Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Polycopié de cours

Présenté par

Khaled Hamidi

Mathématiques 1
(Math01)

2021/2022

Table des matières

Première partie

Analyse 1

Chapitre 1

Méthodes de raisonnement mathématique

1.1 Introduction sur la logique

Définition 1.1.1. *(**Assertion**) On rappelle qu'une assertion (proposition) est un énonce pouvant être "vraié" ou "faux", qui sont les valeurs de vérité, noté parfois "V", "F" ou "1", "0", respectivement.*

Exemple 1.1.1.

- *Il pleut.*
- *Je suis plus grand que toi.*
- $2 + 2 = 4$.
- $2 \times 3 = 7$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $x^2 \geq 0$.
- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $|z| = 1$.

Les opérations logiques

1- La négation

Soit p une assertion, la négation de p, noté "$Nonp$", ou $\overline{p}$, est vraie si p est fausse, et fausse si p est vraie. Donc on peut la représenter comme suit :

p	1	0
$\overline{p}$	0	1

tableau de vérité

Propriété 1.1.1. *La négation de la négation d'une proposition logique p est à p.*

2- La conjonction ("et"," $\wedge$ ")

Soient p et q deux assertions, la conjonction "p *et* q", noté aussi "$p \wedge q$", est vraie signifie que les deux assertions sont vraies en même temps. Sa table de vérités est donnée par :

p	1	0	0	1
q	0	1	0	1
$p \wedge q$	0	0	0	1

tableau de vérité

Propriété 1.1.2. *Soit p une proposition logique, alors $p \wedge \overline{p}$ est une proposition fausse.*

Preuve 1.1.1. *Pour montrer ce là, il suffit de remarque que la table de vérités de $p \wedge \overline{p}$ est la suivante :*

p	0	1
$\overline{P}$	1	0
$p \wedge \overline{p}$	0	0

tableau de vérité

3- La disjonction ("Ou","$\vee$ ")

Soient p et q deux assertions, la disjonction "p *ou* q", noté aussi "$p \vee q$", est vraie signifie que l'une au moins des deux assertions et vraie. Sa table de vérités est donnée par :

p	1	0	0	1
q	0	1	0	1
$p \vee q$	1	1	0	1

tableau de vérité

Propriété 1.1.3. *Soit p une proposition logique, alors $p \vee \overline{p}$ est une proposition toujours vraie.*

Preuve 1.1.2. *Pour montrer cela, il suffit de remarque que la table de vérités de $p \vee \overline{p}$ est la suivante :*

p	0	1
$\overline{p}$	1	0
$p \vee \overline{p}$	1	1

tableau de vérité

Propriété 1.1.4.

1- $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$.

2- $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$.

4- L'implication " $\Longrightarrow$"

Soient p et q deux assertions, l'implication "p implique q", noté "$p \Longrightarrow q$", signifie que si l'assertion p est vraie alors l'assertion q est vraie, c'*est* à dire, si p alors q. Ce qui équivaut à l'assertion "$\overline{p} \vee q$". Sa table de vérités est donnée par :

p	0	0	1	1
q	0	1	0	1
$p \Longrightarrow q$	1	1	0	1

tableau de vérité

Remarque 1.1.1.

1- *La négation d'une implication : ($\overline{p \Longrightarrow q}$) équivaut à $p \wedge \overline{q}$.*

2- *L'implication "$p \Longrightarrow q$" n'a pas le même sens que l'implication "$q \Longrightarrow p$" qui s'appelle l'implication réciproque de $p \Longrightarrow q$.*

Exemple 1.1.2. *Soit x réel, l'implication $x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$ est vraie, mais l'implication réciproque $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ est fausse.*

5- L'équivalence "$\Longleftrightarrow$ "

Soient p et q deux assertions, si $p \Longrightarrow q$ et $q \Longrightarrow p$ alors $q \Longleftrightarrow p$, et on dit que p et q sont équivalente, ou "p si et seulement si q", ou bien "pour p il faut et il suffit que q". Sa table de vérités est donnée par :

p	0	0	1	1
q	0	1	0	1
$p \Longleftrightarrow q$	1	0	0	1

tableau de vérité

Propriété 1.1.5. *Soient p, q et Z trois proposition logiques, alors*

1- $((p \vee q) \vee Z) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee Z))$ *(Associativité de $\vee$)*

2- $((p \wedge q) \wedge Z) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge Z))$ *(Associativité de $\wedge$)*

3- $((p \vee q) \wedge Z) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge Z))$ *(Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$)*

4- $((p \wedge q) \vee Z) \Leftrightarrow (p \vee Z) \wedge (p \vee Z))$ *(Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$)*

5- $((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow Z) \Longrightarrow (p \Longrightarrow Z)$ *(Transitivité de $\Longrightarrow$)*

6- $((p \Longleftrightarrow q) \wedge (q \Longleftrightarrow Z) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow Z)$ *(Transitivité de $\Longleftrightarrow$)*

Les quantificateurs

Soit E un ensemble non vide

1- Le quantificateur universel $(\forall)$

Noté $(\forall)$. On considère l'assertion "$\forall x \in E \ p(x)$", cette phrase formelle affirme que la propriété p est vraie pour tous les éléments de E, et on dit "Quelque soit x appartient à E", "Pour tout x de E", "pour chaque x de E".

Exemple 1.1.3.

1- $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0$ *vraie.*

2- $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq x$ *fausse, (un contre-exemple : pour $x = 0.5$ $x^2 = 0.25$ on a $x > x^2$).*

Remarque 1.1.2. *Dans la proposition "$\forall x \in E \ p(x)$" x est muette i.e, "$\forall x \in E \ p(x)$" signifie exactement la même chose que "$\forall y \in E \ p(y)$".*

2- Le quantificateur existentiel $(\exists)$

Noté $(\exists)$. L'assertion "$\exists x \in E\ p(x)$" est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $p(x)$ est vraie, on dit "il existe au moins", "il existe x appartient à E tel que $p(x)$".

Exemple 1.1.4.

1- $\exists x \in \mathbb{R}\ x(x-1) < 0$ *vraie (par exemple* $x = 0.8$*).*

2- $\exists x \in \mathbb{R}\ (x-1)^2 = -1$ *fausse.*

Remarque 1.1.3.

1. *Pour préciser qu'une assertion* $p(x)$ *est vraie en une unique valeur dans* E*, on rajoute point d'exclamation* $(!)$.

   Par exemple : $(\exists! x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0)$ *signifie que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une solution unique dans* $\mathbb{R}$*.*

2. *L'ordre des quantificateurs est très important.*

   Par exemple : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ x.y > 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\ x.y > 0)$ *sont différentes, où la première est vraie, mais la deuxième est fausse.*

3- Négation des quantificateurs

La négation de "$\forall x \in E\ p(x)$" est "$\exists x \in E\ \overline{p(x)}$" où $\overline{p(x)}$ est la négation de $p(x)$.

Exercice 1.1.1. *Écrire par les quantificateurs les assertions suivante*

1- un entier positif est plus grand qu'un entier négatif.

2- L'addition des réelles est commutatif.

1.2 Méthodes de raisonnement mathématiques

1- Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion "$p \Longrightarrow q$" est vraie. On suppose que p est vraie et on montre qu'alors q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple 1.2.1. *Montrer que si* $a, b \in \mathbb{Q}$ *alors* $a + b \in \mathbb{Q}$.

2- Raisonnement par contra posée

Le raisonnement par contra-position est basé sur l'équivalence suivante

$$L'\text{assertion } "p \Longrightarrow q"\text{est équivalente } \grave{a} \text{ "}\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}".$$

Donc si on souhaite montrer l'assertion "$p \Longrightarrow q$", on montre en fait que si $\overline{q}$ est vraie alors $\overline{p}$ est vraie.

Exemple 1.2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

3- Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer "$p \Longrightarrow q$" repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que p est vraie et que q est fausse et on cherche une **contradiction**. Ainsi si p est vraie alors q doit être vraie et donc "$p \Longrightarrow q$"est vraie.

Exemple 1.2.3. *Soient a, $b \geq 0$. Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.*

4- Raisonnement par le contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type "$\forall x \in E\ p(x)$" est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $p(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $p(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous que la négation de "$\forall x \in E\ p(x)$" est "$\exists x \in E\ \overline{p(x)}$". Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion "$\forall x \in E\ p(x)$".

Exemple 1.2.4. *On considère l'assertion "$\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq x$", cette assertion est vraie ou fausse ? justifier.*

5- Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $p(n)$, dépend de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de **l'initialisation** on prouve $p(0)$. Pour l'étape **d'hérédité**, on suppose que $p(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, et on montre alors que $p(n+1)$ au rang suivant est vraie. En fin dans la **conclusion**, on rappelle que par le principe de récurrence $p(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.5. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

Remarque 1.2.1. *Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.*

Chapitre 2

Théorie des ensembles

2.1 Les ensembles

1- Définitions et Propriétés

Définition 2.1.1. *Un ensemble E est par définition une collection d'objets dits éléments de E.*

Exemple 2.1.1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ *sont des ensembles (ils ont d'ailleurs tous les deux la particularité que l'on peut en numéroter les élément), c'est aussi le cas de $\mathbb{Q}$. Les nombres réels forment aussi un ensemble (noté $\mathbb{R}$), mais dont on ne peut cette fois numéroter les éléments.*

Remarque 2.1.1.

1- *Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté ϕ qu'est l'ensemble ne contenant aucun éléments.*

2- *On note $(x \in E)$ si x est un élément de E et $x \notin E$ dans le cas contraire.*

3- *Voici une autre façon de définir des ensembles : Une collection d'éléments qui vérifient une propriété.*

Exemple 2.1.2. $A = \{x \in \mathbb{R},\ \ |x - 2| < 1\}$, $B = \{z \in \mathbb{C},\ \ z^5 = 1\}$.

2- Parties d'un ensemble

L'inclusion $(\subset)$

Soient E, F deux ensembles, si tout élément de E est un élément de F (autrement dire : $\forall x \in E\ x \in F$) on dit alors que E est un sous ensemble de F, ou E est une partie de F. On note $E \subset F$ et on a formellement :

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x(x \in E \Rightarrow x \in F).$$

Quand E n'est pas une partie de F, on note $E \nsubseteq F$ et on a formellement :

$$E \nsubseteq F \Leftrightarrow \exists x((x \in E) \wedge (x \notin F)).$$

L'égalité (=)

On dit que $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$. Formellement

$$E = F \Leftrightarrow (\forall x(x \in E \Leftrightarrow x \in F)) \Leftrightarrow ((E \subset F) \wedge (F \subset E)).$$

L'ensemble des parties de E

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple si $E = \{1, 2, *\}$ $\mathcal{P}(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{*\}, \{1, 2\}, \{1, *\}, \{2, *\}, \{1, 2, *\}\}$.

Définition 2.1.2. (**Partition**) *Une partition d'un ensemble E est un ensemble $\{E_i\}$ de parties de E tel que $E = \underset{i}{\cup} E_i$ et $E_i \underset{i \neq j}{\cap} E_j = \phi$*

Exemple 2.1.3. *Soient $E = \{1, 2, a, b, 3, l, c, 5\}$, alors*

$$E_i = \{\{2, a, b\}, \{1, 3\}, \{l, c, 5\}\},$$

est une partition de l'ensemble E.

3- Opérations sur les ensembles

Le complémentaire

Soient E, A deux ensembles, si $A \subset E$, alors le complémentaire de A dans E est l'ensemble

$$A_E^c = \{x \in A,\ x \notin A\}.$$

On le note aussi $E \setminus A$ et juste C_A s'il n'y a pas d'ambiguïté (et parfois aussi A^c ou $\overline{A}$)

Il est claire que $A \cap A^c = \phi$, et $A \cup A_E^c = E$. Avant de donner un exemple, on remarque que si E est un ensemble alors $\emptyset \subset E$ et $(\forall x \in E, x \notin \emptyset)$, donc : $\emptyset_E^c = E$.

Exemple 2.1.4. *Soient $E = \{1, 2, a, b, 3, f\}$ et $A = \{1, 3, f\}$, alor $A_E^c = \{2, a, b\}$,*

Union, Intersection, Différence symétrique

Soit E un ensemble, pour A, B deux parties de E

1- L'union de A et B est l'ensemble $A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

2- L'intersection de A et B est l'ensemble $A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$.

3- La différence symétrique est l'ensemble $A \triangle B = (A \diagdown B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \diagdown A \cap B$.

Propriété 2.1.1. *Soient A, B, C des parties d'un ensemble E*

1- $A \cap B = B \cap A$,

2- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, *(On peut écrire $A \cap B \cap C$ sans ambiguïté),*

3- $A \cap \phi = \phi$, $A \cap A = A$,

4- $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$,

5- $A \cup \phi = A$, $A \cup A = A$,

6- $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$,

7- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(On peut écrire $A \cup B \cup C$),*

8- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

9- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

10- $(A_E^c)_E^c = A$ *et donc* $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$,

11- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,

12- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Exercice 2.1.1. *Montrer les propriétés (11) et (12)*

Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble définit par

$$E \times F = \{(x, y) x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Exemple 2.1.5. *Soit $A = \{0, 1\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$ alors*

$$A \times B = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}.$$

2.2 Relations binaires

Définition 2.2.1. *On appelle relation binaire, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée. On note $x\mathcal{R}y$ et on lit " x est en relation avec y ".*

Définition 2.2.2. *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, alors :*

1- $\mathcal{R}$ est Réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E\ (x\mathcal{R}x)$,

2- $\mathcal{R}$ est Transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E\ ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z))$,

3- $\mathcal{R}$ est Symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E\ (x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)$,

4- $\mathcal{R}$ est Anti-Symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E\ ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow (x = y))$.

1- Relation d'équivalence

Définition 2.2.3. *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation* ***d'équivalence*** *si elle est Réflexive, Symétrique et Transitive.*

Exemple 2.2.1.

1- La relation $\mathcal{R}$ "d'être paralléle" est une relation d'équivalence pour l'ensemble E des droites affines du plan.

2- La relation " être de même age" sur un ensemble des personnes est une relation d'équivalence.

3- L'égalité est une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E.

La classe d'équivalence

Définition 2.2.4. *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ est le sous ensemble de E définit par*

$$cl(x) = \{y \in E,\ y\mathcal{R}x\}$$

On le note aussi $\overset{o}{x}$ ou bien $\overline{x}$.

Si $y \in cl(x)$, on dit que y un représentant de $cl(x)$.

Proposition 2.2.1. *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On a les propriétés suivantes :*

(i) $cl(x) = cl(y) \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$.

(ii) *Pour tout $x, y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ ou $cl(x) \cap cl(y) = \phi$.*

(iii) *Soit D l'ensemble de représentants de toutes les classes alors les parties $\{cl(x),\ x \in D\}$ constitue une partition de E.*

Exemple 2.2.2. *Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ et donner les classes d'équivalence de x.

Preuve 2.2.1.
a- $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

1- $\mathcal{R}$ est une relation Réflexive, car d'aprés la réflexivité de l'égalité on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = x^2 - 1.$$

Donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.

2- $\mathcal{R}$ est une relation Symétrique, car d'après la symétrie de l'égalité on a :

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1\\ &\Leftrightarrow y^2 - 1 = x^2 - 1 \text{ car l'egalité est symétrique}\\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

Ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.

3- $\mathcal{R}$ est une relation Transitive , car d'après la transitivité de l'égalité on a :

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) &\Rightarrow (x^2 - 1 = y^2 - 1) \wedge (y^2 - 1 = z^2 - 1)\\ &\Rightarrow (x^2 - 1 = z^2 - 1) \text{ car l'egalité est transitive}\\ &\Rightarrow (x\mathcal{R}z)\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \ \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$$

Ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation transitive. De 1,2 et 3, on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

b- Les classes d'équivalence de x
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) &\Leftrightarrow (x^2 - 1 = y^2 - 1)\\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0\\ &\Leftrightarrow (x = y) \vee (x = -y),\end{aligned}$$

donc : $\boldsymbol{cl}(x) = \{x, -x\}$.

2- Relation d'ordre

Définition 2.2.5. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définit sur un ensemble non vide E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation* ***d'ordre*** *si elle est Réflexive, Transitive, et Anti-Symétrique.*

Exemple 2.2.3.

1- $\leq, \geq, =$ *sont des relation d'ordre sur* $\mathbb{R}$ *(et sur* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$*).*

2- $>, <$ *n'en sont pas (manque de réflexivité).*

3- *L'inclusion* $(\subset)$ *est une relation d'ordre sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *l'ensemble des parties de l'ensemble* Ω.

Ordre total. Ordre partiel

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E, on dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre **total** sur E lorsque deux éléments de E sont toujours comparables pour $\mathcal{R}$, c'est à dire : $\forall x, y \in E\ (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$.

Dans le cas contraire, on parle d'ordre *partiel*.

Exemple 2.2.4.

1- $\leq$ *définit un ordre total sur* $\mathbb{R}$ *(et sur* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$*)*

2- $\subset$ *définit un ordre partiel sur* $\mathcal{P}(\Omega)$, *l'ensemble des parties de l'ensemble* Ω.

3- Vocabulaire dans un ensemble ordonné

Soit $\leq$ désigne une relation d'ordre quelconque sur un ensemble E.

Maximum. Minimum

Définition 2.2.6. *Soit A une partie de E s'il existe un élément M de A tel que $\forall x \in A$ $x \leq M$, alors il n'en existe qu'un seul, et on l'appelle le **maximum de A** (ou le plus grand élément de A), noté* $\max A$.

La définition est analogue pour le **minimum** (ou le plus petit élément de A), noté $\min A$.

Exemple 2.2.5. *Pour la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$, $A = \{2, -4, 0, 2, 5, 1\}$*, $\max A = 5$, $\min A = -4$

Attention : Il n' y a pas nécessairement existence!.

Exemple 2.2.6. *Pour la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$, $]0,1[$ et $\mathbb{N}$ n'ont pas de maximum.*

Majorants. Minorants

Définition 2.2.7. *Soit A une partie de E, et soit $m \in E$, on dit que m est un **majorant** de A (dans E) lorsque $\forall x \in A$ $x \leq m$,*

La définition est analogue pour le **minorant**.

Exemple 2.2.7. *Pour la relation $\leq$ dans $\mathbb{Z}$, si $A = \{2, -4, 0, 2, 5, 1\}$, l'ensemble des majorants est $\{5, 6, 7, ...\}$, et l'ensemble des minorants est $\{-4, -5, -6, ...\}$.*

Attention : Il n'y a pas toujours existence, ni unicité !

D'ailleurs, si m majore A, alors tout élément m' de E tel que $m \leq m'$ majore aussi A.

Remarque 2.2.1. *On a l'équivalence :* $\max A = M \Longleftrightarrow M \in A$ *et M majore A*

Définition 2.2.8. ***(Ensemble borné)*** *Une partie A est dite majorée (respectivement, minorée) lorsqu'elle admet au moins un majorant (respectivement, minorant). En fin A est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majoréée et minorée.*

Borne supérieure. Borne inférieure

Définition 2.2.9. *Soit A une partie de E.*

1- *Si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé la **borne supérieure de** A, notée* $\sup A$.

2- *Si A est minorée et si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé la* ***borne inférieure de*** *A, notée* $\inf A$.

Attention : Il n'y a pas toujours existence.

Remarque 2.2.2. *Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et* $\sup A = \max A$.

Exercice 2.2.1. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit A une partie de l'ensemble E. Dans les cas suivants, déterminer, s'il existe,* $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$,

1- $E = \mathbb{R},\ A = \{0, 1, -5, 3, 5, -2\}$,

2- $E = \mathbb{R},\ A = [-4, 2[$,

3- $E = \mathbb{N},\ A = \{0, 1, 5, 3, 6\}$,

4- $E = \mathbb{R},\ A =]-1, 1[$,

5- $E = [-1, 1],\ A = \left\{\cos \frac{7n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

6- $E = \mathbb{R},\ A = \{x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}\}$.

4- L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \geq 2$ un entier. Définissons la relation suivante sur l'ensemble $E = \mathbb{Z}$:

$$a \equiv b(\text{mod} n) \Leftrightarrow a - b \text{ est un multiple de} n$$

Par exemple pour $n = 6$: $26 \equiv 2(\text{mod}6)$, $34 \equiv 4(\text{mod}6)$, $-3 \equiv 21(\text{mod}n)$
Cette relation est une relation équivalence. En effet :

- La relation est réflexive : Soit $a \in \mathbb{Z}, a - a = 0 = 0.n$ est un multiple de n donc $a \equiv a(\text{mod}n)$.
- La relation est symétrique : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, supposons que $a \equiv b(\text{mod}n)$, alors $a - b$ est un multiple de n, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = kn$, et donc $b - a = (-k)n$ et ainsi $b \equiv a(\text{mod}n)$.
- La relation est transitive : Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$, supposons que $\begin{cases} a \equiv b(\text{mod}n) \\ \text{et} \\ b \equiv c(\text{mod}n) \end{cases}$

  Donc il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} a - b = kn \\ \text{et} \\ b - c = k'n \end{cases}$.

  Alors $a - c = (k + k')\, n$ et donc $a \equiv c(\text{mod}n)$.

Les classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$, notée $cl(a)$ ou $\overset{o}{a}$ est :

$$\begin{aligned}\overset{o}{a} &= \{b \in \mathbb{Z},\ b \equiv a(\text{mod}n)\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z},\ b - a = nk \text{ pour certain } k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Alors c'est aussi exactement $\overset{o}{a} = a + n\mathbb{Z} = \{a + nk\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Comme $n \equiv 0(\text{mod}n)$, $n + 1 \equiv 1(\text{mod}n)$, $n + 2 \equiv 2(\text{mod}n)$, ... alors

$$\overset{o}{n} = \overset{o}{0},\ n \overset{o}{+} 1 = \overset{o}{1},\ n \overset{o}{+} 2 = \overset{o}{2}, ...$$

Donc l'ensemble des classes d'équivalence est l'ensemble

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overset{o}{0}, \overset{o}{1}, \overset{o}{2}, ...n \overset{o}{-} 1\right\}$$

qui contient exactement n éléments.
Par exemple : pour $n = 5$. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \left\{\overset{o}{0}, \overset{o}{1}, \overset{o}{2}, \overset{o}{3}, \overset{o}{4}\right\}$ tel que

1- $\overset{o}{0} = 0 + 5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z} = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, ...\}$,

2- $\overset{o}{1} = 1 + 5\mathbb{Z} = \{..., -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, ...\}$,

3- $\overset{o}{2} = 2 + 5\mathbb{Z} = \{..., -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, ...\}$,

4- $\overset{o}{3} = 3 + 5\mathbb{Z} = \{..., -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, ...\}$

5- $\overset{o}{4} = 4 + 5\mathbb{Z} = \{..., -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, ...\}$.

on a trouvé une partition de $\mathbb{Z}$ en 5 parties

Exercice 2.2.2. *On définit sur l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une addition par $\overset{o}{a} + \overset{o}{b} = (a \overset{o}{+} b)$. Calculer la table d'addition dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. (c'est à dire toute les sommes $\overset{o}{a} + \overset{o}{b}$ pour $\overset{o}{a}, \overset{o}{b} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.*
Même chose avec la multiplication $\overset{o}{a} \times \overset{o}{b} = (a \overset{o}{\times} b)$.

Chapitre 3

Les applications

3.1 Généralités

Définition 3.1.1. *Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F, tout correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui à donnée pour chaque élément $x \in E$ un unique élément de F noté $f(x)$, on écrit $f : E \longrightarrow F$.*

1- E est appelé l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée.

2- $y = f(x)$ est appelé image de x et x est un antécédent de y.

3- Une application f entre E et F est aussi représentée par :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Formellement, une correspondance f entre deux ensembles non vides est une application si et seulement si :

$$\forall x \in E : \ x = x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Exemple 3.1.1. *Comme cas particulier L'identité : $Id_E : E \longrightarrow E$ est définie par $Id_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.*

Égalité

Deux applications $f, g : E \longrightarrow F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$ $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

Le graphe

Le graphe d'une application $f : E \longrightarrow F$ est le sous ensemble de $E \times F$ défini par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \ /x \in E, f(x) \in F\}.$$

Composition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est l'application défini par $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$E \xrightarrow{\curvearrowright f} F \xrightarrow{\curvearrowright g} G$$
$$\hookrightarrow_{g \circ f}$$

Exemple 3.1.2.

1- On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc}]-\infty, 0[& \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longrightarrow & f(x) = \frac{-1}{x} \end{array} , \quad g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

alors $g \circ f :]0, +\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie pour tout* $x \in]-\infty, 0[$ *par*

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{-1}{x}}$$

2- On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array} , \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & g(x) = x^3 \end{array}$$

alors

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & f(g(x)) = x^6 \end{array} , \quad g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & g(f(x)) = x^6 \end{array}$$

Il est claire que $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition 3.1.1. *La composition des applications est associative. C'est-à-dire que si* $h : E \to F, g : F \to G$ *et* $f : G \to H$ *sont trois applications, alors* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, *(que l'on note donc simplement* $f \circ g \circ h$*).*

3.2 Restriction et Prolongement d'une application

Définition 3.2.1. *Étant donnée une application* $f : E \to F$.

1- *On appelle* ***restriction*** *de* f *à un sous ensemble non vide* X *de* E, *l'application* $g : X \to F$ *telle que*

$$\forall x \in X, g(x) = f(x)$$

On note $g = f \backslash X$.

2- *Étant donné un ensemble G tel que $E \subset G$, on appelle* ***prolongement*** *de l'application f à l'ensemble G, toute application h de G dans F telle que f est la restriction de h à E.*

D'après cette définition, f est un prolongement de $f \backslash X$ à E.

Remarque 3.2.1. *Si F n'est pas un singleton, alors le prolongement de f n'est pas unique.*

Exemple 3.2.1. *Étant donnée l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\to log\,(x) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to log|x| \end{aligned} \quad et \quad \begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to log(2|x| - x) \end{aligned}$$

sont deux prolongements différents de f à $\mathbb{R}$.

3.3 Image directe et image réciproque

Définition 3.3.1. *Soit $f : E \to F$ une application.*

1- *Si A est une partie de E on appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble :*

$$f(A) = \{y \in F \;\mid\; \exists x \in A, f(x) = y\}$$

ou est l'ensemble des images des éléments de A.

2- *Si B est une partie de F on appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \;\mid\; f(x) \in B\}$$

ou est l'ensemble des antécédents des éléments de B.

Formellement on a :

$$\begin{aligned} \forall y &\in F, y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A, y = f(x) \\ \forall x &\in E, x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B \end{aligned}$$

Proposition 3.3.1. *Soit $f : E \to F$ une application, on a les formules suivantes*

1- *Pour toutes parties A, B de E*

$$\begin{aligned} - \quad & f(A \cup B) && = f(A) \cup f(B) \\ - \quad & f(A \cap B) && = f(A) \cap f(B) \\ - \quad & A \subset B && \Rightarrow f(A) \subset f(B) \end{aligned}$$

2- *Pour toutes parties* A, B *de* F, *on a*

$$\begin{array}{lll} - & f^{-1}(A \cup B) & = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ - & f^{-1}(A \cap B) & = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ - & A \subset B & \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \\ - & f^{-1}(C_F A) & = C_E f^{-1}(A) \end{array}$$

Remarque 3.3.1. *Les ensembles* $C_F f(A)$ *et* $f(C_E A)$ *ne sont pas toujours comparables.*

Exemple 3.3.1. *Soient* $E = \{a, b, c, 4\}, F = \{d, k, 1\}$ *et l'application* $f : E \to F$ *définie par :*

$$f(a) = f(b) = \ell \text{ et } f(c) = f(4) = k$$

On considère l'ensemble $A = \{a, c\}$, *alors*

- $f(A) = \{d, k\}$ *et* $C_F f(A) = \{1\}$

- $C_E A = \{b, 4\}$ *et* $f(C_E A) = \{d, k\}$

donc $C_F f(A) \subsetneq f(C_E A)$ *et* $f(C_E A) \subsetneq C_F f(A)$, *c'est à dire que* $C_F f(A)$ *et* $f(C_E A)$ *ne sont pas comparables dans cet exemple*

Exemple 3.3.2. *Étant donnés* $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$F = \{-1, 0, 1, 2, 4, 5, 9, 10, 16\}$ *et l'application* $f : E \to F$ *définie par :*

$$\forall x \in E, f(x) = x^2$$

On considère l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 4\}$, *alors* $C_E A = \{-3, -2, -1, 3\}$, $f(A) = \{0, 1, 4, 16\}$,$f(C_E A) = \{1, 4, 9\}$ *et* $C_F f(A) = \{-1, 2, 5, 9, 10\}$, *donc* $C_F f(A) \subsetneq f(C_E A)$ *et* $f(C_E A) \subsetneq C_F f(A)$, *c'est à dire que* $C_F f(A)$ *et* $f(C_E A)$ *ne sont pas comparables.*

Mais si on prend $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, *alors :*

$C_E B = \{-3, 4\}, f(B) = \{0, 1, 4\}$, $f(C_E B) = \{9, 16\}$ *et* $C_F f(B) = \{-1, 2, 5, 9, 10, 16\}$ *donc* $f(C_E B) \subset C_F f(B)$.

3.4 Injection, surjection, bijection et réciproque

Soient E, F deux ensembles non vide et $f : E \longrightarrow F$ une application

Définition 3.4.1. (***L'application injective***) *f est injective si pour tout $x, x' \in E$ et $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. Autrement dit*

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow \forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Exemple 3.4.1. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

f *est injective car* $\forall x, x' \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow |x| = |x'| \Rightarrow x = x'$

Exemple 3.4.2. *Les fonctions* $x \to x+2$ *(de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*) et* $x \to log(x)$ *(de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$*) sont injectives mais l'application* $x \to sin(x)$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *n'est pas injectives.*

Définition 3.4.2. (***L'application surjective***) f *est surjective si pour tout* $y \in F$ *il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$*. Autrement dit*

$$f \text{ est surjective } \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

Exemple 3.4.3. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) = x-1 \end{array}$$

one pose $y = f(x) \Rightarrow y = x-1 \Rightarrow x = y+1$*, donc* $\exists x = y+1 \in \mathbb{R} : y = f(x) = x-1$

Alors f *est surjective.*

Remarque 3.4.1.

1- f *est surjective si et seulement si* $F = f(E)$*.*

2- f *est injective si et seulement si* $f : E \to f(E)$ *est une injection.*

Définition 3.4.3. (***L'application bijective***) *Une application* $f : E \to F$ *est bijective si elle est à la fois injective et surjective. En d'autres termes tout élément de* F *a exactement un antécédent. tel que* $y = f(x)$*. Autrement dit*

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x)$$

Exemple 3.4.4. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

f *n'est pas bijective car* f *n'est pas injective.*

Exemple 3.4.5. *L'application* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *donnée par* $x \to x+2$ *est une bijection, de même la fonction* $x \to log(x)$ *est une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$*dans* $\mathbb{R}$*.*

Définition 3.4.4. (***L'application réciproque***) *$f : E \to F$ une application bijective . Alors il existe $g : F \to E$ une application telle que $f \circ g = Id_E$.*

Donc on dit que f est inversible et g notée f^{-1} et appelé l'application réciproque de f.

Remarque 3.4.2.

1- *L'application réciproque est unique*

2- *L'application réciproque existe si est seulement si f est bijective*

3- *Si f^{-1} l'inverse de f. Alors $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Exemple 3.4.6.

1- *La bijection réciproque de $x \to x + 2$ est donnée par $x \to x - 2$.*

2- *La bijection réciproque de $x \to log(x)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction $x \to exp(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.*

3- *La symétrie par rapport à un point du plan est sa propre bijection réciproque.*

Exemple 3.4.7. *On considère l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}-2 & \longrightarrow & F \\ & x & \longrightarrow & f(x) = \frac{x+5}{x-2} \end{array}$$

avec F un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

- *Déterminer F pour que l'application f soit bijective et donner l'application inverse de f.*

- *Montrer que f est bijective revient à examiner l'existence de solution de l'équation $y = f(x)$, pour tout $y \in F$.*

Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x+5}{x-2} \\ &\Leftrightarrow y(x-2) = x+5 \\ &\Leftrightarrow yx - x = 5 + 2y \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = 5 + 2y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5+2y}{y-1} \text{ si } y \neq 1. \end{aligned}$$

Ce qui montre que :

$$\forall y \in \mathbb{R} - 1, \exists! x = \frac{5+2y}{y-1};\ \ y = f(x)$$

pour montrer que f est bijective, il reste à voir si $x = \frac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R} - 2\,?$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{5+2y}{y-1} = 2 \ &\Longleftrightarrow 5 + 2y = 2(y-1) \\ &\Longleftrightarrow 5 = -2 \end{aligned}$$

ce qui est impossible ce qui montre que $\frac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R} - 2$, par suite :

$$\forall y \in \mathbb{R} - 1, \exists! x = \frac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R} - 2; y = f(x)$$

donc f est bijective si $F = \mathbb{R} - 1$ et l'inverse de f est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - 1 \ &\longrightarrow \mathbb{R} - 2 \\ y \qquad &\longrightarrow \frac{5+2y}{y-1} \end{aligned}$$

Proposition 3.4.1. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors*

1- *f injective et g injective $\Rightarrow g \circ f$ injective .*

2- *f surjective et g surjective $\Rightarrow g \circ f$ surjective .*

3- *f bijective et g bijective $\Rightarrow g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Proposition 3.4.2. *Étant données deux applications $f : E \to F$ et $g : F' \to G$, telles que $F \subset F'$, alors :*

1- *$g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective*

2- *$g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.*

3- *Si $f(E) = F'$, alors $g \circ f$ injective $\Rightarrow g$ injective.*

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 Limites des fonctions

Rappels de vocabulaire

Définition 4.1.1. *On appelle fonction de E dans F, toute application f d'un sous ensemble $D_f \subset E$ dans F. D_f est appelé "Ensemble de définition de f".*

Proposition 4.1.1. *Toutes les notions données pour les applications peuvent être adaptées pour les fonctions.*

Dans ce chapitre on ne s'intéresse qu'à des fonctions numériques à variable réelle, c'est-à-dire des fonctions définies sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit donc $f : I \to \mathbb{R}$

- On dit que f est une fonction paire ssi : $\forall x \in I, \forall -x \in I : f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est une fonction impaire ssi : $\forall x \in I, \forall -x \in I : f(-x) = -f(x)$.
- On dit que f est une fonction périodique de période T si f est définie sur $\mathbb{R}$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

Soit J un intervalle contenu dans I.

- On dit que f est croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle J ssi :

$$\forall (x_1, x_2) \in J^2, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) (resp. x_1 \geq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

- On dit que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur l'intervalle J ssi :

$$\forall (x_1, x_2) \in J^2, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) (resp. x_1 > x_2 : f(x_1) > f(x_2))$$

- On dit que f est monotone (resp. strictement monotone) sur J ssi f est croissante ou décroissante sur J (resp. f est strictement croissante ou strictement décroissante sur J).
- On dit que f est majorée par M (resp. minorée par m) sur J ssi

$$\forall x \in J, f(x) \leq M \quad (resp. f(x) \geq m)$$

- On dit que f est bornée ssi J si f est majorée et minorée sur J.

Limites des fonctions

1- Limite finie à l'infini

Définition 4.1.2. *Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand - c'est à dire pour les x d'un intervalle $]A, +\infty[$. On note alors :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f(x) = \ell$$

La droite Δ d'équation $y = \ell$ est dite asymptote horizontale à Γ_f

Remarque 4.1.1. *On définit de façon analogue*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f(x) = \ell$$

Exemple 4.1.1. *Les fonctions de référence : $x \to \frac{1}{x}, x \to \frac{1}{x^n}$ et $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ ont des limites nulles en $+\infty$ et $-\infty$ pour les deux premières. Leurs courbes admettent alors l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.*

2- Limite infinie à l'infini

Définition 4.1.3. *Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand - c'est à dire pour les x d'un intervalle $]A, +\infty[$. On note alors :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque 4.1.2. *Cela implique que la fonction f n'est pas majorée*

1- *On définit de façon analogue* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2- *Ainsi que :* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple 4.1.2.

1- *Les fonctions de référence : $x \to x, x \to x^n$ et $x \to \sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.*

2- *La fonction de référence : $x \to x^n$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si n est pair et $-\infty$ en $-\infty$ si n est impair.*

3- Limite infinie en un point

Définition 4.1.4. *Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a, signifie que tout intervalle $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a - c'est à dire pour les x d'un intervalle ouvert contenant a. On note alors :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{a} f(x) = +\infty$$

La droite Δ d'équation $x = a$ est dite asymptote verticale à Γ_f

Remarque 4.1.3. *On définit de façon analogue $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$*

4- Limite gouache et droite

Définition 4.1.5. *On défini la limite à gauche ou à droite de $x = a$ lorsque la limite en $x = a$ n'existe pas. On notera alors :*

1- *limite à gauche :* $\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

2- *limite à droite :* $\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Exemple 4.1.3. *La fonction $x \to \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, mais admet une limite à gauche $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et à droite $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$*

Proposition 4.1.2. *Si une fonction admet une limite alors cette limite est unique.*

Limites des fonctions élémentaires

1- Limites en 0

$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

2- Limites en l'infini

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair -∞ si n impair	0	non défini	non défini

Opérations sur les limites

1- Somme de fonctions

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.Ind$

Exemple 4.1.4.

1- *Limite en* $+\infty$ *de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \textit{Par somme} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2- *Limite en* $+\infty$ *et* -∞ *de la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = 0\end{array}\right\} \textit{Par somme} \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\textit{Par somme, on ne peut conclure} \\ \textit{Forme indéterminée :} +\infty-\infty.\end{array}$$

2- Produit de fonctions

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
$\lim g$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim f \times g$	$\ell \times \ell'$	$(\pm)\infty$	$F.Ind$	$(\pm)\infty$

Exemple 4.1.5.

1- *Limite en* $-\infty$ *de la fonction précédente :* $f(x) = x^2 + x$

Pour lever la forme indéterminée, on change la forme de $f(x)$.

$$f(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On a alors avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \textit{Par produit} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2- *Limite en* $+\infty$ *de la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par :* $f(x) = x - \sqrt{x}$

On ne peut résoudre par la somme car c'est une forme indéterminée, on change alors la forme de

$$f(x) = x - \sqrt{x} = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \end{array}\right\} \textit{Par produit} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3- *Limite à droite de* 0 *de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{Par produit, on ne peut conclure} \\ \textit{Forme indéterminée } 0 \times \infty \end{array}$$

3- Quotient de fonctions

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'	∞
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$(\pm)\,\infty$	$F.Ind$	0	$(\pm)\,\infty$	$F.Ind$

Exemple 4.1.6.

1- *Limite en -2 de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. On a le tableau de signes de $x+2$:*

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	$\|$	$+$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2} 2x-1 = -5 \\ \lim\limits_{x \overset{x>-2}{\to} 0} x+2 = 0^{+} \\ \lim\limits_{x \overset{x<-2}{\to} -2} x+2 = 0^{-} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{Par quotient} \\ \lim\limits_{x \overset{x>-2}{\to} 0} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{x<-2}{\to} -2} f(x) = +\infty \end{array}$$

On en déduit alors une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

2- *Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$*

Comme le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini en $+\infty$, nous avons une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Il faut donc changer la forme de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{2}{x} = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{3} \end{array}$$

4- Limite d'une fonction composée

Théorème 4.1.1. *Soit deux fonctions f, g. Soient a, b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = c$.*

Exemple 4.1.7. *Déterminer les limites suivantes :*

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ *avec* $h(x) = \sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$

on pose $f(x) = 2+\frac{1}{x^2}$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$. *Ona alors :* $h(x) = g[f(x)]$. *On calcule alors les limites*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+2} \sqrt{x} = \sqrt{2}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\textit{Par composition, ona} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \sqrt{2}\end{array}$$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ *avec* $k(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

on pose $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *et* $g(x) = \cos(x)$. *On a alors :* $k(x) = g[f(x)]$. *On calcule alors les limites*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+2} \cos x = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\textit{Par composition, on a} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 1\end{array}$$

6- Théorèmes de comparaison

Théorème 4.1.2. *$f, g,$ et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]b, +\infty[$ et ℓ un réel.*

1- *Théorème des "Gendarmes "*

Si pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell \textit{ alors } \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$$

2- *Théorème de comparaison*

Si pour tout $x \in I$ on a : $f(x) > g(x)$ et si :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \textit{ alors } \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Remarque 4.1.4. *Énoncés analogues en $-\infty$ avec $I =]-\infty, b[$ et en un réel a avec I un intervalle ouvert contenant a.*

Exemple 4.1.8.

1- *Déterminer la limite de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ en $+\infty$*

Pour tout x positif, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc :

$$\forall x > 0 : -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

or on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

D'après le théorème des Gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sin x}{x} = 0$

2- *Déterminer la limite de* $g(x) = x + \cos x$ *en* $+\infty$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\ \cos x > -1$, *donc :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + \cos x > x - 1$$

or on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$

donc d'après le théorème de comparaison, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos x = +\infty$

4.2 Continuité des fonctions

Continuité en un point

Définition 4.2.1. *Soit une fonction* f *définie sur un intervalle ouvert* I. *Soit* a *un élément de* I. *On dit que la fonction* f *est continue en* a *si et seulement si :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f *est continue sur un intervalle* I *si, et seulement si,* f *est continue en tout point de* I.

Exemple 4.2.1.

1- *La fonction partie entière* E *est alors définie par :* $E(x) = n$

$E(2,3) = 2; E(5) = 5; E(-2,3) = -2$

On observe alors un "saut" de la fonction pour chaque entier. La fonction partie entière n'est donc pas continue pour x *entier*

2- *Soit la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

La fonction f *n'est pas continue en* 0 *bien qu'on n'observe ici aucun "saut". La fonction oscille de plus en plus autour de* 0 *si bien qu'au voisinage de* 0, *la fonction tend vers une oscillation infinie qui explique la non continuité.*

3- $g(x) = \frac{1}{x+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$

4- $h(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + 2$ *n'est pas continue en* 0 *car* $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ *n'exist pas*

5- *Soit la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}.$$

La fonction f est-elle continue en 0 ?
On remarque tout d'abord que $f(0) = 0$ et que la fonction f est définie de deux façons différentes autour de 0. On ne peut pas calculer tout simplement $\lim_{x\to 0} f(x)$ mais il faut faut distinguer limite à droite et limite à gauche. D'une part, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$.
D'autre part, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par composition de limite.
Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, et on peut donc conclure que f est continue en 0.

Continuité des fonctions usuelles

Proposition 4.2.1.

1- *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.*

2- *La fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$*

3- *La fonction valeur absolue $x \to |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

4- *La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$*

5- *Les fonctions $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$*

6- *D'une façon générale, toutes fonctions construites par opération ou par composition à partir des fonctions ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition, en particulier les fonctions rationnelles*

Proposition 4.2.2. *Soient $f, g : I \to R$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors*

- *λf est continue en x_0 (pour tout¸ $\lambda \in \mathbb{R}$),*
- *$f + g$ est continue en x_0,*
- *$f \times g$ est continue en x_0,*
- *si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$est continue en x_0.*

Proposition 4.2.3. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Prolongement par continuité

Définition 4.2.2. *Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I - x_0 \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim_{x_0} f$.*

On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ \ell & si\ x = x_0 \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 4.2.2. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$*

Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.2.1. *(Théorème des valeurs intermédiaires).*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Théorème 4.2.2. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.*

Un conséquence très intéressante de ce théorème est le théorème suivant :

Théorème 4.2.3. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 4.2.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Corollaire 4.2.2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$.

Exemple 4.2.3. *Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.*

4.3 Dérivabilité des fonctions

Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 4.3.1. *La fonction f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. et on a*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Définition 4.3.2. *La fonction $f$est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \to f'(x)$ est la fonction dérivée de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.*

Remarque 4.3.1. *Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0.*

Exemple 4.3.1. *La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x + x_0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 2x_0$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

Exemple 4.3.2. *Montrons que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes :*

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \quad et \ \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

remarquons déjà que la première assertion prouve $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1$.

Pour x_0 quelconque on écrit :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\frac{x+x_0}{2}$$

Lorsque $x \to x_0$ alors d'une part $\cos\frac{x+x_0}{2} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \cos x_0$ et d'autre part en posant $u = \frac{x-x_0}{2}$ alors $u \to 0$ et on a $\frac{\sin u}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$. Ainsi $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \cos x_0$ et donc $f'(x) = \cos x$.

Exemple 4.3.3. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

On a ici $f(0) = 0$, donc, pour $x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$

Grâce aux croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to x_0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

Donc f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 4.3.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 (resp. dérivable à droite en x_0) si la fonction $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à gauche en x_0 (resp. une limite à droite en x_0). Cela équivaut aussi à dire que la restriction de f à $]-\infty; x_0]$ (resp. à $]x_0; +\infty[$) est dérivable en x_0. On note $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ les dérivées à gauche et à droite en x_0.*

Exemple 4.3.4. *La fonction $x \to |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.*

Proposition 4.3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ tel qu'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans I. Alors f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

Exemple 4.3.5. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & si\ \ x > 0 \\ 0 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

f est-elle dérivable en 0 ?

On a ici $f(0) = 0$. Comme f n'est pas définie de la même façon à droite et à gauche de 0 il faut ici se servir de la proposition ci dessus et donc on va s'intéresser à la dérivabilité à droite puis à gauche.

- *Si $x < 0, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = 0$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.*
- *Si $x > 0, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = x \ln x$. Or on sait que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et on a $f'_d(0) = 0$*
- *On a donc que f est dérivable à droite et à gauche et $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ donc (grâce â la proposition ci dessus) f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.*

Dérivées et sens de variation

Théorème 4.3.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :*

- *La fonction f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I.*

- *La fonction f est décroissante sur I ssi $f' \leq 0$ sur I.*

- *La fonction f est constante sur I ssi $f' = 0$ sur I.*

Proposition 4.3.2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I ssi $f' > 0$ (resp.$f' < 0$) sur I et il n'existe aucun intervalle non réduit à un point tel que $f' = 0$ sur cet intervalle.*

Tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. À la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

Proposition 4.3.3. *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*

Proposition 4.3.4. *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

2- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Remarque 4.3.2. *La réciproque est fausse :*

Exemple 4.3.6. *La fonction valeur absolue $|x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*

En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \ si \ x > 0 \\ -1 \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut $+1$), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Cela se lit aussi sur le dessin il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche mais elles ont des directions différentes.

Calcul des dérivées

1- Somme, produit,...

Proposition 4.3.5. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:*

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où¸ est λ un réel fixé,*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$,
- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *si* $f(x) \neq 0$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$ *si* $g(x) \neq 0$

2- Composition

Proposition 4.3.6. *Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

Exemple 4.3.7. *Calculons la dérivée de* $\ln(1+x^2)$. *Nous avons* $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *; et* $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$. *Alors la dérivée de* $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$ *est*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) = g'(1+x^2).2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

Corollaire 4.3.1. *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Remarque 4.3.3. *On voit ici que f' et $(f^{-1})'$ ont donc le même signe.*

Exemple 4.3.8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *définie par* $f(x) = e^x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et bijection

$f' = e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$,

$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ define par $f^{-1}(x) = \ln(x-1)$

donc $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x-1)}} = \frac{1}{x-1}$.

Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant), u représente une fonction $x \to f(x)$.

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
n^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	f^n	$nf'f^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
e^x	e^x	e^f	$f'e^f$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln f$	$\frac{f'}{f}$
$\cos x =$	$-\sin x$	$\cos f =$	$-f' \sin f$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f$	$f' \cos f$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$f'\left(1 + \tan^2 x\right) = \frac{f'}{\cos^2 x}$

Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f . Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Théorème 4.3.2. ***Formule de Leibniz***

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}g + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f^{(n-1)}g^{(1)} + ... + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}g^{(k)} + ... + fg^{(n)}$$

Autrement dit :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}g^{(k)}$$

Exemple 4.3.9.

1- *Pour* $n = 1$ *on retrouve* $(f.g)' = f'g + fg'$.

2- *Pour* $n = 2$, *on a* $(f.g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

Exemple 4.3.10. *Calculons les dérivées n-ième de* $e^x.(x^2 + 1)$ *pour tout* $n \geq 0$. *Notons* $f(x)$=e^x *alors* $f^{(1)}(x) = e^x$, $f^{(2)}(x) = e^x$,..., $f^{(k)}(x) = e^x$. *Notons* $g(x) = x^2 + 1$ *alors* $g^{(1)}(x) = 2x$, $g^{(2)}(x) = 2$ *et pour* $k \geq 3$, $g^{(k)}(x) = 0$.

Appliquons la formule de Leibniz :

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}g + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f^{(n-1)}g^{(1)} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} f^{(n-2)}g^{(2)} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} f^{(n-3)}g^{(3)} + ..$$

On remplace $f^{(k)}(x) = e^x$ *et on sait que* $g^{(3)}(x), g^{(4)}(x) = 0, ...$ *Donc cette somme ne contient que les trois premiers termes :*

$$(f.g)^{(n)} = e^x \left(x^2 + 1\right) + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} e^x.2x + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} e^x.2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} e^x.0 + ..$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$(f.g)^{(n)} = e^x. \left(x^2 + 2nx + \frac{n\,(n-1)}{2} + 1\right)$$

Théorème de Rolle

Théorème 4.3.3. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

- f *est continue sur* $[a, b]$,

- f*est dérivable sur* $]a, b[$,

- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Exemple 4.3.11. *soit* $f(x) = \cos x$ *sur l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ona $\cos\pi = \cos(-\pi) = 0$. f *est continue sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, f*est dérivable sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *doc il existe* $c \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Inégalité des accroissements finis

Théorème 4.3.4. *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$ *et soit* f *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$.

- *S'il existe m et M deux réels tels que $\forall x \in]a,b[$, $m \leq f'(x) \leq M$ alors*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

- *S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \leq k$ alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq k\,|b-a|$$

On utilisera principalement cette inégalité dans l'étude des suites récurrentes.

Exemple 4.3.12. *Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\sin x \text{-} \sin y| \leq |x-y|$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|$$

ce qui est particulièrement intéressant pour x proche de 0.

Théorème 4.3.5. *Soient I un intervalle et $a \in I$. Si f est continue sur I, dérivable sur $I - a$ et si f' admet une limite finie ℓ en a, alors f est dérivable sur I et $f'(a) = \ell$.*

Exemple 4.3.13. *Montrer que la fonction f définie par*
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ *est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.*

- *les fonctions $x \to \frac{1}{x}$ et $e^{-\frac{1}{x}}e$ sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et sur $\mathbb{R}$ donc par composition et produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*
  De plus pour tout $x \neq 0$, $f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}$
- *On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.*
- *Grâce aux croissances comparées, on a si $x \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+,} f'(x) = 0$*
- *D'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = 0$.*

Règle de l'Hospital

Corollaire 4.3.2. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

- *$f(x_0) = g(x_0) = 0$,*

- $\forall x \in I - x_0 \quad g'(x) \neq 0.$

$$Si \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad alors \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (\ell \text{ fini où égal à } \infty)$$

dans les cas suivants :

- $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \lim_{x \to x_0} g'(x) = 0$ *Indétermination de la forme* $\frac{0}{0}$
- $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \lim_{x \to x_0} g'(x) = \infty$ *Indétermination de la forme* $\frac{\infty}{\infty}$

Exemple 4.3.14. *Calculer la limite en 1 de* $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln x}$.

On vérifie que :

– $f(x) = \ln(x^2 + x - 1), f(1) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$

– $g(x) = \ln(x), g(1) = 0, g'(x) = \frac{1}{x}$

– *Prenons* $I =]0, 1], x_0 = 1$, *alors* g' *ne s'annule pas sur* $I \setminus \{x0\}$.

donc

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} = 3$$

Alors

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln x} = 3$$

Exemple 4.3.15. *Calculer la limite en* $\frac{\pi}{2}$ *de* $\frac{2x-\pi}{\cos^2 x}$.

Les formes d'indétermination suivantes seront étudiées dans les exemples qui suivent :

- **Forme indéterminée 0**$.\infty$: Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ On écrire dans ce cas le produit $f(x).g(x)$ sous la forme d'un quotient, à savoir

$$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ou } \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

- **Forme indéterminée** $\infty - \infty$: Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ La différence $f(x) - g(x)$ peut s'exprimer sous la forme

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x).g(x)}}$$

on se ramème ainsi à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$

- **Forme indéterminée** $\mathbf{1}^\infty, \infty^0, 0^0$ On se ramème aux cas précédent en écrivant

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Exemple 4.3.16. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan(x)$

Chapitre 5

Les fonctions réciproques

5.1 La fonction exponentielle

Problème à résoudre

On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & 1 \\ f' & = & f \end{array}\right.$

Définition 5.1.1. *Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$. Cette fonction est appelée exponentielle et notée* exp *ou e.*

Propriété 5.1.1.

1- *La fonction e est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$.*

2- $e^0 = 1$

3- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$*

4- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$*

5- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$*

6- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$*

7- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$*

Propriété 5.1.2. *La fonction e est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 5.1.3.

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

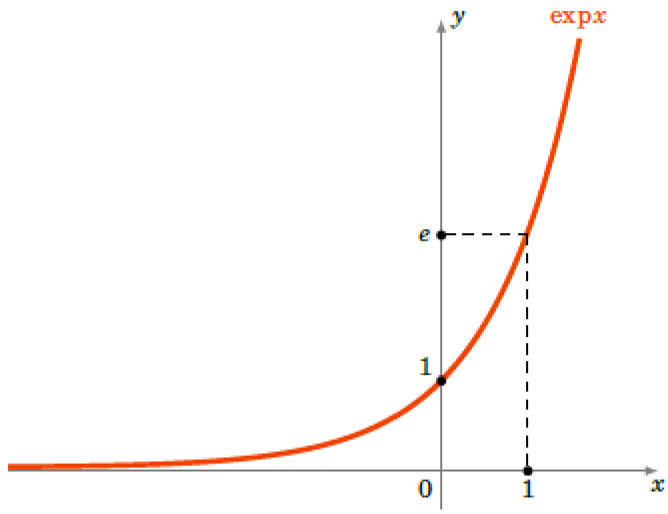
3- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.*

Tableau de variation fonction exponentielle

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $y = 0$ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

Le graphe de la fonction exponentielle est donné ci-contre



5.2 Fonction logarithme

Exercice 5.2.1.

1- *Résoudre les équation :* $e^x = 1, e^x = e, e^x = \frac{1}{e}$

2- *Montrer que pour tout réel* λ*, l'équation* $e^x = \lambda$ *admet une unique solution*

Définition 5.2.1. *La fonction logarithme népérien, notée* $\ln$*, est la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ *qui à tout réel* $x > 0$ *associe le réel* x*, dont l'exponentielle est* x*.*

Proposition 5.2.1.

1- *Pour tout réel* $x > 0$ *et tout réel* y*,* $x = e^y$ *équivaut à* $y = \ln(x)$*.*

2- *Pour tout réel* $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

3- *Pour tout réel* x, $\ln(e^x) = x$.

Corollaire 5.2.1.

1- $\ln(1)$ *est le nombre dont l'exponentielle vaut* 1*, donc* $\ln(1) = 0$.

2- $\ln(e)$ *est le nombre dont l'exponentielle vaut* e*, donc* $\ln(e) = 1$.

3- *Pour tout réel* λ*, l'équation* $\ln(x) = \lambda$ *admet pour unique solution* $x = e^{\lambda}$.

Proposition 5.2.2. *Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = x$ *(première bissectrice).*

Théorème 5.2.1. *Pour tous réel* a *et* b *de* $\mathbb{R}_+^*$ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration 5.2.1. *Soit :*$a > 0$ *et* $b > 0$*, alors*

$$e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = ab \quad \text{et} \quad e^{\ln(ab)} = ab$$

On en déduit que $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(ab)}$*, et donc, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, que* $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

Propriété 5.2.1.
Pour tous réels $a > 0$ *et* $b > 0$, $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$*, et,* $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

Démonstration 5.2.2.

- *Pour tous réels* $a > 0$, $\ln(a\frac{1}{a}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) = \ln(1) = 0$*, d'où,* $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.
- *Pour tous réels* $a > 0$ *et* $b > 0$, $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a\frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

Propriété 5.2.2. *Pour tous réels* $a > 0$ *,* $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$,

Démonstration 5.2.3. *Pour tous* $a > 0$, $\ln(\sqrt{a})^2 = 2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$*, d'où la propriété.*

Remarque 5.2.1. *Pour tout réel* $a > 0$, $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{\frac{1}{2}})$*, d'où la notation* $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Propriété 5.2.3.

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, *et plus généralement, pour tout entier* n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

2- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Propriété 5.2.4. *La fonction* ln *est continue et dérivable sur* $]0;+\infty[$, *et pour tout* $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Corollaire 5.2.2.

1- $0 < a < b \iff \ln a < \ln b$, *car* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2- *Comme* $\ln(1) = 0$, *on a donc,* $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$ *et* $\ln x > 0 \iff x > 1$,

3- *Pour tout fonction* f *dérivable sur un intervalle* I *telle que* $f > 0$ *on a :* $\Big(\ln(f)\Big)' = \dfrac{f'}{f}$,

4- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$,

5- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

Corollaire 5.2.3.

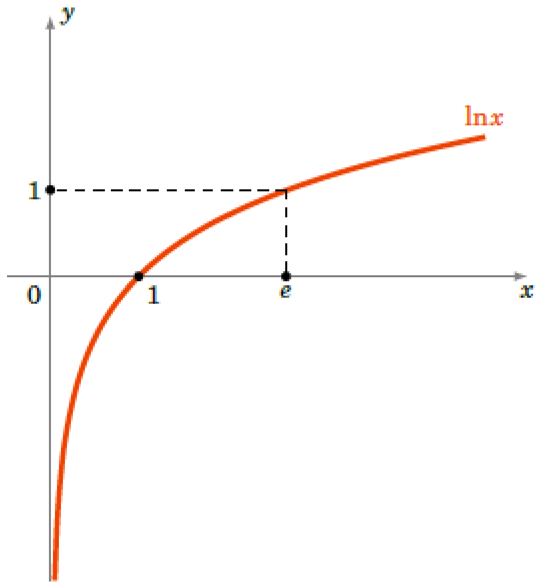
1- *La fonction* ln *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2- *La courbe représentative de la fonction* ln *admet l'axe des ordonnées comme asymptote en* 0^+.

Tableau de variation de fonction logarithme

x	0	$+\infty$
$(\ln)'$	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de la fonction ln est donné ci-contre



5.3 Fonctions circulaires inverses

Fonction arc cosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1], x \to \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1],$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arc cosinus :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

est continue dérivable. On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\begin{aligned} \cos(\arccos(x)) &= x \qquad \forall x \in [-1,1] \\ \arccos(\cos(x)) &= x \qquad \forall x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\text{Si } x \in [0,\pi] \qquad \cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos y,$$

donc

$$\arccos(-1) = \pi, \arccos(1) = 0, \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

La dérivée de arccos :

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Démonstration 5.3.1. *On démarre de l'égalité* $\cos(\arccos x) = x$ *que l'on dérive :*

$$\begin{aligned}\cos(\arccos x) &= x\\ &\Rightarrow -\arccos' x \times \sin(\arccos x) = 1\\ &\Rightarrow \arccos' x = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}\\ &\Rightarrow \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \ldots\ldots. (*)\\ &\Rightarrow \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

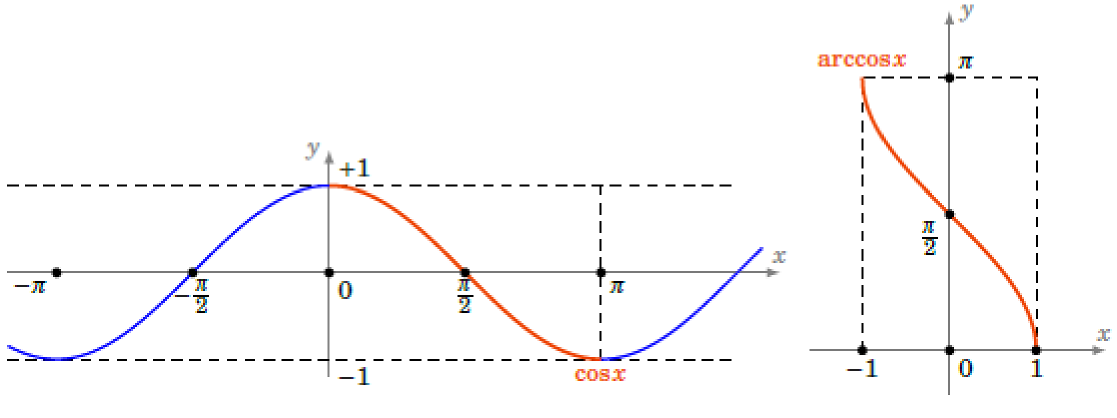
Le point crucial $(*)$ se justifie ainsi : on démarre de l'égalité $\cos^2 y + \sin^2 y$=1, en substituant $y = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x)$+$\sin^2 2(\arccos x) = 1$ donc x^2+$sin^2(arccosx) = 1$. On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}$ (avec le signe + car $\arccos x \in [0, \pi]$).

La fonction dérivée $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$, $\forall x \in]-1, 1[$ donc $\arccos x$ est strictement décroissante sur $[-1, 1]$

Tableau de variation

x	-1	$+1$
$arccos'(x)$	$-$	
$arccos(x)$	π $\searrow$	0

Le graphe de la fonction arccos est donné ci-contre



fonction arc sinus

Considérons la fonction cosinus $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1], x \to \sin x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de sinus à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sur cet intervalle la fonction sinus est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\sin : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1],$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arc cosinus :

$$\arcsin : [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

est continue dérivable et impair.

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\begin{array}{rcll} \sin(\arcsin(x)) & = & x & \forall x \in [-1,1] \\ \arcsin(\sin(x)) & = & x & \forall x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}$$

Autrement dit :

$$\text{Si } x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

Donc

$$\arcsin(-1) = \frac{-\pi}{2}, \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}, \arcsin(0) = 0$$

Nous utilisons les mêmes étapes pour calculer la dérivée de la fonction arccos pour trouver la dérivée arcsin.

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[\,.$$

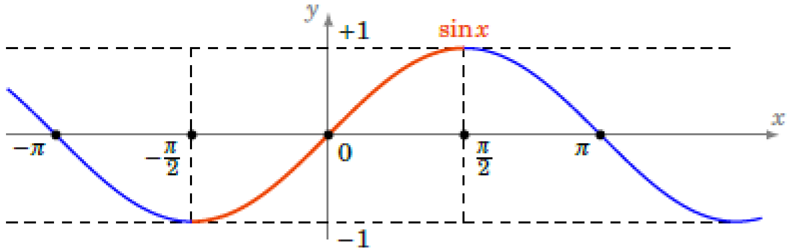
La fonction dérivée $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0, \forall x \in]-1,1[$ donc $\arcsin(x)$ est strictement croissante sur $[-1,1]$.

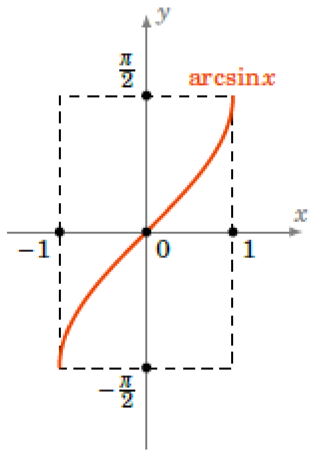
Tableau de variation

x	-1	$+1$
$arcsin'(x)$	$+$	
$arcsin(x)$	$\frac{-\pi}{2}$ $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

La fonction arcsin est impair donc la courbe est symétrique par rapport le point $(0,0)$ sur $[-1,1]$.

Le graphe de la fonction arcsin est donné ci-contre





Fonction arc tangente

Considérons la fonction tangente tan : $\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}^*\right\}\to\mathbb{R}, x\to\sin x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de tenante à l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle la fonction tangente est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\tan:\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R},$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arc tangente :

$$\arctan:\mathbb{R}\to\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,$$

est continue dérivable et impaire. On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\begin{array}{rcll}\tan(\arctan(x)) & = & x & \forall x\in\mathbb{R}\\ \arctan(\tan(x)) & = & x & \forall x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.\end{array}$$

Autrement dit :

$$\text{Si } x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \tan(x)=y\Leftrightarrow x=\arctan y.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan(x)=\frac{-\pi}{2},\quad \arctan(0)=0.$$

La courbe admet les asymptotes d'équation

$$y = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{2}.$$

Et comme fonction arctan est impair alors la courbe est symétrique par rapport le point $(0, 0)$ sur $[-1, 1]$ Même chose pour trouver la dérivée de arctan en utilisons les mêmes étapes pour calculer la dérivée de la fonction arccos.

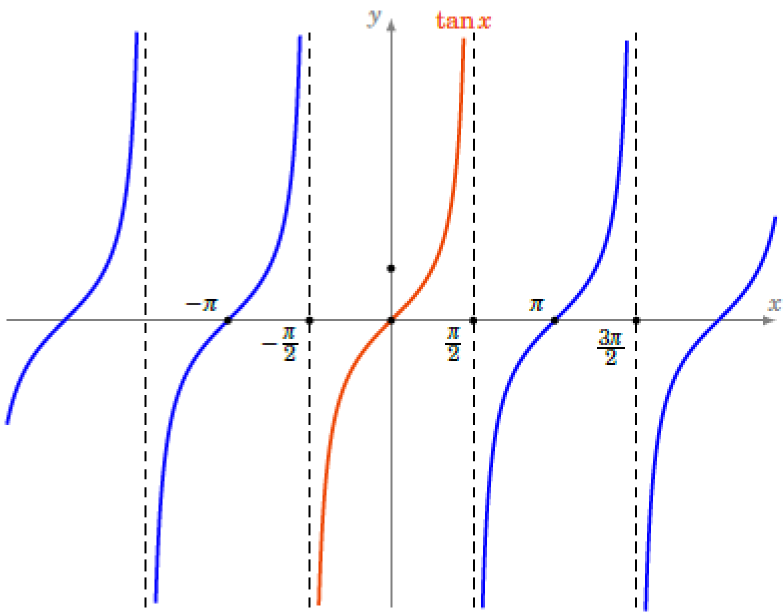
$$\arctan' x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

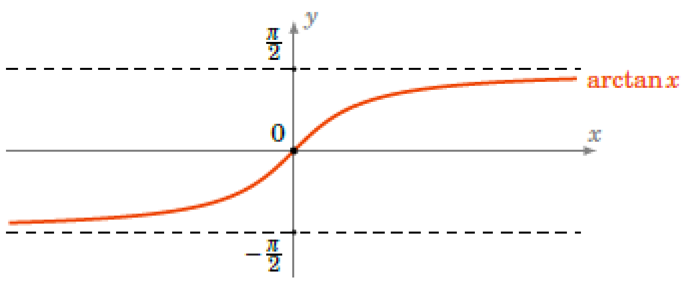
La fonction dérivée $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} > 0, \forall x \in]-1, 1[$ donc $\arcsin(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$arctan'(x)$	$+$	
$arctan(x)$	$\frac{-\pi}{2}$ $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Le graphe de la fonction arctan est donné ci-contre





5.4 Fonctions hyperbolique directes

Fonctions $\cosh, \sinh$ **et** $\tanh$

Définition 5.4.1. *Les* ***fonctions hyperboliques*** *se définissent à partir de la fonction exponentielle comme suit :*

$$\cosh x = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\textbf{\textit{Cosinus hyperbolique}} \textit{ notée } \mathrm{ch} \textit{ ou } \cosh)$$
$$\sinh x = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\textbf{\textit{Sinus hyperbolique}} \textit{ notée } \mathrm{sh} \textit{ ou } \sinh)$$
$$\tanh x = thx = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (\textbf{\textit{Tangente hyperbolique}} \textit{ notée } \mathrm{th} \textit{ ou } \tanh)$$

Ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Propriété 5.4.1.

1- *La fonction* $\cosh$ *est paire et les fonctions* $\sinh$ *et* $\tanh$ *sont impaires.*
2- *De par leur définition et les propriétés de la fonction exponentielle, ces trois fonction sont fonctions continues dérivables.*
3- *Les dérivées sont simples à calculer en utilisant la définition de chacune des fonctions : pour tout x réel, on a*

$$\boxed{\cosh'(x) = \sinh x \qquad \sinh'(x) = \cosh x}$$

$$\boxed{\tanh'(x) = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}}$$

4- *Quelques limites importantes :*

$\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cosh x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sinh x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = 1$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sinh x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\tanh x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{\cosh x - 1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

5- On note que

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$$
$$\cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$$
$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 + (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2 = \cosh(2x)$$

et que cette écriture correspond à l'unique décomposition de la fonction exponentielle comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Représentations graphiques

Graphe de sinus hyperbolique "sinh"

La fonction sinh est impaire. Il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$. la courbe est symétrique par rapport $(0, 0)$.

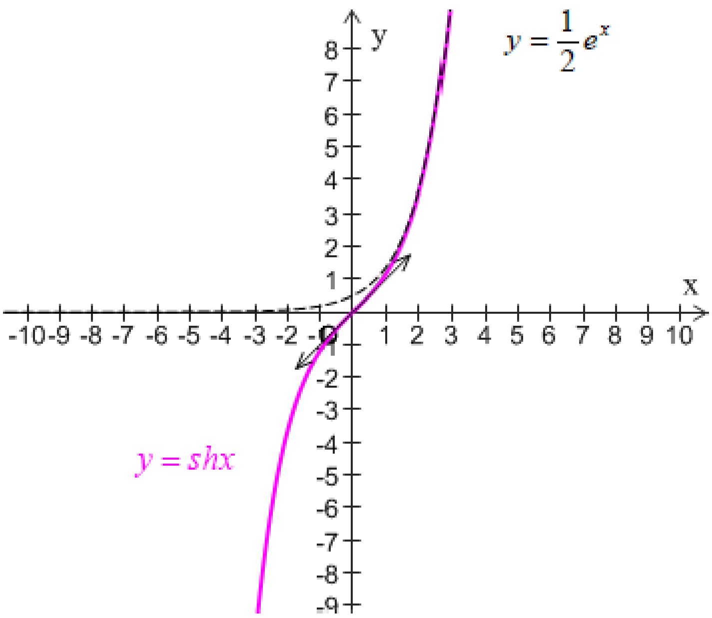
La dérivée de la fonction sinh est la fonction $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ donc est toujours strictement positive. On en déduit que la fonction sinh est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

D'autre part, la courbe représentative de la fonction sinh admet une branche parabolique de direction asymptotique $(y'Oy)$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$\sinh'(x)$	$+$	
$\sinh(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de la fonction sinh est donné ci-contre :



Graphe de cosinus hyperbolique " cosh "

La fonction cosh est impaire. Il suffit de l'étudier sur $[0,+\infty[$. la courbe est symétrique par rapport (Oy)

La dérivée de la fonction cosh est la fonction $\sinh \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ donc est positive sur $\mathbb{R}^+$. La fonction cosh est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Elle présente un minimun en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh x \geq \cosh 0 = 1.$$

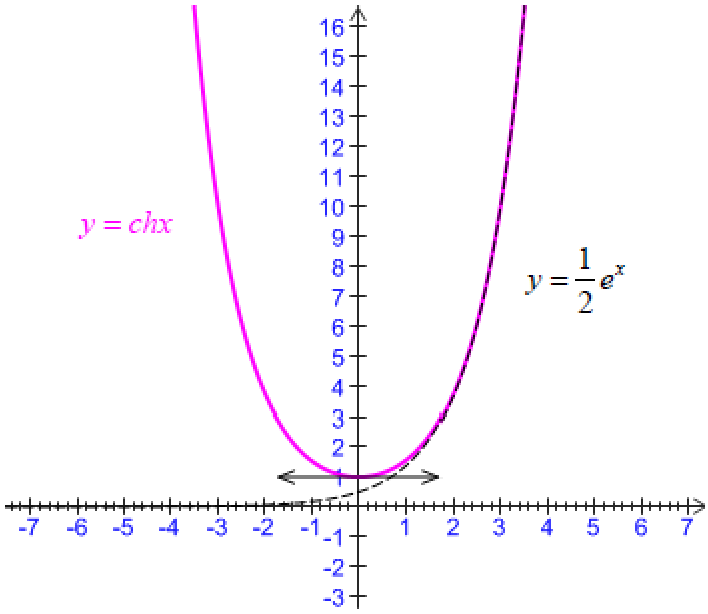
La courbe représentative de la fonction cosh admet une branche parabolique de direction asymptotique $(y'Oy)$.

Ona $\cosh' x = \sinh x = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1$ donc la seule tangente horisentale pour la courbe de cosh est ou point $(0, 1)$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$\cosh'(x)$	$+$	
$\cosh(x)$	1 ↗	$+\infty$

Le graphe de la fonction cosh est donné ci-contre :



Graphe de tangente hyperbolique " tanh "

La fonction tanh est impaire. Il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$. la courbe est symétrique par rapport $(0, 0)$.

La dérivée de la fonction tanh est égale à

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

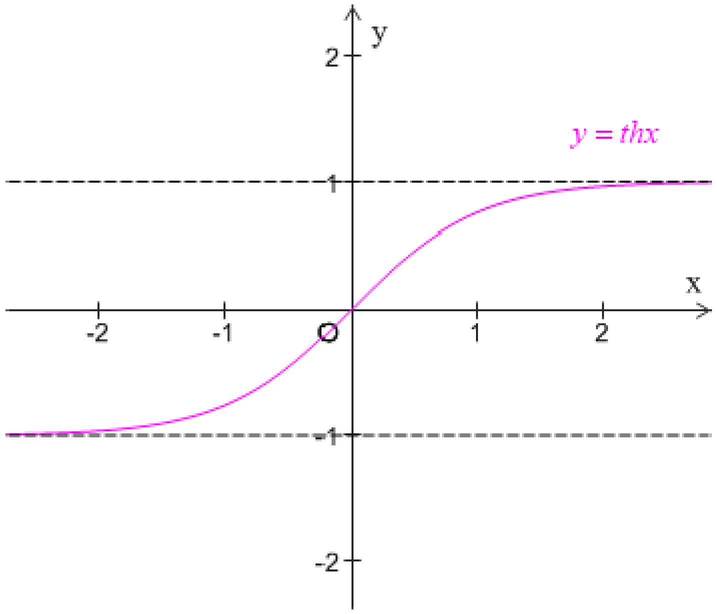
Elle est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de la fonction tanh admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ et d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.

Tableau de variation

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\tanh'(x)$	$+$
$\tanh(x)$	$0 \nearrow 1$

Le graphe de la fonction tanh est donné ci-contre :



Comparaison des fonctions $\sinh$ **et** $\cosh$ **au voisinage de** $+\infty$

On a

$$\cosh - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}.$$

On en déduit que les courbes représentatives des fonctions sinh et cosh sont asymptotes l'une de l'autre au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de cosh étant constamment au dessus de celle de sinh . Elles sont également toutes les deux asymptotes à la courbe d'équation $y = \frac{\mathrm{e}^x}{2}$. D'un point de vue graphique, on a :

5.5 Fonction hyperbolique indirectes

Argument cosinus hyperbolique " $\arg\cosh$ "

La fonction cosh établit une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$. La bijection reciproque est appelée $\arg\cosh$ (argument cosinush hyperbolique) c'ést donc une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$, et ona $\forall x \in [1, +\infty[, \forall y \in [0, +\infty[$

$$y = \arg\cosh x \Leftrightarrow x = \cosh y.$$

D'où par exemple : $\cosh 0 = 1 \Rightarrow \arg\cosh 1 = 0$

La fonction $\arg\cosh$ est continue dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[: \arg\cosh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0,$$

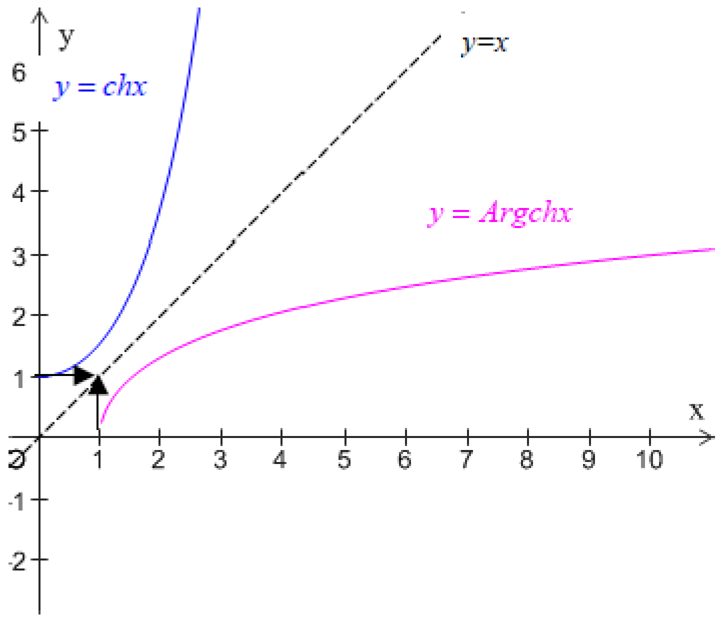
donc la fonction $\arg\cosh$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Ona $\lim_{x\to+\infty} \arg\cosh x = +\infty$

Tableau de variation

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\arg\cosh'(x)$	$+$
$\arg\cosh(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Le graphe de la fonction $\arg\cosh$ est donné ci-contre :



On peut montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[: \arg\cosh x = Ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Argument sinus hyperbolique " $\arg\sinh$ "

La fonction $\sinh$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée $\arg\sinh$ (argument sinush yperbolique) c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Et on a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

$$y = \arg\sinh x \Longleftrightarrow x = \sinh y.$$

D'où par exemple : $\sinh 0 = 0 \Rightarrow \arg\cosh 0 = 0$.

La fonction sinh est impaire donc $\arg\sinh$ est aussi impaire, Il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$. la courbe est symétrique par rapport $(0, 0)$.

La fonction $\arg\sinh$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} : \arg\sinh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0,$$

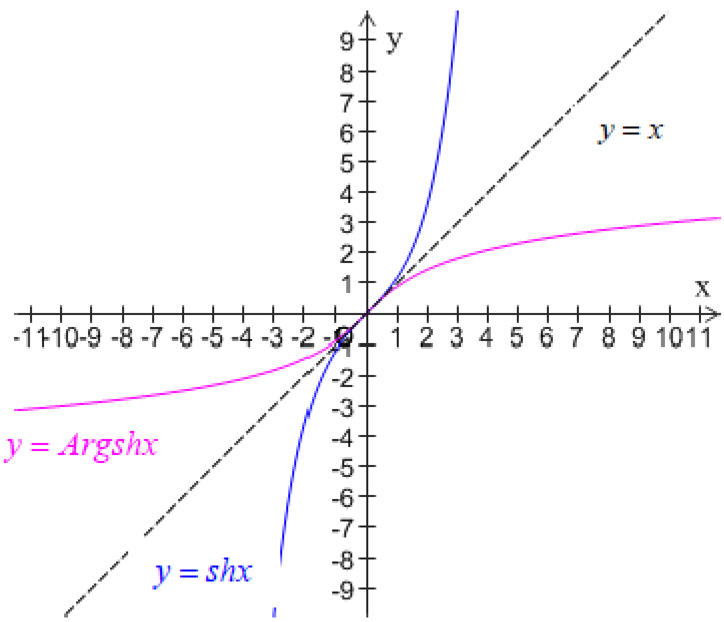
donc la fonction $\arg\cosh$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ona $\lim\limits_{x\to+\infty} \arg\sinh x = +\infty$

Tableau de variation

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\arg\sinh'(x)$	$+$
$\arg\sinh(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Le graphe de la fonction $\arg\sinh$ est donné ci-contre :



On peut montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[: \arg\sinh x = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \text{....voir TD.}$$

argument tangente hyperbolique " $\arg\tanh$ "

La fonction tanh etablit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. La bijection réciproque est appelée arg tanh (argument tangente yperbolique) c'est donc une bijection de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$.

Et ona $\forall x \in]-1,1[, \forall y \in \mathbb{R}$

$$y = \arg\tanh x \Leftrightarrow x = \tanh y.$$

D'où par exemple : $\tanh 0 = 0 \Rightarrow \arg\tanh 0 = 0$.

La fonction tanh est impaire donc arg tanh est aussi impaire

La fonction arg tanh est continue dérivable sur $]-1;1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[: \arg\tanh' x = \frac{1}{1-x^2} > 0,$$

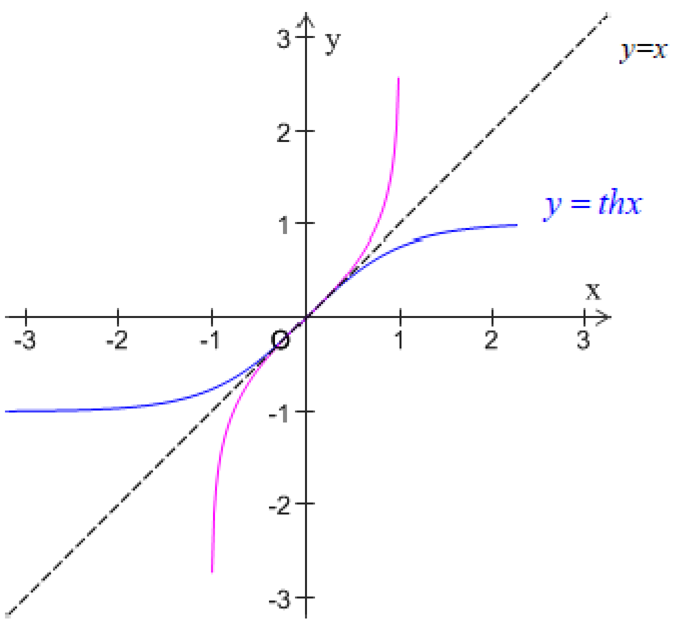
donc la fonction arg tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ona $\lim\limits_{x \to +1} \arg\tan x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1} \arg\tan x = -\infty$

Tableau de variation

x	-1	$+1$
$\arg\tanh'(x)$	$+$	
$\arg\tanh(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de la fonction arg tanh est donné ci-contre :



On peut montrer que :for all $x \in \,]-1;1[$

$$\arg\tanh x = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Chapitre 6

Développements limités

Définition 6.0.1. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I$: $f(t) = P_n(x) + x_n\xi(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \xi(t) = 0$. ou sous forme développée :*

$$f(t) = a + a_1 x + a_2 x^2 + +a_n x^n + x_n \xi(x).$$

On dit que $P_n(x)$ est la partie régulière du développement limité et $x^n\xi(x)$ est le la reste.

6.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 6.1.1. *Formule de Taylor-Young*

Soit $f : I \to R$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2++\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\xi(x),$$

où est une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x\to a} \xi(x) = 0$

Exemple 6.1.1. *Soit $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow \ln(1+x)$, f est infiniment dérivable. Nous allons calculer les formules de Taylor en 0 pour les premiers ordres.*

Tous d'abord $f(0) = 0$. Ensuite $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ donc $f'(0) = 0$. Ensuite $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ donc par récurrence on montre que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{(x+1)^n}$ et donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Ainsi pour $n > 0$: $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$

Alors

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\xi(x)$$

Cas particulier : Formule de Taylor-Young au voisinage de 0. On se ramené souvent au cas particulier où $a = 0$, la formule de Taylor-Young s'écrit alors

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + f''(0)\frac{x^2}{2!} + ... + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\xi(x),$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\xi(x) = 0$

Exemple 6.1.2.

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} + x^n\xi(x).$$
$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n\xi(x).$$

6.2 Développements limités au voisinage d'un point

Définition et existence

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to R$ une fonction quelconque.

Définition 6.2.1. *Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité (DL) au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, ..., c_n$ et une fonction $\xi : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0}\xi(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\xi(x).$$

- *L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de a à l'ordre n .*
- *Le terme $c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n$ est appelé la partie polynomiale du DL.*
- *Le terme $(x-a)^n\xi(x)$ est appelé le reste du DL.*

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Proposition 6.2.1. *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point a alors f admet un DL au point a à l'ordre n, qui provient de la formule de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x) + f''(a)\frac{x^2}{2!} + ... + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} + x^n\xi(a),$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\xi(x) = 0.$

Remarque 6.2.1.

1- *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point* 0*, un DL en* 0 *à l'ordre n est l'expression :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + f''(0)\frac{x^2}{2!} + ... + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n \xi(x),$$

où $\lim\limits_{x \to 0} \xi(x) = 0$

2- *Si f admet un DL en un point a à l'ordre n alors elle en possède un pour tout $k \leq n$. En effet*

$$\begin{aligned} f(x) = \; & f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\tfrac{(x-a)^2}{2!} + ... + f^{(k)}(a)\tfrac{(x-a)^k}{k!} \\ & \underbrace{+ f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} + ... + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n \xi(x)}_{(x-a)^k \eta(x)} \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x \to a} \eta(x) = 0$

Proposition 6.2.2. *Si f admet un DL alors ce DL est unique.*

Corollaire 6.2.1. *Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en* 0 *ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).*

6.3 DL des fonctions usuelles à l'origine

Les DL suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

1- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \xi(x)$.

2- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \xi(x)$.

3- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n \xi(x)$.

4- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n \xi(x)$.

5- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^n \xi(x)$.

6- $chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\xi(x)$.

7- $shx{=}\frac{x}{1!}{+}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^{2n+2}\xi(x)$.

8- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\xi(x)$.

9- $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \cdots + (-1)^n x^{2n} {+} x^{2n}\xi(x)$.

10- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\xi(x)$.

11- $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{3}{8.5}x^5 + \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+1}\xi(x)$

12- $\arccos(x) \underset{x\to 0}{=} \pi/2 - x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{3}{8.5}x^5 - \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+1}\xi(x)$

6.4 DL des fonctions en point quelconque

La fonction f admet un DL au voisinage d'un point a si et seulement si la fonction $x \longrightarrow f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0. souvent on ramené donc le problème en 0 en faisant le changement de variables $h = x - a$

Exemple 6.4.1.

1- *DL de* $f(x) = e^x$ *en* 1

On pose $h = x - 1$. *Si* x *est proche de* 1 *alors* h *est proche de* 0. *Nous allons nous ramener à un DL de* e^h *en* $h = 0$. *On note* $e = e^1$

$$\begin{aligned} e^x &= e^{(1+x-1)} = e^1 e^{(x-1)} = ee^h \\ &= e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + h^n\xi(h)\right) \\ &= e\left(1{+}(x-1){+}\frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!}{+}(x-1)^n\xi(x-1)\right) \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\xi(x-1) = 0$.

2- *DL de* $g(x) = \sin x$ *en* $\frac{\pi}{2}$

Sachant $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ *on se ramène au DL de* $\cos(h)$ *quand* $h = x-\frac{\pi}{2}$. *On a donc*

$$\sin x = 1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{2n!} + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n \xi(x-\frac{\pi}{2})$$

où $\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}} \xi(x-\frac{\pi}{2}) = 0.$

6.5 Opérations sur DL

Somme, produit

Proposition 6.5.1.

1- $f+g$ *admet un développement limité à l'ordre* n *dont la partie régulière est* $P(x)+Q(x)$.

2- $f\times g$ *admet un développement limité à l'ordre* n *dont la partie régulière* $P(x)\times Q(x)$ *en supprimant tous les termes de degré strictement supérieurs à* n.

Exemple 6.5.1.

1- Développement limité à l'ordre 3 *de* $\dfrac{e^x}{1+x}$ *:*

A l'ordre 3*, on a*

$$\begin{aligned} e^x = & = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\xi_1(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to0}\xi_1(x)=0 \\ \frac{1}{1+x} = & \ 1-x+x^2-x^3+x^3\epsilon_2(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to0}\xi_2(x)=0 \end{aligned}$$

$$\textit{donc } \frac{e^x}{1+x} = e^x\times\frac{1}{1+x} = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\xi_1(x)\right)(1-x+x^2-x^3+x^3\xi_2(x$$

$$= 1-x+x^2-x^3+x-x^2+x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\xi(x)$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^3\xi(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\mapsto0}\xi(x)=0.$$

2- Développement limité à l'ordre 2 *de* $\cos x\times\sqrt{1+x}$ *:*

On sait que

$$\begin{aligned} \cos x = & \ 1-\tfrac{x^2}{2!}+x^2\xi_1(x). \\ \sqrt{x+1} = & \ 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+x^2\xi_2(x) \end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\cos x \times \sqrt{1+x} &= \left(1-\tfrac{x^2}{2!}+x^2\xi_1(x)\right)\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+x^2\xi_2(x)\right) \\
&= 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+x^2\xi_2(x)-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{4}x^3+\tfrac{1}{16}x^4-\tfrac{1}{2}x^4\xi_2(x) \\
&+x^2\xi_1(x)+\tfrac{1}{2}x^3\xi_1(x)-\tfrac{1}{8}x^4\xi_1(x)+x^4\xi_1(x)\xi_2(x) \\
&= \underbrace{1+\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x^2\right)}_{\text{partie tronquée à l'ordre 2}} \\
&\underbrace{\begin{matrix} +x^2\xi_2(x)-\tfrac{1}{4}x^3\tfrac{1}{16}x^4-\tfrac{1}{2}x^4\xi_2(x)+x^2\xi_1(x) \\ +\tfrac{1}{2}x^3\xi_1(x)-\tfrac{1}{8}x^4\xi_1(x)+x^4\xi_1(x)\xi_2(x) \end{matrix}}_{\text{reste de la forme } x^2\xi(x)} \\
&= 1+\tfrac{1}{2}x+-\tfrac{5}{8}x^2+x^2\xi(x)
\end{aligned}
$$

Composition

Proposition 6.5.2. *Si $f(t)=P(t)+t^n\xi(t)$ alors : $f(ax)=P(ax)+x^n\xi_1(x)$ pour tout $a\in\mathbb{R}^*$ $f(x^p)=P(x^p)+x^{n\times p}\xi_2(x)$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.*

Exemple 6.5.2.

1- Développement limité á l'ordre 7 de $sin(2x)$:

$\sin t = t-\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^5}{5!}-\dfrac{t^7}{7!}+t^7\xi_1(t)$ *donc :*

$$
\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+x^7\xi_2(x) \\
&= 2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5-\frac{8}{315}x^7+x^7\xi_2(x).
\end{aligned}
$$

2- Développement limité à l'ordre 6 de $\dfrac{1}{1+x^2}$:

$\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+t^3\xi_1(t)$ *donc :* $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^6\xi_2(x)$.

Dérivation

Proposition 6.5.3. *Si f est dérivable sur un intervalle I contenant 0, et admet un développement limité d'orde n en 0, alors f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0 de partie régulière $P'(x)$.*

Exemple 6.5.3. *Le développement limité à l'ordre 7 de $\sin(x)$ est :*

$\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+x^7\epsilon(x).$

- *Par dérivation, on trouve* $(\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\epsilon(x)$.
- *On retrouve bien le développement limité à l'ordre* 6 *de* $\cos(x)$.

6.6 Applications

Calculs de limites

Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées ! Il suffit juste de remarquer que si $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots$.alors $\lim_{x\to a} f(x) = c_0$.

Exemple 6.6.1. *Soit à calculer* $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

Remarquons tout d'abord que la fonction proposée est bien définie pour $x > 1/\pi$.

Commençons par passer au log. Pour tout $x > 1/\pi$ *:*

$$\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = x^2\ln(x\sin\frac{1}{x})$$

Effectuons le changement de variable $x = \frac{1}{t}$

$$x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$$

Un simple équivalent à l'ordre 0 ne nous permet pas de calculer la limite de ectte expression quand t tend vers 0. En effet, $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$*, et le log est de limite nulle. Nous n'avons pas levé l'indétermination.*

Allons un cran plus loin :

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{6} + t^2\xi(t^3)$$

et par composition de DLs

$$\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} -\frac{t^2}{6} + t^2\xi(t^3)$$

D'où

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = -\frac{1}{6}$$

et la limite recherchée est donc

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(-\frac{1}{6}\right)$$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 6.6.1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en a : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\xi(x)$, où k est le plus petit entier > 2 tel que le coefficient c_k soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y = c_0 + c_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $c_k(x-a)^k$.*

Il y a 3 cas possibles.
- Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.
- Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.
- Si ce signe change (lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un point d'inflexion.

Remarque 6.6.1. *Comme le DL de f en a à l'ordre 2 s'écrit aussi*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\xi(x)$$

alors l'équation de la tangente est aussi $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Si en plus $f''(a) \neq 0$ alors $f(x) - y$ garde un signe constant autour de a. En conséquence si a est un point d'inflexion alors $f''(a) \neq 0$. (La réciproque est fausse).

Exemple 6.6.2. *Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.*

1. Déterminons la tangente en $\frac{1}{2}$ du graphe de f et précisons la position du graphe par rapport à la tangente.

On a $f'(x) = 4x^3 - 6x^2, f''(x) = 12x^2 - 12x$, donc $f''(x)(\frac{1}{2}) = -3 \neq 0$ et $k = 2$.

On en déduit le DL de f en $\frac{1}{2}$ par la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(x-\tfrac{1}{2})^2 + (x-\tfrac{1}{2})^2\xi(x) \\ &= \tfrac{13}{16} - (x-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{3}{2}(x-\tfrac{1}{2})^2 + (x-\tfrac{1}{2})^2\xi(x). \end{aligned}$$

Donc la tangente en $\frac{1}{2}$est $y = \frac{13}{16} - (x-\frac{1}{2})$ et le graphe de f est en dessous de la tangente car $f(x) - y = \left(-\frac{3}{2} + \xi(x)\right)(x-\frac{1}{2})^2$est négatif autour de $x = \frac{1}{2}$.

6.7 Développement limité en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +1[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, ..., c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + + \frac{c_n}{x_n} + \frac{1}{x_n}\xi\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $\xi\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

Exemple 6.7.1.

$$\begin{aligned} f(x) = \ln\left(2 + \tfrac{1}{x}\right) &= \ln(2) + \ln\left(1 + \tfrac{1}{2x}\right) \\ &= \ln 2 + \tfrac{1}{2x} - \tfrac{1}{8x^2} + \tfrac{1}{24x^3} + +(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n2^n x^n} + \tfrac{1}{x^n}\xi(\tfrac{1}{x}), \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to\infty} \xi(\frac{1}{x})$

Deuxième partie

Algèbre 1

Chapitre 7

Structures algébriques

7.1 Lois de décomposition internes

Définitions et Propriétés

Définition 7.1.1. *On appelle loi de composition interne (l.c.i) sur un ensemble E, toute application*

$$\star : E \times E \to E.$$

Un sous ensemble F de E est dit stable par rapport à la loi $\star$ si :

$$\forall a, b \in F, a \star b \in F$$

Exemple 7.1.1. *Soit A un ensemble et $E = \mathcal{P}(A)$, alors l'intersection et la réunion d'ensembles sont deux lois de compositions internes dans E car : $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$,*

1 - $X \cap Y \subset X \subset A$ *et on a*

$$\forall x, \quad x \in X \cup Y \Rightarrow (x \in X) \vee (x \in Y) \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in A) \Rightarrow x \in A$$

donc

2 - $X \cup Y \subset A,$

ce qui montre que "$\cap$" et "$\cup$" sont des lois de compositions internes dans $\mathcal{P}(A)$.

Exemple 7.1.2. *Soit $F = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} \subset \mathcal{P}\{a, b, c\}$, alors F n'est pas stable par rapport à l'intersection et la réunion, car :*

$$\exists X = \{a, b\}, Y = \{a, c\} \in F; \qquad ; X \cap Y = \{a\} \notin F$$
$$\exists X = \{a, b\}, Y = \{a, c\} \in F; \qquad X \cup Y = \{a, b, c\} \notin F$$

Définition 7.1.2. *Soient $\star$ et $\bullet$ deux lois de composition internes sur E, on dit que :*

1 - *$\star$ est commutative si : $\forall a, b \in E, a \star b = b \star a$,*

2 - *$\star$ est associative si : $\forall a, b, c \in E, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$,*

3 - *$\star$ est distributive par rapport à $\bullet$ si : $\forall a, b, c \in E$,*

$$a \star (b \bullet\ c) = (a \star b) \bullet\ (a \star c) et (b \bullet\ c) \star a = (b \star a) \bullet\ (c \star a)$$

4 - *$e \in E$ est un élément neutre à gauche (respectivement à droite) de la loi $\star$ si*

$$\forall a \in E, e \star a = a \text{ (respectivement } a \star e = a)$$

Si e est un élément neutre à droite et à gauche de $\star$ on dit que e est un élément neutre de $\star$.

Exemple 7.1.3. *Soit F un ensemble et $E = \mathcal{P}(F)$. On considère sur E les lois de composition internes "$\cap$" et " $\cup$", alors il est très facile de montrer que :*

- *"$\cap$" et " $\cup$" sont associatives*
- *" $\cap$" et " $\cup$" sont commutatives*
- *$\emptyset$ est l'élément neutre de $\cup$*
- *F est l'élément neutre de $\cap$*

Proposition 7.1.1. *$\cap$ est distributive par rapport à $\cup$ et $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$*

Preuve 7.1.1. *Soient A, B, C trois éléments de $E = \mathcal{P}(F)$, alors pour tout x, on a :*

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \vee (x \in C) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

et comme $\cap$ est commutative, on déduit que $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$.

De la même manière on montre la distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$.

Propriété 7.1.1. *Si une loi de composition interne $\star$ possède un élément neutre à droite e' et un élément neutre à gauche e'', alors $e' = e''$ et c'est un élément neutre de $\star$.*

Preuve 7.1.2. *Soit e', respectivement e'', un élément neutre à droite, respectivement à gauche, de $\star$, alors*

- $e' = e'' \star e'$ *car e" élément neutre à gauche de* $\star$
- $e'' = e'' \star e'$ *car e' élément neutre à droite de* $\star$

ce qui montre que $e' = e''$.

Remarque 7.1.1. *D'après cette dernière propriété, si $\star$ possède un élément neutre, alors il est unique.*

Définition 7.1.3. *Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E admettant un élément neutre e. On dit qu'un élément $a \in E$ est inversible, ou symétrisable, à droite (respectivement à gauche) de $\star$ si*

$$\exists a' \in E, a \star a' = e \qquad (respectivement\ a' \star a = e)$$

et a' est dit un inverse (ou un symétrique) à droite (respectivement à gauche) de a.

S'il existe $a' \in E$ tel que

$$a' \star a = a \star a' = e$$

on dit que a est inversible (ou symétrisable) et a' est dit un inverse (ou un symétrique) de a par rapport à $\star$.

Remarque 7.1.2.
- *a est inversible (ou symétrisable) s'il est inversible à droite et à gauche de $\star$.*
- *Le symétrique d'un élément n'est pas toujours unique*

Exemple 7.1.4. *Soit $E = \{a, b, \gamma\}$, on définit une l.c.i dans E par :*

$\star$	a	b	γ
a	a	b	γ
b	b	γ	a
γ	γ	a	a

c'est à dire

$$\begin{cases} 1. \quad a \star a = a & a \star b = b \qquad a \star \gamma = \gamma \\ 2. \quad b \star a = b & b \star b = \gamma \qquad b \star \gamma = a \\ 3. \quad \gamma \star a = \gamma & \gamma \star b = a \qquad \gamma \star \gamma = a \end{cases}$$

On remarque que :

1- *a est l'élément neutre de $\star$.*

2- *Tous les éléments de E sont inversibles avec :*

- ***-** *a est l'inverse de a,*
- ***-** *γ est l'inverse de b*
- ***-** *b et γ sont des inverses de γ.*

Propriété 7.1.2. *Soit $\star$ une loi de composition interne dans un ensemble E admettant un élément neutre e, alors :*

1. *e est inversible (ou symétrisable) et son unique inverse (ou symétrique) est e.*

2. *Soit a un élément de E inversible (ou symétrisable) par rapport à la loi $\star$ et a' un inverse (ou un symétrique) de a, alors a' est inversible (ou symétrisable) et a est un inverse (ou un symétrique) de a'.*

Preuve 7.1.3. 1- *Soit $x' \in E$, alors*

$$\begin{aligned} x' \text{ est un inverse (ou un symétrique) de } e &\Leftrightarrow e \star x' = x' \star e = e \\ &\Leftrightarrow x' = e \end{aligned}$$

ce qui montre que le seul inverse (ou symétrique) de e est e lui même.

2- *Soit $a \in E$ un élément inversible (ou symétrisable) par rapport à la loi $\star$ et soit $a' \in E$ un inverse (ou un symétrique) de a, alors*

$$a \star a' = a' \star a = e$$

d'où on déduit que a' est inversible (ou symétrisable) par rapport à la loi $\star$ et que a est un inverse (ou un symétrique) de a'.

Unicité de l'inverse (du symétrique)

Propriété 7.1.3. *Soit $\star$ une loi de composition interne dans E, associative et admettant un élément neutre e. Si un élément $x \in E$ admet x_1 un inverse (ou symétrique) à droite et x_2 un inverse (ou symétrique) à gauche, alors x_1 et x_2 sont identiques.*

Preuve 7.1.4. *Soient x_1 un inverse (ou un symétrique) à droite de x et x_2 un inverse (ou un symétrique) à gauche de x, alors*

$$x \star x_1 = e \quad et \quad x_2 \star x = e$$

donc

$$\begin{aligned} x1 &= e \star x1 \\ &= (x_2 \star x) \star x_1 \\ &= x_2 \star (x \star x_1) \;\; car \star estassociative \\ &= x_2 \star e \\ &= x_2 \end{aligned}$$

Remarque 7.1.3. - *De cette propriété on déduit que l'associativité de la loi assure l'unicité du symétrique d'un élément s'il existe*

- *D'après cette propriété on déduit que la loi définie dans l'exemple 4.4 n'est pas associative. Pour s'en convaincre, on remarque que :*

$$(b \star b) \star \gamma = \gamma \star \gamma = a \quad et \quad b \star (b \star \gamma) = b \star a = b$$

donc

$$(b \star b) \star \gamma \neq b \star (b \star \gamma)$$

ce qui montre que la loi $\star$ n'est pas associative.

Conventions

Étant donnée une loi de composition interne associative dans un ensemble E,

1- Si la loi est notée $+$, son élément neutre est noté 0_E ou 0, et on parle du symétrique de a qu'on note $a' = -a$.

2- Si la loi est notée multiplicativement, son élément neutre est noté 1_E ou 1, et on parle de l'inverse de a qu'on note $a' = a^{-1}$.

Avec ces conventions, si e est l'élément neutre d'une loi de composition interne $\star$ dans un ensemble E, alors

$$e^{-1} = e \quad (ou \quad -e = e)$$

et on a : $\forall a, a' \in E$,

$$a' = a^{-1} \Leftrightarrow a' \star a = a \star a' = e$$

ou

$$a' = -a \Leftrightarrow a' + a = a + a' = e.$$

Propriété 7.1.4. *Soit $\star$ une loi de composition interne dans un ensemble E, associative et admettant un élément neutre e, alors si a et b sont deux éléments inversibles (symétrisable) il en sera de même de $(a \star b)$ et on a :*

$$(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$$

Preuve 7.1.5. *Soient $a, b \in E$ deux éléments inversibles, alors*

$$\begin{aligned}(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) &= (a \star (b \star b^{-1})) \star a^{-1} \quad (car \star \, estassociative.)\\ &= (a \star e) \star a^{-1}\\ &= a \star a^{-1} = e\end{aligned}$$

De la même manière on montre que

$$(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = e$$

d'où on déduit que $(a \star b)$ est inversible et que

7.2 Structure de Groupes

Définition 7.2.1. *On appelle groupe, tout ensemble non vide G muni d'un loi de composition interne $\star$ tel que :*

1- *$\star$ est associative ;*

2- *$\star$ possède un élément neutre e ;*

3- *Tout élément de E est symétrisable.*

Si de plus $\star$ est commutative, on dit que $(G, \star)$ est un groupe commutatif, ou groupe Abélien

Exemple 7.2.1. *Un exemple illustra-tif de groupe abélien est $(\mathbb{Z}, +)$.*

Exemple 7.2.2. *On définit l'opération $\star$ par :*

$$\forall x, y \in]-1, 1[, \quad x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

Montrer que $]-1, 1[, \star$ est un groupe abélien.

1- $\star$ est une loi de composition interne dans $]-1, 1[$.
Soient $x, y \in]-1, 1[$, alors

$$(|x| < 1) \wedge (|y| < 1)$$

donc

$$(|xy| = |x||y| < 1)$$

par suite

$$1 + xy > 1 - |xy| > 0$$

Ainsi

$$\forall x,y\in]-1,1[,\ \frac{x+y}{1+xy}<1 \begin{array}[t]{l}\Leftrightarrow \dfrac{|x+y|}{|1+xy|}<1\\ \Leftrightarrow |x+y|<|1+xy|\\ \Leftrightarrow |x+y|<1+xy \quad \text{car } 1+xy>0\\ \Leftrightarrow -(1+xy)<x+y<1+xy\\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1-xy<0\\ x+y+1+xy>0\end{cases}\\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-y)+y-1<0\\ x(1+y)+y+1>0\end{cases}\\ \Leftrightarrow \begin{cases} (1-y)(x-1)<0\\ (1+y)(x+1)>0\end{cases} (*)\end{array}$$

comme $-1<x,y<1$, alors

$$(1-y>0)\wedge(x-1<0) \text{ et } (1+y>0)\wedge(x+1>0)$$

donc

$$((1-y)(x-1)<0)\wedge((1+y)(x+1)>0),$$

d'où on déduit que $(*)$ est vraie pour tous $x,y\in]-1,1[$, par suite :

$$\forall x,y\in]-1,1[,\quad |x\star y|=\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|<1$$

ce qui montre que $\star$ est une loi de composition interne dans $]-1,1[$.

2- $\star$ est commutative. D'après la commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\forall x,y\in]-1,1[,\quad x\star y=\frac{x+y}{1+xy}=\frac{y+x}{1+yx}=y\star x$$

ce qui montre que $\star$ est commutative.

3- $\star$ est associative.

Soient $x,y,z\in]-1,1[$, alors

$$\begin{aligned}(x\star y)\star z &= \frac{(x\star y)+z}{1+(x\star y)z} && = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+x\frac{x+y}{1+xy}z}\\ &= \frac{\frac{(x+y)+z(1+xy)}{1+xy)}}{\frac{(1+xy)+(x+y)z}{1+xy}} && = \frac{(x+y)+z(1+xy)}{(1+xy)+(x+y)z}\\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= \frac{x + (y \star z)}{1 + x(y \star z)} & &= \frac{x + \dfrac{y+z}{1+yz}}{1 + x\dfrac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{\dfrac{x(1+yz)+(y+z)}{1+yz}}{\dfrac{(1+yz)+x(y+z)}{1+yz}} & &= \frac{x(1+yz)+(y+z)}{(1+yz)+x(y+z)} \\ &= \frac{(x+xyz)+(y+z)}{(1+yz)+(xy+xz)} & &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \end{aligned}$$

en comparant les deux expressions on obtient :

$$\forall x, y, z \in]-1,1[, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

d'où on déduit que $\star$ est associative.

4- $\star$ admet un élément neutre.

Soit $e \in \mathbb{R}$,alors

$$e élément neutre de \star \Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[, e \star x = x \star e = x$$

comme $\star$ est commutative et

$$\begin{aligned} x \star e = x &\Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \\ &\Leftrightarrow x + e = x + x^2 e \\ &\Leftrightarrow e = x^2 e \\ &\Leftrightarrow e(1-x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (e = 0) \vee (x = \pm 1) \end{aligned}$$

on déduit que $e = 0 \in]-1,1[$ est l'élément neutre de $\star$.

5- Soient $x \in]-1,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} x \star x' = e &\Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \\ &\Leftrightarrow x + x' = 0 \\ &\Leftrightarrow x' = -x \end{aligned}$$

comme $\star$ est commutative on déduit que tout élément $x \in]-1,1[$ est symétrisable et son symétrique est $x' = -x \in]-1,1[$.

De $1), 2), 3), 4)$ et $5)$ on déduit que $(]-1,1[, \star)$ est un groupe abélien.

Groupe à deux éléments

Soit $G = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments, définir toutes les lois de composition internes dans G qui lui confèrent une structure de groupe.

Soit $\star$ une loi de composition sur G, alors pour que $(G, \star)$ soit un groupe il faut que $\star$ soit interne dans G et admette un élément neutre qui peut être a ou b, donc $\star$ doit être définie de la sorte :

1- Si a est l'élément neutre de $\star$, alors

– $a \star a = a$

– $a \star b = b$

– $b \star a = b$

reste à définir $b \star b$, or pour que $(G, \star)$ soit un groupe il faut que tout élément soit inversible, en particulier il faut trouver b^{-1}. Si on pose $b \star b = b$, alors on remarque que

$$\forall x \in G, b \star x \neq a$$

donc b ne sera pas inversible, ce qui nous amène à poser $b \star b = a$

Ainsi, on a défini une l.c.i. dans G avec un élément neutre a, reste à voir si la loi ainsi définie est associative. On a :

- $(a \star a) \star a = a \star a = a \star (a \star a)$
- $(a \star a) \star b = a \star b = a \star (a \star b)$
- $(a \star b) \star a = b \star a = a \star b = a \star (b \star a)$
- $(a \star b) \star b = b \star b = a = a \star a = a \star (b \star b)$

En remarquant que la loi est commutative on déduit que

- $(b \star a) \star a = b \star (a \star a)$
- $(b \star a) \star b = b \star (a \star b)$

ce qui montre que

$$\forall x, y, z \in G, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$

donc $\star$ est associative dans G, et par suite $(G, \star)$ est un groupe.

2- Si b est l'élément neutre de $\star$, alors de la même manière on construit la loi $\star$ comme suit :

- $b \star b = b$
- $b \star a = a$

- $a \star b = a$
- $a \star a = b$

D'après ce qui précède : Il existe deux groupes à deux éléments et formellement on les définit ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \star & a & b \\ a & a & b \\ b & b & a \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \star & a & b \\ a & b & a \\ b & a & b \end{array}$$

Sous groupes

Définition 7.2.2. *Soit $(G,\star)$ un groupe, on appelle sous groupe de $(G,\star)$ tout sous ensemble non vide G' de G tel que la restriction de $\star$ à G' en fait un groupe.*

Comme $\star$ est associative dans G alors sa restriction à G' est aussi associative, par suite $G' \neq \emptyset$ est un sous groupe de $(G,\star)$ s'il est stable par rapport à $\star$ et à l'opération inversion, c'est à dire :

$$\begin{cases} 1 - G' \neq \emptyset \\ 2 - \forall a, b \in G', \quad a \star b \in G' \\ 3 - \forall a G', \quad a^{-1} \in G' \end{cases}$$

Il est claire que si $(G,\star)$ est un groupe, alors G est un sous groupe de G.

Propriété 7.2.1. *Soient $(G,\star)$ un groupe et $G' \subset G$, alors*

$$G' \text{ est un sous groupe de } G \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - G' \neq \emptyset \\ 2 - \forall a, b \in G', \quad a \star b^{-1} \in G' \end{cases}$$

Preuve 7.2.1.

1- *Soit G' un sous groupe de $(G,\star)$, alors :*

- *$\star$ a un élément neutre dans G', donc $G' \neq \emptyset$.*
- *Soient $a, b \in G'$, comme G' muni de la restriction de $\star$ est un groupe alors b^{-1} existe dans G' et comme G' est stable par rapport à $\star$ on déduit que $a \star b^{-1} \in G'$.*

2. *Inversement, soit G' un sous ensemble de G tel que $G' \neq \emptyset$,*

$$\forall a, b \in G', a \star b^{-1} \in G'$$

Montrons que G' muni de la restriction de $\star$ est un groupe.

- *Comme $G' \neq \emptyset$ alors il existe $a \in G'$ et d'après la deuxième hypothèse*

$$e = a \star a^{-1} \in G',$$

ce qui montre que la restriction de $\star$ admet un élément neutre e dans G'.

- *Soit $x \in G'$, comme $e \in G'$ alors d'après la deuxième hypothèse on aura*

$$x^{-1} = e \star x^{-1} \in G'$$

ce qui montre que tout élément x de G' est inversible dans G' par rapport à la restriction de $\star$ à G'.

- *La restriction de $\star$ à G' est une loi de composition interne, car pour tous x et y dans G', d'après ii) on a $y^{-1} \in G'$ et en utilisant la deuxième hypothèse on déduit que*

$$x \star y = x \star (y^{-1})^{-1} \in G'$$

- *La restriction de $\star$ à G' est associative, car $\star$ est associative dans G.*

Remarque 7.2.1. *D'après la preuve de la proposition précédente, on voit que : Si e est l'élément neutre d'un groupe $(G, \star)$, alors tout sous groupe de G contient e et on déduit la propriété suivante.*

Propriété 7.2.2. *Soient $(G, \star)$ un groupe, e l'élément neutre de $\star$ et G' un sous ensemble de G, alors G' est un sous groupe de G si et seulement si :*

$$\begin{cases} 1 - e \in G' \\ 2 - \forall x, y \in G', \quad x \star y^{-1} \in G'. \end{cases}$$

Exemple 7.2.3. *Soit $(G, \star)$ un groupe et $G' = \{x \in G; (\forall y \in G, x \star y = y \star x)\}$, alors G' est un sous groupe de G.*

En effet,

1- Si e est l'élément neutre de $\star$, alors $e \in G'$ car :

$$\forall y \in G, e \star y = y \star e = y$$

2- Soient $x, y \in G'$, alors

$$\begin{aligned} \forall z \in G, (x \star y^{-1}) \star z &= (x \star y^{-1}) \star (z^{-1})^{-1} \\ &= x \star (y^{-1} \star (z^{-1})^{-1}) && \text{car} \star \text{est associative} \\ &= x \star (z^{-1} \star y)^{-1} \\ &= x \star (y \star z^{-1})^{-1} && \text{car } y \in G' \\ &= x \star ((z^{-1})^{-1} \star y^{-1}) \\ &= x \star (z \star y^{-1}) \\ &= (x \star z) \star y^{-1} && \text{car} \star \text{est associative} \\ &= (z \star x) \star y^{-1} && \text{car } x \in G' \\ &= z \star (x \star y^{-1}) && \text{car} \star \text{est associative} \end{aligned}$$

ce qui montre que $x \star y^{-1} \in G'$.

De 1 et 2 on déduit que G' est un sous groupe de G.

Remarque 7.2.2. *Sachant que si e est l'élément neutre d'un groupe $(G, \star)$, alors il commute avec tous les éléments de G, de l'exemple précédent on déduit que si e est l'élément neutre d'un groupe $(G, \star)$, alors :*

$$\{e\} \text{ est un sous groupe de } G.$$

Définition 7.2.3. *Soit $(G, \star)$ un groupe, on dit que G' est un sous groupe propre de G si $G' \neq \{e\}$ et $G' \neq G$.*

Exemple 7.2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $n\mathbb{Z} = \{n.p; \quad p \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$.*

En effet :

1- $0 \in n\mathbb{Z}$, *car :* $\exists p = 0 \in \mathbb{Z}; \quad 0 = n.p$.

2- *Soient $x, y \in n\mathbb{Z}$, alors il existe $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x = n.p_1$ et $y = n.p_2$, donc*

$$x - y = n.p_1 - n.p_2 = n.(p_1 - p_2) = n.p \in n\mathbb{Z}$$

par suite

$$\forall x, y \in n\mathbb{Z}, \quad x - y \in n\mathbb{Z}$$

De (1) et (2) on déduit que $n\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$.

Pour $n \in \backslash\{0, 1\}$, $n\mathbb{Z}$ est un sous groupe propre de $\mathbb{Z}$.

Groupes quotients

Soient $(G, \star)$ un groupe et G' un sous groupe de G. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par :

$$\forall a, b \in G, a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a \star b^{-1} \in G'$$

Propriété 7.2.3. *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.*

Preuve 7.2.2.

1- *$\mathcal{R}$ est Réflexive, car : $\forall x \in G$, comme G' est un sous groupe de G, alors $x \star x^{-1} = e \in G'$,*
donc

$$\forall x \in G, x\mathcal{R}x$$

2- *$\mathcal{R}$ est Symétrique, car :* $\forall x, y \in G$,

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x \star y^{-1} \in G' \\ &\Rightarrow (x \star y^{-1})^{-1} \in G' \\ &\Rightarrow y \star x^{-1} \in G' \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

3- *$\mathcal{R}$ est Transitive, car :* $\forall x, yz \in G$,

$$\begin{aligned} (xRy) \wedge (yRz) &\Leftrightarrow [(x \star y^{-1}) \in G'] \wedge [(y \star z^{-1}) \in G'] \\ &\Rightarrow (x \star y^{-1}) \star (y \star z^{-1}) \in G', && \textit{car } G' \textit{ est un sous groupe} \\ &\Rightarrow (x \star (y^{-1} \star y) \star z^{-1}) \in G\prime, && \textit{car } \star \textit{ est associative} \\ &\Rightarrow (x \star z^{-1}) \in G' \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

De $1, 2 et\ 3$ *on déduit que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

On note $G\backslash G'$ l'ensemble quotient $G\backslash\mathcal{R}$. On définit sur $G\backslash G' \times G\backslash G'$ l'opération $\oplus$ par :

$$\forall(\dot{a}, \dot{b}) \in G\backslash G' \times G\backslash G', \dot{a} \oplus \dot{b} = \dot{\overline{a \star b}}$$

Propriété 7.2.4. *Si $\star$ est commutative, alors $\oplus$ est une loi de composition interne dans $G\backslash G'$.*

Preuve 7.2.3. *Ceci revient à montrer que $\oplus$ est une application de $G\backslash G' \times G\backslash G'$ dans $G\backslash G' \times G\backslash G'$.*

Soient $(\dot{a}, \dot{b})$ et $(\dot{c}, \dot{d})$ $G\backslash G'$, alors

$$\begin{aligned} (\dot{a}, \dot{b}) = (\dot{c}, \dot{d}) &\Rightarrow (\dot{a} = \dot{c}) \wedge (\dot{b} = \dot{d}) \\ &\Rightarrow (a\mathcal{R}c) \wedge (b\mathcal{R}d) \\ &\Rightarrow (a \star c^{-1} \in G') \wedge (b \star d^{-1} \in G') \end{aligned}$$

Montrons que

$$(\dot{a}, \dot{b}) = (\dot{c}, \dot{d}) \Rightarrow \dot{a} \oplus \dot{b} = \dot{c} \oplus \dot{d}.$$

Supposons que $(\dot{a}, \dot{b}) = (\dot{c}, \dot{d})$, *alors :* $\forall x \in G$,

$$\begin{aligned}
x \in \dot{a} \oplus \dot{b} &\Longleftrightarrow x \in \dot{\overline{a \star b}} \\
&\Longleftrightarrow x\mathcal{R}(a \star b) \\
&\Longleftrightarrow x \star (a \star b)^{-1} \in G' \\
&\Longrightarrow x \star (b^{-1} \star a^{-1}) \in G' \\
&\Longrightarrow (x \star (b^{-1} \star a^{-1})) \star (a \star c^{-1}) \in G', \quad \text{Car } G' \text{ sous-groupe} \\
&\Longrightarrow ((x \star b^{-1}) \star (a^{-1} \star a) \star c^{-1}) \in G', \quad \text{Car } \star \text{ associative} \\
&\Longrightarrow ((x \star b^{-1}) \star c^{-1}) \in G' \\
&\Longrightarrow ((x \star b^{-1}) \star c^{-1}) \star (b \star d^{-1}) \in G', \quad \text{Car } G' \text{ sous-groupe} \\
&\Longrightarrow (x \star (b^{-1} \star b) \star (c^{-1} \star d^{-1})) \in G', \quad \text{Car } \star \text{ est commutative et associati} \\
&\Longrightarrow (x \star (c^{-1} \star d^{-1})) \in G' \\
&\Longrightarrow (x \star (d \star c)^{-1}) \in G' \\
&\Longrightarrow x\mathcal{R}(d \star c) \\
&\Longrightarrow x\mathcal{R}(c \star d), \quad \text{car } \star \text{ commutative} \\
&\Longrightarrow x \in \dot{c} \oplus \dot{d}
\end{aligned}$$

donc

$$\dot{a} \oplus \dot{b} \subset \dot{c} \oplus \dot{d}$$

et de la même manière on montre que

$$\dot{c} \oplus \dot{d} \subset \dot{a} \oplus \dot{b}$$

par suite :

$$(\dot{a}, \dot{b}) = (\dot{c}, \dot{d}) \Rightarrow \dot{a} \oplus \dot{b} = \dot{c} \oplus \dot{d}.$$

ce qui montre que la loi $\oplus$ *est interne dans* $G_{\diagup G'}$.

Propriété 7.2.5. *Si* $(G, \star)$ *est un groupe abélien, alors* $G\backslash G', \oplus)$ *est un groupe abélien, appelé groupe quotient de* G *par* G'.

Preuve 7.2.4. *i)* $\oplus$ *est associative car :* $\forall \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in G\backslash G'$,

$$\begin{aligned}
\dot{x} \oplus (\dot{y} \oplus \dot{z}) &= \dot{x} \oplus \dot{\overline{x + y}} \\
&= \dot{\overline{x \star (y \star z)}} \\
&= \dot{\overline{(x \star y) \star z}} \quad \text{Car } \star \text{ est associative} \\
&= \dot{\overline{(x \star y)}} \oplus \dot{z}
\end{aligned}$$

donc :

$$\forall x, y, z \in G\backslash G', \dot{x} \oplus (\dot{y} \oplus \dot{z}) = \dot{\overline{(x \star y)}} \oplus z$$

ii) Si e est l'élément neutre de $\star$, alors $\dot{e}$ est l'élément neutre de $\oplus$, car : $\forall x \in G_{\diagup G'}$,

$$\begin{aligned} \dot{x} \oplus \dot{e} &= \dot{\overline{x \star e}} = \dot{x} \\ \dot{e} \oplus \dot{x} &= \dot{\overline{e \star x}} = \dot{x} \end{aligned}$$

iii) Soit $\dot{x} \in G_{\diagup G'}$ alors $(\dot{x})^{-1} = \dot{\overline{x^{-1}}}$, car

$$\begin{aligned} \dot{x} \oplus \dot{\overline{x^{-1}}} &= \dot{\overline{x \star x^{-1}}} &= \dot{e} \\ \dot{\overline{x^{-1}}} \oplus \dot{x} &= \dot{\overline{x^{-1} \star x}} &= \dot{e} \end{aligned}$$

iv) $\oplus$ est commutative car $\star$ est commutative.

De $i), ii), iii) et iv)$, on déduit que $G \backslash G', \oplus$ est un groupe abélien

Exemple 7.2.5. *On sait que dans le groupe commutatif $(\mathbb{Z}, +)$; pour tout $n \in \mathbb{N}, n\mathbb{Z}$ est un sous sous groupe de $\mathbb{Z}$, donc on peut parler du groupe quotient $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \backslash n\mathbb{Z}$*

Homomorphismes de Groupes

Dans ce paragraphe, on considère $(G, \bullet)$ et $(H, \star)$ deux groupes, avec e et h leurs éléments neutres respectifs.

Définition 7.2.4. *Une application $f : G \to H$ est appelée homomorphisme de groupes de G dans H si :*

$$\forall a, b \in G, \quad f(a \bullet b) = f(a) \star f(b).$$

- *Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme (de groupes) de G sur H. On dit alors que G est isomorphe à H, ou que G et H sont isomorphes.*
- *Si $G = H$, on dit que f est un endomorphisme de G, et si de plus f est bijective, on dit que f est un automorphisme (de groupe) de G.*

Exemple 7.2.6. *Étant donnés les groupes $(R, +)$ et $(R^*, \cdot)$, alors les applications*

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathbb{R}^*, \cdot) \\ & x & \to & e^x \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccc} g: & (\mathbb{R}^*, \cdot) & \to & (\mathbb{R}, +) \\ & x & \to & \ln|x| \end{array}$$

Définition 7.2.5. *Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes. On appelle noyau de f l'ensemble*

$$Kerf = f^{-1}(\{h\}) = \{a \in G; \quad f(a) = h\}$$

et l'image de f l'ensemble

$$\Im mf = f(G) = \{f(a), a \in G\}.$$

Propriété 7.2.6. *Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes, alors*

1- $f(e) = h$

2- $\forall a \in G, \quad (f(a))^{-1} = f(a^{-1})$

Preuve 7.2.5. 1. *h étant l'élément neutre de $\star$ et e celui de $\bullet$, alors*

$$f(e + e) = f(e) = h \star f(e)$$

et comme f est un homomorphisme on déduit que

$$h \star f(e) = f(e) \star f(e)$$

et comme tous les éléments du groupe $(H, \star)$ sont réguliers, on déduit que $h = f(e)$.

2- *Soit $a \in G$ et montrons que $f(a^{-1})$ est l'inverse de $f(a)$ dans le groupe $(H, \star)$.*

f étant un homomorphisme de groupe alors

$$f(a) \star f(a^{-1}) = f(a \bullet \; a^{-1}) = f(e) \qquad \text{et} \;\; f(a^{-1}) \star f(a) = f(a^{-1} \bullet a) = f(e)$$

sachant que $f(e) = h$, d'après la première propriété, on déduit que $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$.

Remarque 7.2.3. *De la première propriété on déduit que $e \in ker f$.*

Propriété 7.2.7. *Soit $f : G- \to H$ un homomorphisme de groupes, alors*

1- *L'image d'un sous groupe de G est un sous groupe de H.*

2- *L'image réciproque d'un sous groupe de H est un sous groupe de G.*

Remarque 7.2.4. *Comme cas particuliers des propriétés,*

1- *$\Im m f$ est un sous groupe de $(H, \star)$.*

2- *$Ker f$ est un sous groupe de $(G, \bullet)$.*

Propriété 7.2.8. *Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupe, alors*

1- *f est injective si et seulement si $Ker f = \{e\}$.*

2- *f est surjective si et seulement si $\Im m f = H$.*

3- *f est un isomorphisme si et seulement si f^{-1} existe et est un homomorphisme de groupe de H dans G.*

7.3 Structure d'Anneaux

Définition 7.3.1. *On appelle anneau, tout ensemble A muni de deux lois de composition internes $+$ et $\bullet$ telles que :*

1- *$(A, +)$ est un groupe abélien (on notera 0 ou 0_A l'élément neutre de $+$),*

2- *$\bullet$ est associative et distributive par rapport à $+$.*

Si de plus $\bullet$ est commutative, on dit que $(A, +, \bullet)$ est un anneau commutatif.

Conventions

1- $(A, +)$ étant un groupe, alors tous les éléments de A sont symétrisables et on convient de noter $-x$ le symétrique d'un élément $x \in A$.

2- Si $\bullet$ possède un élément neutre, on le note 1 ou 1_A et on dit que l'anneau $(A, +, \bullet)$ est unitaire ou unifère.

3- Dans un tel anneau, on dit qu'un élément est inversible s'il l'est par rapport à la deuxième loi $\bullet$. L'inverse d'un élément $x \in A$ est noté x^{-1}.

Règles de Calcul dans un Anneau

Soit $(A, +, \bullet)$ un anneau, alors on a les règles de calculs suivantes :

Propriété 7.3.1. *Pour tous x, y et $z \in A$,*

1- $0_A \bullet x = x \bullet 0_A = 0_A$

2- $x \bullet (-y) = (-x) \bullet y = -(x \bullet y)$

3- $x \bullet (y - z) = (x \bullet \ y) - (x \bullet z)$

4- $(y - z) \bullet \ x = (y \bullet x) - (z \bullet x)$

Preuve 7.3.1. **1-** *Soit $x \in A$, alors*

$$0_A \bullet \ x = (0_A + 0A) \bullet \ x = (0_A \bullet \ x) + (0_A \bullet \ x)$$

car $\bullet$ est distributive par rapport à $+$
comme tous les éléments de A sont symétrisables, on déduit que $0_A \bullet x = 0_A$.
De la même manière on montre que $x \bullet \ 0_A = 0_A$.

2- *Soient $x, y \in A$ et montrons que $x \bullet (-y)$ est le symétrique de $(x \bullet y)$. On a :*

$$(x \bullet (-y)) + (x \bullet \ y) = x \bullet (-y + y) = x \bullet 0_A = 0_A$$

comme $+$ est commutative on déduit que $(x \bullet (-y)) = -(x \bullet \ y)$.
De la même manière on montre que $(-x) \bullet y = -(x \bullet y)$.

La preuve des propriétés 3. et 4. utilise essentiellement la distributivité de la loi $\bullet$ par rapport à $+$.

On note $A^* = A\backslash\{0\}$, et pour tout $x \in A*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n.x = nx = \underbrace{x + x + ... + x}_{n \text{ fois}} \qquad \text{et} \qquad x^n = \underbrace{x \bullet \; x \bullet ... \bullet \; x}_{n \text{ fois}}$$

Définition 7.3.2. *Soit $(A, +, \bullet)$ un anneau commutatif. On dit que $y \in A^*$ divise $x \in A$, ou que y est un diviseur de x ou que x est divisible par y, si*

$$\exists z \in A^*, x = y \bullet \; z.$$

Si 0_A ne possède pas de diviseur dans A, on dit que $(A, +, \bullet)$ est un anneau intègre ou un anneau d'intégrité.

Sous Anneaux

Définition 7.3.3. *On appelle sous anneau de $(A, +, \bullet)$, tout sous ensemble A' de A tel que muni des restrictions des lois $+$ et $\bullet$ est anneau.*

Si A est un anneau unitaire et $1_A \in A'$, on dit que A' est sous anneau unitaire.

On a la caractérisation suivante des sous anneaux.

Propriété 7.3.2. *Un sous ensemble A' de A est un sous anneau si et seulement si :*

1- $A' \neq \emptyset$,

2- $\forall x, y \in A', \quad (x - y) \in A'$

3- $\forall x, y \in A', \quad (x \bullet y) \in A'$.

Homomorphismes d'Anneaux

Soient $(A, +, \bullet)$ et $(B, \oplus, \otimes)$ deux anneaux et $f : A \to B$.

Définition 7.3.4. *On dit que f est un homomorphisme d'anneaux si :*

$$\forall x, y \in A, \;\; f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \;\; , et \qquad f(x \bullet y) = f(x) \otimes f(y)$$

- *Si $A = B$ on dit que f est un endomorphisme d'anneau de A.*

- *Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme d'anneaux*

- *Si f est bijective et $A = B$, on dit que f est un automorphisme d'anneaux.*

On sait que l'image de l'élément neutre du groupe de départ d'un homomorphisme de groupe est l'élément neutre du groupe d'arrivée. Par contre, l'image de l'élément unité de l'anneau de départ par un homomorphisme d'anneau n'est pas toujours l'élément unité de l'anneau d'arrivée. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre dans un anneau unitaire $(A, +, \bullet)$, où $0_A \neq 1_A$, l'application $f : A \to A$ définie par $f(x) = 0_A$ pour tout $x \in A$.

Ce contre exemple nous amène à poser la définition suivante.

Définition 7.3.5. *Soient A et B deux anneaux unitaires, on dit qu'un homomorphisme d'anneaux f de A dans B est unitaire si $f(1_A) = 1_B$.*

Propriété 7.3.3. *Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, alors*

- *f est injectif si et seulement si $ker f = \{0_A\}$*

- *Si A et B sont deux anneaux unitaires et f un homomorphisme d'anneaux surjectif, alors f est unitaire.*

Preuve 7.3.2. *La première propriété provient de la caractérisation des homomorphismes injectifs entre les groupes $(A, +)$ et $(B, +)$.*

Montrons la deuxième propriété.

Soit $y \in B$, f étant injectif, il existe alors $x \in A$ tel que $y = f(x)$, et comme f est un homomorphisme d'anneau on déduit

$$y = f(x) = f(1_A.\ x) = f(1_A).f(x) = f(1A).y$$

et de la même manière on montre que $y = y.f(1_A)$, ce qui montre que $f(1_A) = 1_B$.

Propriété 7.3.4. *L'image (respectivement l'image réciproque) d'un sous anneau de A (resp de B) par f est un sous anneau de B (respectivement de A).*

Idéaux

Soit $(A, +, \bullet)$ un anneau.

Définition 7.3.6. *On appelle idéal à droite (resp à gauche) de l'anneau A, tout ensemble $I \subset A$ tel que*

1- *I est un sous groupe de $(A, +)$,*

2- $\forall x \in A, (\forall y \in I, x \bullet\ y \in I$ *(respectivement* $y \bullet\ x \in I)$ *).*

Si I est idéal à droite et à gauche de A, on dit que I est un idéal bilatère de A.

Si l'anneau A est commutatif, tout idéal de A est bilatère, et dans ce cas on parle seulement d'Idéal sans préciser s'il l'est à droite, à gauche ou bilatère.

Exemple 7.3.1. *Soit* $(A, +, \bullet)$ *un anneau, alors* $I = \{O_A\}$ *est un idéal bilatère de* A.

Exemple 7.3.2. *Dans l'anneau commutatif* $(\mathbb{Z}, +, \cdot), n\mathbb{Z}$ *est un idéal.*

Proposition 7.3.1. *Soit* I *un idéal à gauche (ou à droite) d'un anneau unitaire* $(A, +, \bullet)$*, alors*

$$1_A \in I \iff I = A \iff \exists x \in I, \quad x \text{ est inversible.}$$

Définition 7.3.7. *On appelle idéal principal d'un anneau commutatif* $(A, +, \bullet)$*, tout idéal* I *de* A *tel que*

$$\exists x \in A; \quad I = x \bullet \; A$$

L'anneau A *est dit principal si tous ses idéaux sont principaux.*

Anneaux Quotients

Soient $(A, +, \bullet)$ un anneau commutatif et I un idéal de A. On considère le groupe quotient $(A_{\backslash I}, \oplus)$, et on définit l'application $\otimes$ de $A_{\backslash I} \times \; A_{\backslash I}$ dans $A_{\backslash I}$ par

$$\forall \dot{a}, \dot{b} \in A_{\backslash I}, \quad \dot{a} \otimes \dot{b} = \dot{\overline{a \bullet b}}$$

Propriété 7.3.5. $(A_{\backslash I}, \oplus, \otimes)$ *est anneau commutatif. Si de plus* A *est un anneau unitaire, alors* $(A_{\backslash I}, \oplus, \otimes)$ *est un anneau unitaire et* $\dot{1}_A$ *est son élément unité.*

7.4 Structure des Corps

Les Corps

Définition 7.4.1. *On dit qu'un anneau unitaire* $(\mathbb{K}, +, \bullet)$ *est un corps si tout élément non nul de* $\mathbb{K}$ *est inversible. Si de plus* $\bullet$ *est commutative, on dit que* $\mathbb{K}$ *est un corps commutatif.*

Il est à remarquer que dans la pratique, tous les corps utilisés sont commutatifs.

Propriété 7.4.1. *Tout corps est un anneau intègre.*

Définition 7.4.2. *On appelle sous corps, d'un corps* $(\mathbb{K}, +, \bullet)$*, tout sous ensemble* $\mathbb{K}'$ *de* $\mathbb{K}$ *tel que, muni des restrictions les lois* $+$ *et* $\bullet$ *est un corps.*

Proposition 7.4.1. $\mathbf{K}' \subset \mathbb{K}$ *est un sous corps de* $(\mathbb{K}, +, \bullet)$ *si et seulement si*

1- $\mathbf{K}' \neq \emptyset$

2- $\forall a, b \in \mathbb{K}', a - b$ *et* $a \bullet b - 1 \in \mathbf{K}'$.

On a aussi la caractérisation suivante des corps.

Proposition 7.4.2. *Soit* $(\mathbb{K}', +, \bullet)$ *un anneau commutatif unitaire, alors* $\mathbb{K}$ *est un corps si et seulement si les seuls idéaux de* $\mathbb{K}$ *sont* $\{0_{\mathbb{K}'}\}$ *et lui même.*

Caractéristique d'un corps

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, alors $Z_{\backslash n\mathbf{Z}}$ est un corps si n est premier, et on a

$$n\dot{1} = \dot{1} + \cdots + \dot{1} = \dot{0}.$$

D'une façon générale on a :

Définition 7.4.3. *Le plus petit entier naturel non nul* n *tel que* $n1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$*, s'il existe, est appelé caractéristique du corps commutatif* $\mathbf{K}$*. Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $n1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$*, on dit que* $\mathbf{K}$ *est de caractéristique nulle.*

La caractéristique d'un corps est un nombre premier.

Exemple 7.4.1. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *premier, la caractéristique du corps* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est égale à* n.

Chapitre 8

Les espaces vectoriels

8.1 Les espaces vectoriels

Définition 8.1.1. *Soit E un ensemble non vide, on dit que E est espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si :*

1- $(E, +)$ *est groupe commutatif*

2- *Il existe une application $(\alpha, u) \to \alpha u$ de $\mathbb{K} \times E \to E$ $(\alpha \in \mathbb{K}, u \in E)$ dite loi externe telle que*

$$\forall (u, v) \in E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \begin{cases} \alpha (u, v) = \alpha u + \alpha v \\ \alpha (\beta u) = (\alpha \beta) u \\ 1.u = u \end{cases}$$

Exemple 8.1.1. *On pose $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $\mathbb{R}^2$ est espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ admet un élément neutre $(0, 0)$ et un symétrique $u' = (-x_1, -x_2)$ pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.*

Sous-espace vectoriel

Définition 8.1.2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :*

1- $0_E \in F$,

2- $u + v \in F$ *pour tous* $u, v \in F$,

3- $\lambda u \in F$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout* $u \in F$.

Remarque 8.1.1. *Expliquons chaque condition.*

• *La première condition signifie que le vecteur nul de E doit aussi être dans F. En fait il suffit même de prouver que F est non vide.*

• *La deuxième condition, c'est dire que F est stable pour l'addition : la somme $u + v$ de deux vecteurs u, v de F est bien sûr un vecteur de E (car*

E est un espace vectoriel), mais ici on exige que $u+v$ soit un élément de F.

• La troisième condition, c'est dire que F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Exemple 8.1.2.

1 - *L'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :*

- $(0,0) \in F$,
- *si $u=(x_1,y_1)$ et $v=(x_2,y_2)$ appartiennent à F, alors $x_1+y_1=0$ et $x_2+y_2=0$ donc $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=0$ et ainsi $u+v=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ appartient à F,*
- *si $u=(x,y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x+y=0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$, d'où $\lambda u \in F$.*

2- *L'ensemble $G = \{(x,y) \in R^2 : x+y=2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur nul $(0,0)$ n'appartient pas à G.*

3- *L'ensemble $H =\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0$ ou $y=0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet les vecteurs $u=(1,0)$ et $v=(0,1)$ appartiennent à H, mais pas le vecteur $u+v=(1,1)$.*

Théorème 8.1.1. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les lois induites par E.*

8.2 Applications linéaires

Définitions et notations

Définition 8.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

1- $f(u+v) = f(u) + f(v)$*, pour tous $u, v \in E$,*

2- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$*, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Autrement dit : une application est linéaire si elle « respecte » les deux lois d'un espace vectoriel.

On dit aussi que f est un morphisme d'espace vectoriels.

Remarque 8.2.1.

1- *f est linéaire de E dans F* $\Longleftrightarrow \forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$,

2- *f est linéaire de E dans F, alors* $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$.

Cette remarque est parfois utilisée por montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Notations et terminologies

- On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- Un application de E est une application linéaire de E dans lui-même.

  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E
- Un automorphisme de E est un isomorphisme de E dans lui-même.
  On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphisme de E.
- Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 8.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$*

- *L'application nul de E dans F est linéaire.*
- *L'application identité id_E est un automorphisme de E.*
- *Pour tous scalaires λ L'application $h_\lambda : u \to \lambda u$ est un endomorphisme de E.*
  Pour tous scalaires λ et μ : $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.
  h_λ un automorphisme si $\lambda \neq 0$, et alors $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.
  Si $\lambda \neq 0$, on dit que h_λ est li homothétie de rapport λ.

Opérations sur les applications linéaires

Proposition 8.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, et α, β deux scalaires. Alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire de E dans F.*

On en déduit que $\mathcal{L}(E, F)$ est espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 8.2.2. *Soient E , F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G.*

Proposition 8.2.3. *Soit f un isomorphisme de E sur F. Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.*

Conséquence

Soient f et g deux automorphismes de E.

Alors f^{-1} et $g \circ f$ sont encore des automorphismes de E.

On en déduit qe $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe pour la loi de composition des application.

Ce groupe est en général non commutatif.

Proposition 8.2.4. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

- *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors son image par f, c'est-à-dire $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F,*
- *Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors son image réciproque par f, à savoir $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Deux cas particuliers, les cas où $F' = \{0\}$ (resp. $E' = E$) jouent un rôle particulièrement importants, et sont nommés dans la définition suivante.

Noyau et image

Définition 8.2.2. *Soient E et F des deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

1- *$f^{-1}(\{0\})$ est un sous espace vectoriel de E, On l'appelle le noyau de f et noté $Ker(f)$.*

$$Ker(f) = \{u \in E : \quad f(u) = 0_F\}$$

2- *$f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F. On l'appelle image de f et le note $Im(f)$.*

$$Im(f) = \{v = f(u), u \in E\}$$

Le noyau et l'image caractérise l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.

Proposition 8.2.5. *Soient E et F des deux espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

1- *L'application f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$.*

2- *L'application f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.*

8.3 Familles libres, génératrices, bases

Combinaison linéaire

Dans ce paragraphe, la lettre E désigne un espace vectoriel réel. On définit une combinaison linéaire de vecteurs comme suit.

Définition 8.3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $u_1, ..., u_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $u_1, ..., u_n$ tout vecteur w qui peut s'écrire :*

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n,$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont des nombres réels.

Exemple 8.3.1. *Si u et v sont deux vecteurs, les combinaisons linéaires de u et v sont les vecteurs de la forme $\lambda u + \mu v$, où λ et μ sont deux réels quelconques.*

Notation 8.3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $u_1, ..., u_n$ des vecteurs de E. On note $Vect(u_1, ..., u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, ..., u_n$.*

Proposition 8.3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $u_1, ..., u_n$ des vecteurs de E. L'ensemble $Vect(u_1, ..., u_n)$ est un sous espace vectoriel de E.*

Tout sous espace vectoriel de E qui contient $u_1, ..., u_n$ contient $Vect(u_1, ..., u_n)$. Le sous espace vectoriel $Vect(u_1, ..., u_n)$ est appelé le sous espace vectoriel de E engendré par $\{u_1, ..., u_n\}$.

Définition 8.3.2. *Des vecteurs u et v de E sont dit colinéaires s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$ ou $u = \lambda v$.*

Familles libres

Définition 8.3.3. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est libre, ou encore que les vecteurs de cette famille sont linéairement indépendants si : Pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{K}$,*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \overrightarrow{0}$, on dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée, ou encore les vecteurs qui la composent son linéairement dépendants.

Définition 8.3.4. *Des vecteurs u et v de E sont dit colinéaires s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$ ou $u = \lambda v$.*

Remarque 8.3.1. 1- *(**Cas d'une famille finie de vecteurs**) La famille $u_1, ..., u_n$ est libre si*

$$\forall \lambda_i \in \mathbb{K}^n, \sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Elle est liée s'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$, l'un au mois étant non nul, tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \overrightarrow{0}$.

2- *On ne doit pas confondre non tous nuls et non nuls.*

3- *Une famille réduite à une seul vecteur u rst libre $\Longleftrightarrow$ u est non nul.*

4- *Une famille de deux vecteurs u et v est liée $\Longleftrightarrow$ u et v sont colinéaires, ou encore proportionnels, c'est-à-dire s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.*

Cela ne se généralise pas aux familles de plus de deux vecteurs.

5- *Une famille de vecteurs est liée $\Longleftrightarrow$ l'un des vecteurs qui la compose peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.*

6- *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

7- *Cela équivaut à dire que toute sur-famille d'une famille liée est liée.*

8- *En particulier toute famille contenant $\overrightarrow{0}$, ou deux vecteurs colinéaires, est liée.*

9- *Attention à ne pas dire que u et v sont liée $\Longleftrightarrow$ il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$, car c'est faux si $v = \overrightarrow{0}$ et $u \neq \overrightarrow{0}$ (en revanche c'est vrai $v \neq \overrightarrow{0}$).*

Proposition 8.3.2. *(Application linéaires et familles libres) Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un morphisme de E dans F. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E*

1- *Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$est liée. Bien entendu, si la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.*

2- *Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre et si f est injective, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre.*

Interprétation

Toute application linéaire transforme une famille liée en une famille liée. Une application linéaire injective transforme une famille libre en une famille libre.

Familles génératrices

Définition 8.3.5. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est génératrice, ou encore que les vecteurs de cette famille engendrent E si $Vect\{u_i, i \in I\} = E$, C'est-à-dire :*

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K}, u = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

Remarque 8.3.2. *La famille $u_1, ..., u_n$ est génératrice dans E si pour tout vecteur v de E, il existe n scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que : $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.*

Proposition 8.3.3. *(Application linéaires et familles génératrice) Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un morphisme de E dans F. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E*

1- *Si la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de Imf.*

2- *En particulier, si f est surjective, alors la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de F.*

Bases

Définition 8.3.6. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.*

Théorème 8.3.1. *Dans tout espace vectoriel E non réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, il y a des bases.*

Remarque 8.3.3. - *Ce théorème sera démontré dans les cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.*

- *On a précisé $E \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ car dans l'espace $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ il n'y a même pas de famille libre !*

Proposition 8.3.4. *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de $E \Longleftrightarrow$ tout vecteur v de E peut s'écrire, et de manière unique, comme une combinaison linéaire des vecteurs u_i : $v = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$.*

Les coefficients λ_i sont appelés coordonnées, de v dans la base $(u_i)_{i\in I}$.

Remarque 8.3.4. *(Cas d'une famille finie de vecteurs)*

La famille $(u_1, ..., u_n)$ est une base de E si pour tout v de E, il existe n-uplet unique $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tels que : $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Proposition 8.3.5. *(Application linéaires et bases) Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$. Pour toute famille $(v_i)_{i\in I}$ des vecteurs de F, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que : $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$:*

1- *f est injective $\Longleftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.*

2- *f est surjective $\Longleftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice dans F.*

3- *f est bijective $\Longleftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de F.*

4- *Si la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de Imf.*

5- *En particulier, si f est surjective, alors la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de F.*

8.4 Rang d'une application linéaire

Définition 8.4.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On dit que l'application f est de rang fini si l'espace vectoriel $f(E)$ est de dimension finie. On appelle alors rang de f la dimension de $f(E)$ et on le note $rg(f)$.*

Remarque 8.4.1. *Supposons que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Une application linéaire $f : E \to F$ de rang fini est surjective si et seulement si $rg(f) = dim(F)$. En effet, elle est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 8.4.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que l'espace E est de dimension finie. Alors l'application f est de rang fini et*

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + rg(f).$$

Nous allons appliquer ce théorème à la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels

Corollaire 8.4.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors la somme $F1 + F2$ et l'intersection $F_1 \cap F_2$ sont de dimension finie et on a l'égalité*

$$dim(F_1 + F_2) + dim(F_1 \cap F_2) = dim(F_1) + dim(F_2).$$

Corollaire 8.4.2. *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie tels que $dim(E) = dim(F)$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Dans ce cas les assertions suivantes sont équivalentes :*

1- *L'application f est un isomorphisme,*

2- *L'application f est injective,*

3- *L'application f est surjective.*

L'équivalence ne vaut que si E et F sont de même dimension.

8.5 Application linéaires et bases

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et soit $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ une base de E. Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors pour tout nuplet $(\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_n)$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad f(\overrightarrow{e}_i) = \overrightarrow{f}_i$$

Remarque 8.5.1. *On peut décrire explicitement l'application f obtenue : l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ est le vecteur $\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{f}_i$.*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et soit F un espace vectoriel. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $dim(F) = dim(E)$.

Bibliographie

[1] - Elie BELORIZKY, Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et des ingénieurs, EDP Sciences, Paris, (2007).

[2] - C. ASLANGUL, Des mathématiques pour les sciences2, Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes, De Boeck, Bruxelles (2013).

[3] - F. COTTET-EMARD, Analyse : tome 1 cours et exercices corrigés, DeBoeck, Bruxelles (2005).

[4] - P. PHILIBOSSIAN, Analyse : rappels de cours, exercices et problèmes résolus, Dunod Paris (1998).

[5] - K. ALLAB, éléments d'analyse (Fonction d'une variable réelle). OPU Alger, (1986).

[6] - J M Monier, Algèbre 1 : cours et 600 exercices corrigés, 2ème Ed., Dunod Paris (2000)

[7] - C. BABA HAMED, Algèbre 1 : rappels de cours et exercices avec solutions, OPU (1992)

[8] - G. CHRISTOL, Algèbre1 : ensembles fondamentaux arithmétique polynômes, Ellipses Paris, (1995).

[9] - http :// www. les-mathématiques.net