3	7.9
2005	5998.6	1360.8	6.6
2006	6363.7	1322.2	5.2
2007	6794.0	1720.9	4.0
2008	7228.8	2356.2	2.8
2009	8090.7	2243.2	2.5
2010	8925.4	1437.4	3.5
2011	10675.4	1801.5	5.1
2012	12131.4	1633.9	5.6
2013	15593.4	3216.4	5.7
2014	16912.2	3648.9	4.2

المطلوب:

1- اختبر وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى باستخدام اختبار DW.

2- اختبر وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية في النموذج المصحح باستخدام اختبار Breusch-Godfre.

حلول تمارين المحور الخامس

حل التمرين الأول:

1- تقدير النموذج الخطي البسيط التالي: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$.

باستخدام طريقة OLS كانت نتائج تقدير النموذج كمايلي:

$$\hat{Y}_i = 24.48 + 1.48 \cdot X_i$$
$$(6.34) \quad (7.78)$$
$$n = 8 \quad R^2 = 0.90 \quad F_{cal} = 60.55$$

2- اختبار وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى بين الأخطاء باستخدام اختبار DW عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

- حساب القيم المقدرة وبواقي التقدير:

الموظف	Y_i	$\hat{Y}_i$	e_i	e_{i-1}	$e_i - e_{i-1}$	$(e_i - e_{i-1})^2$	e_i^2
1	25.6	30.43	-4.83				23.36
2	32.7	36.38	-3.68	-4.83	1.15	1.32	13.54
3	45.4	42.32	3.07	-3.68	6.75	45.59	9.43
4	53.9	48.27	5.62	3.07	2.55	6.51	31.62
5	59.0	54.22	4.77	5.62	-0.84	0.71	22.81
6	62.6	60.17	2.42	4.77	-2.34	5.51	5.89
7	65.0	66.11	-1.11	2.42	-3.54	12.58	1.25
8	65.8	72.06	-6.26	-1.11	-5.14	26.49	39.27
$\sum$	**410**	**410**	**00.00**			**96.77**	**147.20**

- حساب الإحصائية DW التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \frac{96.77}{147.20} = 0.7608$$

ولدينا: عدد المشاهدات في النموذج: $n = 8$ ، عدد المتغيرات المستقلة في النموذج: $k = 1$

من جدول Durbin-Watson نجد القيم الحرجة d_l و d_u عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ كمايلي:

$$d_u = 1.36 \text{ و } d_l = 1.08$$

فنلاحظ أن: $(0) < (DW = 0.7608) < (d_l = 1.36)$

وهو ما يدل على وجود ارتباط ذاتي موجب بين الأخطاء.

3- تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ.

سيتم تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ من خلال احصائية DURBIN-WATSON كمايلي:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{0.7608}{2} = 0.6196$$

4- استخدام طريقة شبه الفروقات للتصحيح النموذج من مشكلة الارتباط الذاتي:

نقوم بتحويل المتغيرات وفق العلاقات التالية:

$$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1}$$
$$X_i^* = X_i - \hat{\rho} X_{i-1}$$

فيصبح شكل النموذج كمايلي:

$$Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1} = \alpha(1-\hat{\rho}) + \beta(X_i - \hat{\rho} X_{i-1}) + \nu_i$$
$$Y_i^* = \alpha^* + \beta \cdot X_i^* + \nu_t$$

	Y_i	Y_{i-1}	$\hat{\rho}Y_{i-1}$	Y_i^*	X_{i-1}	$\hat{\rho}X_{i-1}$	X_i^*	$X_i^* \cdot Y_i^*$	$(Y_i^*)^2$	$(X_i^*)^2$	$\hat{Y}_i^*$
	25.6			20.09			3.13	63.07	403.62	7.79	19.94
	32.7	25.6	15.77	16.92	4	2.46	5.53	93.67	286.42	30.63	21.49
	45.4	32.7	20.15	25.24	8	4.92	7.07	178.51	637.50	49.98	22.53
	53.9	45.4	27.97	25.92	12	7.39	8.60	223.06	671.98	74.04	23.57
	59.0	53.9	33.21	25.78	16	9.85	10.14	261.45	664.84	102.82	24.61
	62.6	59.0	36.35	26.24	20	12.32	11.67	306.37	688.62	136.30	25.65
	65.0	62.6	38.57	26.42	24	14.78	13.21	349.05	698.18	174.50	26.69
	65.8	65.0	40.05	25.74	28	17.25	14.74	379.60	662.76	217.42	27.73
$\sum$	**410**			**192.37**			**73.11**	**1791.74**	**4310.33**	**785.73**	**192.37**

تعطى مقدرات طريقة OLS بالعلاقات التالية:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_i^* \cdot Y_i^* - n\overline{X}^*\overline{Y}^*}{\sum X_i^{*2} - n\overline{X}^{*2}}$$

$$\hat{\alpha}^* = \overline{Y}^* - \hat{\beta} \cdot \overline{X}^*$$

$$\overline{X}^* = \frac{73.11}{8} = 9.13$$

$$\overline{Y}^* = \frac{192.37}{8} = 24.04$$

إذن نجد:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_i^* \cdot Y_i^* - n\overline{X}^*\overline{Y}^*}{\sum X_i^{*2} - n\overline{X}^{*2}} = \frac{1791.74 - 8\cdot(9.13)\cdot(24.04)}{785.73 - 8\cdot(9.13)^2} = 0.6791$$

$$\hat{\alpha}^* = \overline{Y}^* - \hat{\beta}\cdot\overline{X}^* = 24.03 - 0.6791\cdot(9.13) = 17.82$$

وبالتالي يكون النموذج المصحح من مشكلة الارتباط الذاتي كمايلي: $\hat{Y}_i^* = 17.82 + 0.6791\cdot X_i^*$

حل التمرين الثاني:

1- اختبار وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى بين الأخطاء باستخدام اختبار DW عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

- حساب القيم المقدرة وبواقي التقدير:

السنة	S_t	$\hat{S}_t$	e_t	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1990	253.9	445.96	-192.06			36889.13
1991	380.1	556.16	-176.06	16.00	256.05	30998.40
1992	318.5	564.57	-246.07	-70.00	4901.30	60551.88
1993	418.9	363.45	55.44	301.51	90911.26	3073.81
1994	531.5	559.29	-27.79	-83.23	6927.98	772.42
1995	318.2	591.76	-273.56	-245.77	60405.41	74839.24
1996	424.8	668.44	-243.64	29.92	895.27	59363.63
1997	611	836.05	-225.05	18.59	345.58	50650.43
1998	956.3	891.98	64.31	289.37	83738.48	4137.00
1999	1143.2	953.69	189.50	125.18	15672.45	35913.74
2000	1374.4	975.98	398.41	208.90	43639.88	158731.19
2001	1341.9	956.82	385.07	-13.33	177.88	148281.64
2002	1342.3	997.98	344.31	-40.75	1660.93	118555.57
2003	1239.5	1120.61	118.88	-225.43	50821.34	14133.19
2004	1533.3	1175.65	357.64	238.76	57007.84	127910.85
2005	1360.8	1295.15	65.64	-292.00	85266.42	4308.88
2006	1322.2	1447.08	-124.88	-190.52	36301.46	15596.83
2007	1720.9	1598.67	122.22	247.11	61065.08	14939.24
2008	2356.2	1751.07	605.12	482.89	233187.03	366170.98
2009	2243.2	1926.27	316.92	-288.19	83058.25	100439.77
2010	1437.4	2017.15	-579.75	-896.67	804032.27	336117.16
2011	1801.5	2238.00	-436.50	143.25	20520.88	190536.62
2012	1633.9	2472.49	-838.59	-402.09	161679.20	703247.51
2013	3216.4	3096.5	119.85	958.45	918635.32	14365.48
2014	3648.9	3428.17	220.72	100.87	10175.46	48721.56
$\sum$	**32929.2**	**32929.2**	**00.00**	**412.79**	**2831283.121**	**2719246.25**

- حساب الإحصائية DW التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{2831283.121}{2719246.25} = 1.04$$

ولدينا: عدد المشاهدات في النموذج: $n = 25$ ، عدد المتغيرات المستقلة في النموذج: $k = 2$

من جدول Durbin-Watson نجد القيم الحرجة d_l و d_u عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ كمايلي:

$$d_u = 1.55 \text{ و } d_l = 1.21$$

فنلاحظ أن:

$$(0) < (DW = 1.04) < (d_l = 1.21)$$

وهو ما يدل على وجود ارتباط ذاتي موجب بين الأخطاء.

2- اختبار وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية في النموذج المصحح باستخدام اختبار Breusch-Godfre.

استخدام طريقة شبه الفروقات للتصحيح النموذج من مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى:

نقوم بتحويل المتغيرات وفق العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} S_t^* &= S_t - \hat{\rho} S_{t-1} \\ GDP_t^* &= GDP_t - \hat{\rho}\, GDP_{t-1} \\ r_t^* &= r_t - \hat{\rho}\, r_{t-1} \end{aligned}$$

حيث:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{1.04}{2} = 0.48$$

فيصبح شكل النموذج كمايلي:

$$\begin{aligned} S_t - \hat{\rho} S_{t-1} &= \alpha(1-\hat{\rho}) + \beta_1 (GDP_t - \hat{\rho}\, GDP_{t-1}) + \beta_2 (r_t - \hat{\rho}\, r_{t-1}) + v_t \\ S_t^* &= \alpha^* + \beta_1 \cdot GDP_t^* + \beta_2 \cdot r_t^* + v_t \end{aligned}$$

السنة	S^*_t	GDP^*_t	r^*_t
1990	222.735	1728.65	7.456
1991	258.228	1294.66	3.42
1992	136.052	1211.26	3.900
1993	266.02	251.884	4.400
1994	330.428	1777.64	4.16
1995	63.07	1506.708	4.359
1996	272.064	1675.968	3.864
1997	407.096	2190.66	3.256
1998	663.02	2151.16	3.540
1999	684.17	2492.98	3.988
2000	825.66	2623.148	4.496
2001	682.18	2648.244	5.060
2002	698.188	2779.976	4.628
2003	595.196	3143.948	4.028
2004	938.34	3085.348	3.916
2005	624.816	3225.112	2.808
2006	669.01	3484.372	2.032
2007	1086.244	3739.424	1.504
2008	1530.168	3967.68	0.879
2009	1112.224	4620.876	1.156
2010	360.66	5041.863	2.3
2011	1111.548	6391.208	3.42
2012	769.18	7007.208	3.152
2013	2432.128	9770.328	3.012
2014	2105.028	9427.368	1.464
$\sum$	**18620.718**	**85509.23**	**78.742**

- تقدير النموذج المصحح باستعمال طريقة OLS، فكانت النتائج كمايلي:

$$S^*_t = 309.99 + 0.187 \cdot GDP^*_t - 61.139 \cdot r^*_t$$

$$n = 25 \qquad R^2 = 0.7312 \qquad F_{cal} = 28.56 \qquad DW = 1.804$$

- حساب القيم المقدرة واستنتاج بواقي التقدير:

السنة	$\hat{S}_t^*$	e_t	e_{t-1}	e_{t-2}
1990	165.72	57.015		
1991	343.073	-84.845	57.015	
1992	298.125	-162.073	-84.845	57.015
1993	88.094	177.926	-162.073	-84.845
1994	388.176	-57.748	177.926	-162.073
1995	325.268	-262.198	-57.748	177.926
1996	387.255	-115.191	-262.198	-57.748
1997	520.706	-113.61	-115.191	-262.198
1998	495.953	167.067	-113.61	-115.191
1999	532.504	151.666	167.067	-113.61
2000	525.794	299.866	151.666	167.067
2001	496.006	186.174	299.866	151.666
2002	547.060	151.128	186.174	299.866
2003	651.828	231.-65	151.128	186.174
2004	647.714	290.626	231.-65	151.128
2005	741.601	-116.785	290.626	231.-65
2006	837.543	-168.533	-116.785	290.626
2007	917.535	168.709	-168.533	-116.785
2008	998.383	531.785	168.709	-168.533
2009	1103.696	8.5280	531.785	168.709
2010	1112.502	-751.842	8.5280	531.785
2011	1296.434	-184.886	-751.842	8.5280
2012	1428.049	-658.869	-184.886	-751.842
2013	1953.478	478.65	-658.869	-184.886
2014	1983.968	121.06	478.65	-658.869
$\sum$	**18620.718**	**00.00**		

- تقدير النموذج التالي بطريقة OLS، وحساب معامل التحديد R^2:

$$e_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot GDP_t^* + \beta_3 \cdot r_t^* + \rho_1 \cdot e_{t-1} + \rho_2 \cdot e_{t-2} + \mu_t$$

وكانت نتائج التقدير كما يلي:

$$\hat{e}_t = -32.145 + 0.0006 \cdot GDP_t^* + 8.683 \cdot r_t^* + 0.104 \cdot e_{t-1} - 0.079 \cdot e_{t-2}$$

$$n = 25 \qquad R^2 = 0.0171 \qquad F_{cal} = 0.0683$$

- حساب الاحصائية LM (LAGRANGE MULTIPLLER):

$$LM = n \cdot R^2 = 25 \cdot (0.0171) = 0.4295$$

- القرار: نلاحظ أن: $(LM = 0.4295) < (\chi_2^2 = 5.9915)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ، وبالتالي نقبل الفرضية $H_0: \quad \rho_1 = \rho_2 = 0$ ، أي لا يوجد ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية.

المحور السادس:

عــدم ثبات التباين

مقدمة:

رأينا في الفصول السابقة أن إحدى الفرضيات الأساسية التي تقوم عليها OLS في تقدير النماذج الخطية هي ثبات تباين المتغير العشوائي (تجانس التباين HOMOSCEDASTICITY) لجميع المشاهدات، أي:

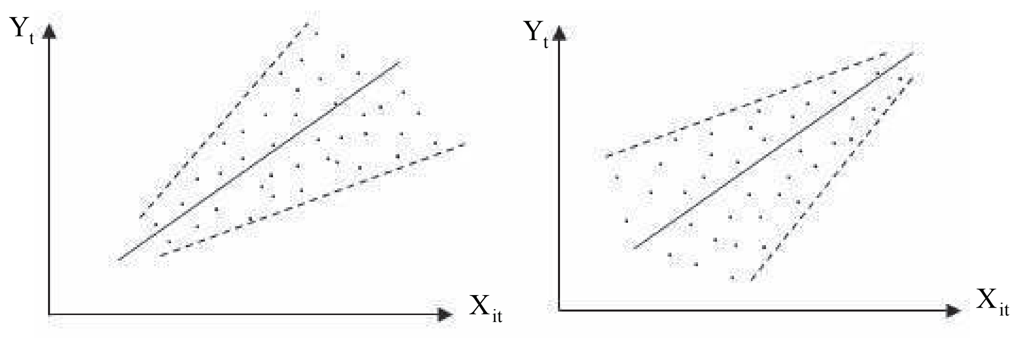
$$E(\varepsilon\varepsilon') = \delta_\varepsilon^2 I_n \quad \text{و} \quad V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \delta_\varepsilon^2 \quad \forall t$$

في الواقع العملي فإن تحقق هذه الفرضية مستبعد في عديد الدراسات، حيث يكون التباين غير ثابت، بل يختلف لكل مشاهدة من مشاهدات العينة، فتصبح لدينا قيم مختلفة وغير ثابتة لتباينات المتغير العشوائي، وبالتالي فإن قطر مصفوفة التباين والتباين المشترك للمتغير العشوائي يحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة: $E(\varepsilon\varepsilon') = \delta_i^2 I_n$.

غالبا ما تحدث هذه المشكلة في النماذج التي تعتمد على البيانات المقطعية CROSS-SECTION، وفي البيانات التي تعرف تباينا كبيرا في قيمها، مما يؤدي إلى تفاوت تباين المتغير العشوائي، بحيث تارة يكون كبيرا وتارة أخرى يصبح صغيرا. فمن الحالات التي يمكن أن تصادف هذه المشكلة بيانات الانفاق الاستهلاكي للأسر، حيث أن تباين الخطأ الخاص بالإنفاق الاستهلاكي لأسر الدخل المرتفع عادة ما يكون أكبر عنه بالنسبة لتباين الخطأ الخاص بالإنفاق الاستهلاكي للأسر ذات الدخل المنخفض، ذلك لأن الأسر مرتفعة الدخل تتمتع بمرونة كبيرة في الانفاق، أما الأسر ذات الدخول المنخفضة فإن انفاقها الاستهلاكي يقع عادة ضمن حدود ضيقة. وهو ما يعني أن التشتت ومن ثم التباين عند قيم الدخل X_i الكبيرة يكون أكبر من التشتت والتباين عند قيم الدخل X_i الصغيرة، وبالتالي فإن فرضية تجانس وثبات تباين المتغير العشوائي تصبح غير محققة.

أولا: طبيعة مشكلة عدم تجانس التباين

تتمثل مشكلة عدم ثبات التباين (عدم تجانس التباين) في تغير تباين المتغير العشوائي مع تغير قيم المتغير المستقل (المفسر)، وفي هذه الحالة يأخذ شكل الانتشار أحد الأوضاع التالية:

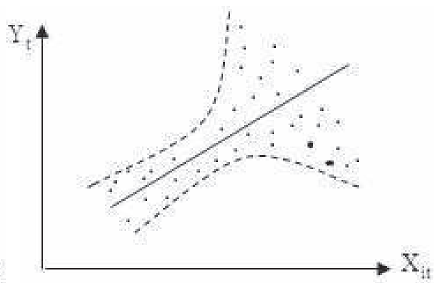


1. تناقص تباين المتغير العشوائي
2. تزايد تباين المتغير العشوائي

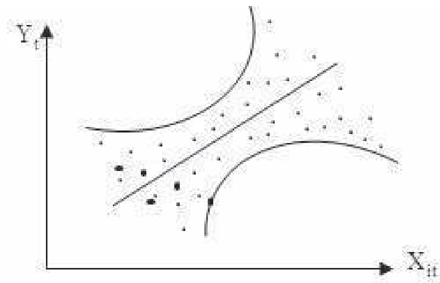
نلاحظ من الشكل (1) أن تغير المتغير المستقل X_{it} يؤدي إلى تغير المتغير التابع Y_t، الأمر الذي يؤدي إلى تغير تباين المتغير العشوائي، حيث يتناقص تباين المتغير العشوائي مع تزايد قيمة المتغير المستقل بصورة منتظمة، ومنه يمكننا القول أن هناك علاقة خطية عكسية بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي. أما الشكل (2) فيبين أن تباين المتغير العشوائي يزداد مع زيادة قيمة المتغير المستقل بصورة منتظمة أيضا، لذلك فإن العلاقة بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي تكون خطية طردية، هذه العلاقة الخطية بين المتغير المستقل وتباين المتغير المستقل يمكن التعبير عنها بالصيغة التالية:

$$\delta_{\varepsilon_t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{it} + w_t$$

وقد تكون العلاقة بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي غير خطية، مثلما هو موضح في الشكلين التاليين:



3. تزايد تباين م غ غير الخطي



4. تناقص ثم تزايد تباين م ع غير الخطي

نلاحظ من الشكل (3) أن العلاقة غير خطية بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي، حيث يزداد تباين المتغير العشوائي بمعدل متزايد مع زيادة المتغير العشوائي، ويمكن تمثيل هذه العلاقة بالصيغة التالية:

$$\delta^2_{\varepsilon_t} = \alpha_0 \cdot X_{it}^{\alpha_1} + e^{w_t}$$

ويبين الشكل (4) أن العلاقة بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي علاقة غير خطية. ففي المرحلة الأولى ومع تزايد المتغير المستقل يتناقص تباين المتغير العشوائي، بينما في المرحلة الثانية يعاود الزيادة مع تزايد المتغير المستقل، حيث يمكن تمثيل هذه العلاقة كما يلي:

$$\delta^2_{\varepsilon_t} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{it} + \alpha_3 X_{it}^2 + w_t$$

إذا كانت فرضية ثبات أو تجانس التباين غير محققة، فإن مصفوفة التباين -التباين المشترك للأخطاء تختلف عن $\delta^2_\varepsilon I_n$، حيث يمكن كتابتها كما يلي:

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \delta^2_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^2_{\varepsilon_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^2_{\varepsilon_n} \end{pmatrix}$$

من الملاحظ أن تباينات الأخطاء ليست ثابتة على القطر الأول، وبالتالي تباين الأخطاء مرتبط بقيم المتغير المستقل.

1- أسباب مشكلة عدم ثبات التباين:

من أهم أساب هذه المشكلة نذكر:[1]

- وجود علاقة ذات اتجاهين بين المتغيرات المستقلة، خاصة في النماذج التي تعرف بنماذج المعادلات الآنية.
- استخدام البيانات المقطعية بدلا من بيانات السلاسل الزمنية.

[1] - عبد القادر محمد عبد القادر عطية، ص499.

- استخدام بيانات جزئية بدلا من البيانات التجميعية، فعند استخدام بيانات تجميعية تختفي الاختلافات بين المفردات، حيث يلغي بعضها البعض، فلا يكون هناك تشتت للقيم بدرجة كبيرة، أما في حالة البيانات الجزئية كتلك المتاحة عن الأفراد أو المنشئات الفردية، فعادة ما يكون التشتت كبيرا بين القيم للاختلافات الكبيرة بين سلوك المفردات.

- كثير من المتغيرات المستقلة والغير مدرجة بالنموذج تميل إلى التغير في نفس اتجاه المتغيرات المستقلة، ما يعني زيادة تشتت المشاهدات (الأخطاء) حول خط الانحدار، أي اختلاف التباين.

- تحسن أساليب جمع البيانات يقلل من تباين الأخطاء، حيث أن استعمال هذه الأساليب الحديثة ينتج عنه بيانات دقيقة وواقعية تقلل من الأخطاء.

2- آثار مشكلة عدم ثبات التباين:

إذا كان المتغير العشوائي ε_t معروفا وتباينه غير ثابت، فأننا نستطيع تلخيص مختلف آثار هذه المشكلة على مقرات OLS في النقاط التالية:[1]

- تبقى مقدرات OLS غير متحيزة UNBIASED ومتسقة CONSISTENT، لأنه لا يوجد ارتباط بين أي متغير مستقل والمتغير العشوائي، والنموذج محدد بشكل صحيح، إلا أنه يعاني من مشكلة عدم ثبات أو اختلاف التباين، وبالتالي ستكون المقدرات $\hat{\beta}_i$ جيدة نسبيا.

- يؤثر عدم ثبات التباين على توزيع $\hat{\beta}_i$، فيزيد تباين التوزيع ويجعل مقدرات OLS غير فعالة، لأنه ينتهك خاصية تقليل التباين.

- يؤثر اختلاف وعدم ثبات التباين على تباين المعلمات المقدرة، حيث يسبب وجود عدم ثبات التباين الحصول على مقدرات OLS بتباين أقل من التقدير (UNDERESTIMATE)، وبالتالي الحصول على St_{cal} أكبر من المتوقع، وكذلك F_{cal}، وبالتالي فإن عدم ثبات التباين له تأثير واسع على اختبار الفرضيات.

ثانيا: الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين

يتم الكشف عادة عن عدم ثبات التباين بالعديد من الاختبارات، والتي نذكر من أهمها:

1- اختبار GOLDFELD-QUANDT:

اقترح (1965) GOLDFELD AND QUANDT اختبارا يقوم على أن تباين البواقي إذا كان ثابتا لجميع المشاهدات، فإن تباين جزء من أجزاء العينة سيكون مساويا لتباين جزء آخر من العينة. لكي يكون الاختبار قابلا للتطبيق، يتعين تحديد المتغير المستقل المرتبط بتباين البواقي. ولتوضيح خطوات اختبار GOLDFELD-QUANDT نفترض النموذج الخطي البسيط التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

[1] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص ص242-243.

وبالتالي تكون خطوات الاختبار كمايلي:

- شكل الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \delta_1^2 = \delta_2^2 \\ H_1 : \delta_1^2 \neq \delta_2^2 \end{cases}$$

- تحديد أحد المتغيرات المستقلة الذي يرتبط بتباين المتغير العشوائي، وترتيب مشاهدات هذا المتغير تصاعديا.*

- ترتيب البيانات الخاصة بجميع المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ترتيبا تصاعديا، وفقا لقيم X_i.

- تقسيم العينة (n) إلى ثلاثة أجزاء، الجزء الأول حجمه n_1، ويضم القيم الدنيا للمتغير X_i، بينما الجزء الثالث حجمه n_2، ويضم القيم الكبرى للمتغير X_i، أما الجزء الوسط فحجمه $n-(n_1+n_2)$.*

- تقدير نموذجين للجزء الأول والثالث بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t = \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} X_{2t} + \beta_3^{(1)} X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k^{(1)} X_{kt} + \varepsilon_t \qquad / t = 1 \cdots\cdots n_1$$
$$Y_t = \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} X_{2t} + \beta_3^{(2)} X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k^{(2)} X_{kt} + \varepsilon_t \qquad / t = 1 \cdots\cdots n_2$$

- حساب مجموع مربعات بواقي التقدير للنموذجين السابقين، أي حساب RSS_1 و RSS_2.

- حساب إحصائية F_{cal} باستخدام العلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{RSS_2 / (n_2 - k)}{RSS_1 / (n_1 - k)}$$

هذه الاحصائية تتبع توزيع FISHER بدرجتي حرية $v_1 = n_2 - k$ و $v_2 = n_1 - k$

- **القرار:** ويكون كما يلي:

✓ نرفض H_0 إذا كان $F_{cal} \geq F_{tab}$، وبالتالي فالنموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

✓ نرفض H_1 إذا كان $F_{cal} < F_{tab}$، وبالتالي فالنموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

<u>**مثال:**</u> من المثال التطبيقي السابق والنموذج الخطي المتعدد المقدر كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.511 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.00972 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

*- اختبار GOLDFELD-QUANDT لا يمكن تطبيقه إلا في حالة ما إذا كان أحد المتغيرات المستقلة هو السبب في عدم ثبات التباين.

*- يستحسن أن يكون حجم الجزء الوسط خمس (1/5) المشاهدات، وقد أثبتت الدراسات التطبيقية التي قام بها كل من GOLDFELD وQUANDT أن حجم الجزء الوسط في العينات التي يكون بها عدد المشاهدات أكبر من 30 هو ربع المشاهدات الكلية.

حيث: Y_t : القيمة السوقية، X_{2t} : الاستثمار الأجنبي المباشر ، X_{3t} : الناتج المحلي الاجمالي

وعلى اعتبار أن متغير الاستثمار الأجنبي المباشر من المرجح أن يكون سببا في عدم ثبات التباين.

المطلوب: الكشف عن عدم ثبات التباين باستخدام اختبار GOLDFELD-QUANDT.

- ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا وفقا للترتيب التصاعدي لمشاهدات الاستثمار الأجنبي المباشر

السنة	القيمة السوقية	الاستثمار الأجنبي المباشر	الناتج المحلي الاجمالي	
1990	472.7	136.49	34300.5	بيانات الجزء الأول، $n_1 = 12$
1991	752.3	212.1	41527	
1992	918.8	420.13	51590	
1993	1005.4	476.62	62742.7	
1994	1274	566.32	72351.4	
1996	2256.6	724.6	91505.8	
1995	1743.8	759.61	79956.2	
1997	2243.9	845.19	108151.8	
1998	2444.2	875.73	159246.1	
1999	2825.6	961.68	178935	
2000	3698.7	1178.12	202250	
2001	3754.8	1321.02	247350	
2002	4023.8	1550.64	290150	
2003	4700.39	1690.19	335490	
2004	6150.4	1891.79	373803.7	
2005	7563.6	2052	407040	
2006	8520.6	2428.49	482760	
2007	9408.29	3108.5	599460	
2008	11043.7	4175.7	695600	بيانات الجزء الثالث، $n_2 = 11$
2009	10034.3	4246.3	717310	
2010	12049.5	4466.89	816280	
2011	14384.8	5731.4	992920	
2013	17242.5	6024.2	1194150	
2014	17228.6	6995.7	1368680	
2012	16643.8	7058.1	1101510	
2018	21041.103	7258.9	1568733	
2016	17406.8	7297.4	1381630	
2017	18876.6	7389.3	1497460	
2015	16702.1	7656.3	1370450	

- تقدير نموذجين للجزء الأول والثالث بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t = \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} X_{2t} + \beta_3^{(1)} X_{3t} + \varepsilon_t \qquad / t = 1 \cdots\cdots 12$$
$$Y_t = \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} X_{2t} + \beta_3^{(2)} X_{3t} + \varepsilon_t \qquad / t = 1 \cdots\cdots 11$$

كانت نتائج التقدير كمايلي:

نموذج الجزء الأول:

$$\hat{Y}_t = 1250.35 + 0.1317 \cdot X_{2t} + 0.005872 \cdot X_{3t}$$
$$n_1 = 12 \qquad R^2 = 0.9680 \qquad F_{cal} = 136.40 \qquad RSS_1 = 433649.7$$

نموذج الجزء الثالث:

$$\hat{Y}_t = 3432.90 + 0.0761 \cdot X_{2t} + 0.00820 \cdot X_{3t}$$
$$n_2 = 11 \qquad R^2 = 0.9266 \qquad F_{cal} = 50.501 \qquad RSS_2 = 8585350.1$$

- حساب قيمة F_{cal} باستخدام العلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{RSS_2 / n_2 - k}{RSS_1 / n_1 - k} = \frac{8585350.1 / (11-3)}{433649.7 / (12-3)} = 22.27$$

ولدينا: $F_{tab} = F^{\alpha=5\%}_{((n_2-k).(n_1-k))} = F^{\alpha=5\%}_{(8\,.\,9)} = 3.230$

- **القرار:** نلاحظ أن: $F_{tab} > F_{cal}$ ، وبالتالي نرفض H_0 ، أي أن النموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

2- اختبار Breusch-Pagan:

طور Breusch and Pagan (1979) اختبار مضاعف لاغرانج LM Test للكشف عن عدم ثبات التباين في النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

حيث يتضمن اختبار Breusch-Pagan الخطوات التالية:[1]

- تقدير النموذج $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS، وحساب بواقي التقدير $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- تقدير الانحدار المساعد التالي: $e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 Z_{2t} + \cdots\cdots + \gamma_P Z_{Pt} + v_t$

[1] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص ص247-248.

حيث: Z_{it} هي مجموعة المتغيرات التي يعتقد أنها تحدد تباين المتغير العشوائي (عادة ما تستخدم المتغيرات التفسيرية X_{it} نيابة عن المتغيرات Z_{it})، فيصبح الانحدار المساعد كمايلي: $e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \cdots\cdots + \gamma_P X_{Pt} + v_t$.

- تحديد وصياغة فرضيات الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_P = 0 \\ H_1 : \exists i \quad / \quad \gamma_i \neq 0 \qquad i = 1 \cdots P \end{cases}$$

- حساب الاحصائية LM: $LM = n \cdot R^2$

حيث: n: عدد المشاهدات المستخدمة في تقدير الانحدار المساعد: $e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \cdots + \gamma_P X_{Pt} + v_t$،
R^2: معامل تحديد هذا الانحدار. الاحصائية LM تتبع توزيع KHI-DEUX بدرجة حرية $P-1$، أي: $LM \to \chi^2_{P-1}$.

- **القرار:** يكون قرار الاختبار كمايلي:

✓ نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $LM \geq \chi^2_{P-1}$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

✓ نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $LM < \chi^2_{P-1}$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

<u>مثال</u>: من المثال التطبيقي السابق والنموذج الخطي المتعدد المقدر كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.511 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.00972 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

حيث: Y_t: القيمة السوقية، X_{2t}: الاستثمار الأجنبي المباشر ، X_{3t}: الناتج المحلي الاجمالي

<u>**المطلوب**</u>: الكشف عن عدم ثبات التباين باستخدام اختبار BREUSCH-PAGAN.

- تقدير النموذج $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ وحساب بواقي التقدير.

- تقدير الانحدار المساعد: $e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + v_t$، باستخدام OLS كانت نتائج التقدير كمايلي:

$$\hat{e}_t^2 = 232926.2 + 193.27 \cdot X_{2t} - 0.18906 \cdot X_{3t}$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.2152 \qquad F_{cal} = 3.5667$$

- حساب الاحصائية LM:

$$LM = n \cdot R^2 = 29 \cdot (0.2152) = 6.2435$$

- **القرار:** نلاحظ أن: $(\chi_2^2 = 5.9915) \geq (LM = 6.2435)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$، وبالتالي نرفض الفرضية H_0، أي أن النموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

3- اختبار WHITE:

سنة 1980 طور WHITE اختبارا أكثر عمومية للكشف عن عدم ثبات التباين، وهو كذلك اختبار LM، يعتمد على العلاقة بين مربعات البواقي وجميع المتغيرات المستقلة وكذلك مربعاتها وحاصل تقاطعها*، فإذا كان لدينا النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

حيث يتضمن اختبار WHITE الخطوات التالية:

- تقدير النموذج $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS، وحساب بواقي التقدير $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- تقدير الانحدار المساعد التالي بطريقة OLS:

$$e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \gamma_4 X_{2t}^2 + \gamma_5 X_{3t}^2 + \gamma_6 X_{2t} X_{3t} + \nu_t$$

- تحديد وصياغة فرضيات الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_6 = 0 \\ H_1 : \exists i \quad / \quad \gamma_i \neq 0 \qquad i = 1 \cdots 6 \end{cases}$$

- حساب الاحصائية LM: $LM = n \cdot R^2$

حيث: n: عدد المشاهدات المستخدمة في تقدير الانحدار المساعد، و R^2 : معامل تحديد هذا الانحدار. الاحصائية LM تتبع توزيع KHI-DEUX بدرة حرية تساوي عدد المعلمات المقدرة في الانحدار المساعد ناقص الحد الثابت، أي: $LM \rightarrow \chi_{P-1}^2$.

- القرار: يكون قرار الاختبار كمايلي:

✓ نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $LM \geq \chi_{P-1}^2$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

✓ نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $LM < \chi_{P-1}^2$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

---

* - اختبار White يشمل على كل المتغيرات المستقلة ومربعاتها وحاصل ضربها مثنى مثنى، ويسمى White test with Cross Terms.

مثال: من المثال التطبيقي السابق والنموذج الخطي المتعدد المقدر كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.511 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.00972 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

حيث: Y_t: القيمة السوقية، X_{2t}: الاستثمار الأجنبي المباشر ، X_{3t}: الناتج المحلي الاجمالي

المطلوب: الكشف عن عدم ثبات التباين باستخدام اختبار WHITE.

- تقدير الانحدار المساعد التالي بطريقة OLS:

$$e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \gamma_4 X_{2t}^2 + \gamma_5 X_{3t}^2 + \gamma_6 X_{2t} X_{3t} + \nu_t$$

كانت نتائج التقدير كما يلي:

$$\hat{e}_t^2 = 598029.4 - 3158.07 \cdot X_{2t} + 16.78 \cdot X_{3t} - 0.31 \cdot X_{2t}^2 - 0.000024 \cdot X_{3t}^2 + 0.0064 \cdot X_{2t} X_{3t}$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.4383 \qquad F_{cal} = 3.59$$

- حساب الاحصائية LM:

$$LM = n \cdot R^2 = 29 \cdot (0.4383) = 12.7123$$

- القرار: نلاحظ أن: $(LM = 12.7123) \geq (\chi_5^2 = 11.0705)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$، وبالتالي نرفض الفرضية H_0، أي أن النموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

4- اختبار ENGLE 'S ARCH TEST:

يستخدم هذا الاختبار على بيانات السلاسل الزمنية فقط، ويستعمل للكشف عن وجود الارتباط الذاتي في حدود الخطأ لنموذج الانحدار، وقدم ENGLE (1982) مفهوما جديدا لقبول الارتباط الذاتي لحدوثه في تباين حدود الخطأ بدلا من حدود الخطأ نفسها، حيث طور ENGLE نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم ثبات تباين الأخطاء AUTOREGRESSIVE CONDITIOAL HETEROSKEDASTICITY (ARCH)، والفكرة الأساسية له هي أن تباين المتغير العشوائي ε_t يعتمد على ابطاءات مربعات المتغير العشوائي، ففي حالة سيرورة $ARCH(1)$، فإن تباين المتغير العشوائي يعطى بالصيغة التالية:

$$Var(\varepsilon_t) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \vartheta_0 + \vartheta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_t$$

ويمكن توسع السيرورة ARCH لرتبة أعلى، أي $ARCH(P)$، فيعطى تباين المتغير العشوائي كمايلي:

$$Var(\varepsilon_t) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \vartheta_0 + \vartheta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \vartheta_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \vartheta_p \cdot \varepsilon_{t-p}^2 + \eta_t$$

في حالة عدم وجود ارتباط ذاتي في تباين المتغير العشوائي، فإن: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \cdots = \vartheta_p = 0$، وبالتالي فإن: $Var(\varepsilon_t) = \delta^2_{\varepsilon_t} = \vartheta_0$، وهو ما يعني ثبات تباين المتغير العشوائي.

أما خطوات هذا الاختبار فتتمثل فيما يلي:

- تقدير النموذج $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS، وحساب بواقي التقدير $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$. ومربع بواقي التقدير e_t^2.
- تقدير الانحدار المساعد التالي بطريقة OLS:

$$e_t^2 = \vartheta_0 + \vartheta_1 e_{t-1}^2 + \vartheta_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \vartheta_P e_{t-p}^2 + \eta_t$$

- تحديد وصياغة فرضيات الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \vartheta_1 = \vartheta_2 = \cdots = \vartheta_P = 0 \\ H_1 : \exists i \quad / \quad \vartheta_i \neq 0 \qquad i = 1 \cdots p \end{cases}$$

- حساب الاحصائية LM: $LM = (n - P) \cdot R^2$

حيث: n: عدد المشاهدات المستخدمة في تقدير الانحدار المساعد، و R^2: معامل تحديد هذا الانحدار. الاحصائية LM تتبع توزيع KHI-DEUX بدرجة حرية تساوي P، أي: $LM \rightarrow \chi^2_P$.

- **القرار:** يكون قرار الاختبار كمايلي:

✓ نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $LM \geq \chi^2_P$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين المشروط للأخطاء.

✓ نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $LM < \chi^2_P$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين المشروط للأخطاء.

ثالثا: معالجة مشكلة عدم ثبات التباين

لا توجد طريقة محددة لمعالجة مشكلة عدم ثبات التباين، فمع اختلاف أنماط عدم ثبات التباين تختلف طرق المعالجة، نذكر من أهم هذه الطرق مايلي:

1- طريقة المربعات الصغرى المعممة (GLS) GENERALIZED LEAST SQUARES:

إذا كان تباين المتغير العشوائي غير ثابت ومعلوم، فإن التخلص من مشكلة عدم ثبات التباين تتم من خلال استخدام طريقة المربعات الصغرى المعممة.

نعتبر النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

نفترض أن تباين المتغير العشوائي غير ثابت، أي: $V(\varepsilon_t) = \delta_t^2$ ، ولحل هذه المشكلة نقسم كل حد من حدود النموذج على الانحراف المعياري لحد الخطأ (δ_t)، فنحصل على النموذج المعدل التالي:

$$\frac{Y_t}{\delta_t} = \beta_1 \frac{1}{\delta_t} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\delta_t} + \cdots + \beta_k \frac{X_{kt}}{\delta_t} + \frac{\varepsilon_t}{\delta_t}$$
$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_k X_{kt}^* + \nu_t$$

فيكون تباين المتغير العشوائي المعدل في النموذج المعدل كما يلي:

$$V(\nu_t) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{\delta_t}\right) = \frac{1}{\delta_t^2} V(\varepsilon_t) = \frac{\delta_t^2}{\delta_t^2} = 1$$

هذا يعني أن تباين المتغير العشوائي باستخدام المتغيرات المعدلة أصبح ذو تباين ثابت، لذلك فإن استخدام طريقة (OLS) على النموذج المعدل سوف يعطي مقدرات تتمتع بخصائص BLUE، هذه النتيجة وفي ظل تعديل البيانات الأصلية وباستخدام طريقة (OLS) تسمى بطريقة المربعات الصغرى المعممة (GLS)[1]، وأن طريقة (GLS) هي طريقة (OLS) للمتغيرات المعدلة التي تستوفي فرضيات طريقة المربعات الصغرى العادية، وأن المقدرات المحصل عليها هي مقدرات (GLS) وتتمتع بخصائص BLUE.

2- أسلوب تحويل المتغيرات:

عندما يكون تباين المتغير العشوائي غير ثابت وغير معلوم فيفترض أن يكون بأنماط مختلفة، وبالتالي فإن المعالجة تأخذ أشكالا متعددة حسب الأنماط المفترضة لعدم ثبات التباين.

هناك عدة ة افتراضات لعدم ثبات التباين، من أهمها:[2]

1-1- الافتراض الأول:

عندما يتناسب تباين المتغير العشوائي مع مربع متغير مستقل، بمعنى أن التباين يزداد بشكل تناسبي مع X_{it}

وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$E(\varepsilon_t^2) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \delta_\varepsilon^2 X_{it}^2$$

---

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص266.

[2] - للمزيد أنظر:

- أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مقدمة تحليلية في مشاكل الانحدار باستخدام برمجية Eviews، الجزء الثاني، جامعة ديالي، العراق، 2015، ص ص 272-278.
- شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2011، ص ص 117-118.

فمن أجل تحقيق ثبات تباين المتغير العشوائي يتم قسمة طرفي النموذج الأصلي المقدر الذي يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين على X_{it} للحصول على:

$$\frac{Y_t}{X_{it}} = \beta_1 \frac{1}{X_{it}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{X_{it}} + \cdots + \beta_i \frac{X_{it}}{X_{it}} + \cdots + \beta_k \frac{X_{kt}}{X_{it}} + \frac{\varepsilon_t}{X_{it}}$$
$$\frac{Y_t}{X_{it}} = \beta_1 \frac{1}{X_{it}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{X_{it}} + \cdots + \beta_i + \cdots + \beta_k \frac{X_{kt}}{X_{it}} + \frac{\varepsilon_t}{X_{it}}$$
$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_i + \cdots + \beta_k X_{kt}^* + v_t$$

ويفترض في هذا النموذج المعدل أن يكون تباين المتغير العشوائي ثابتا، حيث:

$$V(v_t) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{X_{it}}\right) = \frac{1}{X_{it}^2} V(\varepsilon_t) = \frac{\delta_\varepsilon^2 \cdot X_{it}^2}{X_{it}^2} = \delta_\varepsilon^2$$

لذلك فإن تقدير النموذج المعدل بأخذ انحدار المتغير التابع $\frac{Y_t}{X_{it}}$ على المتغيرات المستقلة $\frac{1}{X_{it}}$، $\frac{X_{2t}}{X_{it}}$، ...، $\frac{X_{kt}}{X_{it}}$. بطريقة (OLS) سوف يعطي مقدرات تتمتع بخصائص BLUE، مع ملاحظة أن الحد الثابت β_1 في النموذج الأصلي المقدر أصبح معامل انحدار في النموذج المعدل، وأن معامل الانحدار β_i في النموذج الأصلي المقدر أصبح حدا ثابتا في النموذج المعدل.

1-2- الافتراض الثاني:

عندما يتناسب تباين المتغير العشوائي مع متغير مستقل، بمعنى أن التباين يزداد بشكل تناسبي مع X_{it}، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$E(\varepsilon_t^2) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \delta_\varepsilon^2 X_{it}$$

لمعالجة عدم ثبات تباين المتغير العشوائي يتم قسمة النموذج المقدر على $\sqrt{X_{it}}$ للحصول على:

$$\frac{Y_t}{\sqrt{X_{it}}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_{it}}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\sqrt{X_{it}}} + \cdots + \beta_i \frac{X_{it}}{\sqrt{X_{it}}} + \cdots + \beta_k \frac{X_{kt}}{\sqrt{X_{it}}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{X_{it}}}$$
$$\frac{Y_t}{\sqrt{X_{it}}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_{it}}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\sqrt{X_{it}}} + \cdots + \beta_i \sqrt{X_{it}} + \cdots + \beta_k \frac{X_{kt}}{\sqrt{X_{it}}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{X_{it}}}$$
$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_i X_{it}^* + \cdots + \beta_k X_{kt}^* + v_t$$

إن تباين المتغير العشوائي v_t في هذا النموذج المعدل ثبات، وبالتالي فالنموذج المعدل لا يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين، حيث نجد أن:

$$V(v_t) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{X_{it}}}\right) = \frac{1}{X_{it}} V(\varepsilon_t) = \frac{\delta_\varepsilon^2 \cdot X_{it}}{X_{it}} = \delta_\varepsilon^2$$

لذا يمكن تقدير النموذج المعدل بإجراء انحدار $\frac{Y_t}{\sqrt{X_{it}}}$ على $\frac{1}{\sqrt{X_{it}}}$ ، $\frac{X_{2t}}{\sqrt{X_{it}}}$ ، .... ، $\sqrt{X_{it}}$ ،..... $\frac{X_{kt}}{\sqrt{X_{it}}}$ بطريقة (OLS)، وهو ما يعطي مقدرات تتمتع بخصائص BLUE، مع ملاحظة أن النموذج المعدل لا يحتوي على حد ثابت.

1-3- الافتراض الثالث:

عندما يتناسب تباين المتغير العشوائي مع متوسط المتغير التابع، بمعنى أن التباين يزداد بشكل تناسبي مع مربع القيمة المتوقعة لـ Y_t ، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$E(\varepsilon_t^2) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \delta_\varepsilon^2\left(E(\hat{Y}_t)\right)^2 = \delta_\varepsilon^2(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt})^2$$

بناءا على هذا الافتراض وللتخلص من مشكل عدم ثبات تباين المتغير العشوائي، يتم قسمة طرفي النموذج الأصلي على $E(\hat{Y}_t)$ ، حيث: $E(\hat{Y}_t) = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt}$ ، فنجد النموذج المعدل التالي:

$$\frac{Y_t}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt}} = \beta_1 \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt}} + \cdots$$
$$+ \beta_k \frac{X_{kt}}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt}} + \frac{\varepsilon_t}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt}}$$

ولاختبار ما إذا كان المتغير العشوائي الجديد في النموذج المعدل $\left(\frac{\varepsilon_t}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt}}\right)$ له تباين ثابت نجد:

$$V\left(\frac{\varepsilon_t}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt}}\right) = \frac{1}{(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt})^2} V(\varepsilon_t) = \frac{(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt})^2 \delta_\varepsilon^2}{(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt})^2} = \delta_\varepsilon^2$$

وبذلك يجري التصحيح على مرحلتين، الأولى تتضمن اجراء انحدار بواسطة طريقة OLS، والحصول على $\hat{Y}_t$ ، والمرحلة الثانية اجراء انحدار $\frac{Y_t}{\hat{Y}_t}$ على $\frac{1}{\hat{Y}_t}$ ، $\frac{X_{2t}}{\hat{Y}_t}$ ، ...... $\frac{X_{kt}}{\hat{Y}_t}$ بطريقة (OLS)، وعلى الرغم من أن $\hat{Y}_t$ ليس بالضبط $E(\hat{Y}_t)$ ، إلا أنهما يتقاربان عند زيادة حجم العينة بشكل كبير، ومن ثم فإن النموذج المعدل سيتضمن خصائص BLUE.

1-4- الافتراض الرابع:

عندما يتناسب تباين المتغير العشوائي مع بواقي تقدير النموذج، ويتضمن هذا الافتراض أن تباين المتغير العشوائي دالة خطية للقيم المطلقة لبواقي تقدير النموذج بطريقة OLS، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$E(\varepsilon_t^2) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \delta_\varepsilon^2 |e_t|$$

للتخلص من مشكل عدم ثبات التباين يتم قسمة المتغيرات الأصلية على الجذر التربيعي للقيم المطلقة للبواقي، فنحصل على النموذج المعدل التالي:

$$\frac{Y_t}{\sqrt{|e_t|}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{|e_t|}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\sqrt{|e_t|}} + \cdots + \beta_i \frac{X_{it}}{\sqrt{|e_t|}} + \cdots + \beta_k \frac{X_{kt}}{\sqrt{|e_t|}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{|e_t|}}$$

$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_i X_{it}^* + \cdots + \beta_k X_{kt}^* + \nu_t$$

إن تباين المتغير العشوائي ν_t في هذا النموذج المعدل ثبات، وبالتالي فالنموذج المعدل لا يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين، حيث نجد أن:

$$V(\nu_t) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{|e_t|}}\right) = \frac{1}{|e_t|} V(\varepsilon_t) = \frac{\delta_\varepsilon^2 \cdot |e_t|}{|e_t|} = \delta_\varepsilon^2$$

لذا يمكن تقدير النموذج المعدل بإجراء انحدار $\frac{Y_t}{\sqrt{|e_t|}}$ على $\frac{1}{\sqrt{|e_t|}}$ ، $\frac{X_{2t}}{\sqrt{|e_t|}}$ ،.....، $\frac{X_{kt}}{\sqrt{|e_t|}}$ بطريقة (OLS)، وهو ما يعطي مقدرات تتمتع بخصائص BLUE، مع ملاحظة أن النموذج المعدل لا يحتوي على حد ثابت.

1-5- الافتراض الخامس:

يسمى هذا الافتراض بالتحويل اللوغاريتمي عندما يعاني النموذج الخطي من عدم ثبات التباين، وهو افتراض عام يقوم على أساس أن أخذ اللوغاريتم لأي قيم يؤدي إلى تقارب تلك القيم، وهو ما يؤدي إلى تقليل التباين بين هذه القيم. عند أخذ اللوغاريتمات لقيم مشاهدات المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، فإن النموذج الأصلي المقدر الذي يعاني من عدم ثبات التباين سيأخذ الشكل التالي:

$$\ln(Y_t) = \beta_1 + \beta_2 \ln(X_{2t}) + \cdots + \beta_k \ln(X_{kt}) + \varepsilon_t$$

في حالة اعتماد طريقة OLS لتقدير هذا النموذج المعدل، فإنه لا يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين، استنادا لكون التباين بين القيم قد زال واختفى بأخذ اللوغاريتمات.

تمارين المحور السادس

التمرين الأول:

باستخدام عينة عشوائية مكونة من 12 أسرة، توصل باحث اقتصادي إلى البيانات التالية لمتغيري الدخل Y_i والادخار S_i بالألف دج.

الأسرة	Y_i	S_i
1	30.5	2.6
2	26	2.4
3	18	1.9
4	42.5	3.6
5	30	2.7
6	28	3.2
7	27.5	2.8
8	32.5	3
9	36	3.2
10	26	2.7
11	30	3
12	39	2.5

المطلوب:

1- قدر دالة الادخار التي تأخذ الشكل التالي: $S_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot Y_i + \varepsilon_i$.

2- استخدم اختبار GOLDFELD-QUANDT وWHITE للتحقق من وجود عدم ثبات التباين.

التمرين الثاني:

لتكن لديك البيانات التالية والخاصة بمتوسط الدخل والاستهلاك لعينة من 20 أسرة خلال سنة معينة.

الأسرة	متوسط الاستهلاك Y_i	متوسط الدخل X_i	الأسرة	متوسط الاستهلاك Y_i	متوسط الدخل X_i
1	113	118	11	352	356
2	173	173	12	373	377
3	182	183	13	417	422
4	225	227	14	445	450
5	226	227	15	445	450
6	263	267	16	517	524
7	274	277	17	547	554
8	274	278	18	645	648
9	324	327	19	772	783
10	324	327	20	1216	1313

المطلوب:

1- قدر دالة الاستهلاك التالية: $Y_i = \alpha + \beta \cdot X_i + \varepsilon_i$.

2- اختبر وجود عدم ثبات التباين باستخدام اختبار GOLDFELD-QUANDT.

3- استخدم أسلوب تحويل المتغيرات لمعالجة مشكلة عدم ثبات التباين، بافتراض أن تباين الخطأ يتناسب طرديا مع مربع قيم X_i .

حلول تمارين المحور السادس

حل التمرين الأول:

1- تقدير دالة الادخار التي تأخذ الشكل التالي: $S_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot Y_i + \varepsilon_i$.

الأسرة	Y_i	S_i	S_iY_i	Y_i^2	$\hat{S}_i$	e_i	e_i^2
1	30.5	2.6	79.3	930.25	2.8	-0,19	0.039
2	26	2.4	62.4	676	2.58	-0,18	0.034
3	18	1.9	34.2	324	2.20	-0,3	0.092
4	42.5	3.6	153	1806.25	3.37	0,22	0.051
5	30	2.7	81	900	2.77	-0,07	0.005
6	28	3.2	89.6	784	2.68	0,51	0.269
7	27.5	2.8	77	756.25	2.65	0,14	0.020
8	32.5	3	97.5	1056.25	2.89	0,1	0.010
9	36	3.2	115.2	1296	3.06	0,13	0.018
10	26	2.7	70.2	676	2.58	0,11	0.013
11	30	3	90	900	2.77	0,22	0.050
12	39	2.5	97.5	1521	3.20	-0,7	0.498
	366	33.6	1046.9	11626	33.6	0	1.105

$$\bar{S} = \frac{\sum S_i}{n} = \frac{33.6}{12} = 2.8$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{366}{12} = 30.5$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum S_i Y_i - n \cdot \bar{S} \cdot \bar{Y}}{\sum Y_i^2 - n \cdot \bar{Y}^2} = \frac{1046.9 - 12 \cdot (2.8)(30.5)}{11626 - 12 \cdot (30.5)^2} = 0.047$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{S} - \hat{\beta}_2 \cdot \bar{Y} = 2.8 - 30.5 \cdot (0.047) = 1.344$$

وبالتالي تكون دالة الادخار المقدرة كمايلي:

$$\hat{S}_i = 1.344 + 0.047 \cdot Y_i$$

2- استخدم اختبار GOLDFELD-QUANDT وWHITE للتحقق من وجود عدم ثبات التباين.

أ- اختبار GOLDFELD-QUANDT :

- ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا وفقا للترتيب التصاعدي لمشاهدات الدخل.

Y_i	S_i
18	1.9
26	2.4
26	2.7
27.5	2.8
28	3.2
30	2.7
30	3
30.5	2.6
32.5	3
36	3.2
39	2.5
42.5	3.6

بيانات الجزء الأول، $n_1 = 5$

بيانات الجزء الثالث، $n_2 = 5$

- تقدير نموذجين للجزء الأول والثالث بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$S_i = \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} Y_i + \varepsilon_t \qquad / i = 1 \cdots\cdots 5$$

$$S_i = \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} Y_i + \varepsilon_t \qquad / i = 1 \cdots\cdots 5$$

كانت نتائج التقدير كمايلي:

<u>نموذج الجزء الأول:</u>

$$\hat{S}_i = -0.091 + 0.107 \cdot Y_i$$

$$n_1 = 5 \qquad R^2 = 0.81 \qquad F_{cal} = 12.79 \qquad RSS_1 = 0.1785$$

<u>نموذج الجزء الثالث:</u>

$$\hat{S}_i = 1.203 + 0.049 \cdot Y_i$$

$$n_2 = 5 \qquad R^2 = 0.28 \qquad F_{cal} = 1.170 \qquad RSS_2 = 0.5811$$

- حساب قيمة F_{cal} باستخدام العلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{RSS_2 / (n_2 - k)}{RSS_1 / (n_1 - k)} = \frac{0.5811 / (5-2)}{0.1785 / (5-2)} = 3.2554$$

ولدينا: $F_{tab} = F^{\alpha=5\%}_{((n_2-k).(n_1-k))} = F^{\alpha=5\%}_{(3.3)} = 9.28$

- **القرار:** نلاحظ أن: $F_{cal} < F_{tab}$، وبالتالي نقبل H_0، أي أن النموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

ب- اختبار WHITE:

- تقدير الانحدار المساعد التالي بطريقة OLS:

$$e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 Y_i + \gamma_3 Y_i^2 + \nu_t$$

كانت نتائج التقدير كما يلي:

$$e_t^2 = 0.3470 - 0.023 \cdot Y_i + 0.0004 \cdot Y_i^2$$
$$n = 12 \qquad R^2 = 0.108 \qquad F_{cal} = 0.5453$$

- حساب الاحصائية LM: $LM = n \cdot R^2 = 12 \cdot (0.108) = 1.2970$

- القرار: نلاحظ أن: $(LM = 1.2970) \geq (\chi_3^2 = 7.815)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$، وبالتالي نقبل الفرضية H_0، أي أن النموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

حل التمرين الثاني:

1- تقدير دالة الاستهلاك التالية: $Y_i = \alpha + \beta \cdot X_i + \varepsilon_i$:

الأسرة	Y_i	X_i	Y_iX_i	X_i^2
1	113	118	13334	13924
2	173	173	29929	29929
3	182	183	33306	33489
4	225	227	51075	51529
5	226	227	51302	51529
6	263	267	70221	71289
7	274	277	75898	76729
8	274	278	76172	77284
9	324	327	105948	106929
10	324	327	105948	106929
11	352	356	125312	126736
12	373	377	140621	142129
13	417	422	175974	178084
14	445	450	200250	202500
15	445	450	200250	202500
16	517	524	270908	274576
17	547	554	303038	306916
18	645	648	417960	419904
19	772	783	604476	613089
20	1216	1313	1596608	1723969
$\sum$	**8107**	**8281**	**4648530**	**4809963**

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{8107}{20} = 405.35$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{8281}{20} = 414.05$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_i Y_i - n \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}^2} = \frac{4648530 - 20(405.35)(414.05)}{4809963 - 20(414.05)^2} = 0.9352$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta} \cdot \overline{X} = 405.35 - 0.9352(414.05) = 18.09$$

وبالتالي تكون دالة الاستهلاك المقرة من الشكل:

$$Y_i = 18.09 + 0.9352 \cdot X_i$$

2- اختبر وجود عدم ثبات التباين باستخدام اختبار GOLDFELD-QUANDT.

- ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا وفقا للترتيب التصاعدي لمشاهدات متوسط الدخل X_i.

الأسرة	X_i	Y_i
1	118	113
2	173	173
3	183	182
4	227	225
5	227	226
6	267	263
7	277	274
8	278	274
9	327	324
10	327	324
11	356	352
12	377	373
13	422	417
14	450	445
15	450	445
16	524	517
17	554	547
18	648	645
19	783	772
20	1313	1216

بيانات الجزء الأول، $n_1 = 8$

بيانات الجزء الثالث، $n_2 = 8$

- تقدير نموذجين للجزء الأول والثالث بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_i = \alpha^{(1)} + \beta^{(1)} X_i + \varepsilon_t \qquad / i = 1 \cdots\cdots 8$$

$$Y_i = \alpha^{(2)} + \beta^{(2)} X_i + \varepsilon_t \qquad / i = 1 \cdots\cdots 8$$

كانت نتائج التقدير كمايلي:

نموذج الجزء الأول:

$$\hat{Y}_i = -1.639 + 0.9960 \cdot Y_i$$

$$n_1 = 8 \qquad R^2 = 0.9990 \qquad F_{cal} = 6294.85 \qquad RSS_1 = 21.6461$$

نموذج الجزء الثالث:

$$\hat{Y}_i = 43.134 + 0.9036 \cdot Y_i$$

$$n_2 = 8 \qquad R^2 = 0.9979 \qquad F_{cal} = 3410.08 \qquad RSS_2 = 1134.42$$

- حساب قيمة F_{cal} باستخدام العلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{RSS_2 / (n_2 - k)}{RSS_1 / (n_1 - k)} = \frac{1134.42 / (8-2)}{21.6461 / (8-2)} = 52.40$$

ولدينا: $F_{tab} = F^{\alpha=5\%}_{((n_2-k).(n_1-k))} = F^{\alpha=5\%}_{(6.6)} = 4.284$

- **القرار:** نلاحظ أن: $F_{cal} > F_{tab}$ ، وبالتالي نرفض H_0 ، أي أن النموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

3- استخدم أسلوب تحويل المتغيرات لمعالجة مشكلة عدم ثبات التباين، بافتراض أن:

- تباين الخطأ يتناسب طرديا مع مربع قيم X_i : من أجل تحقيق ثبات تباين المتغير العشوائي يتم قسمة طرفي النموذج الأصلي المقدر الذي يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين على X_i للحصول على:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \alpha\frac{1}{X_i} + \beta\frac{X_i}{X_i} + \frac{\varepsilon_t}{X_i} = \alpha\frac{1}{X_i} + \beta + \frac{\varepsilon_t}{X_i} = \alpha \cdot X_i^* + \beta + \nu_i$$

الأسرة	$X_i^* = \frac{1}{X_i}$	$Y_i^* = \frac{Y_i}{X_i}$	$X_i^* Y_i^*$	X_i^{*2}
1	0.0084745	0.9576	0.0081154	7.18184E-05
2	0.0057803	1.0000	0.0057803	3.34124E-05
3	0.0054644	0.9945	0.0054346	2.98606E-05
4	0.0044052	0.9911	0.0043664	1.94065E-05
5	0.0044052	0.9955	0.0043858	1.94065E-05
6	0.0037453	0.9850	0.0036892	1.40274E-05
7	0.0036101	0.9891	0.0035710	1.30329E-05
8	0.0035971	0.9856	0.0035453	1.29393E-05

9	0.0030581	0.9908	0.0030300	9.352E-06
10	0.0030581	0.9908	0.0030300	9.352E-06
11	0.0028089	0.9887	0.0027774	7.89042E-06
12	0.0026525	0.9893	0.0026243	7.03586E-06
13	0.0023696	0.9881	0.0023415	5.61533E-06
14	0.0022222	0.9888	0.0021975	4.93827E-06
15	0.0022222	0.9888	0.0021975	4,93827E-06
16	0.0019083	0.9866	0.0018829	3.64198E-06
17	0.0018050	0.9873	0.0017822	3.25822E-06
18	0.0015432	0.9953	0.0015360	2.3815E-06
19	0.0012771	0.9859	0.0012591	1.63108E-06
20	0.0084745	0.9261	0.0007053	5.80057E-07
$\sum$	**0.06516**	19.7059	0.0642527	0.00027451

$$\overline{Y}^* = \frac{\sum Y_i^*}{n} = \frac{19.7059}{20} = 0.9852$$

$$\overline{X}^* = \frac{\sum X_i^*}{n} = \frac{0.06516}{20} = 0.003258$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum X_i^* Y_i^* - n \cdot \overline{X}^* \cdot \overline{Y}^*}{\sum X_i^{*2} - n \cdot \overline{X}^{*2}} = \frac{0.0642527 - 20(0.003258)(0.9852)}{0.00027451 - 20(0.003258)^2} = 0.6619$$

$$\hat{\beta} = \overline{Y}^* - \hat{\alpha} \cdot \overline{X}^* = 0.9852 - 0.6619(0.003258) = 0.9831$$

وبالتالي يصبح النموذج المصحح من مشكلة عدم ثبات التباين كمايلي:

$$\hat{Y}_i^* = 0.6619 \cdot X_i^* + 0.9831$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

لتكن لديك المعطيات التالية والمتعلقة بدخل أحد العائلات واستهلاكها الشهري من جانفي **2019** إلى ديسمبر **2019**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y_t	1000	1100	1150	1050	1100	1180	1200	1250	1190	1100	1200	1200
C_t	800	850	850	770	820	840	880	860	875	795	850	840

حيث: Y_t الدخل. C_t الاستهلاك

المطلوب:

1- قدر معلمات معادلة الاستهلاك التالية باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية: $C_t = c_0 + \beta \cdot Y_t + \varepsilon_t$.

2- فسر نتائج التقدير اقتصاديا.

3- أوجد مجموع مربعات البواقي $\sum e_t^2$.

4- أحسب معامل التحديد R^2 وفسر النتيجة.

5- اختبر الفرضيات التالية: $H_1: \ \beta \neq \frac{1}{2}$ $\qquad$ $H_0: \ \beta = \frac{1}{2}$

6- تنبأ بالاستهلاك الشهري لهذه العائلة في شهري جانفي وفيفري 2020، إذا علمت أن دخلها الشهري يساوي 1250 و1300 على التوالي، ثم كون مجالات ثقة لهذا التنبؤ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

التمرين الثاني:

انــطلاقا من المعطيات الخاصة بمخصصات الإشهار والأرباح الشهرية لإحدى المؤسسات الاقتصادية، قام باحث اقتصادي بتقدير العلاقة الخطية التالية:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \varepsilon_t$$

حيث: Y_t: الأرباح الشهرية للمؤسسة للفترة t. X_t: مخصص الإشهار للفترة t. $t = 1 \cdots\cdots 24$

باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية توصل الباحث للنتائج التالية:

$$\hat{Y}_t = 155.29 + 0.2241 \cdot X_t$$
$$(31.455) \quad (0.0255)$$

$$n = 24 \qquad \sum(Y_t - \overline{Y})^2 = 35665.95 \qquad \sum(X_t - \overline{X})^2 = 552597.50$$

حيث: (.): الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة.

المطلوب:

1- أحسب معامل التحديد R^2 وفسر النتيجة.

2- اختبر معنوية المعلمات المقدرة عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

3- باستعمال اختبار فيشر اختبر معنوية النموذج ككل.

4- باستعمال مجال الثقة اختبر الفرضية التالية عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$:

$$H_0 : \quad \beta = 1/4 \qquad\qquad H_1 : \quad \beta \neq 1/4$$

التمرين الثالث:

ليكن لديك النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_t^2 + \varepsilon_t$$

بعد القيام بالعمليات الحسابية تم الحصول على المجاميع التالية حيث $n = 20$:

$$\sum X_t = 10.5 \quad \sum X_t^2 = 7.175 \quad \sum X_t^3 = 5.5125 \quad \sum X_t^4 = 4.51$$
$$\sum Y_t = 108.17 \quad \sum Y_t^2 = 598.89 \quad \sum X_t Y_t = 61.54 \quad \sum X_t^2 Y_t = 43.90$$

المطلوب:

1- أكتب النموذج على شكل مصفوفات.

2- قدر معلمات النموذج.

3- اختبر معنوية المعلمات المقدرة وكون لها مجالات ثقة عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

التمرين الرابع:

لتكن لديك البيانات التالية والخاصة بالكمية المطلوبة من سلعة معينة والعوامل المؤثرة عليها وهي السعر، دخل المستهلك وسعر السلعة البديلة خلال فترة زمنية معينة.

السنة	الكمية	السعر	الدخل	سعر السلعة البديلة
1	4	0.9	40	1
2	4.5	0.8	50	1.4
3	5	0.9	60	1.2
4	5.5	0.8	70	1.3
5	6	0.7	80	1.1
6	7	0.6	90	1.5
7	6.5	0.6	100	1.6
8	6.5	0.8	110	1.7
9	7.5	0.5	120	2.2

10	7.5	0.5	130	1.9
11	8	0.5	140	2
12	10	0.3	150	2.3
13	9	0.4	160	1.8
14	9.5	0.3	170	2.4
15	8.5	0.4	180	2.1

المطلوب:

1- قدر النموذج الخطي الذي يأخذ الكمية المطلوبة كمتغير تابع وباقي المتغيرات كمتغيرات مستقلة.

2- أدرس صلاحية النموذج الاقتصادية والإحصائية عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

3- أحسب معامل التحديد R^2، معامل التحديد المصحح $\overline{R}^2$ وفسر النتائج إحصائيا واقتصاديا.

4- كون جدول تحليل التباين ANOVA.

5- اختبر استقراريه النموذج باستعمال اختبار Chow، بافتراض أن التغير الهيكلي كان في السنة 8.

التمرين الخامس:

لتكن لديك دالة الإنتاج المقدرة التالية:

$$\underset{}{LnQ_t} = 1.37 + \underset{(0.257)}{0.632 \cdot LnK_t} + \underset{(0.219)}{0.452 \cdot LnL_t}$$

$$n = 40 \qquad R^2 = 0.98 \qquad Cov(\hat{\beta}_2 . \hat{\beta}_3) = -0.044$$

المطلوب:

1- اختبر المعنوية الكلية للنموذج.

2- اختبر الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = \beta_3 \\ H_1 : \beta_2 \neq \beta_3 \end{cases}$$

3- اختبر الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1 \\ H_1 : \beta_2 + \beta_3 \neq 1 \end{cases}$$

التمرين السادس:

يبين الجدول التالي بيانات عن الإنفاق الاستهلاكي C، الدخل Y والثروة W بالألف دج، لعينة من 15 أسرة.

الأسرة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	32	11	15	17	16	13	18	20	14	17	41	17	33	20	18
Y	36	12	16	18	17	14	20	23	15	18	50	19	37	22	19
W	144	47	63	70	67	52	79	90	58	70	204	76	149	86	76

المطلوب:

1- قدر النموذج التالي: $C_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot Y_i + \beta_3 \cdot W_i + \varepsilon_i$ ثم أوجد R^2 و $\overline{R}^2$ و $r_{Y.W}$.

2- أوجد انحدار C على Y فقط.

3- أوجد انحدار C على W فقط.

4- ماذا يمكن أن نستنتج فيما يتعلق بالتعدد الخطي المتعدد؟

5- كيف يمكن التخلص من مشكلة التعدد الخطي إذا علمت أن $\beta_3 = 0.25 \cdot \beta_2$؟

6- أعد تقدير الانحدار باستخدام المعلومة السابقة، ما هي قيمة كل من $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_3$؟

التمرين السابع:

لتكن لديك البيانات التالية والتي تمثل عدد سنوات الخدمة X_i والأجر الشهري Y_i بالألف دج لعينة من 08 موظفين بمصلحة ادارية معينة:

الموظف	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	4	8	12	16	20	24	28	**32**
Y_i	25.6	32.7	45.4	53.9	59.0	62.6	65.0	**65.5**

المطلوب:

1- قدر النموذج الخطي البسيط التالي: $Y_i = \alpha + \beta \cdot X_i + \varepsilon_i$.

2- اختبر وجود عدم ثبات التباين باستخدام اختبار BREUSCH-PAGAN و اختبار WHITE.

قائمة المراجع

باللغة العربية:

- أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مقدمة تحليلية في مشاكل الانحدار باستخدام برمجية Eviews، الجزء الثاني، جامعة ديالي، العراق، 2015.
- حسين علي بخيت، سحر فتح الله، الاقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2006.
- خالد محمد السواعي، مبادئ الاقتصاد القياسي، دار الكتاب الثقافي، أربد، الأردن، 2018.
- دامودار جيجاراتي، الاقتصاد القياسي، ترجمة هند عبد الغفار عودة وعفاف علي حسين الدش، الجزء الأول، دار المريخ، الرياض، 2015.
- سمير خالد صافي، مقدمة في تحليل نماذج الانحدار باستخدام EViews، الجزء الثاني، الجامعة الاسلامية، غزة، 2015.
- عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، الدار الجامعية، الاسكندرية.
- عدنان داود محمد العذاري، الاقتصاد القياسي نظرية وحلول، الطبعة الأولى، دار جرير للنشر والتوزيع، عمان، 2010.
- لحسن عبد الله باشيوة، بحوث العمليات وتطبيقاته، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2011.
- محمد شيخي، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2011.
- محمد محمد عطوة يوسف، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، المكتبة العصرية، المنصورة، 2002.
- مها محمد زكي، الاقتصاد القياسي بالأمثلة، الطبعة الأولى، حميثرا للنشر والترجمة، القاهرة، 2019.

باللغة الأجنبية:

- Alois Geyer, Basic Financial Econometrics, Vienna University of Economics and Business, March 2021.
- Bruce E. Hansen, ECONOMETRICS, University of Wisconsin, USA, 2018.
- Chris Brooks, **Introductory Econometrics for Finance, Second Edition,** Cambridge University Press, New York, 2008.
- Damodar N. Gujarati, Économétrie, De Boeck, Paris. 2004.
- Éric DOR, Économétrie, Pearson Education, France, 2009.
- Isabelle Cadoret, Catherine Benjamin, Économétrie appliquée, 1ère édition, De Boeck, Bruxelles, 2004.
- Kevin Sheppard, Financial Econometrics Notes, University of Oxford, January 17, 2020.
- Régis Bourbonnais, Économétrie, Cours Et Exercices Corrigés, 9e Edition, Dunod, Paris, 2015.
- Ricco Rakotomalala, Econométrie, La régression linéaire simple et multiple, Université Lumière Lyon 2, 2018.
- Roman Kozhan, Financial Econometrics with EViews, Bookboon.com, 2013.
- Stephen Bazen & Mareva Sabatier, Économétrie " Des fondements à la modélisation", Vuibert, Paris, 2007.
- William H. Greene, Econometric Analysis, Fifth Edition, Pearson Education, New Jersey, USA, 2002.

الجداول الاحصائية

Table 01: **Critical values of the St-distribution**

ν \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Table 02: Critical values of the F-distribution

	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
ν_2	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$
1	161.4	4052.00	199.5	4999.00	213.7	3403.00	224.6	5625.00	230.2	5764.00
2	18.51	98.49	19.00	99.00	19.16	99.17	19.25	99.25	19.30	99.30
3	10.13	34.12	9.55	30.81	9.28	29.46	9.12	28.71	9.01	28.24
4	7.71	21.20	6.94	18.00	6.59	16.69	6.39	13.98	6.26	13.32
5	6.61	16.26	5.79	13.27	5.41	12.06	5.19	11.39	5.03	10.97
6	3.99	13.74	3.14	10.91	4.76	9.78	4.53	9.13	4.39	8.75
7	3.39	12.23	4.74	9.35	4.33	8.43	4.12	7.85	3.97	7.45
8	3.32	11.26	4.46	8.63	4.07	7.39	3.84	7.01	3.69	6.63
9	5.12	10.56	4.26	8.02	3.86	6.99	3.63	6.42	3.48	6.06
10	4.96	10.04	4.10	7.56	3.71	6.33	3.48	5.99	3.33	5.64
11	4.84	9.65	3.98	7.20	3.59	6.22	3.36	5.67	3.20	5.32
12	4.75	9.33	3.88	6.93	3.49	5.93	3.26	5.41	3.11	5.06
13	4.67	9.07	3.80	6.70	3.41	5.74	3.18	5.20	3.02	4.86
14	4.60	8.86	3.74	6.31	3.34	5.56	3.11	5.03	2.96	4.69
15	4.34	8.68	3.68	6.36	3.29	5.42	3.06	4.89	2.90	4.56
16	4.49	8.53	3.63	6.23	3.24	5.29	3.01	4.77	2.85	4.44
17	4.45	8.40	3.59	6.11	3.20	5.18	2.96	4.67	2.81	4.34
18	4.41	8.28	3.53	6.01	3.16	5.09	2.93	4.58	2.77	4.25
19	4.38	8.18	3.52	5.93	3.13	5.01	2.90	4.50	2.74	4.17
20	4.35	8.10	3.49	5.85	3.10	4.94	2.87	4.43	2.71	4.10
21	4.32	8.02	3.47	5.78	3.07	4.87	2.84	4.37	2.68	4.04
22	4.30	7.94	3.44	5.72	3.05	4.82	2.82	4.31	2.66	3.99
23	4.28	7.88	3.42	5.66	3.03	4.76	2.80	4.26	2.64	3.94
24	4.26	7.82	3.40	5.61	3.01	4.72	2.78	4.22	2.62	3.90
25	4.24	7.77	3.38	5.37	2.99	4.68	2.76	4.18	2.60	3.86
26	4.22	7.72	3.37	5.33	2.98	4.64	2.74	4.14	2.39	3.82
27	4.21	7.68	3.33	5.49	2.96	4.60	2.73	4.11	2.37	3.78
28	4.20	7.64	3.34	5.43	2.95	4.57	2.71	4.07	2.56	3.75
29	4.18	7.60	3.33	5.42	2.93	4.34	2.70	4.04	2.34	3.73
30	4.17	7.56	3.32	5.39	2.92	4.31	2.69	4.02	2.53	3.70
40	4.08	7.31	3.23	5.18	2.84	4.31	2.61	3.83	2.43	3.31
60	4.00	7.08	3.15	4.98	2.76	4.13	2.32	3.65	2.37	3.34
120	3.92	6.85	3.07	4.79	2.68	3.93	2.43	3.48	2.29	3.17
∞	3.84	6.64	2.99	4.60	2.60	3.78	2.37	3.32	2.21	3.02

Table 03: Critical values of the chi-square distribution

ν \ α	0.995	0.975	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01
1	0.0000393	0.000982	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635
2	0.0100	0.0506	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210
3	0.0717	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812
7	0.989	1.690	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475
8	1.344	2.180	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090
9	1.735	2.700	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666
10	2.156	3.247	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209
11	2.603	3.816	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725
12	3.074	4.404	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217
13	3.565	5.009	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688
14	4.075	5.629	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141
15	4.601	6.262	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578
16	5.142	6.908	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000
17	5.697	7.564	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409
18	6.265	8.231	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805
19	6.844	8.907	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191
20	7.434	9.591	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566
21	8.034	10.283	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932
22	8.643	10.982	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289
23	9.260	11.689	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638
24	9.886	12.401	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980
25	10.520	13.120	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314
26	11.160	13.844	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642
27	11.808	14.573	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963
28	12.461	15.308	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278
29	13.121	16.047	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588
30	13.787	16.791	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892
50	27.991	32.357	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154
100	67.328	74.222	111.667	118.498	124.342	129.561	131.142	135.807

Table 04: Critical Values for the Durbin-Watson Statistic ,Level of Significance $\alpha = 0.01$

n	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.30	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.27	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65
150	1.61	1.64	1.60	1.65	1.58	1.67	1.57	1.68	1.56	1.69
200	1.66	1.68	1.65	1.69	1.64	1.70	1.63	1.72	1.62	1.73

Table 05: Critical Values for the Durbin-Watson Statistic ,Level of Significance α = 0.05

n	k = l		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.92	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.4	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.96	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78
150	1.72	1.75	1.71	1.76	1.69	1.77	1.68	1.79	1.66	1.80
200	1.76	1.78	1.75	1.79	1.74	1.80	1.73	1.81	1.72	1.82