الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد البشير الإبراهيمي برج بوعريريج
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة احصاء 3

موجهة لطلبة سنة ثانية ليسانس جميع التخصصات

تأليف الباحث:

د. دشاش محمد الصالح

سلسلة المطبوعات الجامعية المحكمة

فهرس المطبوعة

قائمة الأشكال

قائمة الجداول

مقدمة:

يعتبر الإحصاء من أهم الأدوات العلمية التي تساهم في فهم الظواهر العشوائية وتحليلها بأسلوب علمي ومنهجي. فهو يقدّم إطارًا رياضيًا يساعد على تفسير الكثير من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية، بالاعتماد على النماذج الاحتمالية الدقيقة. وتُعَدّ التوزيعات الاحتمالية الركيزة الأساسية في هذا المجال، إذ تصف القيم الممكنة للمتغيرات العشوائية وتحدد احتمالات وقوعها، مما يتيح دراسة معمقة للبنية الرياضية التي تحكم العشوائية.

ومن هذا المنطلق، يأتي مقياس **إحصاء 3** ليتناول بشكل منهجي أهم القوانين المرتبطة بالتوزيعات الاحتمالية، سواءً المنفصلة أو المتصلة، مع التطرق إلى بعض أشكال التقارب بين التوزيعات، بالإضافة إلى دراسة المتغيرات العشوائية الثنائية باعتبارها امتدادًا ضروريًا لفهم التوزيعات المشتركة وخصائصها. ويواكب هذا الطرح النظري جانب تطبيقي مدعّم بسلاسل من الأمثلة والتمارين، قصد تمكين الطالب من ترسيخ المفاهيم واستيعابها وتوظيفها في مختلف المجالات العلمية والبحثية.

سوف يتم التركيز في هذا المطبوعة على تسهيل فهم مفاهيم الاحصاء والتوزيعات الاحتمالية ي من خلال تقديم أمثلة وتمارين تطبيقية قريبة من الواقع، بهدف تسهيل عملية الفهم وتوضيح كيفية تطبيق المفاهيم في المواقف العملية. الهدف هو تمكين الطلبة من استخدام الأدوات الإحصائية بشكل فعال في دراساتهم المستقبلية وفي واقعهم العملي.

كما تهدف هذه المطبوعة والخاصة بمقياس **إحصاء 3** إلى تمكين الطالب من:

-التعرف على التوزيعات الاحتمالية في صورها المختلفة (منفصلة ومتصلة) وفهم القوانين الأساسية التي تحكمها.

-إدراك العلاقة بين بعض التوزيعات الاحتمالية من خلال دراسات التقارب والتقريب.

-التعمق في دراسة المتغيرات العشوائية الثنائية والتوزيعات المشتركة وفهم خصائصها الأساسية.

-اكتساب مهارات رياضية وإحصائية تساعد الطالب على تحليل الظواهر العشوائية وتفسيرها في مختلف المجالات.

-الربط بين الجانب النظري والتطبيقي عبر حل التمارين التطبيقية والاعتماد على الأمثلة العملية لترسيخ المفاهيم.

-تهيئة الطالب لمواصلة دراسته في مقاييس أكثر تقدماً مثل الاستدلال الإحصائي ونماذج الاحتمالات المتقدمة.

- متطلبات الكتاب وفق المقرر الوزاري المعتمد:

ان إعداد هذا الكتاب انسجامًا مع المقرر الوزاري المعتمد لمقياس **إحصاء 03**، حيث رُوعي فيه التسلسل البيداغوجي للمحاور والمضامين، مع التركيز على الجوانب الأساسية التي يحتاجها الطالب لفهم موضوع التوزيعات الاحتمالية وتطبيقاتها. وقد تم تقسيم المحتوى إلى أربعة محاور رئيسية تشمل:

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة: التعريف وأهم القوانين الأساسية مع أمثلة تطبيقية.

التوزيعات الاحتمالية المتصلة: دراسة القوانين الأساسية وتوضيح خصائصها واستعمالاتها.

تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية: إبراز الروابط بين النماذج المختلفة وكيفية الاستفادة منها في التقديرات والتقريبات.

المتغيرات العشوائية الثنائية: عرض المفاهيم الأساسية للتوزيعات المشتركة وخصائصها.

كما تم الحرص على إدراج ملخصات وسلاسل تمارين تطبيقية في نهاية كل محور، لتدعيم الجانب النظري وتسهيل استيعاب المفاهيم، وفق ما نص عليه البرنامج الرسمي الصادر عن وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

المحور الأول:

مفاهيم عامة

General Concepts

الأهداف التعليمية
⊙ تعريف علم الإحصاء؛
⊙ مفاهيم إحصائية؛
⊙ مصادرجمع البيانات؛
⊙ أنواع العينات

المحور الأول: مفاهيم عامة

من المفاهيم الشائعة بين الناس عن الإحصاء، ما هي الأرقام والبيانات الرقمية فقط، مثل عدد السكان، وأعداد المواليد، وأعداد الوفيات، ومن ثم ارتبط مفهوم الناس عن الإحصاء بأنه عد أو حصر الأشياء والتعبير عنها بأرقام، وهذا هو المفهوم المحدد لعلم الإحصاء، ولكن الإحصاء كعلم، هو الذي يهتم بطرق جمع البيانات، وتبويبها، وتلخيصها بشكل يمكن الاستفادة منها في وصف البيانات وتحليلها للوصول إلى القرارات سليمة في ظل ظروف عدم التأكد.

أولا: بعض المفاهيم الإحصائية

1: الوحدة الإحصائية (العنصر)

الوحدة الإحصائية هي العنصر الأساسي والخاصية المدروسة في المجتمع الإحصائي.

2: المجتمع الإحصائي:

يمثل مجموع الوحدات الإحصائية موضوع البحث أو الدراسة، فقد تكون كائن حي أو شيء أخر والتي تشترك فيما بينها بصفات معينة، والمجتمع الإحصائي قد يكون محدودا وبالتالي يمكن معرفة حجمه وعدد مفرداته، أو غير محدود فمن الصعب حصره والذي يترتب عنه جزء محدود منه وهذا ما يسمى بالعينة الإحصائية.[1]

يُعرف المجتمع الإحصائي بأنه مجموعة كل البيانات (القيم) الخاصة بالظاهرة محل الدراسة والمجمعة من كل المفردات المقصودة بهذه الدراسة.[2]

3: العينة الإحصائية: نظرا لكون المجتمع كبيرا في أغلب الدراسات الإحصائية ويصعب الوصول إلى جميع وحداته، فإن العينة هي جزء من المجتمع الإحصائي، التي تعتبر هي الحل، بحيث يتم اختيارها وتعكس المجتمع المأخوذة منه ككل، كما أن هذه العينة الإحصائية تكون في عدة أشكال كالتالي:[3]

- **العينة العشوائية:** هي العينة التي تدرس المجتمعات التي لها خصائص متجانسة.
- العينة الطبقية: تخص المجتمعات الغير متجانسة، أي مجتمع متكون من فئات اجتماعية مختلفة.

[1] Chamoun Chamoun, Elements De Statistiques Et De Probabilités , Opu,2009, p 5.

[2] محمد عبد العال النعيمي ومزهر شعبان العاني، الأساليب الإحصائية باستخدام حزمة MATLAB، دار وائل، عمان، 2008، ص18.

[3] Bernard Verlant, Statistiques Et Probabilités, Berti Edition, 2008, p 10.

- **العينة ذات المراحل المتعددة:** تستعمل في دراسة مراحل مختلفة، مثل المستوى التعليمي، مهما كان نوعها، فهي تساعد على اتخاذ قرارات صائبة.
- **الطرق الإحصائية:** هي مجموعة من النظريات التي تستخدم في جمع البيانات وتبويبها وعرضها واستخلاص وتفسير النتائج.[1]

4.المتغير الإحصائي:

يشير المتغير الإحصائي لإلى الصفة أو الكمية التي تتغير قيمتها من عنصر إلى أخر، مثل أطوال الأشخاص، الأوزان، ...إلخ، وهي تنقسم إلى قسمين:[2]

أ:المتغيرات الكمية: هذا النوع من المتغيرات نجد فيه نوعين من المتغيرات:

- **المتغيرة الكمية المتقطعة:** وهي متغيرات تأخذ قيم صحيحة، لا يمكن تجزئتها مثل عدد السيارات، عدد الأفراد عدد الطاولات...إلخ؛
- **المتغيرة الكمية المستمرة:** هي المتغيرة التي تأخذ قيم يمكننا تجزئتها في شكل فئات، ذلك راجع إلى كبر البيانات، أو قيم غير منتهية، بحيث تقسم مجال الدراسة أو البحث في شكل مجالات جزئية تسمى بالفئات.[3]

ب: المتغيرات النوعية: هي المتغيرات التي توصف الظاهرة المدروسة بشكل غير رقمي أو عددي، بحيث تدل على الصفة أو النوع مثل اللون، الجنس، المستوى التعليمي...إلخ، كما أنها تنقسم إلى قسمين:[4]

- **المتغيرات النوعية الرتبية: Ordinal. S.V** هي بيانات اسمية أو وصفية تعبر عن الترتيب أو التفضيل، مثل: المستوى التعليمي، التقدير العلمي، الجودة ...الخ.
- **المتغيرات النوعية الاسمية: Nominal. S.V** هي بيانات أيضا اسمية أو وصفية مع عدم إمكانية ترتيبيا تصاعدياً أو تنازلياً مثل الألوان، فصيلة الدم، الديانة ...الخ.

ثانيا: مصادر وأساليب جمع البيانات

إن مصادر جمع البيانات لها نوعان من المصادر:

---

[1] محمد حسين رشد، **الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي**، دار الصفا للنشر والتوزيع، الأردن، 2008، ص16.

[2] محمد صبحي أبو صالح، **مبادئ الإحصاء**، دار اليزاوي العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2007، ص30.

[3] جيلاطو جيلاني، **الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2002، ص7.

[4] سالم عسي بدر، **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، دار الميسرة للنشر والتوزيع، الأردن، 2007، ص31.

1. المصادر الأولية أو الميدانية:

بحيث يقوم فيه الباحث بجمع البيانات بنفسه وبصفة مباشرة من عينات البحث عن طريق مقابلات أو استبيانات، لكن هذه الطريقة تأخذ وقتا طويلا وتستهلك الجهد المادي؛ بالرغم من نجاعتها وصدقها في جمع البيانات.

2. المصادر الثانوية:

يقوم الباحث بجمع البيانات والمعلومات بطريقة غير مباشرة، مثل المواقع المختلفة، النشرات، الدراسات، الجهات والهيئات الرسمية.

3. أساليب جمع البيانات الإحصائية:

- **أسلوب الحصر الشامل:** يعرف بأنه أسلوب يجمع المعلومات والبيانات من جميع الوحدات الإحصائية دون استثناءات مما يجعله دقيقاً، ويتطلب الوقت والجهد والمال.
- **أسلوب المعاينة:** يعرف على أنه أسلوب لجمع البيانات والمعلومات من مجموعة صغيرة بناءاً على أسس علمية، بحيث يتم تعميم نتائجها على جميع أفراد المجتمع التي يصعب حصرها، لكن ما يعاب علي هذه الطريقة أنها أسلوب غير دقيق ولكن يوفر الوقت والجهد والمال.

مثال01:

من خلال المعطيات التالية:

سوف يتم تحديد الوحدة الإحصائية، المجتمع الإحصائي، الصفة، طبيعة المتغير في شكل جدول إحصائي:

تحديد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، الصفة وطبيعتها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (01): خصائص المجتمع

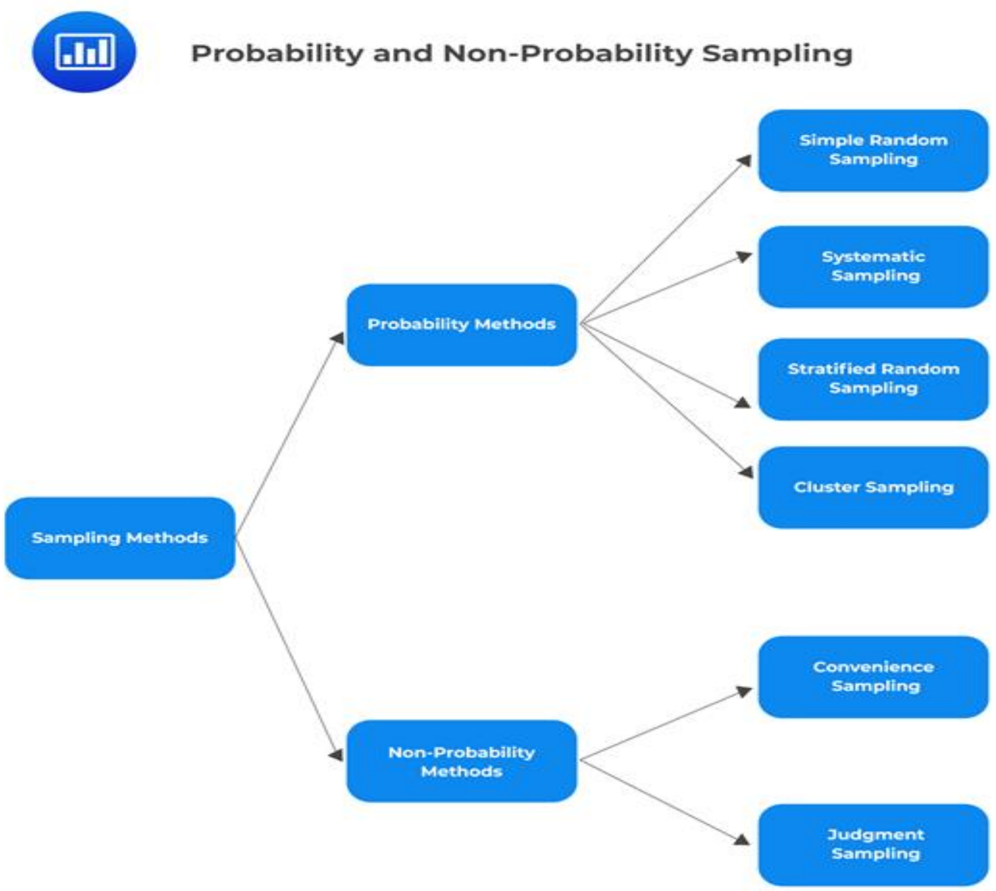
المجتمع	الوحدة الإحصائية	الصفة	نوع المتغير
500موظف	الموظف	عدد أيام الغياب الشهري	كمّي (منفصل)
80عدّاء محترف	العدّاء	سرعة الجري (متر/ثانية)	كمّي (متصل)
السيارات	السيارة	نوع الوقود المستخدم	كيفي (اسمي)
التلاميذ	التلميذ	المستوى الدراسي	كيفي (ترتيبي)
المدن	المدينة	عدد المكتبات العمومية	كمّي (منفصل)

ثالثا: أنوا ع العينات

عند إجراء بحث علمي أو دراسة إحصائية، لا يمكننا عادة دراسة كل فرد في المجتمع الذي نريد دراسته (المجتمع الإحصائي). لذلك، نلجأ إلى أخذ عينة من هذا المجتمع، وهي مجموعة فرعية تمثل المجتمع بأكمله. اختيار نوع العينة المناسب له تأثير كبير على دقة نتائج الدراسة، حيث توفير الوقت والتكلفة، العمليّة: في بعض الحالات، يكون من المستحيل دراسة المجتمع بأكمله (مثل مجتمع جميع سكان العالم)، الدقة: عند اختيار العينة بشكل صحيح، يمكن الحصول على نتائج دقيقة تعكس خصائص المجتمع.

يمكن تقسيم العينات إلى نوعين رئيسيين كما هو مبين في الشكل التالي: [1]

شكل رقم (01): أنواع العينات



[1] - David S. Moore, George P. McCabe, ***Introduction to the Practice of Statistics***, Sixth Edition, Bruce A. New York, Craig, pp: 65-67

1. العينات الاحتمالية (العشوائية): *Probability Sampling*

في هذا النوع، يتم اختيار الأفراد من المجتمع بشكل عشوائي، بحيث يكون لكل فرد فرصة معروفة وغير صفرية للاختيار. وهذا يضمن تمثيلية العينة للمجتمع.

- **العينة العشوائية البسيطة:** ***Simple Random Sample*** يتم اختيار الأفراد من المجتمع بشكل عشوائي تمامًا، كما لو كنا نسحب أسماء من قبعة.
- **العينة العشوائية الطبقية:** ***Stratified Random Sample***

يتم تقسيم المجتمع إلى طبقات مثل العمر، الجنس، والمستوى التعليمي، ثم يتم اختيار عينة عشوائية من كل طبقة بنسب تتناسب مع حجمها في المجتمع. يستخدم الباحث العينة الطبقية عندما يكون التركيب النسبي للمجتمع معروفًا، وعندما يتكون المجتمع من طبقات تختلف بشكل واضح في خصائص معينة أو أكثر. يتم اللجوء إلى هذه الطريقة لضمان تمثيل جميع الطبقات في العينة المختارة. عادةً ما تكون العينة الطبقية متجانسة داخل كل طبقة، ولكنها متباينة بين الطبقات. مثال على ذلك: سوق يحتوي على أقسام مختلفة مثل قسم الأطفال، قسم الرجال، وقسم النساء؛ حيث تُعتبر هذه الأقسام طبقات يجب اختيار عينات منها جميعًا لكي تمثل المجتمع الإحصائي بشكل دقيق.

- **العينة العشوائية العنقودية:** ***Cluster Random Sample***

يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات طبيعية (مثل الأحياء أو المدارس)، ثم يتم اختيار عينة عشوائية من هذه المجموعات. بعد ذلك، يتم دراسة جميع الأفراد داخل العناقيد المختارة. تختلف العينة العنقودية عن العينة الطبقية في مبدأ تكوين العناقيد؛ حيث تكون العناقيد في العينة العنقودية متجانسة من حيث الخصائص داخلها، لكنها تختلف عن بعضها البعض. على عكس العينة الطبقية، حيث تكون الطبقات متباينة فيما بينها بناءً على خصائص معينة. على سبيل المثال، في العينة الطبقية، يتم تقسيم السوق إلى أقسام مثل "ملابس للأطفال"، "ملابس للرجال"، و"ملابس للنساء"، بينما في العينة العنقودية، يتم تجميع كل هذه الأقسام في مكان واحد، مما يتيح لك شراء جميع احتياجاتك من نفس المكان دون الحاجة إلى زيارة أقسام مختلفة. في العينة العنقودية، يكفي أخذ عينة من بعض العناقيد لأنها تمثل المجتمع بشكل كامل، بينما في العينة الطبقية، يجب أخذ عينات من جميع الطبقات لضمان تمثيل كل فئة بشكل صحيح.

- **العينة العشوائية المنتظمة:** ***Systematic Random Sample*** يتم اختيار الأفراد من المجتمع بفترات زمنية أو مكانية منتظمة، يكون اختيار المفردات هنا على أساس تقسيم العدد الكلي للمجتمع على حجم العينة المطلوبة، ومن ثم توزيع مفردات المجتمع الأصلي وبشكل متساوٍ ومنتظم على الرقم الناتج من ذلك التقسيم.

2. العينات غير الاحتمالية: *Non-Probability Sampling*

العيّنات غير الاحتمالية هي تلك التي لا تعتمد على أســاس احتمالي لاختيار الأفراد من المجتمع الإحصــائي. تتضمن هذه العيّنات عدة أنواع، ومنها:

- **العينة العمدية:** ***Purposive Sampling***

يتم اختيار الأفراد بناءً على معايير محددة أو أهداف بحثية معينة. يُختار الأفراد بشــكل متعمد لأنهم يمتلكون خصائص معينة تتناسب مع موضوع البحث.

- **العينة المتاحة:** ***Convenience Sampling***

يتم اختيار الأفراد بناءً على ســهولة الوصــول إليهم. هذه الطريقة تعتبر أقل دقة نظرًا لأن الأفراد يتم اختيارهم دون اعتبار للاعتبارات العشوائية.

- **العينة الحصصية :** ***Quota Sampling***

تُســتخدم لتحديد حصــص معينة لمجموعات مختلفة داخل المجتمع بناءً على خصــائص معينة (مثل العمر أو الجنس)، ويتم اختيار الأفراد من كل مجموعة حسب الحصة المحددة.

- **العينة الثلجية:** ***Snowball Sampling***

تُســتخدم عندما يصــعب الوصــول إلى الأفراد المســتهدفين. يبدأ الباحث بتحديد فرد من العينة ومن ثم يطلب من هذا الفرد ترشيح آخرين، وهكذا.

ملاحظة: تتميز هذه الأنواع بأنها لا تعتمد على أســاليب الاحتمالات العشــوائية، مما قد يؤثر على دقة تمثيل العينة للمجتمع الأصلي.

إذن، ما يمكن استنتاجه أن الفروق الرئيسية:

في العينة الطبقية، يتم تقسيم المجتمع إلى فئات متجانسة داخليًا ولكن متباينة بين الفئات (مثل تقطيع السوق حسب الفئات العمرية أو النوعية).

في العينة العنقودية، العناقيد تكون متجانسة فيما بينها ولكن تحتوي على تنوع داخلي (مثل اختيار حي كامل يحتوي على مجموعة متنوعة من الأفراد). العينة العشوائية العنقودية تسمح بدراسة مجموعة متنوعة من الأفراد داخل العنقود الواحد دون الحاجة إلى أخذ عينة من جميع العناقيد، بينما في العينة الطبقية يجب أخذ عينات من جميع الطبقات لضمان تمثيل كل فئة بخصائصها الفريدة.

المحور الثاني :

قوانين التوزعات الاحتمالية المنفصلة

Sampling Distribution

الأهداف التعليمية

1. توزيع برنولي
2. التوزيع ثنائي الحدين
3. توزيع بواسون
4. التوزيع الهندسي
5. التوزيع فوق الهندسي

تمهيد:

تُعَدّ **التوزيعات الاحتمالية المنفصلة** من أهم النماذج الإحصائية التي تُستخدم لوصف المتغيرات العشوائية التي تأخذ قيماً عددية منفصلة ومحددة، مثل عدد النجاحات في سلسلة من التجارب، أو عدد الحوادث خلال فترة زمنية معينة. وتمثل هذه التوزيعات الإطار الرياضي الذي يمكّن من حساب احتمالات وقوع مختلف القيم الممكنة، مما يساعد على فهم الظواهر العشوائية وتحليلها بدقة.

ويقوم هذا الجزء من المقياس على عرض **القوانين الأساسية للتوزيعات المنفصلة**، والتي تشمل دوال الكتلة الاحتمالية، التوزيع التراكمي، إضافة إلى مفاهيم المتوسط والتباين والانحراف المعياري. كما يتناول أهم النماذج المنفصلة مثل :**توزيع برنولي**، **التوزيع ثنائي الحدين**، **توزيع بواسون**، **التوزيع الهندسي**، **والتوزيع فوق الهندسي**، مرفقة بتوضيح خصائصها وقوانينها الأساسية.

بهذا يُوفّر هذا المحور للطالب قاعدة معرفية متينة تساعده على إدراك كيفية استخدام التوزيعات المنفصلة في دراسة الظواهر الإحصائية وتطبيقها في مختلف المجالات العلمية والعملية.

1- توزيع برنولي:

يُعَدّ توزيع برنولي من أبسط التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، وهو الأساس الذي تُبنى عليه باقي التوزيعات مثل **الثنائي الحدين** .يمثل هذا التوزيع تجربة عشوائية لها **نتيجتان فقط**:

- إما نجاح ونرمز له بالرمز P
- إما فشل ونرمز لح برمز q حيث $q = 1-p$

مثال:

إذا قمنا برمي قطعة نقد عادلة:

- نجاح = الحصول على صورة باحتمال p=0.5
- فشل = الحصول على كتابة باحتمال q=0.5

فإن المتغير العشوائي X الذي يمثل ظهور الصورة يتبع **توزيع برنولي**:

$P(X=1) = 0.5$ $P(X=0)=0.5$

ونكتب $x \longrightarrow B\ (1, p)$

ويكون التوزيع الاحتمالي الخاص به كالتالي:

X	0	1	Σ
P(X=xi)	0.5	0.5	1

وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع كالتالي:

$$P(X = x) = p^x q^{1-x} \qquad x = 0,1$$

خصائص توزيع برنولي:

- الامل الرياضي: $E(X) = p$
- التباين: $Var(X) = p(1-p) = p.q$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$

مثال: بالرجوع الى المثال السابق، حيث احتمال النجاح 0.7 والفشل 0.03، فإن الخصائص العددية لهذا التوزيع تكون كاتالي:

– **الأمل الراضي**	$(E(X)) = p = 0.30$
– **التباين**	$(Var(X)) = p(1-p) = 0.21$
– **الانحراف المعياري**	$(\sigma) = \sqrt{0.21} \approx 0.458$

2- توزيع ثنائي الحدين: *Binomial Distribution*

أ. **تعريف**: يستند هذا التوزيع على تجربة برنولي إذا تكررت n مرة، أي إذا كان:

- احتمال ظهور حدث ما (النجاح) في تجربة واحدة هو p
- احتمال عدم ظهور الحدث (الفشل) في تجربة واحدة هو $q=1-p$

فإن احتمال ظهور الحدث x مرة من بين n مرة يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$f(x)= P(X=xi) =C^{n}_{x}\, p^{x}\, q^{n-x} \qquad X\sim B(n,p)$$

حيث: $\Sigma\ P(X=xi) =\Sigma C^{n}_{x}\, p^{x}\, q^{n-x} = 1$

حيث:

n: عدد مرات إجراء التجربة (عدد المحاولات)

p: احتمال وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال النجاح)

q: احتمال عدم وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال الفشل)

x: عدد مرات وقوع الحدث (عدد مرات النجاح) وهو متغير يأخذ القيم 0,1,2

ب.الخصائص العددية لهذا التوزيع:

- الامل الرياضي: $E(X) = n.p$
- التباين: $Var(X) = p(1-p) = n.\ p.q$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{(n.p(1-p))}$

مثال: في لعبة حظ، احتمال الفوز في محاولة واحدة هو p=0.3 إذا لعبنا n=4 مرات، فما احتمال الفوز بالضبط مرتين؟

- حساب الامل الرياضي والتباين؟

الحل:

المتغير العشوائي X عدد مرات الفوز يتبع توزيع ثنائي الحدين:

إذن: $X \sim B(n=4,p=0.3)$

$n=4$

$x=2$

$p=0.3$

$q=1-p=0.7$

احتمال الفوز مرتين:

$$f(x)= P(X=xi) = C^n_x\, p^x\, q^{n-x} = f(2)= P(X=2) = C^2_4 p^2\, q^{2-4} = \mathbf{0.265}$$

الأمل الراضي	$E(X)=np=4\times0.3=1.2$
التباين	$Var(X)=npq=4\times0.3\times0.7=0.84$
الانحراف المعياري	$\sigma=Var(X)=0.84\approx0.9165$

3.توزيع بوسون:

أ. تعريف: توزيع بواسون (Poisson Distribution) هو **توزيع احتمالي إحصائي** يُستخدم لوصف عدد المرات التي يحدث فيها حدث معين خلال **فترة زمنية محددة أو مساحة معينة**، وهو حادث نادر الوقوع مثل عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز الاتصال في دقيقة واحدة، عدد الحوادث المرورية في شارع معين خلال يوم، عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من كتاب[1].

بشرط أن:

1. يحدث الحدث **بمعدل ثابت** (λ)،
2. وتكون الأحداث **مستقلة عن بعضها البعض،**
3. لا يمكن أن يحدث أكثر من حدث واحد في نفس اللحظة أو النقطة.

حيث تتكون دالة الكثافة الاحتمالية بالصيغة الرياضية التالية:

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x=0,1,2,......,\infty$$

حيث $e=2.718$ وهو مقدار ثابت ويكتب $X \sim P(\lambda)$

كذلك من شروط أن يكون هذا التوزيع احتماليا لا بد أنم يكون :

$$\sum P(x)=\sum\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=1$$

ب.الخصائص العددية لهذا التوزيع:

- الامل الرياضي: $E(X) = \lambda$
- التباين: $Var(X) = \lambda$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

[1] عبد المحسن، عادل، **مدخل إلى الإحصاء والاحتمالات**. دار المريخ للنشر، الرياض، 2016، ص 161.

مثال:

يتلقى مركز اتصالات في المتوسط **3مكالمات كل 10 دقائق**.

احسب احتمال أن يتلقى المركز **بالضبط 5 مكالمات خلال 10 دقائق**؟

الحل:

-معدل الأحداث (المتوسط) $\lambda=3$

-عدد الأحداث المطلوبة $k=5$

- ثابت أويلر $e=2.718$

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x=0,1,2,.......,\infty$$

بالتوعيض نجد:

$$p(x)=\frac{\mathbf{243}\times \mathbf{0.0498}}{\mathbf{120}}=\mathbf{10.008}$$

إذن، احتمال أن يتلقى المركز بالضبط 5 مكالمات خلال 10 دقائق هو تقريبًا 0.10

أي حوالي 10٪.

مثال02:

اذا كان 2من بين كل 100مصباح في إنتاج أحد المصانع معيب، في عينة من 500مصباح تم إنتاجها بالمصنع خلال أحد الأيام أوجد:

-القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل:

- الامل الرياضي: $E(X) = \lambda=n.p= 500(2/100)=10$
- التباين: $Var(X) = \lambda=10$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\lambda}=3.16$

4. توزيع الفوق الهندسي:

أ.تعريف:

يعدّ التوزيع الهندسي توزيعًا احتماليًا يشبه التوزيع الثنائي من حيث الشروط، إذ يطبق على الحوادث الخاضعة لتوزيع برنولي المتكررة n مرة. غير أن الفرق بينهما يتمثل في أن التوزيع الهندسي لا يهتم بعدد مرات النجاح أو الفشل، بل يُركّز على عدد المحاولات اللازمة لحدوث أول نجاح في التجربة[1].

ويكتب: $X\sim G(p.q)$

إذا رمزنا لاحتمال النجاح بـ p ولاحتمال الفشل بـ q فإن احتمال أي قيمة لـ X في حالة التوزيع الهندس ي يعبر عنها بدالة الاحتمال كما يلي

$$P(X=x)=p.q^{x-1} \qquad x=1,2,3,\dots,\infty$$

ب.الخصائص العددية لهذا التوزيع:

- الامل الرباضي: $E(X)=\frac{1}{p}$
- التباين: $Var(X)=\frac{q}{p^2}$
- الانحراف المعياري: $\sigma=\sqrt{\frac{q}{p^2}}$

مثال01: لاعب رميات حرة في كرة السلة يُصيب الهدف في كل رمية باحتمال p=0.7

المطلوب:

- حساب احتمال أن يُحرز اللاعب أول هدف في الرمية الثالثة؟

- أحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع؟

[1] عبابسة، عبد القادر .**الاحتمالات والإحصاء التطبيقي** .دار الهدى للطباعة والنشر، الجزائر، 2018، ص 134.

الحل:

التوزيع هنا هندسي لأننا ننتظر **أول نجاح**، وصيغة الاحتمال هي:

X~G(0.07, 0.3) X~G(p.q)

حساب احتمال أن يُحرز اللاعب أول هدف في الرمية الثالثة n=3

$$P(X = x) = p.q^{x-1} \qquad x = 1,2,3, \dots, \infty$$

$$P(x=3)= 0.7\times0.\,3^{3-1}=0.063$$

- حساب المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع:

- الامل الرباضي: $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.7} = \mathbf{1.42}$
- التباين: $Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0.3}{0.7^2} = \mathbf{0.612}$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \sqrt{\frac{0.3.}{0.7^2}} = 0.\mathbf{782}$

مثال02:

يريد شخص تجربة الاتصال بصديق، ولكن الخط مشغول في كل محاولة باحتمال q=0.8(أي أن احتمال الفشل 80%)، وبالتالي احتمال النجاح في الاتصال هو.p=1−0.8=0.2

احسب ما يلي:

- احتمال أن ينجح الاتصال في المحاولة الرابعة؟
- المتوسط (القيمة المتوقعة)؟
- التباين والانحراف المعياري؟

الحل: بنفس الطريقة السابقة نجد :

- **احتمال أن ينجح الاتصال في المحاولة الرابعة:**

$$P(X = x) = p.q^{x-1} \qquad x = 1,2,3,\dots,\infty$$

$$P(x=4)= 0.2\times 0.8^{4-1}= \mathbf{0.1024}$$

- **المتوسط (القيمة المتوقعة)، التباين والانحراف المعياري:**
- الامل الرياضي: $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = \mathbf{5}$
- التباين: $Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0.8}{0.2^2} = \mathbf{20}$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \sqrt{\frac{0.8}{0.2^2}} = \mathbf{4.472}$

5. التوزيع فوق الهندسي

أ. تعريف:

التوزيع فوق الهندسي هو **توزيع احتمالي منفصل** يُستخدم عندما نقوم **بسحب عينة من مجتمع محدود دون إرجاع**، ويحتوي هذا المجتمع على **نوعين من العناصر** (عناصر ناجحة وأخرى فاشلة) يهتم هذا التوزيع بحساب **احتمال ظهور عدد معين من العناصر الناجحة** في العينة المسحوبة، وذلك اعتمادًا على خصائص المجتمع الأصلي وحجم العينة[1].

عند دراستنا للتوزيع الثنائي، نجد أن تكوين العينة يتم عادةً عن طريق **السحب مع الإرجاع**، أي أنّ كل عنصر يُعاد إلى المجتمع بعد كل سحب.

وينتج عن ذلك تحقق شرطي تطبيق التوزيع الثنائي، وهما:

1. **استقلال التجارب** عن بعضها البعض.
2. **ثبات احتمال النجاح** في كل تجربة، ويرمز له بـP.

[1] Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K, (2017). ***Probability and Statistics for Engineers and Scientists*** , (10th ed.). Pearson Education, p154.

غير أنّه في بعض الحالات الواقعية، لا يمكن إجراء السحب مع الإرجاع، كما هو الحال في **الفحوص الطبية** أو **اختبارات الجودة**، حيث يُستبعد العنصر بعد سحبه.

في مثل هذه الحالات، **يختل شرطا تطبيق التوزيع الثنائي** (أي الاستقلال وثبات p)مما يستدعي استعمال **توزيع احتمالي آخر** يُعرف باسم **التوزيع فوق الهندسي**. ويكتب $X \sim H(N.N_1.n)$

وعليه، فإنّ **احتمال الحصول على عدد معيّن** X من النجاحات ضمن **n** تجربة برنولية غير مستقلة، يُحسب وفق **قانون التوزيع فوق الهندسي** الذي يُعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \quad X=0,1,2,3,\dots,n \qquad n=1,2,3,\dots$$

N **:** عدد عناصر المجتمع الكلي.

N1 :عدد عناصر النجاح في المجتمع.(حجم المجتمع الذي تتوفر فيه الخاصية المدروسة)

N2: حجم المجتمع الذي لا تتوفر فيه الخاصية المدروسة

n : حجم العينة المسحوبة.

x : عدد النجاحات في العينة.

وبالتالي فإن شروط استخدام قانون توزيع فوق الهندس ي هي:

أ- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المراتn ؛

ب – السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة؛

ج- احتمال النجاح في التجربة غير ثابت (تجارب غير مستقلة)

ب.الخصائص العددية للتوزيع فوق الهندسي:

- الامل الرياضي: $E(X)=n.\frac{N1}{N}=n.p= \quad 5$

- التباين $Var(X)=n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

-الانحراف المعياري: $\sigma=\sqrt{\frac{q}{p^2}}=\sqrt{n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

مثال:

في مصنع لإنتاج الأقلام، يوجد صندوق يحتوي على 20 قلمًا، منها:

- 8أقلام معيبة (فاشلة)
- 12قلمًا سليمة (ناجحة)

تم اختيار عينة عشوائية من 5 أقلام دون إرجاع.

المطلوب:

نريد حساب احتمال أن تحتوي العينة على قلمين معيبين بالضبط؟

الحل:

المعطيات:

$N=20$ عدد الأقلام الكلي

$N_1=8$ عدد الأقلام المعيب

$n=5$ حجم العينة

$x=2$ عدد الأقلام المعيبة في العينة

$$X \sim H(N.N_1.n) \qquad X \sim H(20.8.5)$$

$$\mathbf{p(2) = .\frac{28.220}{15504} = 0.397}$$

احتمال أن تحتوي العينة على **قلمين معيبين بالضبط ≈ 0.397 أي حوالي 39.7%**

مثال02 :تتكون لجنة التنظيم في أحد المسابقات الوطنية الجامعية لاختيار أحسن مؤسسة ناشئة من 4ذكور و 7إناث، سحبنا بصورة عشوائية لجنة مؤلفة من أربعة أشخاص لاختيار أحسن مشروع في النهائيات، نفرض أن:

Xالمتغير العشوائي الذي يعبر عن اختيار الذكور.

المطلوب1- : أكتب قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي ؟

2-أحسب التوقع الرياض ي والتباين والانحراف المعياري ؟

1- كتابة قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي :

بما أن التجربة برنولية (مكررة 4 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد الذكور في اللجنة) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات : $X \to H(11,4,4)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_4^x.C_7^{4-x}}{C_{11}^4} \qquad X=0,1,2,3,4 \qquad n=4$$

$$P(X=0)=\frac{C_4^0.C_7^{4-0}}{C_{11}^4}=0.106 \quad ,P(X=1)=\frac{C_4^1.C_7^{4-1}}{C_{11}^4}=0.424 \quad ,P(X=2)=\frac{C_4^2.C_7^{4-2}}{C_{11}^4}=0.38$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3.C_7^{4-3}}{C_{11}^4}=0.0848 \qquad ,P(X=4)=\frac{C_4^4.C_7^{4-4}}{C_{11}^4}=0.003$$

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول التالي :

X	0	1	2	3	4	$\sum$
P(x)	0.106	0.424	0.38	0.0848	0.03	1

2- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=n.\frac{N_1}{N}=n.p=4.\frac{4}{11}=\frac{16}{11}=1.45$$

ب- التباين :

$$V(X)=n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=4.\frac{4}{11}.\frac{7}{11}\left(\frac{11-4}{11-1}\right)=0.64$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}=\sqrt{0.64}=0.8$$

ملخص المحور الأول: قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

اسم ورمز القانون	طبيعة المتغير X	صيغة القانون	التوقع E(X)	التباين V(X)
برنولي $X \to B(1,p)$	X متغير عشوائي منفصل يعكس نتائج تجربة برنولي ويأخذ القيمتين 0 أو 1 (1 يعني أن نتيجة التجربة هي النتيجة التي تهمنا أي نجاح، و0 يعني أن النتيجة لا تهمنا أي فشل)	$P(X=x)=p^x q^{1-x}$ X= 0,1	p	p.q
ثنائي الحدين $X \to B(n,p)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة برنولي n مرة مستقلة عن بعضها البعض (السحب مع الإرجاع)	$P(X=x) = C_n^x (p)^x (q)^{n-x}$ X = 0,1,2,3,4	n.p	n.p.q
بواسون $X \to P(\lambda)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات تحقق حدث معين خلال فترة زمنية أو مكانية معينة.	$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}$ $x = 0,1,2,3,\dots,\infty$	λ	λ
الهندسي $X \to G(p,q)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد المحاولات لتحقق الحدث (النجاح) أول مرة.	$P(X=x) = p.q^{x-1}$ $x = 1,2,3,\dots,\infty$	$\frac{1}{P}$	$\frac{q}{p^2}$
فوق الهندسي $X \to H(N,N_1,n)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة برنولي n مرة	$P(X=x) = \frac{C_{N_1}^x . C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$ $x = 0,1,2,3,\dots,n$	$n.\frac{N_1}{N} = n.p$	$n.p.q(\frac{N-n}{N-1})$

السلسلة الأولى والثانية

– مراجعة شاملة للمتغيرات العشوائية

– قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

جامعة محمد البشير الإبراهيمي برج بوعريريج

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مقياس: إحصاء 03 ....السنة الثانية علوم مالية ومحاسبية

السلسلة رقم 01 .... مراجعة للمتغيرات العشوائية

التمرين 01:

يحتوي إناء على 05 كريات مرقمة من 01 إلى 05، نسحب كريتين من الإناء الواحدة تلوى الأخرى، ويمثل المتغير العشوائي X متوسط الرقمين المسحوبين من الإناء.

المطلوب:

1- عين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X اذا كان السحب بدون ارجاع.
2- عين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X اذا كان السحب مع ارجاع.

التمرين 02:

الجزء الأول نرمي زهرتي نرد متماثلتين مرة واحدة وبصفة عشوائية، ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع الرقمين الظاهرين.

المطلوب:

1- حدد مجال تعريف X وطبيعته.
2- أحسب التوزيع الاحتمالي لـ X؟ تأكد أنه دالة كتلة احتمالية.
3- مثل بيانيا هذا التوزيع.
4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.
5- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X = 1)$، $P(X = 4)$، $P(X \leq 4)$، $P(X < 4)$

الجزء الثاني: نقوم بنفس التجربة العشوائية، ولكن المتغير العشوائي Y يمثل أكبر النتيجتين الظاهرتين.

المطلوب:

1- أجب على نفس الأسئلة(1،2،3،4) الموجود في الجزء أ والمتعلقة بالمتغير العشوائي Y.
2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(Y)$؟ ثم مثلها بيانيا.
3- أحسب الاحتمالية التالية باستعمال التوزيع الاحتمالي (P_i) ودالة التوزيع الاحتمالية $F(Y)$:

$P(Y = 1)$، $P(Y < 3)$، $P(Y \leq 3)$، $P(1 < Y \leq 4)$.

التمرين 03:

في محفظة 07 كتب منها 04 كتب خاصة بالإحصاء والباقي خاصة بالرياضيات، نسحب كتابين من المحفظة وبطريقة عشوائية ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد كتب الاحصاء المسحوبة.

المطلوب:

1- ما هي طبيعة ونوع هذا المتغير؟
2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟ تأكد أنه دالة كثافة احتمالية.
3- ما هو احتمال أن ضمن الكتابين المسحوبين كتاب واحد على الأقل خاص بالإحصاء.
4- أحسب كلا من: $E(X)$، m_2، ثم استنتج $V(X)$.
5- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$.

التمرين 04:

ليكن X متغير عشوائي مستمر يمثل أحد مبيعات المؤسسة في اليوم الواحد، أقصى طاقة انتاجية لها هي 100 وحدة يوميا، ودالة الكثافة الاحتمالية معرفة كما يلي: $f(x) = x/5000$.

المطلوب:

1- تأكد أن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.
2- ما هو احتمال أن تحقق المؤسسة حجما من المبيعات: يفوق95 وحدة، يقل عن 50 وحدة، ما بين 40 و80 وحدة؟
3- أحسب الحجم المتوسط اليومي للمبيعات والانحراف المعياري؟
4- أوجد دالة التوزيع $F(X)$، ثم أحسب الاحتمالات السابقة باستعمال هذه الدالة؟

التمرين الخامس:

ليكن لديك التوزيع الاحتمالي التالي:

$$f(x) = \begin{cases} Kx^2 & si\ x \in [0,3] \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

المطلوب:

1- حدد قيمة الثابت K حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.
2- أحسب الاحتمال: $P(1 < X < 2)$.
3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$.

حل التمرين الأول:

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في حالة السحب بدون ارجاع:

فضاء التجربة :

$$|E| = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

$$E = \begin{Bmatrix} (1.2)(1.3)(1.4)(1.5)(2.1)(2.3)(2.4)(2.5)(3.1)(3.2)(3.4) \\ (3.5)(4.1)(4.2)(4.3)(4.5)(5.1)(5.2)(5.3)(5.4) \end{Bmatrix}$$

$$X = \{X/2.3.4.5\}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{20} \qquad ,P(X=3) = \frac{4}{20}$$

$$P(X=4) = \frac{6}{20} \qquad ,P(X=5) = \frac{8}{20}$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$

3- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في حالة السحب مع الارجاع:

فضاء التجربة:

$$|E| = n^2 = 5^2 = 25$$

$$E = \begin{Bmatrix} (1.2)(1.3)(1.4)(1.5)(2.1)(2.3)(2.4)(2.5)(3.1)(3.2)(3.4) \\ (3.5)(4.1)(4.2)(4.3)(4.5)(5.1)(5.2)(5.3)(5.4)(1.1)(2.2)(3.3)(4.4)(5.5) \end{Bmatrix}$$

$$X = \{X/1.2.3.4.5\}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{25} \qquad ,P(X=2) = \frac{3}{25} \qquad ,P(X=3) = \frac{5}{25}$$

$$P(X=4) = \frac{7}{25} \qquad ,P(X=5) = \frac{9}{25}$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$

حل التمرين الثاني:

أ-نرمي زهرتي نرد، X متغير عشوائي يمثل مجموع الرقمين الظاهرين.

فضاء التجربة:

$$E = 6^2 = 36$$
$$E = \{(1.1)(1.2)(1.3) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (5.6)(6.6)\}$$

1- تحديد مجال المتغير العشوائي X وطبيعته:

$$X = \{X/2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12\}$$

وطبيعته: متغير كمي متقطع

2- حساب التوزيع الاحتمالي لـ X:

نضع الجدول التالي لتسهيل حساب الاحتمال:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- التأكد أن هذا التوزيع دالة كتلة احتمالية:

لكي تكون هذه التوزيع دالة كتلة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين:

- $f(x) \geq 0$
- $\sum f(x_i) = 1$

لدينا: $P(x = x_1) = (x = 2) = \frac{1}{36} \geq 0 \dots\dots\dots P(x = 12) = \frac{1}{36} \geq 0$

ومنه فالشرط الأول محقق.

لدينا: $\sum_{i=1}^{11} f(x_i) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \cdots \dots\dots\dots . \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = 1$

ومنه فالشرط الثاني محقق، وعليه فهذا التوزيع هو دالة كتلة احتمالية.

4- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

الامل الرياضي:

$$E(X) = \sum x_i . f(x_i) = 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + \cdots \dots\dots + 11.\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36} = 7$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

حساب: $E(x^2)$

$$54.83 E(X^2) = \sum x_i^2 . f(x_i) = 2^2.\frac{1}{36} + 3^2.\frac{2}{36} + \cdots \dots\dots\dots 11^2.\frac{2}{36} + 12^2.\frac{1}{36} =$$

ومنه:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5.83$$

5- حساب الاحتمالات:

$$P(X = 1) = 0 \quad , P(X = 4) = \frac{3}{36} \quad , P(X \leq 4) = \frac{6}{36} \quad , P(X < 4) = \frac{3}{36}$$

ب- نرمي زهرتي نرد، Y متغير عشوائي يمثل اكبر الرقمين الظاهرين.

1- تحديد مجال المتغير العشوائي Y وطبيعته:

$$Y = \{y/1.2.3.4.5.6\}$$

وطبيعته: متغير كمي متقطع

2- حساب التوزيع الاحتمالي لـ Y:

نضع الجدول التالي لتسهيل حساب الاحتمال:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

- التأكد أن هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية:

لكي تكون هذه التوزيع دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين:

- $f(y) \geq 0$
- $\sum f(y_i) = 1$

لدينا: $P(y = y_1) = (y = 1) = \frac{1}{36} \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots P(y = 6) = \frac{11}{36} \geq 0$

ومنه فالشرط الأول محقق.

لدينا: $\sum_{i=1}^{6} f(\quad_i) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = 1$

ومنه فالشرط الثاني محقق، وعليه فهذا التوزيع هو دالة كثافة احتمالية.

-حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

الامل الرياضي:

$$E(Y)=\sum y_i.f(x_i)=1.\frac{1}{36}+2.\frac{3}{36}+3.\frac{5}{36}+4.\frac{7}{36}+5.\frac{9}{36}+6.\frac{11}{36}$$
$$=4.47$$

التباين:

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$$

حساب: $E(x^2)$

$$E(Y^2)=\sum y_i^2.f(y_i)=1^2.\frac{1}{36}+2^2.\frac{3}{36}+3^2.\frac{5}{36}+4^2.\frac{7}{36}+5^2\frac{9}{36}+6^2.\frac{11}{36}$$
$$=21.97$$

ومنه:

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=1.98$$

2- حساب دالة التوزيع $F(Y)$:

$$F(x)=P(X\leq x_i)=\sum_{x\leq x_i}^{x}f(x_i)$$

وبالتالي فان دالة التوزيع $\boldsymbol{F(Y)}$ يمكن ادراجها كما يلي:

$$\boldsymbol{F(X)}=\begin{cases}0 & , \quad y<1\\ \frac{1}{36} & , \quad 1\leq y<2\\ \frac{1}{36}+\frac{3}{36}=\frac{4}{36} & , \quad 2\leq y<3\\ \frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}=\frac{9}{36} & , \quad 3\leq x<4\\ \frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{7}{36}=\frac{16}{36} & , 4\leq y<5\\ \frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{7}{36}+\frac{9}{36}=\frac{25}{36} & , 5\leq y<6\\ \frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{7}{36}+\frac{9}{36}+\frac{11}{36}=1 & , 6\leq y\end{cases}$$

3- حساب الاحتمالات:

باستعمال دالة الكثافة الاحتمالية:

$$P(Y=1)=\frac{1}{36}\ ,P(Y<3)=\frac{4}{36}\ ,\quad P(Y\leq 3)=\frac{9}{36}\ ,\quad P(1<Y\leq 4)=\frac{15}{36}$$

باستعمال دالة التوزيع:

$$P(Y=1)=F(Y)=\frac{1}{36}\ ,P(Y<3)=F(2)=\frac{4}{36}\ ,P(Y\leq 3)=F(3)=\frac{9}{36}\ ,$$

$$P(1<Y\leq 4)=F(4)-F(1)=\frac{15}{36}$$

حل التمرين الثالث:

1- طبيعة ونوع المتغير: كمي متقطع.

2- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

قيم المتغير العشوائي X هي:

$$X=\{x/0.1.2\}$$

$$P(X=0)=\frac{C_4^0.C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}\ ;\ P(X=1)=\frac{C_4^1.C_3^1}{C_7^2}=\frac{12}{21}\ ;P(X=2)=\frac{C_4^2.C_3^0}{C_7^2}=\frac{6}{21}$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{6}{21}$

3- حساب احتمال أن يكون ضمن الكتابين كتاب واحد على الأقل خاص بالاحصاء:

$$P(X\geq 1)=\frac{12}{21}+\frac{6}{21}=\frac{18}{21}$$

4- حساب: $E(X),m_2$:

$$E(X)=\sum x_i.P(X=x_i)=0.\frac{3}{21}+1\frac{12}{21}+2\frac{6}{21}=\frac{8}{7}$$

$$m_2=\sum x_i^2.P(X=x_i)=0^2.\frac{3}{21}+1^2.\frac{12}{21}+2^2.\frac{6}{21}=\frac{12}{7}$$

استنتاج $V(X)$

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{12}{7} - \frac{64}{49} = \frac{20}{49}$$

5- ايجاد دالة التوزيع:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{7} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = 1 & , \quad 2 \le x \end{cases}$$

حل التمرين الرابع:

1- تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية اذا تحقق: $f(x) \ge 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

لدينا مجال التعريف هو: $[0,100]$

ومنه: $f(x) \ge 0$ و $\int_0^{100} \frac{x}{5000} dx = \frac{1}{5000} \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^{100} = 1$

ومنه $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

2- حساب الاحتمالات:

$$P(X > 95) = 1 - P(X \le 95)$$
$$= 1 - \int_0^{95} f(x)dx = 1 - \int_0^{95} \frac{x}{5000} dx = 1 - \left| \frac{x^2}{10000} \right|_0^{95} = 0.0975$$

$$P(X < 50) = \int_0^{50} f(x)\,dx = \int_0^{50} \frac{x}{5000} dx = \left| \frac{x^2}{10000} \right|_0^{50} = 0.25$$

$$P(40 < X < 80) = \int_{40}^{80} \frac{x}{5000} dx = \left| \frac{x^2}{10000} \right|_{40}^{80} = 0.48$$

3- حساب الحجم المتوسط اليومي للمبيعات والانحراف المعياري:

$$E(X) = \int_0^{100} x.f(x)dx = \int_0^{100} x.\frac{x}{5000} dx = \left| \frac{x^3}{15000} \right|_0^{100} = 66.67$$

$$V(X) = m_2 - m_1^2$$

$$m_2 = \int_0^{100} x^2.f(x)dx = \int_0^{100} x^2.\frac{x}{5000}dx = \left|\frac{x^4}{20000}\right|_0^{100} = 5000$$

$$V(X) = 5000 - (66.67)^2 = 555.11$$

ومنه لدينا: $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 23.56$

4- ايجاد دالة التوزيع:

لدينا:

$$F(X) = P[X \leq x] = \int_{-\propto}^{x} f(u)du$$

✓ اذاكان: $x < 0$ فان: $F(X) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$

✓ اذاكان: $0 \leq x \leq 100$ فان: $F(X) = \int_0^x f(u)\, du = \left|\frac{u^2}{10000}\right|_0^x = \frac{x^2}{10000}$

✓ اذاكان: $x > 100$ فان: $F(X) = \int_0^{100} f(u)du = 1$

ومنه:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ \dfrac{x^2}{10000} & ,0 \leq x \leq 100 \\ 1 & , \quad x > 100 \end{cases}$$

حساب الاحتمالات السابقة باستعمال دالة التوزيع:

$$P(X > 95) = 1 - P(X \leq 95) = 1 - F(95) = 1 - \frac{95^2}{10000} = 0.0975$$

$$P(X < 50) = \mathrm{F}(50) = \frac{50^2}{10000} = 0.25$$

$$P(40 < X < 80) = F(80) - F(40) = \frac{80^2}{10000} - \frac{40^2}{10000} = 0.48$$

حل التمرين الخامس:

1- تحديد قيمة الثابت k حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية:

لكي تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب تحقق: $f(x) \geq 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 kx^2dx = k\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27k}{3}$$

ومنه: $9k = 1 \Longrightarrow k = \frac{1}{9}$

ومنه لكي تكون هذه الدالة دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون $k = \frac{1}{9}$

2- حساب الاحتمال: $P(1 < X < 2)$

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2dx = \frac{1}{9}\int_1^2 x^2dx = \frac{1}{9}\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{7}{27}$$

3- ايجاد دالة التوزيع:

$$F(X) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

✓ اذاكان: $x < 0$ فان: $F(X) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$

✓ اذاكان: $0 \leq x \leq 3$ فان: $F(X) = \int_0^x f(u)\,du = \frac{1}{9}\left|\frac{u^3}{3}\right|_0^x = \frac{x^3}{27}$

✓ اذاكان: $x > 3$ فان: $F(X) = \int_0^3 f(u)du = 1$

ومنه:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & , 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

جامعة محمد البشير الإبراهيمي برج بوعريريج

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مقياس: إحصاء 03 ....السنة الثانية علوم مالية ومحاسبية

السلسلة رقم 02 .... التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

❖ **التمرين 01:**

إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام دواء معين هي 60% إذا تناول هذا الدواء 05 مصابين بهذا المرض، وإذا عرفنا المتغير العشوائي X بأنه عدد المصابين الذين يستجيبون لهذا الدواء (حالات الشفاء).

المطلوب:

1- ما هو نوع المتغير العشوائي؟ وما هو قانون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟

2- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X ثم أحسب الاحتمالات التالية: استجابة 03 مرضى لهذا الدواء، استجابة مريض واحد على الأقل، استجابة مريضين على الأقل.

3- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

❖ **التمرين 02:**

مجلس أساتذة يتشكل من 40 عضو، 24 رجل و 16امرأة، نريد اختيار عشوائيا شخصين منهم للمشاركة في ندوة وطنية حول البرامج البيداغوجية، ليكن X يمثل عدد النساء من بين الشخصين الذين تم اختيارهم.

المطلوب:

4- ما هو القانون الاحتمالي الأصلي لـ X ؟ علل ذلك.

5- عين التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة؟

6- ما هو قانون التوزيع الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه التوزيع الاحتمالي السابق؟ علل ذلك.

7- عين التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة؟

8- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري في الحالتين، ثم قارن بين النتائج، ماذا تلاحظ.

❖ **التمرين 03:**

يحتوي تقرير ما مكون من 200 صفحة على 220 خطأ مطبعي موزعة عشوائيا على صفحات التقرير.

المطلوب:

9- أحسب احتمال أن تحتوي صفحة معينة على: لا خطأ، على الأقل خطأ، خطأين فأكثر.

❖ **التمرين 04:**

أظهرت التجارب السابقة أن 2% من علب الصابون المسحوق"ازيس" يكون وزنها الحقيقي عند خروجها من المصنع يقل عن الوزن المعياري المقرر، وبغرض الاطلاع على حقيقة ذلك أجريت دراسة على عينة من 100 علبة تم اختيارها عشوائيا، ليكن X يمثل عدد العلب التي يقل وزنها عن الوزن المعياري من بين 100 علبة.

المطلوب:

10-ما هو القانون الاحتمالي لهذا التوزيع؟

11-أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

12-أحسب احتمال X المعرف أعلاه يساوي: 0، يقل عن4، محصورا بين 2و5 (بما في ذلك 5).

13-هل يمكن استخدام قانون بواسون كتقريب لهذا التوزيع، أجب على نفس الأسئلة السابقة ثم قارن بين النتائج.

❖ **التمرين 05:**

نفترض أن x متغير شوائي يمثل عدد الوحدات المرفوضة من منتوج ما يوميا من طرف مصلحة مراقبة النوعية التابعة لمؤسسة اقتصادية ما، حيث يقدر معدل الوحدات المرفوضة يوميا ب 4 وحدات،

المطلوب:

14-عرف القانون الاحتمالي لـ x؟.

15-احسب الاحتمالات التالية: $p(x \geq 2)$, $p(x = 0)$؟.

❖ **التمرين 06:**

يقوم شخص برمي السهام على اللوح حتى تصل إلى المنطقة المركزية، احتمال اصطدام السهم عند رميه بمنطقة المركز هي0,17، ماهو احتمال أن يستغرق الأمر ثماني رميات حتى يتمكن الهذا الشخص من الاصطدام بالمركز.

❖ **التمرين 07:**

تشعر مهندسة السلامة أن 35٪ من جميع الحوادث الصناعية في مصنعها ناتجة عن فشل الموظفين في إتباع التعليمات، لهذا قررت النظر في تقارير الحوادث (يتم اختيارها عشوائيًا) حتى تجد تقريرًا يُظهر حادثًا ناتجًا عن فشل الموظفين في إتباع التعليمات، في المتوسط.

المطلوب:

ماهو عدد التقارير التي تتوقع مهندسة السلامة النظر فيها حتى تجد تقريرًا يوضح حادثًا ناتجًا عن فشل الموظف في إتباع التعليمات؟.

ما هو احتمال أن تقوم مهندسة السلامة بفحص ثلاثة تقارير على الأقل حتى تجد تقريرًا يوضح حادثًا ناتجًا عن فشل الموظف في اتباع التعليمات؟.

حل السلسلة رقم 02 التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

التمرين 01:

1- تحديد نوع المتغير العشوائي X:

X: متغير عشوائي منفصل كمي: يمثل عدد حالات الاستجابة.

قانون التوزيع الاحتمالي لـ X:

بما أن المصاب بعد تناوله للدواء هناك نتيجتين متنافيتين، شفاء وعدم شفاء فاننا نكون بصدد تجربة برنولي مكررة 05 مرات، أي توزيع ثنائي الحدين، حيث: $n = 5 \ , P = 0.6 \ \ , \ q = 1 - 0.6 = 0.4$

ونكتب: $X \sim B(5{,}0.6)$ و $X = \{x/0.1.2.3.4.5\}$

2- إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير:

$$P(X = x) = C_n^x P^x q^{n-x} \ , \quad P(X = x) = C_n^x (0.6)^x (0.4)^{n-x}$$

$$P(X = 0) = C_5^0 (0.6)^0 (0.4)^5 = 0.01024 \quad , P(X = 1) = C_5^1 (0.6)^1 (0.4)^4 = 0.0768$$

$$P(X = 2) = C_5^2 (0.6)^2 (0.4)^3 = 0.2304 \ , \qquad P(X = 3) = C_5^3 (0.6)^3 (0.4)^2 = 0.3456$$

$$P(X = 4) = C_5^4 (0.6)^4 (0.4)^1 = 0.3456 \quad , P(X = 5) = C_5^5 (0.6)^5 (0.4)^0 = 0.07776$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي كما يلي:

X	0	1	2	3	4	5	$\sum P_x$
$P(X = x)$	0.0102	0.0768	0.2304	0.3456	0.2592	0.07776	1

حساب الاحتمالات:

- استجابة 03 مرضى: $P(X = 3) = 0.3456$
- استجابةمريض واحد على الأقل: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.0102 = 0.9897$
- استجابة مريضين على الأقل: $P(X \leq 2) = 0.0102 + 0.0768 + 0.2304 = 0.31744$

3- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$$E(X) = nP = 5.(0.6) = 3$$

$$V(X) = n.P.q = 4(0.6)(0.4) = 1.2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 1.095$$

التمرين 02:

1- القانون الاحتمالي الاصلي لـ X هو التوزيع فوق الهندسي لاننا لدينا نتيجتين متنافيتين (رجل وامرأة) وبالتالي التجربة تجربة برنولي مكررة مرتين مع ضرورة عدم ارجاع العنصر المسحوب.

ونكتب: $X \times \sim H(40{,}16{,}2)$

2- تعيين التوزيع الاحتمالي لـ X:

$X\{x/0,1,2\}$

$$P(X=0)=\frac{C_{16}^{0}.C_{24}^{2}}{C_{40}^{2}}=0.353 \quad ,P(X=1)=\frac{C_{16}^{1}.C_{24}^{1}}{C_{40}^{2}}=0.492, P(X=2)=\frac{C_{16}^{2}.C_{24}^{0}}{C_{60}^{2}}=0.153$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي كما يلي:

X	0	1	2	$\sum P_x$
$P(X=x)$	0.353	0.492	0.153	1

لدينا: $n<\frac{N}{10}$ (محققة)أي: $2<\frac{40}{10}$ ومنه القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب اليه هذا التوزيع هو توزيع ثنائي الحدين، ويصبح لدينا: $X\sim B\left(2,\frac{16}{40}\right)$

3- تعيين التوزيع الاحتمالي الجديد:

$$P(X=0)=C_2^0.0.4^0.0.6^2=0.36 \quad ,P(X=1)=C_2^1.0.4^1.0.6^1=0.48 \quad ,P(X=2)=C_2^2.0.4^2.0.6^0=0.16$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي كما يلي:

X	0	1	2	$\sum P_x$
$P(X=x)$	0.36	0.48	0.16	1

4- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

5- حالة التوزيع فوق الهندسي:

$$E(X)=n.P=2\times0.4=0.8$$
$$V(X)=\frac{N-n}{N-1}nPq=\frac{40-2}{40-1}\times2\times0.4\times0.6=0.467$$
$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=0.68$$

حالة توزيع ثنائي الحدين:

$$E(X)=n.P=2\times0.4=0.8$$
$$V(X)=nPq=2\times0.4\times0.6=0.48$$
$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=0.69$$

بمقارنة النتائج في كلا التوزيعين نلاحظ أنه يوجد تقارب كبير بينها مما يعني أن توزيع ثنائي الحدين أحسن تقريب للتوزيع فوق الهندسي.

التمرين 03:

نلاحظ أن هذه التجربة هي تجربة بواسون والمعرفة على المعلمة $\lambda = \frac{220}{200} = 1.1$ أي: $X \sim P(\lambda = 1.1)$

حيث أن: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

- احتمال أن تحتوي صفحة معينة عن لا خطأ: $P(X = 0) = \frac{e^{-1.1}1.1^0}{0!} = 0.332$.
- احتمال أن تحتوي على الأقل خطأ: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.332 = 0.668$.
- احتمال أن تحتوي خطأين فأكثر: $P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0.302$.

التمرين 04:

1- القانون الاحتمالي لهذا التوزيع هو توزيع ثنائي الحدين لأننا أمام تجربة برنولي مكررة 100 مرة باحتمال ثابت ونتيجتين متنافيتين (وزن معياري ووزن غير معياري) وعملية السحب تكون مع الارجاع ومعالم هذا التوزيع موضحة كما يلي: $X \sim B(100,0.02)$.

2- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$$E(X) = n.P = 100 \times 0.02 = 2$$
$$V(X) = nPq = 100 \times 0.02 \times 0.08 = 0.16$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 0.4$$

3- حساب الاحتمالات:

$$P(X = 0) = C_{100}^0 . 0.02^0 . 0.98^{100} = 0.132$$

$$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.132 + 0.270 + 0.273 + 0.182 = 0.857$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.273 + 0.182 + 0.038 + 0.0352 = 0.528$$

لدينا معلمة توزيع بواسون هي: $\lambda = 100 \times 0.02 = 2$، حيث أن: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري: $E(X) = V(X) = \lambda$
- حساب الاحتمالات:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2}.2^0}{0!} = 0.135$$

$$P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=0.135+0.270+0.27+0.18=0.855$$

$$P(2\leq X\leq 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$=0.27+0.18+0.09+0.036=0.576$$

بمقارنة النتائج في كلا التوزيعين نلاحظ أنه يوجد تقارب كبير بينها مما يعني أن توزيع بواسون احسن تقريب لتوزيع ثنائي الحدين .

التمرين الخامس:

✓ المتغير يخضع إلى توزيع بواسون حيث $\Omega=0,1,2\ldots\ldots..\infty$

$$x\rightarrow p(x,\lambda)$$

حساب الاحتمالات:

- $P(X=0)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-4}.2^{0}}{0!}=0.018$

- $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$

$$=1-\left[\frac{e^{-4}.2^{0}}{0!}+\frac{e^{-4}.2^{1}}{1!}\right]=1-(0,018+0,073)=0,909$$

حساب الانحراف المعياري:

$$\delta=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda})=\sqrt{4}=2$$

المحور الثالث :

قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

الأهداف التعليمية
تمهيد
أولا – التوزيع المنتظم
ثانيا – التوزيع الطبيعي
ثالثا – التوزيع الأسي
رابعا – توزيع قاما
خامسا – توزيع بيتا
سادسا – توزيع ستيودنت
سابعا – توزيع كاي مربع
ثامنا – توزيع فيشر
تاسعا : ملخص أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة
عاشرا – سلاسل التمارين الخاصة بالمحور

تمهيد:

في المحور السابق درسنا مجموعة من القوانين التي تُستخدم التوزيعات المنفصلة لوصف الظواهر التي تأخذ قيماً عددية محددة ومنفصلة (مثل عدد النجاحات أو عدد الحوادث)، فإن **التوزيعات المتصلة** تُعنى بدراسة الظواهر التي يمكن أن تأخذ **قيمًا غير محدودة داخل مجال مستمر** مثل الطول، الوزن، الزمن، ودرجة الحرارة.

تكتسي التوزيعات الاحتمالية المتصلة أهمية بالغة في مجالات متعددة مثل **البحوث العلمية، والاقتصاد، والهندسة، وتحليل البيانات**، نظرًا لقدرتها على **تقدير الاحتمالات بدقة عالية** من خلال دوال الكثافة والتوزيع. ومن أبرز هذه التوزيعات :**التوزيع المتجانس، الأسي، الطبيعي، الطبيعي المعياري، وتوزيع كاي تربيع**، والتي سنعرضها مع خصائصها وقوانينها الأساسية.

1.التوزيع المنتظم:

أ.تعريف:

يعد هذا التوزيع من التوزيعات البسيطة ذات الأهمية لأنه حالة طبيعية يعكس تصرف كثير من نتائج التجارب وهذا التوزيع يعتمد على توقع حصول حصول المتغير العشوائي على قيم مختلفة في الحيز المتاح له بدرجة احتمالية واحدة فإذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم في الحيز (a,b) فإن دالة الكثافة الاحتمالية له تكون:[1]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad x \in (a,b) \\ 0 & , \quad x \notin (a,b) \end{cases}$$

حيث أن a ، b قيمتان حقيقيتان بحيث أن $a < b$.

ب.الخصائص العددية للتوزيع المنتظم (المستمر)

- الامل الرياضي: $E(X) = \frac{b+a}{2}$

- التباين $Var(X) = \frac{(b+a)2}{12}$

1. Montgomery, D. C., & Runger, G. C, (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley, p136.

-الانحراف المعياري: $\sigma(x) = \sqrt{\frac{(b+a)2}{12}}$

مثال: تصل حافلات نقل الركاب لمنطقة معينة على التتابع ، حافلة بعد باص كل 20 دقيقة بدءاً من الساعة السادسة صباحاً، فيصل أحدها عند الساعة السادسة صباحاً ويصل آخر عند الساعة السادسة والثلث وآخر عند السادسة وأربعين دقيقة وهكذا، فإذا علمت بوصول أحد الركاب لتلك المنطقة خلال أول أربعين دقيقة عمل لتلك الحافلات والتي يخضع وقت الوصول فيها للتوزيع المنتظم المستمر. فالمطلوب تحديد احتمال انتظار الشخص الواصل.

- أقل من خمس دقائق لتصل حافلة فيصعد فيها.
- أكثر من 15 دقيقة لتصل الحافلة فيصعد فيها.
- أوجد الامل الرياضي والانحراف المعياري؟

الحل:

ليكن X يمثل متغير وقت الوصول خلال أول **40** دقيقة بالمعالم **a = 0 , b = 40** فتكون دالة كثافة الاحتمال التي تمثل X بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{40} \qquad , \qquad 0 < X < 40$$

- إن حادثة انتظار الشخص أقل من 5 دقائق للحافلة تعني وصول الشخص إما بين الدقيقة الخامسة عشر والعشرين فيصل أول حافلة فيصعد فيه، أو أن يصل الشخص بين الدقيقة الخامسة والثلاثين والأربعين فيصل ثاني للحافلة ليصعد فيه، فيكون الاحتمال المطلوب عبارة عن:

$$P = p\,[15 < x < 20] + p\,[35 < x < 40]$$
$$= \int_{15}^{20} \frac{1}{40} dx + \int_{35}^{40} \frac{1}{40} dx = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

- إن حادثة انتظار الشخص أكثر من 15 دقيقة ليصل الباص فيصعد فيه، تعني وصول الشخص إما في أول خمسة دقائق أو ما بين الدقيقة العشرين والخامسة والعشرين فيكون الاحتمال المطلوب عبارة عن:

$$P = p\,[0 < x < 5] + p\,[20 < x < 25]$$
$$= \int_{0}^{5} \frac{1}{40} dx + \int_{20}^{25} \frac{1}{40} dx = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

- الامل الرياضي: $E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{40+0}{2} = 20$

- التباين $Var(X) = \frac{(b+a)2}{12} = 133.33$

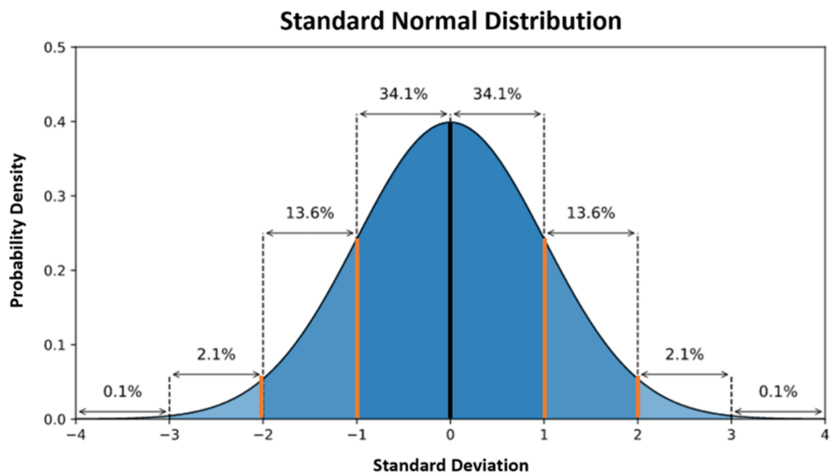
-الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{(b+a)2}{12}} = 11.55$

2.التوزيع الطبيعي: أو توزيع لابلاس قوس D. Normale ou D. de Laplace -Gausse

أ.تعريف:

هو توزيع احتمالي مستمر يتميز بشكل منحنى جرس متماثل حول المتوسط، حيث تكون القيم الأكثر احتمالاً قريبة من المتوسط، وتقل الاحتمالات كلما ابتعدت القيم عن المتوسط. يُستخدم هذا التوزيع بشكل واسع في مجالات متعددة مثل الإحصاء، الاقتصاد، والعلوم الطبيعية، لأنه يصف بشكل دقيق العديد من الظواهر العشوائية..أو ما يمكن أن نسميه الإحتمال ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط الحسابي بحيث أن هذا الوسط =الوسيط =المنوال[1] وهي صفات التوزيع الطبيعي (الشكل1)

الشكل رقم (02): الشكل العام للتوزيع الطبيعي.



1. المعادلة الرياضية ودالة الكثافة الاحتمالية والقسمة المعيارية له:

تكتب دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث μ و σ هما على التوالي المتوسط والإنحراف المعياري.

ونكتب: X ~ N(μ, σ)

[1] - إبراهيم محمد البطاينة، **مبادئ الإحصاء**، دار المسيرة، عمان، 2010، ص225.

وتعطى دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

تُستخدم المتغيرة المعيارية $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ لتكوين الجداول الإحصائية للإحتمالات:

$F(z) = P(Z \le z)$ أو $P(0 \le Z \le z)$

حيث تسمح بكتابة الدالة F بدلالة مجهول واحد Z بدلا من 3 مجاهيل x و μ و σ وذلك كما يلي:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty}$$

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين X و Z فإن Z تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي، حيث أن[1]:

$$\mathbf{V(Z) = 1 \quad E(Z) = 0}$$

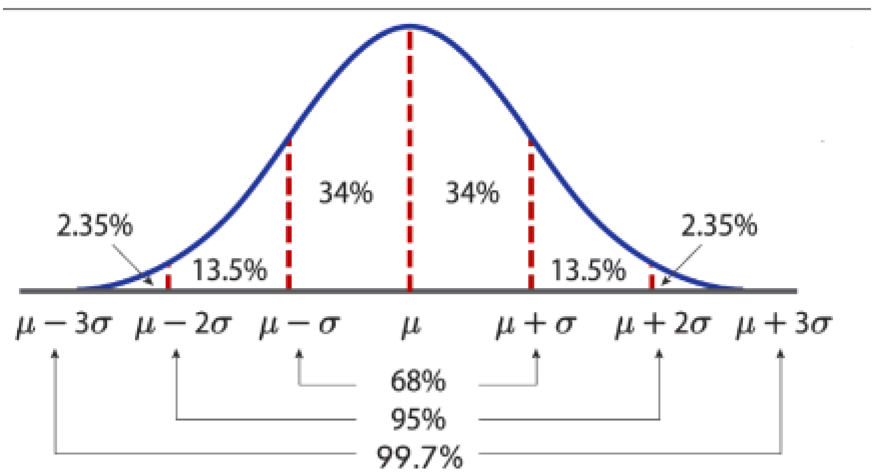
ب- خصائص التوزيع الطبيعي

- **التناظر** :كما ذكرنا، المنحنى متماثل حول الوسط. هذا يعني أن احتمال الحصول على قيمة أكبر من الوسط بنسبة معينة يساوي احتمال الحصول على قيمة أصغر من الوسط بنفس النسبة.
- **الاعتدال** :لا يوجد انحراف عن التماثل، أي أن المنحنى ليس مائلًا إلى جهة معينة.
- **تحديد المنحنى بمعاملين** :
  - **الوسط الحسابي** :(**μ**) يمثل مركز التوزيع، وهو القيمة الأكثر تكرارًا.
  - **الانحراف المعياري** :(**σ**) يقيس مدى تشتت البيانات حول الوسط. كلما زاد الانحراف المعياري، زادت مساحة الانتشار.

[1] مراد كمال عوض، **أساسيات الإحصاء**، دار البداية، عمان، 2010، ص128.

- **قاعدة الـ 68-95-99.7:** هذه القاعدة الأساسية تخبرنا عن النسبة التقريبية للبيانات التي تقع ضمن عدد معين من الانحرافات المعيارية عن الوسط

شكل رقم (03): خصائص التوزيع الطبيعي



- حوالي 68% من البيانات تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط.
- حوالي 95% من البيانات تقع ضمن انحرافين معياريين عن الوسط.
- حوالي 99.7% من البيانات تقع ضمن ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط.

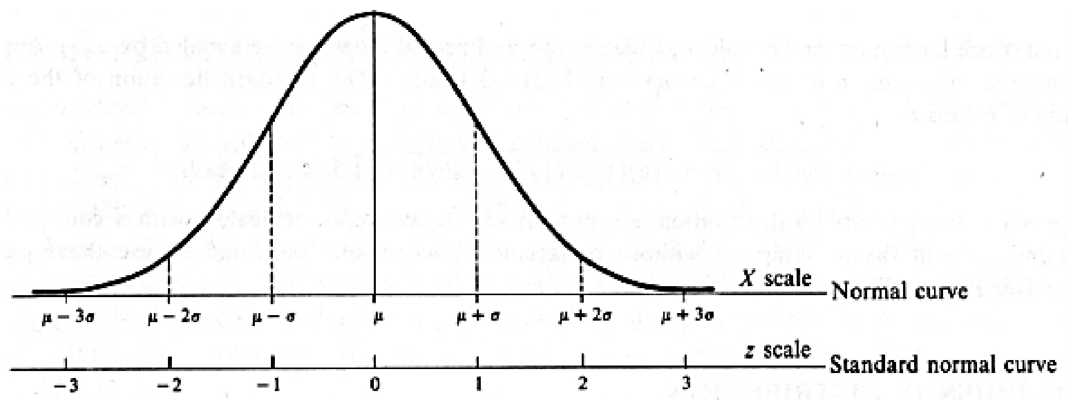
ب.الخصائص العددية للتوزيع الطبيعي:

التوزيع الطبيعي	
التوقع	μ
التباين	σ^2
الإنحراف المعياري	σ

2- القانون الطبيعي المعياري (القياسي): $\mathbb{N}(0,1)$

التعريف : بوضع $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ في دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي العادي (أي في صورته العامة)، نجد أنه يتحول إلى توزيع طبيعي معياري، متوسطه $\mu = 0$ ، انحرافه المعياري $\sigma = 1$ ، ويكتب $Z \sim \mathbb{N}(0,1)$.

وتصبح دالة كثافته الاحتمالية: $-\infty \leq z \leq \infty$ $\qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$



وقد وضعت جداول توضح المساحة أسفل المنحنى (الاحتمال) وهذه الجداول [جدول (z)] تستخدم بشرط أن تكون المسألة في صورة توزيع طبيعي عادي X أي: $\sigma \neq 1$, $\mu \neq 0$ ونحولها إلى توزيع طبيعي معياري Z أي: $\sigma = 1$, $\mu = 0$ بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

مثال 02 :

1- $P(0 < z < 2) = 0.4772$

2- $P(0 < z < 1.55) = 0.4394$

3- $P(-3.31 < z < 0) = 0.4995$

4- $P(z < 2) = 0.5 + P(0 < z < 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$

5- $P(z < 2.58) = 0.5 + P(0 < z < 2.58) = 0.5 + 0.4951 = 09951$

6- $P(z > 2) = 0.5 - P(0 < z < 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

7- $P(z > -1.53) = 0.5 + P(-1.53 < z < 0) = 0.5 + 0.4394 = 0.9394$

8- $P(z > -3.14) = 0.5 + P(-3.14 < z < 0) = 0.5 + 0.4992 = 0.9992$

9- $P(-2 < z < 2) = P(-2 < z < 0) + P(0 < z < 2) = 0.4772 + 0.4772 = 0.9544$

10- $P(-1.66 < z < 3.25) = P(-1.66 < z < 0) + P(0 < z < 3.25) = 0.4515 + 0.4994 = 0.9509$

11- $P(1.5 < z < 2.65) = P(0 < z < 2.65) - P(0 < z < 1.5) = 0.4960 - 0.4332 = 0.0628$

12- $P(-2.4 < z < -1.49) = P(-2.4 < z < 0) - P(0 < z < -1.49) = 0.4918 - 0.4319 = 0.0599$

13- $P(|z - 2| \leq 0.82) = P(-0.82 \leq z - 2 \leq 0.82) = P(2 - 0.82 \leq z \leq 2 + 0.82)$

$= P(1.18 \leq z \leq 2.82) = P(0 \leq z \leq 2.82) - P(0 \leq z \leq 1.18) = 0.4980 - 0.3810 = 0.117$

مثال أخر:

إذا كان العمر الافتراضي لأحد الأنواع من البطاريات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1500 ساعة وانحراف معياري يقدر بـ 100 ساعة، أوجد :

1- دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع ؟

2- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أكبر من 1650 ساعة ؟

3- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أقل من 1600 ساعة ؟

4- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات على الأقل 1300 ساعة ؟

5- احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1550 ساعة و 1650 ساعة ؟

6- احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1450 ساعة و 1700 ساعة ؟

7- قيمة العمر الافتراضي للربيع الثالث Q_3 والعشير الرابع P_4 ؟

الحل:

1- كتابة دالة الاحتمال لهذا التوزيع :

X متغير عشوائي مستمر، يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط(ساعة $\mu = 1500$)، وانحرافه المعياري ($\sigma =$ ساعة 100). ونكتب $X \sim \mathbb{N}(1500,1000)$ وعليه تكون دالة كثافته الاحتمالية على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1500}{100}\right)^2} \qquad -\infty \le x \le \infty$$

ولأجل حساب أي احتمال نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-1500}{100}$

2- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أكبر من 1650 ساعة :

$$P(X > 1650) = P\left(Z > \frac{1650-1500}{100}\right) = P(Z > 1.5) = 0.5 - P(0 < Z < 1.5)$$
$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

3- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أقل من 1600 ساعة :

$$P(X < 1600) = P\left(Z < \frac{1600-1500}{100}\right) = P(Z < 1) = 0.5 + P(0 < Z < 1)$$
$$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

4- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات على الأقل 1300 ساعة :

$$P(X \ge 1300) = P\left(Z \ge \frac{1300-1500}{100}\right) = P(Z \ge -2) = 0.5 + P(-2 < Z < 0)$$
$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

5- حساب احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1550 ساعة و 1650 ساعة :

$$P(1550 < X < 1650) = P\left(\frac{1550-1500}{100} < Z < \frac{1650-1500}{100}\right)$$
$$= P(0.5 < Z < 1.5) = P(0 < Z < 1.5) - P(0 < Z < 0.5)$$
$$= 0.3432 - 0.1915 = 0.1517$$

6- حساب احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1450 ساعة و 1700 ساعة :

$$P(1450 < X < 1700) = P\left(\frac{1450-1500}{100} < Z < \frac{1700-1500}{100}\right)$$
$$= P(-0.5 < Z < 2) = P(-0.5 < Z < 0) + P(0 < Z < 2)$$
$$= 0.1915 + 0.4772 = 0.6687$$

7- ايجاد قيمة العمر الافتراضي للربيع الثالث Q_3 والعشير الرابع D_4:

أ- Q_3 هو العمر الافتراضي للبطاريات الذي يقل عنه أو يساويه 75 % من الأعمار الافتراضية ويقابل معياريا القيمة a والتي تحقق :

$$P(Z < a) = 75\% = 0.75$$

ومنه a التي تحقق العلاقة $P(Z < a) = 75\% = 0.75$ هي نفس a التي تحقق العلاقة :

$$P(0 < Z < a) = 0.25$$

وعليه فإن قيمة a القريبة والتي تحق هذه المعادلة هي : a=0.67 وبناءا عليه نجد قيمة الربيع الثالث كالتالي :

$$a = 0.67 = \frac{Q_3 - 1500}{100} \Rightarrow Q_3 = 100 \times 0.67 + 1500 \Rightarrow Q_3 = 1567 \text{ ساعة}$$

ب- D_4 هو العمر الافتراضي للبطاريات الذي يقل عنه أو يساويه 40 % من الأعمار الافتراضية ويقابل معياريا القيمة b والتي تحقق :

$$P(Z < b) = 40\% = 0.4$$

ومنه b التي تحقق العلاقة $P(Z < b) = 40\% = 0.4$ هي نفس b التي تحقق العلاقة:

$$P(b < Z < 0) = 0.1$$

وعليه فإن قيمة b القريبة والتي تحق هذه المعادلة هي : b=-0.25 وبناءا عليه نجد قيمة العشير العاشر كالتالي :

$$b = -0.25 = \frac{D_4 - 1500}{100} \Rightarrow D_4 = 100 \times -0.25 + 1500 \Rightarrow D_4 = 1475 \text{ ساعة}$$

4.التوزيع الأسي:

أ.تعريف:

يمثل التوزيع الأســي حالة خاصــة من توزيع كاما الذي يعتمد بدوره أحد أهم التوزيعات المســتمرة وذلك لكثرة التطبيقات والاستخدامات العملية التي يشكل هذا التوزيع الركن الأساسي فيها وخاصة تلك التطبيقات التي يكون الزمن مهم فيها، كتلك الدراسات الخاصة بطول مدة اشتغال معدات ومكائن مصنع معين أو دراسة أزمان العطلات والتوقفات لتلك المعدات والمكائن أو الوقت المستغرق لإنجاز عمل معين أو زمن انتظار عمل معين، وكذلك فإن لهذا التوزيع أهمية خاصة في دراسة المعولية وغيرها من التطبيقات.[1]

إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X الذي يتبع كاما هي عبارة عن:

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda x}\ \lambda^{n}}{\Gamma n}\,x^{n-1} \qquad , \quad x\geq 0$$

أما عندما n = 1 فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X ستدعى بدالة التوزيع الأسي، وتكتب بالشكل:

$$f(x)= \lambda\ e^{-\lambda x} \qquad , \quad x\geq 0$$

ب.الخصائص العددية:

التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

-التباين :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

-.الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

[1] Ross, S. M, ***Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists,*** (5th ed.). Academic Press, 2014, p146.

مثال: افترض إن طول المكالمة الهاتفية X بالدقائق يتبع التوزيع الأســي بالمعلمة $\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{10}}$ فإذا وصـــل أحد الأشخاص إلى كشك الهاتف فالمطلوب:

-ما هو احتمال أن ينتظر أكثر من 10 دقائق؟

-ما هو احتمال أن ينتظر بين 10 و 20 دقيقة؟

- احسب الامل الرياضي والتباين؟

الحل:

إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X ستكون بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}$$

$$1. \quad p(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-\frac{x}{10}} \Big]_{10}^{\infty} = e^{-1} = 0.368$$

$$2. \quad p(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-\frac{x}{10}} \Big]_{10}^{20} = e^{-1} - e^{-2} = 0.233$$

- حساب التباين:

$$\boldsymbol{\sigma}\ (\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1000^2}} = 0.001$$

5.توزيع قاما: Gamma Distribution

أ.تعريف:

توزيع جاما هو **توزيع احتمالي مستمر** يُستخدم لنمذجة **الزمن أو الكمية اللازمة لحدوث عدد معين من الأحداث العشوائية** التي تقع بمعدل ثابت. بمعنى آخر، إذا كانت الأحداث تقع وفق **عملية بواسون** (Poisson Process)، فإن الزمن حتى وقوع α **من هذه الأحداث** يتبع **توزيع جاما**، كما يعد هذا التوزيع من أكثر التوزيعات المستخدمة في التطبيقات الهندسية مرونة، إذا كان المتغير العشوائي X غير سالب ويتبع توزيع أحادي النمط فالفرصة جيدة في أن يتمكن فرد من توزيع كاما من وصف المتغير قيد الدراسة وصفاً ملائماً. يعطى توزيع كاما:[1]

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x\geq 0 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

$$\Gamma x=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \qquad , \ \alpha>0$$

حيث أن $\alpha>0$ ، $\beta>0$ قيمة غير سالبة، مع تزايد قيمة α يقترب توزيع كاما من التوزيع الطبيعي أما عندما يكون $\alpha=1$ فيطابق توزيع كاما مع التوزيع الأسي الذي سبق مناقشته. ويكتب باختصار:

$$X\sim G(\beta,\alpha)$$

بعض من خواص دالة قاما:

1. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma\alpha$

2. إذا كان $\alpha=\dfrac{1}{2}$ ، $\lambda=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ نحصل على:

$$\Gamma\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$$

بما أن $\Gamma 1=1$ وأن X عدد صحيح موجب فإن: $\Gamma n=(n-1)!$

[1] Mood, A. M., Graybill, F. A., & Boes, D. C. *Introduction to the Theory of Statistics*,3rd [ed], McGraw-Hill, p175

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت n صحيح موجب فردي فإن:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\ (n-1)!}{2^{n-1}\ (\frac{n-1}{2})!}$$

ب.الخصائص العددية لتوزع قاما:

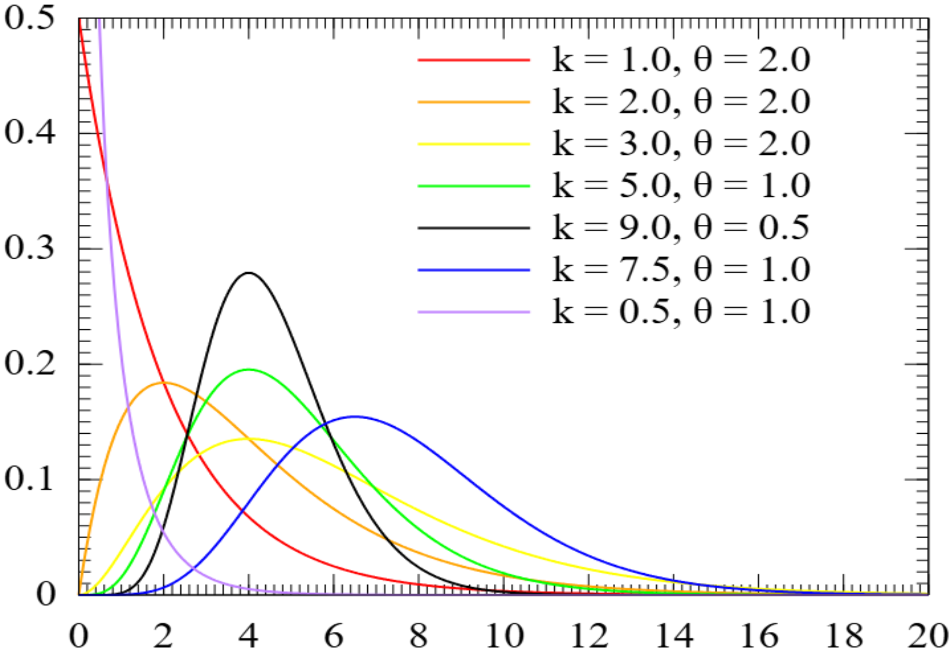
الامل الرياضي: $E(X)=\alpha\beta$

- **التباين** $Var(X)=\alpha\beta^2$

-**الانحراف المعياري:** $\sigma(x) = \sqrt{\alpha\beta^2}$

- **شكل توزيع قاما**: إن توزيع شكل قاما يتغيير بتغيير قيم α وβ

شكل رقم (04): **الشكل العام لتوزيع قاما**



مثال 07 : أحسب ما يلي :

- $\Gamma(8)$ ، $\Gamma(6)$ ، $\Gamma(9)$ ، $\Gamma(13)$ ، $\Gamma(5.5)$ ، $\Gamma(3.5)$ ، $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$

- $\int_0^{\infty} x^3\ e^{-x}dx$ ، - $\int_0^{\infty} x^7\ e^{-x}dx$ ، $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x}dx$

الحل :

- $\Gamma(8) = 7! = 5040$

- $\Gamma(6) = 5! = 120$

- $\Gamma(9) = 8! = 40320$

- $\Gamma(13) = 12! = 47900160$

- $\Gamma(5.5) = 4.5\Gamma(4.5) = (4.5)(3.5)\Gamma(3.5) = (4.5)(3.5)(2.5)\Gamma(2.5) =$
$(4.5)(3.5)(2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 29.53125\sqrt{\pi}$

- $\Gamma(3.5) = (2.5)\Gamma(2.5) = (2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 1.875\sqrt{\pi}$

- $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) =$
$\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{105}{16}\right)\sqrt{\pi}$

- $\int_0^{\infty} x^3\ e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{4-1}\ e^{-x}dx = \Gamma(4) = 3! = 6$

- $\int_0^{\infty} x^7\ e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{8-1}\ e^{-x}dx = \Gamma(8) = 7! = 5040$

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{-1}{2}}\ e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}\ e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

تمرين 02: أظهرت دراسة أن مدة حياة نوع من المصابيح الكهربائية (بالساعات) تتبع توزيع غاما بمعلمتين:

$\alpha=3$ و $\beta=500$ [1]

أجب عن الأسئلة التالية:

1. اكتب دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x الذي يمثل مدة حياة المصباح.

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

2. أوجد دالة التوزيع التراكمية F(x)

3. احسب احتمال أن يكون عمر المصباح على الأكثر 1000 ساعة.

4. احسب احتمال أن يعيش المصباح أكثر من 1500 ساعة.

5. احسب احتمال أن تكون مدة حياة المصباح بين 800 و1500 ساعة.

6. احسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لمدة حياة المصباح.

الحل:

- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع غاما هي:

$$0 < x^{\alpha-1}e^{x/\beta-}, \quad x\,\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} = f(x)$$

- المتوسط:

$$\alpha\beta = E(X)$$

- التباين:

$${}^{2}\alpha\beta = Var(X)$$

- الانحراف المعياري:

$$\sqrt{Var(X)} = \sigma$$

1) احتمال أن يكون عمر المصباح على الأكثر 1000 ساعة

$$.2 = \frac{1000}{500} = t \Rightarrow 1000 = x$$

$$.5 \cdot {}^{2-}e - 1 = \left(\tfrac{2^2}{2} + 2 + e^{2-}\right(1 - 1 = F(1000)$$

قيمة عددية:

$$0.6766764162 \approx 5 \cdot {}^{2-}e \quad \Rightarrow \quad 0.1353352832 \approx {}^{2-}e$$

$$\boxed{P(X \leq 1000) = F(1000) \approx 0.3233236 \approx 32.33\%}$$

2) احتمال أن يعيش المصباح أكثر من 1500 ساعة

نحسب $F(1500)$ ثم $P(X > 1500) = 1 - F(1500)$.

$x = 1500 \Rightarrow t = \dfrac{1500}{500} = 3$.

$F(1500) = 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2}\right) = 1 - 8.5 \cdot e^{-3}$.

$$e^{-3} \approx 0.04978706837 \quad \Rightarrow \quad 8.5 \cdot e^{-3} \approx 0.4231900811$$

$$\boxed{P(X > 1500) = 1 - F(1500) \approx 0.4231901 \approx 42.32\%}$$

3) احتمال أن تكون مدة الحياة بين 800 و 1500 ساعة

نحسب $F(800)$ و$F(1500)$ ثم الفرق.

$x = 800 \Rightarrow t = \dfrac{800}{500} = 1.6$.

$F(800) = 1 - e^{-1.6}\left(1 + 1.6 + \frac{1.6^2}{2}\right) = 1 - 3.88 \cdot e^{-1.6}$.

$$e^{-1.6} \approx 0.201896518 \quad \Rightarrow \quad 3.88 \cdot e^{-1.6} \approx 0.7833584898$$

$$F(800) \approx 1 - 0.7833584898 = 0.2166415102$$

الفرق:

$$\boxed{P(800 < X \leq 1500) = F(1500) - F(800) \approx 0.5768099189 - 0.2166415102 \approx 0.3601684087 \approx 36.02\%}$$

4) المتوسط والانحراف المعياري

- المتوسط:

$E(X) = \alpha\beta = 3 \times 500 = 1500$ ساعة.

- التباين:

$\mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2 = 3 \times 500^2 = 3 \times 250000 = 750000$ (ساعة)^2.

- الانحراف المعياري:

$\sigma = \sqrt{750000} \approx 866.0254$ ساعة.

$$\boxed{E(X) = 1500 \text{ ساعة}, \quad \sigma \approx 866.03 \text{ ساعة}}$$

6.توزيع كاي تربيع: Chi-Square Distribution

أ.تعريف:

توزيع كاي تربيع هو توزيع احتمالي يستخدم في الإحصاء، ويعتمد على متغير عشوائي يتبع توزيعًا احتماليًا غير متماثل. يُستخدم هذا التوزيع بشكل شائع في اختبار الفرضيات، خاصة في اختبارات الاستقلالية واختبارات الملاءمة.[1]

إذا سحبنا كل العينات العشوائية ذات الحجم n من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا تباينه σ^2 ولكل عينة حسبنا تباينها S^2، وحسبنا قيم المتغير العشوائي x^2 والذي يعطى بالصيغة التالية:

$$x^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

- $\Gamma(5.5) = 4.5\Gamma(4.5) = (4.5)(3.5)\Gamma(3.5) = (4.5)(3.5)(2.5)\Gamma(2.5) = (4.5)(3.5)(2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 29.53125\sqrt{\pi}$

- $\Gamma(3.5) = (2.5)\Gamma(2.5) = (2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 1.875\sqrt{\pi}$

- $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{105}{16}\right)\sqrt{\pi}$

- $\int_0^\infty x^3\ e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{4-1}\ e^{-x}dx = \Gamma(4) = 3! = 6$

- $\int_0^\infty x^7\ e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{8-1}\ e^{-x}dx = \Gamma(8) = 7! = 5040$

- $\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{-1}{2}}\ e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{(\frac{1}{2}-1)}\ e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

فالتوزيع الإحتمالي لهذا المتغير يسمى توزيع كاي تربيع x^2، وهو من التوزيعات الإحتمالية المستمرة (المتصلة) والذي يأخذ دالة الكثافة التالية:

$$\boxed{0 \le x^2 < +\infty f(x^2) = c(x^2)^{(v-2)/2}\ e^{-x^2/2}}$$

[1] حمدان، عبد الله محمد، **مبادئ الاحتمالات والإحصاء**. دار صفاء للنشر والتوزيع، عمّان، 2019، 161.

ومن بين خصائصه النقاط التالية:

- **الحرية** :(*Degrees of Freedom*) يعتمد توزيع كاي تربيع على عدد من درجات الحرية، والتي تُحدد عادةً بناءً على حجم العينة أو عدد الفئات في البيانات. كلما زاد عدد درجات الحرية، يقترب شكل التوزيع من التوزيع الطبيعي.
- **التوزيع غير متماثل** :عند درجات حرية صغيرة، يكون التوزيع مائلًا إلى اليمين، ويصبح أكثر تماثلًا مع زيادة درجات الحرية.
- **الوسط والانحراف المعياري**:

الوسيط: E(x)=v حيث V هو عدد درجات الحرية.

التباين: V(x)=2v.

يتوقف توزيع كاي تربيع على معلمة واحدة تُسمى درجة الحرية، التي يُرمز لها بالرمز v بناءً على ذلك، يتأثر توزيع كاي تربيع بحجم العينة أما الثابت c، فهو قيمة يتم تحديدها بعد تحديد درجة الحرية، بحيث تضمن أن المساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال لتوزيع كاي تربيع تساوي الواحد الصحيح.

الشكل رقم (05) توزيع كاي تربيع.

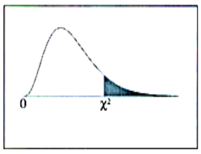
ولتوزيع χ^2 جدول خاص تعتمد قراءته على متغيرين هما: درجة الحرية والاحتمال المقابل لقيمة χ^2.

وللتوضيح أكثر يمكن تقديم المثال الآتي:

- $\chi^2_{(\alpha\,;\,v)} = \chi^2_{(0,05;\,2)} = 5,991$

$\Rightarrow P(\chi^2_2 \geq 5,991) = 0,05$

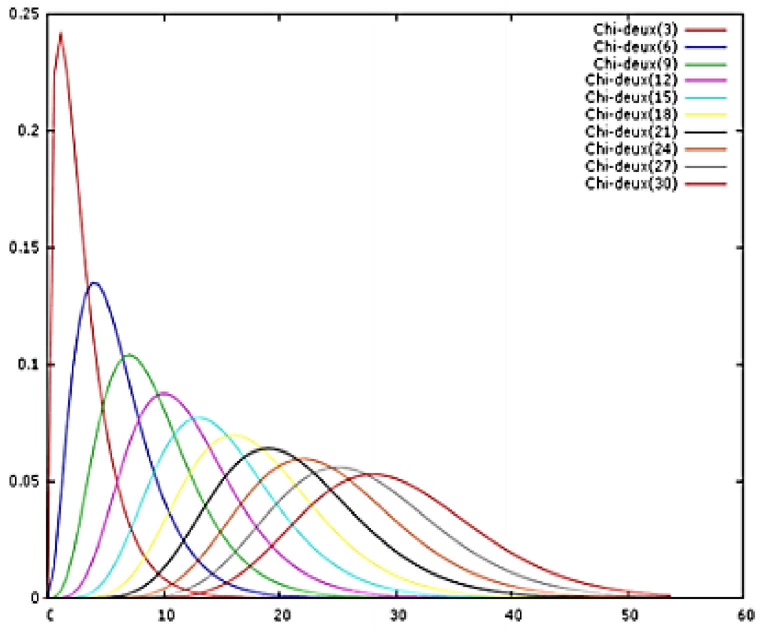
Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي :



7.توزيع توزيع فيشر F: ***F-distribution***

أ.**تعريف:** يتم تعريفه كنتيجة لنسبة بين تباينين محسوبين من عينتين مستقلتين. في المقارنة بين تباينين للمجتمعين، يتم استخدام التوزيع F في اختبار الفرضيات عندما يكون لدينا:

عندما يكون لدينا مجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا، وسحبنا من المجتمع الأول الذي تباينه σ_1^2 معظم العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n_1، ذات المتغير $x^2{}_1$ بحيث يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية v_1، وسحبنا من المجتمع الثاني الذي تباينه σ_2^2 معظم العينات العشوائية ذات الحجم n_2، ذات المتغير $x^2{}_2$ بحيث يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية v_2، وكانت العينات المسحوبة من المجتمع الأول مستقلة عن العينات المسحوبة من المجتمع الثاني، فالمتغير F يعرف كما يلي:

$$\boxed{F = \frac{x^2{}_1/v_1}{x^2{}_2/v_2}}$$

أي أن توزيع F هو توزيع نسبة متغيرين مستقلين يتبع كلاهما توزيع كاي تربيع x^2 بعد قسمة كل منهما على درجة حريته، وباستخدام تعريف المتغير العشوائي x^2 المذكور سابقا نستطيع كتابة المتغير العشوائي F كالتالي: [1]

$$F = \frac{\frac{(n_1-1)\, S^2{}_1}{\sigma_1{}^2} / n_1 - 1}{\frac{(n_2-1)\, S^2{}_2}{\sigma_2{}^2} / n_2 - 1}$$

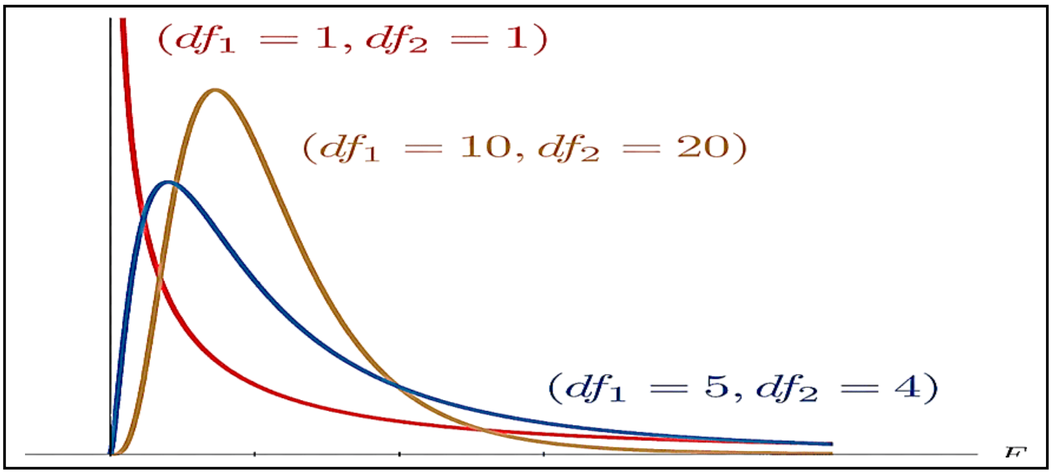
إذن:

$$\boxed{F = \frac{S^2{}_1/\sigma_1{}^2}{S^2{}_2/\sigma_2{}^2}}$$

والتوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي F يطلق عليه توزيع فيشر، والذي يأخذ شكل دالة الكثافة الإحتمالية التالية:

$$\boxed{0 \le F < +\infty f(F) = \frac{c\, F^{(V_1-2)/2}}{(V_2+V_1 F)^{(V_2+V_1)/2}}}$$

الشكل رقم (06) توزيع فيشر.



من خلال ملاحظتنا للشكل فإن التوزيع:

- **غير متماثل:** توزيع فيشر ليس متماثلًا، حيث يكون التوزيع مائلًا نحو اليمين.
- **يتطلب درجات حرية:** توزيع فيشر يعتمد على درجتي الحرية للعينة الأولى والعينة الثانية.

[1] - أحمد السيد، **الإحصاء التطبيقي**، مكتبة بستان المعرفة، مصر، 2009، ص271.

- **التوزيع الموجب:** لأننا نأخذ النسبة بين التباينين، فإن توزيع فيشر يحتوي فقط على قيم موجبة (لا يمكن أن تكون قيمته سلبية).منحنى التوزيع F يشبه منحنى توزيع x^2 فهو غير متماثل كما أنه ملتو على اليمين (موجب الإلتواء) ويقل هذا الإلتواء كلما زادت قيمة درجتي الحريتين v_1 و v_2.

مثال01:

نفترض أن لدينا عينتين من مجتمعين مختلفين، ونريد استخراج القيم الجدولية عند مستوى دلالة 0.05 .

- حجم العينة الأولى $n_1=15$ و حجم العينة الثانية . $n_2=10$
- التباين المحسوب من العينة الأولى 25
- التباين المحسوب من العينة الثانية 36

نحسب القيمة F باستخدام الصيغة:

نحدد درجات الحرية:

$V_1= 15-1=\mathbf{14}$ ،$V_2=10-1=\mathbf{9}$

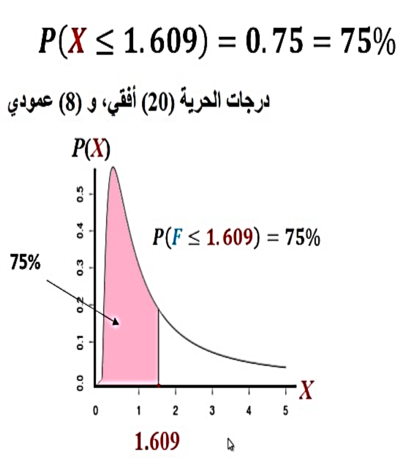
نبحث في جدول توزيع فيشر للحصول على القيمة الحرجة عند مستوى دلالة 0.05 فكانت القيمة المحسوبة $F=0.6944$.

مثال02: تطبيق عملي، بحيث نقوم إستخراج قيم F من الشكل كما يلي:

الشكل رقم (08): تطبيق عملي

The (F) Distribution توزيع

	10	12	14	16	18	20	30	40	∞
1	9.320	9.406	9.468	9.515	9.552	9.581	9.670	9.714	9.849
2	3.377	3.393	3.405	3.414	3.421	3.462	3.443	3.451	3.476
3	2.445	2.450	2.454	2.456	2.459	2.460	2.465	2.467	2.474
4	2.082	2.083	2.083	2.083	2.083	2.083	2.082	2.082	2.081
5	1.890	1.888	1.886	1.884	1.883	1.882	1.878	1.876	1.869
6	1.771	1.767	1.764	1.761	1.759	1.757	1.751	1.748	1.737
7	1.690	1.684	1.680	1.676	1.674	1.671	1.664	1.659	1.645
8	1.631	1.624	1.619	1.615	1.612	1.609	1.600	1.595	1.578
9	1.586	1.579	1.573	1.568	1.564	1.561	1.551	1.545	1.526
10	1.551	1.543	1.537	1.531	1.527	1.524	1.512	1.506	1.484
11	1.523	1.514	1.507	1.501	1.497	1.493	1.480	1.474	1.450
12	1.500	1.490	1.483	1.477	1.472	1.468	1.454	1.447	1.422
13	1.480	1.470	1.462	1.456	1.451	1.447	1.432	1.425	1.398
14	1.463	1.453	1.445	1.438	1.433	1.428	1.414	1.406	1.377
15	1.449	1.438	1.430	1.423	1.417	1.413	1.397	1.389	1.359
16	1.437	1.426	1.417	1.410	1.404	1.399	1.383	1.374	1.343
17	1.426	1.414	1.405	1.398	1.392	1.387	1.370	1.361	1.329
18	1.416	1.404	1.395	1.388	1.381	1.376	1.359	1.350	1.316
19	1.407	1.395	1.386	1.378	1.372	1.367	1.349	1.339	1.305
20	1.400	1. 387	1.381	1.370	1.363	1.358	1.340	1.330	1.294
22	1.386	1.374	1.366	1.360	1.349	1.343	1.325	1.314	1.276
24	1.375	1.362	1.353	1.347	1.336	1.331	1.311	1.300	1.261
26	1.366	1.352	1.343	1.336	1.331	1.320	1.300	1.289	1.247
28	1.358	1.344	1.334	1.326	1.321	1.311	1.291	1.279	1.236
30	1.351	1.337	1.327	1.318	1.313	1.303	1.282	1.270	1.226
40	1.327	1.312	1.300	1.291	1.284	1.276	1.253	1.240	1.188
∞	1.255	1.237	1.222	1.211	1.200	1.191	1.160	1.140	1.000



6.توزيع ستودنت: Student's t-distribution

أ .**تعريف:** هو توزيع احتمالي يُستخدم لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع عندما تكون حجم العينة صغيرًا (n < 30)ويُجهل الانحراف المعياري للمجتمع، فيُستبدل بانحراف العينة.

خصائص توزيع t لسودنت:

متماثل حول الصفر (يشبه التوزيع الطبيعي).

1. **منحناه أكثر تسطحًا** من التوزيع الطبيعي لأن له ذيولاً أثقل.
2. **كلما زاد عدد درجات الحرية** v، اقترب توزيع t من **التوزيع الطبيعي المعياري** N(0,1)
3. يُستخدم في **اختبار** (t-test) **t** لمقارنة المتوسطات أو اختبار الفرضيات.

أمثلة على استخدامه:

- اختبار فرضية حول **متوسط مجتمع مجهول الانحراف المعياري**.
- مقارنة **متوسطين لعينتين مستقلتين أو مرتبطتين**.

نستخدم توزيع ستيودنت في الحالتين التاليتين:

- في حالة كان تباين المجتمع σ^2 مجهولا وذلك مهما كان حجم العينة صغيرا أو كبيرا
- في حالة كان توزيع المجتمع مجهولا وحجم العينة أقل من 30 مشاهدة.

شكل رقم (09): استخدامات توزيع ستودنت

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

لتوزيع t جدول خاص تعتمد قراءته على متغيرين هما: درجة الحرية والاحتمال المقابل لقيمة t. وللتوضيح أكثر يمكن تقدم المثال الآتي:

- $t_{(p\,;\,v)}= t_{(0,95\,;\,24)}= 1,711 \Rightarrow$
$P(t \leq 1,711)= 0,95$

ب.الخصائص العددية:

الامل الرياضي: $E(X)=0$

- **التباين** / $Var(X)=x=\frac{v}{v-2}$ **حيث v اكبر من 2**

-الانحراف المعياري: $\sigma(x)=\sqrt{\frac{v}{v-2}}$

مثال 1:باستخدام جدول توزيع t أوجد:

$t(0.025,12)$; $t(0.05,3)$; $t(0.99,11)$; $t(0.995,9)$; $t(0.90,16)$

الحل:

($t(0.025,12$: تعني القيمة التي يقع يمينها مساحة قدرها 0.025 ودرجة الحرية تساوي 12، أي أن القيمة ستكون موجبة ومن خلال الجدول نستطيع إيجادها مباشرة بحيث نختار من العمود الأيسر (عمود درجات الحرية v القيمة 12، ونختار من الصف الأول (صف المساحات α القيمة 0.025 و الصف نحصل على القيمة($t(0.025,12$ ونجدها تساوي 2.179 أي:

(0.90,16) : 9 بنفس التحليل للفقرتين السابقتين وباستخدام خاصية التماثل نجد أن:

$t(0.90,16) = -t(1-0.90,16) = -t(0.10,16) = -1.337$

نفس الشيء بالنسبة لباقي القيم المتبقية

ملخص أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

اسم ورمز القانون	دالة الكثافة الاحتمالية	خصائص التوزيع
التوزيع المنتظم $X \sim \mathbb{U}(a;b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & si\ x\in[a;b]\\ 0 & sinon\end{cases}$	$E(X)=\dfrac{b+a}{2}$ $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
التوزيع الطبيعي : التوزيع الطبيعي العام $X \sim \mathbb{N}(\mu,\sigma^2)$	التوزيع الطبيعي العام : $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty\le x\le\infty$	$\sigma>0$ و $\mu\in R$ ثابتان اختياريان
التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) $Z \sim \mathbb{N}(0,1)$	التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) : $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty\le z\le\infty$	$\sigma=1$ و $\mu=0$
التوزيع الأسي $X \sim Exp(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,x>0\ et\ \lambda>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$	$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
توزيع قاما $X \sim G(\alpha,\beta)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & ,x>0\ et\ \alpha,\beta>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$ $\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما والتي تكون من الشكل التالي : $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}\ e^{-x}dx$ وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد n عدد صحيح موجب، فإن دالة قاما تصبح : $\Gamma(n)=(n-1)!$	$E(X)=\alpha.\beta$ $V(X)=\alpha.\beta^2$
توزيع بيتا $X \sim \beta(\alpha,\beta)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1\ et\ (\alpha,\beta)>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$ حيث $\beta(\alpha,\beta)$ هي دالة بيتا والتي تحسب كالتالي :	$E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $V(X)=\dfrac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}$

	$\beta(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \quad \alpha,\beta>0$ ولدالة بيتا علاقة بدالة قاما حيث نجد أن : $\beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$	
$E(X)=0$ $V(X)=\frac{v}{v-2} \;;v>2$ $t_{(\alpha,v)}=-t_{(1-\alpha,v)}$ $P\left(T\geq t_{(v)}\right)=P\left(T\leq -t_{(v)}\right)=\alpha$ $P\left(T\leq t_{(v)}\right)=P\left(T\geq -t_{(v)}\right)=1-\alpha$	$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma(\frac{v}{2})}(1+\frac{x^2}{v})^{-\frac{(v+1)}{2}} \;;-\infty<x<+\infty \;\; et \;\; v\in\mathbb{N}$	**توزيع ستيودنت** $X \backsim t(v)$
$E(X)=v$ $V(X)=2v$ $P(X\geq \chi^2_{(\alpha,v)})=\alpha$ $P(X\leq \chi^2_{(\alpha,v)})=1-\alpha$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{(\frac{v}{2})}\Gamma(\frac{v}{2})}x^{(\frac{v}{2}-1)}e^{-\frac{x}{2}} & ,x>0 \;\; et \;\; v\in\mathbb{N}\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$	**توزيع كاي مربع** $X \backsim \chi^2_{(v)}$
$E(X)=\frac{v_2}{v_2-2} \quad ;v_2>2$ $V(X)=\frac{2(v_2)^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}\;;\;v_2>4$ $P(X\geq F(\alpha;v_1;v_2))=\alpha$ $P(X\leq F(\alpha;v_1;v_2))=1-\alpha$ $F(\alpha;v_1;v_2)=\frac{1}{F(1-\alpha;v_2;v_1)}$	$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}\frac{x^{\left(\frac{v_1}{2}-1\right)}}{\left(1+\frac{v_1}{v_2}x\right)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}} \;; & x>0 \;\; et \;\; v_1,v_2\in\mathbb{N}\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$	**توزيع فيشر** $X \backsim F(v_1;v_2)$

السلسلة الثالثة

قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

جامعة محمد البشير الإبراهيمي برج بوعريريج

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مقياس: إحصاء 03 ....السنة الثانية علوم مالية ومحاسبية

السلسلة رقم 3... التوزيعات الاحتمالية المستمرة (التوزيع الطبيعي)

❖ **التمرين 01:**

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أوجدالاحتمالات المقابلة لها، ثم أكتبها على شكل احتمال ثم ارسم الشكل البياني المقابل لها؟.

F(1.17) / F(-2.15) / F(5.8) /F(-6.7)

❖ **التمرين 02:**

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أوجد الاحتمالات المقابلة لها ثم ارسم الشكل البياني المقابل لها؟.

$P(Z\geq 2.58)$ / $P(Z\geq 1.64)$ / $P(Z\leq -1.34)$ / $P(Z\leq -7.35)$

$P(2.23\leq Z\leq 3.34)$ / $P(-1.96.23\leq Z\leq 1.69)$

❖ **التمرين 03:**

اذا كان الدخل الشهري للاسر في احدى المناطق يتبع توزيع طبيعي بمتوسط قدره 80 الف د.ج وانحراف معياري قدره30 ألف دينار جزائري.

المطلوب:

1- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ألف دينار جزائري؟

2- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

❖ **التمرين 04:**

تفيد احصائيات السنوات السابقة في جامعة برج بوعريريج أن نقاط الطلبة في مقياس الإحصاء الرياضي تتوزع توزيع طبيعي بمتوسط قدره 7 نقاط ، وانحراف معياري يقدر بـ 2 نقاط.

المطلوب:

1. ما هي طبيعة ونوع المتغير العشوائي المدروس؟ اكتب الصيغة الرياضية لتوزيع هذا المتغير.
2. أحسب نسبة الطلبة الذين: تقل نقاطهم عن المعدل المتوسط، تقل نقاطهم عن 3 نقاط، تفوق نقاطهم 10، ما بين 7 و11 نقطة.
3. حدد مجال نقاط الطلبة التي تحقق الاحتمال التالي $P(X < x) = 0.9772$.

4. حدد المجال الذي يتراوح بين حديه نقاط الطلبة 90% ؟.

❖ **التمرين 05:**

أظهرت نتائج دراسة مسحية على عينة من عملاء البنوك التجارية الجزائرية، بأن هناك 55% من العملاء أبدو رضاهم عن جودة الخدمات التي تقدم اليهم.

فإذا أعاد باحث دراسة نفس المجتمع بعد فترة زمنية، وأخذ من عينة تقدر ب 200 عميل، فما هو أحتمال:

- أن يكون 120 عميل من العينة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية؟.
- أن يكون 100 عميل على الأقل من العينة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية؟.
- أن يكون 100 عميل على الأكثر من العينة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية؟.
- أن يكون هناك مابين 100 و 200 عميل على الأقل من العينة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية؟.

❖ **التمرين 06:**

أظهرت كميرا المراقبة في أحد محطات البنزي، بأن هناك متوسط 20 سيارة في الساعة الواحدة تدخل المحطة للتزويد بالوقود.

المطلوب: أوجد الاحتمالات التالية:

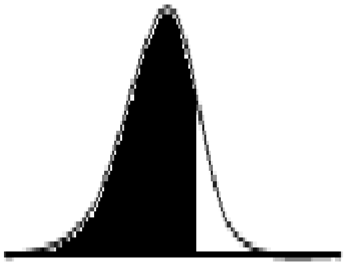
- احتمال أن تتزود 15 سيارة بالضبط في الساعة الواحدة؟.
- احتمال أن تتزود 26 سيارة على الأكثر في الساعة الواحدة؟.
- احتمال أن تتزود 18 سيارة على الأقل في الساعة الواحدة؟.
- احتمال أن تتزود مابين 10 و 15 سيارة على الأقل في الساعة الواحدة؟.

حل السلسلة رقم 3. التوزيعات الاحتمالية المستمرة

❖ التمرين 01:

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أوجدالاحتمالات المقابلة لها، ثم أكتبها على شكل احتمال ثم ارسم الشكل البياني المقابل لها؟.

- ✓ F(1.17) = 0,8790 ⟶ P(Z≤1.17) = 0,8790



- ✓ F(-2.15)= 0,0158 ⟶ P(Z≤(-2.15) = 0, 0158
- ✓ F(5.8)≅ 1 ⟶ P(Z≤(5.8) ≅ 1
- ✓ F(-6.7))≅ 0 ⟶ P(Z≤(-6.7) ≅ 0

❖ التمرين 02:

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أوجد الاحتمالات المقابلة لها ثم ارسم الشكل البياني المقابل لها؟.

- ✓ P(Z≥2.58)=1-0,9946=0,0054
- ✓ P (Z≥1.64)= 1-09495= 0,0505
- ✓ P(Z≤ -1.34)= 0,0918
- ✓ P(Z≤-7.35) ≅ 0
- ✓ P(2.23≤ Z≤ 3.34)=0,9996-0,9871=0,0125
- ✓ P(-1.96.23≤ Z≤ 1.96) =0,9750 - 0,0250=0,05

❖ التمرين 03:

1- حساب نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60ألف دينار جزائري:

$$P(X<60)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{60-80}{30}\right)=P(z<-0.67)$$
$$=1-F(0.67)=1-0.7486=0.2514$$

2- حساب الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول:

$$P(X < x) = 0.975 = P(Z < z) = 0.975$$

من الجداول الاحصائية نجد: $z = 1.96$

$$\frac{x - 80}{30} = 1.96 \Rightarrow x = \mu + 1.96\sigma = 80 + 1.96 \times 30 = 138.8$$

اذن الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول هو 138.8 ألف دينار جزائري.

❖ **التمرين 04:**

1- طبيعة ونوع المتغير المدروس: متغير كمي مستمر، وصيغته الرياضية تكتب على الشكل التالي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty}$$

2- حساب الاحتمالات:

- نسبة الطلبة الذين الذين تقل نقاطهم عن المعدل المتوسط:

$$P(X < 7) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{7 - 7}{2}\right) = P(z < 0) = F(0) = 0.5$$

ومنه نسبة الطلبة الذين تقل نقاطهم عن المعدل المتوسط هو 50%

- نسبة الطلبة الذين تقل نقاطهم عن 03:

$$P(X < 3) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{3 - 7}{2}\right) = P(z < -2) = 1 - F(2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ومنه النسبة هي: 2.28%.

- نسبة الطلبة الذين تفوق علامتهم 10:

$$P(X > 10) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} > \frac{10 - 7}{2}\right) = P(z > 1.5) = 1 - F(1.5)$$
$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

- نسبة الطلبة الذين تتراوح نقاطهم بين 7 و11:

$$P(7 < X < 11) = P\left(\frac{7 - 7}{2} < \frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{11 - 7}{2}\right) = P(0 < z < 2)$$
$$= F(2) - F(0) = 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

ومنه النسبة هي: 47.72%.

3- تحديد المجال الذي يتراوح بين حديه 90% من العلامات:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0.90 = P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)$$
$$= P(-z \leq Z \leq z) = 2F(z) - 1 = 0.9$$

$$F(z) = \frac{0.9 + 1}{2} = 0.95$$

من الجداول الاحصائية نجد: $z = 1.65$ ومنه:

$$\frac{x_1 - \mu}{\sigma} = -1.65 \Longrightarrow x_1 = \mu - 1.65\sigma = 7 - 1.65 \times 2 = 3.7$$

$$\frac{x_2 - \mu}{\sigma} = 1.65 \Longrightarrow x_2 = \mu + 1.65\sigma = 7 + 1.65 \times 2 = 10.3$$

ومنه 90% من الطلبة علامتهم تتراوح بين 3.7 و10.3

$$P(X < x) = 0.9776 = P(Z < z) = 0.9772$$

ومنه من الجداول الاحصائية نجد $z = 2$.

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = 2 \Longrightarrow x = \mu + 2\sigma = 7 + 2 \times 2 = 11$$

المحور الرابع

تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

الأهداف التعليمية
تمهيد أولا – التقارب بين توزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحدين ثانيا – تقريب التوزيع فوق الهندسي من توزيع ثنائي الحدين ثالثا – التقريب الطبيعي لتوزيع ثنائي الحدين رابعا – تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي خامسا – سلاسل التمارين الخاصة بالمحور

تمهيد:

يُعدّ موضوع **تقارب التوزيعات الاحتمالية** من المفاهيم الأساسية في الإحصاء والاحتمالات، إذ يُبرز العلاقة بين مختلف التوزيعات ودورها في تبسيط الدراسة النظرية والتطبيقية للظواهر العشوائية. فغالباً ما تكون بعض التوزيعات **حدوداً تقريبية** لتوزيعات أخرى عندما يتغيّر أحد معلماتها أو عندما يزداد حجم العينة إلى ما لا نهاية.

فعلى سبيل المثال، يقترب **توزيع ثنائي الحدين (*Binomial*)** من **توزيع بواسون (*Poisson*)** عندما يكون عدد المحاولات كبيراً واحتمال النجاح صغيراً، كما يقترب كل من **توزيعي بواسون وثنائي الحدين** من **التوزيع الطبيعي (*Normal*)** عند تحقق شروط معينة. ومن جهة أخرى، يقترب **توزيع t لسودنت (*Student*)** من **التوزيع الطبيعي المعياري** عندما تزداد **درجات الحرية**.

تكمن أهمية دراسة هذا التقارب في تمكين الباحثين من **تبسيط الحسابات الإحصائية**، واستخدام التوزيعات المعروفة مثل **التوزيع الطبيعي** كأداة تقريبية في تحليل البيانات، خاصة في الحالات التي يصعب فيها التعامل مع التوزيعات الأصلية.

1- التقارب بين توزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحدين:

يُعتبر **توزيع بواسون (Poisson)** تقريبًا خاصًّا من **توزيع ثنائي الحدين (Binomial)** في ظروف معينة، إذ يُستخدم لتبسيط الحسابات عندما يكون عدد المحاولات كبيرًا جدًا واحتمال النجاح في كل محاولة صغيرًا جدًا.

فإذا كان لدينا متغير عشوائي X يتبع توزيعًا ثنائي الحدين بمعلمتين n(عدد المحاولات) و p(احتمال النجاح)، أي:

$$X \sim B(n, p)$$

فإنه عندما يكون n كبيرًا و p صغيرًا بحيث تبقى القيمة $\lambda = n \times p$ ثابتة، فإن توزيع XXX **يقترب من توزيع بواسون** ذي المعلمة :λ

$$B(n, p) \approx (\lambda)$$

هذا التقارب يُستخدم في الحالات التي يصعب فيها حساب الاحتمالات الثنائية بدقة، فيتم اعتماد توزيع بواسون كبديل تقريبي بسيط وفعّال.

المثال:[1]

إذا كان احتمال حدوث حدث معين صغيرًا جدًا ولكن عدد التجارب كبيرًا، مثل عدد الحوادث في يوم معيّن أو عدد المكالمات في ساعة، فإن توزيع بواسون يعطي نتائج دقيقة تقريبًا.

نفرض أن هناك 300خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب به 500صفحة،

1-أوجد الاحتمالات التالية : أ – أن لا تحتوي صفحة معينة على أية خطأ ؟

ب- أن تحتوي صفحة معينة على خطأ بالضبط ؟

ج- أن تحتوي صفحة معينة على خطأين أو أكثر ؟

2-أحسب المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع؟

الحل:

سوف ننظر إلى عدد الأخطاء في الصفحة على أنه عدد مرات النجاح في متتابعة من تجارب برنولي، في هذا المثال n=300حيث أنه يوجد 300خطأ مطبعي و p = 500 1 هو احتمال أن يظهر خطأ في الصفحة المعينة، حيث أن p صغيرة فسوف نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda = np = 300.\ 500/1 = 0.6$.وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي:

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-0.6}0.6^x}{x!}$$

1- حساب الاحتمالات التالية :

أ – أن لا تحتوي أية صفحة معينة على خطأ :

$$P(X=0)=\frac{e^{-0.6}0.6^0}{0!}=0.549$$

ب- أن تحتوي صفحة معينة على خطأ بالضبط :

$$P(X=1)=\frac{e^{-0.6}0.6^1}{1!}=0.329$$

جـ- أن تحتوي صفحة معينة على خطأين أو أكثر :

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-[0.549+0.329]$$
$$=0.122$$

2- حساب المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\lambda=0.6$$

ب- التباين :

$$V(X)=\lambda=0.6$$

جـ- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}=\sqrt{0.6}=0.77$$

2. تقريب التوزيع فوق الهندسي من توزيع ثنائي الحدين

يُستخدم التوزيع فوق الهندسي (Hypergeometric Distribution) لوصف احتمال الحصول على عدد معيّن من النجاحات عند السحب دون إرجاع من مجتمع محدود، أي عندما تكون العينة مسحوبة من مجتمع محدود الحجم دون تعويض.

بينما يُستخدم التوزيع ثنائي الحدين (Binomial Distribution) في حالة السحب مع الإرجاع أو عندما يكون حجم المجتمع كبيرًا جدًا مقارنة بحجم العينة.

وعندما يكون حجم المجتمع كبيرًا جدًا بالنسبة لحجم العينة، أي أن نسبة التغير الناتجة عن السحب دون إرجاع تصبح صغيرة جدًا، يمكن تقريب التوزيع فوق الهندسي بتوزيع ثنائي الحدين، لأن احتمال النجاح في كل سحب يبقى تقريبًا ثابتًا كما في الحالة الثنائية.

-بصيغة رياضية:

إذا كان لدينا:

- Nحجم المجتمع الكلي،
- Kعدد عناصر النجاح في المجتمع،
- n: حجم العينة المسحوبة،
- Xعدد النجاحات في العينة،

فإن:

$$X \sim H(N,K,n)$$

لكن عندما يكون Nكبيرًا و nصغيرًا بحيث أن نسبة السحب $x = \frac{n}{N}$ صغيرة، يمكننا أن نقول:

$$B(n, \frac{K}{N}) \approx B(n,KN)$$

أي أن احتمال النجاح في كل تجربة يساوي تقريبًا $p == \frac{K}{N}$

3. التقريب الطبيعي لتوزيع ثنائي الحدين

يُستخدم التوزيع الطبيعي (وهو توزيع مستمر) لتقريب التوزيع الثنائي الحدين (وهو توزيع متقطع) عندما يكون عدد المحاولات n كبيرًا، أي $n\geq30$، ولا تكون قيمتا p و $q=1-p$ قريبتين من الصفر، أي عندما تكون $p\approx0$..

كما يمكن الاعتماد على هذا التقريب عندما يتحقق الشرطان:

$$np>5 \quad و \quad nq>5$$

وذلك لأن حساب الاحتمالات باستخدام الجداول الطبيعية أسهل بكثير من حسابها بواسطة الصيغة العامة للتوزيع الثنائي الحدين التي تحتوي على معاملات التوافيق C_x^n، خصوصًا عندما يكون n كبيرًا.

ويُكتب هذا التقريب على الشكل:

$$B(n,P)\sim N(\mu=np,\sigma^2=n.p.q)$$

ويكون :

$$P(X=x)\approx P\left(\frac{x-n.p-0.5}{\sqrt{n.p.q}}\leq Z\leq\frac{x-n.p+0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right)\approx P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma}\leq Z\leq\frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$$

$$P(X<x)\approx P\left(Z<\frac{x-n.p-0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right)$$

$$P(X\leq x)\approx P\left(Z<\frac{x-n.p+0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right)$$

حيث : $Z\sim N(0,1)$

مثال:[1]

ألقي حجر نرد 180مرة، أحسب احتمال أن يظهر الرقم : 6

1-من 29 إلى 32مرة بما في ذلك 29و 32؟

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

الحل:

1 – حساب احتمال أن يظهر الرقم 6 من 29 إلى 32 مرة بما في ذلك 29 و32 :

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية المكررة تتبع قانون ثنائي الحدين، لكن عند استخدامه فإن القيام بالعمليات الحسابية يكون صعبا جدا، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي كتقريب لقانون ثنائي الحد، لأن شروط التقريب متوفرة، حيث :

$n.p > 5$ و $n.q > 5$ و $n > 30$.

في هذا المثال لدينا : $\mu = 180.\frac{1}{6} = 30$ وأيضا $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{180.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}} = 5$ وباستخدام علاقة التقريب بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ثنائي الحدين $P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$ نجد :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(29 \leq \mathrm{X} \leq 32) \approx\ & P\left(\frac{29-30-0.5}{5} \leq Z \leq \frac{32-30+0.5}{5}\right) \\
&= P(-0.3 \leq Z \leq 0.5) = P(-0.3 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\
&= 0.1179 + 0.1915 = 0.3094
\end{aligned}$$

رابعا : تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي

بما أنّ هناك علاقة تربط توزيع بواسون بتوزيع ثنائي الحدين، وعلاقة أخرى تربط توزيع ثنائي الحدين بالتوزيع الطبيعي، فمن المنطقي أن نقول إنّه توجد أيضًا علاقة تربط توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي.

يتحقق هذا التقريب عندما تكون قيمة المعامل λ كبيرة (أي عندما $\lambda \rightarrow \infty$

وفي هذه الحالة يمكن تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي وفق الصيغة التالية:

$$P(\lambda) \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

$$\lambda \rightarrow \infty$$

والقاعدة العملية للتقارب هي عندما تتجاوز المعلمة λ للمقدار 15 أي $\lambda \geq 15$ فيما يعتمد بعض الاحصائيين كشرط للتقرب $\lambda \geq 10$.

ويكون التقريب وفق معامل التصحيح وحسب الحالات التالية :

$$P(X = x) \approx P\left(\frac{x - \lambda - 0.5}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{x - \lambda + 0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$P(X < x) \approx P\left(Z < \frac{x - \lambda - 0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$P(X \leq x) \approx P\left(Z < \frac{x - \lambda + 0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

سلسلة تمارين الخاصة بتقارب التوزيعات

جامعة محمد البشير الإبراهيمي برج بوعريريج

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مقياس: إحصاء 03 ....السنة الثانية علوم مالية ومحاسبية

السلسلة رقم 4... تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

التمرين الأول:[1]

في تجربة القاء قطعة نقود متجانسة في الهواء 100 مرة، لنفترض أننا نريد حساب احتمال الحصول على الصورة 45 مرة على الأكثر.

التمرين الثاني:

يقوم أحد المصانع بوضع البسكويت في صناديق تحتوي كل منها على 100 قطعة. احتمال كسر البسكويت هو 0.03. أوجد احتمال أن يحتوي الصندوق على قطعتين (2) من البسكويت المكسور.

التمرين الثالث:

إذا كان معدل عدد الحوادث في أحد المصانع هو 45 حادثًا سنويا، وعدد الحوادث سنويا يتبع توزيع بواسون. استخدم التقريب الطبيعي لإيجاد احتمال وقوع أكثر من 50 حادثًا في السنة.

التمرين الرابع:

توضح الخبرة الماضية أن 1% من مصابيح الكهرباء المنتجة في مصنع ما هي مصابيح معيبة . في عينة من 30 مصباح ، أوجد احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام (أ) توزيع ذو الحدين (ب) توزيع بواسون كتقريب لذو الحدين .

التمرين الخامس:

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

صندوق به 100 كرية منها 60 بيضاء و40 حمراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، أحسب احتمال الحصول على :

1- كريتين بيضاوين ؟
2- ولا كرة بيضاء ؟
3- كريتين بيضاوين على الأقل ؟
4- كريتين بيضاوين على الأكثر ؟

التمرين السادس:

ألقيت قطعة نقدية 12 مرة، أحسب احتمال أن نحصل على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 بما في ذلك 4 و 7 باستخدام :

1 – التوزيع ثنائي الحدين ؟

2 – التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي ؟

التمرين السابع:

يستقبل مركز الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات الكبرى في المتوسط 16 حالة كل ساعتين، فما احتمال أن يستقبل بين الساعة العاشرة صباحا والثانية عشر صباحا :

1 - 10 حالات ؟

2- أقل من 11 حالة ؟

حلول السلسلة الرابعة (الخاصة بتقارب التوزيعات الاحتمالية)

حل التمرين الأول:[1]

في تجربة القاء قطعة نقود متجانسة في الهواء 100 مرة، لنفترض أننا نريد حساب احتمال الحصول على الصورة 45 مرة على الأكثر.

لاحظ أنه في هذا المثال لدينا القيم التالية:

$n = 100$ (عدد مرات رمي قطعة النقود في الهواء).

$X = 45$ (عدد حالات النجاح، أي عدد مرات الحصول على الصورة).

$p = 0.5$ (احتمال الحصول على الصورة، أي احتمال النجاح في الحصول على صورة).

لحساب احتمال الحصول على الصورة 45 مرة على الأكثر نتبع الخطوات التالية:

- ✓ **الخطوة 01: التأكد من أن حجم العينة كبير بما فيه الكفاية لاستخدام التقريب الطبيعي.**

نتأكد من تحقق الشرطين التاليين:

في حالتنا هذه:

$$np = 100(0.5) = 50$$
$$nq = 100(0.5) = 50$$

الشرطين محققين، وبذلك يمكن تطبيق التقريب الطبيعي.

- ✓ **الخطوة 02: تحديد تصحيح الاستمرارية.**

بالرجوع إلى الجدول أعلاه، نجد أنه يجب علينا إضافة 0.5 عندما نتعامل مع احتمال من الشكل $X \leq 45$، وبالتالي المطلوب منا إيجاد $P(X < 45.5)$.

- ✓ **الخطوة 03: إيجاد المتوسط μ والتباين σ^2 لتوزيع ذي الحدين.**

$$\boldsymbol{\mu = np = 100(0.5) = 50}$$
$$\boldsymbol{\sigma^2 = npq = 100(0.5)(0.5) = 25}$$

- ✓ الخطوة **04**: تحديد الاحصاءة Z.

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} = \frac{45 - 50}{\sqrt{25}} = -1$$

- ✓ **الخطوة 05: إيجاد قيمة الاحتمال.**

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد القيمة الاحتمالية المرافقة للقيمة -1 هي 0.1586.

وبالتالي احتمال الحصول على الصورة 45 مرة على الأكثر عند تكرار تجربة رمي قطعة النقود 100 مرة هي 0.1586

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

حل التمرين الثاني:

- يعتبر هذا التوزيع توزيع ذي الحدين، حيث $n = 100$ و $p = 0.03$

$$P(X = 2) = C_{100}^{2}(0.03)^2(0.97)^{98} = 0.2251$$

- باستخدام تقريب توزيع بواسون:

$$\lambda = np = 100(0.03) = 3 < 5$$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 0.224$$

وبالتالي احتمال أن يحتوي صندوق البسكويت على قطعتين مكسورتين هو 0.224

حل التمرين الثالث:

$$\mu = \lambda = 45 > 20$$
$$\sigma^2 = \lambda = 45$$

الشرط $\lambda > 20$ محقق، وبالتالي يمكننا استخدام التقريب الطبيعي في حساب الاحتمالات.

لتكن X هي المتغير العشوائي لعدد الحوادث في السنة.

للحصول على قيمة الاحتمال المطلوب، نقوم أولا بتطبيق تصحيح الاستمرارية بحيث نضيف 0.5 عندما نتعامل مع احتمال من الشكل $X > 50$، بمعنى الاحتمال المطلوب هو $P(X > 50.5)$.

$$P(X > 50.5) = P\left(Z > \frac{50.5 - 45}{\sqrt{45}}\right) = P(Z > 0.820) = 1 - P(Z \leq 0.820) = 0.2061$$

حل التمرين الرابع:

1- أ- حساب احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام توزيع ذو الحدين :

بما أن عدد المحاولات معلوم (n=30) ، واحتمال النجاح ثابت في كل تجربة (p=0.01) (التجارب مستقلة) فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X = x) = C_{30}^{x}(0.01)^{x}(0.99)^{30-x} \qquad X = 0,1,2,3,..,30$$

$$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots + P(X = 30)$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X > 1) = 1 - \left[C_{30}^{0}(0.01)^{0}(0.99)^{30-0} + C_{30}^{1}(0.01)^{1}(0.99)^{30-1}\right]$$
$$= 1 - (0.7397 + 0.2241) = 0.0361$$

1-ب- حساب احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام توزيع بواسون :

بما أن p صغيرة فيمكن أن نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda = np = 30 * 0.01 =$ 0.3 وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-0.3}0.3^{x}}{x!}$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0.3}0.3^{1}}{1!} = (2.3)(0.74082) = 0.222246$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0.3}0.3^{0}}{0!} = e^{-0.3} = 0.74082$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = 0.222246 + 0.74082 = 0.963066$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.963066 = 0.036934, \text{ or } 3.69\%$$

2- الاستنتاج: يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين من توزيع بواسون، وذلك عندما تكون p صغيرة و n كبيرة، وعموما نقوم بالتقريب إذا تحقق: $p \leq 0,05$ و $n \geq 30$.

حل التمرين الخامس:[1]

القانون الأصلي هو قانون فوق الهندسي. $X \to H(100,60,3)$

لكن لدينا: $\left(\frac{n}{N} = \frac{3}{100} = 0.03 \leq 0.05\right)$ وبالتالي تقرب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين أي:

$X \to B(3,0.6)$ أي: $X \to B(4,0.7)$ وتصبح دالة الكثافة الاحتمالية على النحو التالي:

$$P(X = x) = C_3^x (0.6)^x (0.4)^{3-x} \qquad x = 0,1,2,3$$

1- حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين:

$$P(X = 2) = C_3^2 (0.6)^2 (0.4)^1 = 0.432$$

2- حساب احتمال عدم الحصول على أية كرة بيضاء:

$$P(X = 0) = C_3^0 (0.6)^0 (0.4)^3 = (0.4)^3 = 0.064$$

3- حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين على الأقل:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.432 + C_3^3 (0.6)^3 (0.4)^0 = 0.432 + 0.216 = 0.648$$

4 - حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.064 + C_3^1 (0.6)^1 (0.4)^2 + 0.432 = 0.064 + 0.0768 + 0.432 = 0.5728$$

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

حل التمرين السادس:[1]

1- حساب احتمال الحصول على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 باستخدام توزيع ثنائي الحدين :

بما أن عدد المحاولات معلوم، واحتمال النجاح ثابت في كل المحاولات، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحدين حيث $n = 12$ و $p = 0.5$ و $q = 0.5$ ونكتب اختصارا $X \sim B(12,0.5)$ وتكون دالته الاحتمالية على النحو التالي :

$$P(X = x) = C_{12}^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-x} \quad x = 0,1,2,3,\ldots,12$$

$$P(4 \le X \le 7) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$P(X = 4) = C_{12}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-4} = \frac{495}{4096}$$

$$P(X = 5) = C_{12}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-5} = \frac{792}{4096}$$

$$P(X = 6) = C_{12}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-6} = \frac{924}{4096}$$

$$P(X = 7) = C_{12}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-7} = \frac{792}{4096}$$

ومنه نجد الاحتمال المطلوب :

$$P(4 \le X \le 7) = \frac{495}{4096} + \frac{792}{4096} + \frac{924}{4096} + \frac{792}{4096} = \frac{3003}{4096} = 0.7332$$

2- حساب احتمال الحصول على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي :

في هذا المثال لدينا : $\mu = 12.\frac{1}{2} = 6$ وأيضا $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{12.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 1.73$ وباستخدام علاقة التقريب بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ثنائي الحدين $P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \le Z \le \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$ نجد :

$$\begin{aligned} P(4 \le X \le 7) &\approx P\left(\frac{4-6-0.5}{1.73} \le Z \le \frac{7-6+0.5}{1.73}\right) = P(-1.445 \le Z \le 0.867) \\ &= P(-1.445 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 0.867) = 0.4251 + 0.3078 \\ &= 0.7329 \end{aligned}$$

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

حل التمرين السابع:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع بواسون، حيث: $\lambda = 16$ ، لكن حسب صيغة الأسئلة فإن استخدام هذا التوزيع يتطلب عمليات حسابية طويلة وصعبة، لذلك سيتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، لأن شروط التقريب متوفرة، لأن: $\lambda = 16 \geq 15$، حيث يكون:

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 16$$

1- حساب احتمال استقبال 10 حالات :

$$\begin{aligned}
P(X = 10) &\approx P\left(\frac{x-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{x-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)\\
&= P\left(\frac{10-16-0.5}{\sqrt{16}} \leq Z \leq \frac{10-16+0.5}{\sqrt{16}}\right)\\
&= P(-1.625 \leq Z \leq -1.375)\\
&= P(-1.625 \leq Z \leq 0) - P(-1.375 \leq Z \leq 0) = 0.4484 - 0.4162\\
&= 0.0322
\end{aligned}$$

2- حساب احتمال استقبال أقل من 11 حالة :

$$\begin{aligned}
P(X < 11) &\approx P\left(Z < \frac{11-16-0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(Z < -1.375)\\
&= 0.5 - P(-1.375 \leq Z \leq 0) = 0.5 - 0.4162 = 0.0838
\end{aligned}$$

3- حساب احتمال استقبال 11 حالة على الأكثر:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 11) &\approx P\left(Z \leq \frac{11-16+0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(Z \leq -1.25)\\
&= 0.5 - P(-1.25 \leq Z \leq 0) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056
\end{aligned}$$

4- حساب احتمال استقبال أكثر من 14 حالة :

$$\begin{aligned}
P(X > 14) &\approx P\left(Z > \frac{14-16+0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(Z > -0.375)\\
&= 0.5 + P(-0.375 \leq Z \leq 0) = 0.5 + 0.1480 = 0.6480
\end{aligned}$$

4- حساب احتمال استقبال أكثر من 5 حالات و أقل أو يساوي 17 حالة :

$$\begin{aligned}
P(5 < X \leq 17) &\approx P\left(\frac{5-16+0.5}{\sqrt{16}} < Z \leq \frac{17-16+0.5}{\sqrt{16}}\right)\\
&= P(-2.625 < Z \leq 0.375)\\
&= P(-2.625 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.375) = 0.4957 + 0.1480\\
&= 0.6437
\end{aligned}$$

المحور الخامس: المتغيرات العشوائية الثنائية

الأهداف التعليمية

تمهيد

أولا – المتغيرات العشوائية الثنائية

ثانيا – التوزيعات الاحتمالية الثنائية ودوالها

ثالثا – خصائص التوزيعات الاحتمالية المشتركة

تمهيد:

تُعدّ المتغيرات العشوائية الثنائية من أهم المفاهيم الأساسية في الإحصاء الاحتمالي، لأنها تُستخدم لوصف التجارب التي تكون نتائجها إحدى حالتين فقط، مثل: النجاح أو الفشل، صحيح أو خطأ، قبول أو رفض، وغيرها من الظواهر الثنائية.

فعند إجراء تجربة عشوائية يكون لكل تجربة نتيجتان محتملتان فقط، نرمز عادةً إلى إحداهما بـ "النجاح " (ويُعطى لها القيمة العددية 1) والأخرى بـ "الفشل) "ويُعطى لها القيمة العددية 0.

يُطلق على المتغير الذي يأخذ هاتين القيمتين اسم المتغير العشوائي الثنائي)أو البيرنولي

إذا كان احتمال النجاح في التجربة هو p، فإن احتمال الفشل هو $q=1-p$، ويُقال إنّ:

$$(p)X \sim B\ (p)$$

ويمتد هذا المفهوم إلى حالة تكرار التجربة n مرات مستقلة، حيث يصبح مجموع النجاحات متغيرًا عشوائيًا يتبع توزيعًا ثنائي الحدين $B(n,p)$

وبذلك يشكّل المتغير العشوائي الثنائي الأساس الرياضي لتوزيع ثنائي الحدين الذي يُستخدم على نطاق واسع في دراسة الظواهر الاحتمالية ذات النتائج الثنائية المتكررة.

أولا.تعريف المتغيرات العشوائية:

ليكن Sهو الفضاء العيني لتجربة ما، ولكل عدد حقيقي $(s \in x)$ لنعرف $x(X = x)$ و $Y(Y = y)$ كمتغيرات عشوائية، فنقول للزوج المرتب (Y, X) متغير عشوائي ذي بعدين، ويمكن تعميم هذا التعريف على المتغير العشوائي ذي البعدn .

فإذا كان المتغير العشوائي ذي البعدين (Y, X) له قيم صحيحة قابلة للعد في اللانهاية فنقول عن المتغير العشوائي (Y, X) بأنه متغير عشوائي منفصل ذا بعدين.

وإذا كان المتغير العشوائي (Y, X) يشكل مجموعة غير منتهية فإن المتغير العشوائي (Y, X)متغير متصل.

ثانيا : التوزيعات الاحتمالية الثنائية ودوالها

1-التوزيعات الاحتمالية المنفصلة ودوالها المشتركة والهامشية (الحدية):

1– 1تعريف : نفرض أن X وY متغيران عشوائيان منفصلان معرفان على نفس فضاء العينة S

حيث $X(S)=\{x_1 , x_2 ,\dots, x_n\}$ و $X(Y)=\{y_1 ,y_2,\dots y_m\}$

فلكل زوج مرتب (x_i, y_j) يوجد احتمال يعرف بـ $P\,(y=Y\,,\,x=X)$ ونكتبه $h(x_i, y_j)$، وتسمى الدالة h بالتوزيع المشترك أو بدالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X وY، وتعطى عادة في صورة الجدول التالي:[1]

X \ Y	y_1	y_2	....	y_m	المجموع
x_1 x_2 ... ... x_n	$h(x_1 , y_1)$ $h(x_2 , y_1)$ ... ... $h(x_n , y_1)$	$h(x_1 , y_2)$ $h(x_2 , y_2)$ ... ... $h(x_n , y_2)$	....	$h(x_1 , y_m)$ $h(x_2 , Y_m)$ ... ... $h(x_n , y_m)$	$f(x_1)$ $f(x_2)$ ... ... $f(x_n)$
المجموع	$g(y_1)$	$g(y_2)$	....	$g(y_m)$	

ويحقق التوزيع المشترك h الشروط التالية :

1) $h(x_i,y_j) \geq 0$

2) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h(x_i,y_j) = 1$

1- 2 الدوال الهامشية (الحدية) : تعرف الدوال f و g السابق ذكرها بالدوال الهامشية (الحدية) للمتغيرين العشوائيين المنفصلين X و Y وتعطى بالصيغة التالية :

$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} h(x_i,y_j)$ الكثافة الهامشية للمتغير X

أما $g(y_j) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i,y_j)$ فهو اقتران الكثافة الهامشية لـ Y

أي أن $f(x_i)$ هو مجموع مكونات الصف رقم i و $g(y_j)$ هو مجموع مكونات العمود رقم j، وتسمى هذه التوزيعات بالتوزيعات الهامشية، وهي في الواقع التوزيع الخاص بكل من X و Y على التوالي.

1-3 الكثافة الشرطية :

الكثافة الشرطية للمتغير x إذا علم y هي:

$$h(x/y) = \frac{h(x,y)}{f_Y(y)}$$

والعكس، الكثافة الشرطية للمتغير y إذا علم x هي :

$$h(y/x) = \frac{h(x,y)}{f_x(x)}$$

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

4-1المتغيرات العشوائية المنفصلة المستقلة:[1]

يقال أن عددا منتهيا من المتغيرات العشوائية X,Y,... ,Z المعرفة على فضاء العينة S مستقلة إذا كان :

$$P(X = x_i, Y = y_j, \ldots, Z = z_k) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \ldots P(Z = z_k)$$

لجميع قيم x_i ، y_j ، .... ، z_k وبصفة خاصة فإن X و Y مستقلان إذا كان :

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

وإذا كان توزيع X و Y على التوالي هو f و g والتوزيع المشترك هو h فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها على الصورة :

$$h(x_i, y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

أي أن X و Y مستقلان إذا كان كل حد $h(x_i, y_j)$ هو حاصل ضرب الحدين الهامشيين له.

2- التوزيعات الاحتمالية المتصلة ودوالها المشتركة والهامشية (الحدية) :

1-1 تعريف : إذا كان المتغير العشوائي المتصل (X,Y) معرف على منطقة التعريف R فالدالة $h(x, y)$ التي تحقق الشروط التالية :

1) $h(x, y) \geq 0 \quad if\ (x, y) \in R$
2) $\iint h(x, y)dx\, dy = 1$

تسمى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع (دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة). فإذا كانت B منطقة تعريف (x, y) فإن :

$$P(B) = \iint h(x, y)dx\, dy$$

2-1 الدوال الهامشية (الحدية) : لتكن الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين المتصلين X و Y معرفة على النحو $h(x, y)$ فإننا نسمي العلاقتين التاليتين :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dx$$

---

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

بأنهما الدوال الاحتمالية الهامشية (الحدية) لكل من المتغيرين المتصلين X و Y على التوالي.

3- دالة التوزيع التراكمية :

1-3 دالة التوزيع التراكمية المشتركة :

إذا كان (X,Y) متغير عشوائي منفصل و$h(x_i, y_j)$ هي الدالة الاحتمالية المشتركة، فالدالة المعرفة على النحو التالي :

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq y} h(n,m)$$

تسمى بدالة التوزيع التراكمية (التجميعية) المشتركة.

أما إذا كان (X,Y) متغير عشوائي متصل فإنه يقال للدالة المعرفة على النحو :

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} h(t,z)dtdz$$

بدالة التوزيع التراكمية (التجميعية) المشتركة.

وإذا كان X و Y متصلين فمن العلاقة السابقة نجد :

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = h(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{x} h(x,t)\, dt \; , \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{y} h(t,y)\, dt$$

وسواء كان المتغير العشوائي متصلا أو منفصلا فإنه يتمتع بالخواص التالية :

أ) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

ب) $F(-\infty, \infty) = 1$

ج) يستخدم $F(x,y)$ لإيجاد الاحتمالات التالية :

$$P(x_1 < X \leq x_2; Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$$

$$P(X \leq x; y_1 < Y \leq y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1)$$

$$P(x_1 < X \le x_2; y_1 < Y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

2-3 دوال التوزيع التراكمية الحدية :

لتكن $F(x,y)$ دالة التوزيع المشتركة للمتغيرين العشوائيين (المتصلين أو المنفصلين) فإن دوال التوزيع الحدية للمتغيرين العشوائيين X و Y يمكن تعريفهما بالعلاقات التالية :

$$F_x(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < \infty) = \lim_{y \to \infty} F(x,y) = F(x, +\infty)$$

$$F_y(y) = P(Y \le y) = P(X < \infty, Y \le y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y) = F(+\infty, y)$$

ثالثا – خصائص التوزيعات الاحتمالية المشتركة

أ – التوقع :

لتكن الدالة $h(x_i, y_j)$ هي دالة المتغيرين العشوائيين X و Y ولتكن القيمة المتوقعة لهذه الدالة هي $E(XY)$:

- فإذا كان المتغيران العشوائيان X و Y منفصلان فإن :

$$E(X) = \mu_x = \sum_x \sum_y x_i \,.\, h(x_i, y_j)$$

$$E(Y) = \mu_y = \sum_y \sum_x y_j \,.\, h(x_i, y_j)$$

ويكون $E(XY)$ وفق العلاقة التالية :

$$E(XY) = \sum x_i \, y_j \,.\, h(x_i, y_j)$$

- أما إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y منفصلان فإن :

$$E(X) = \mu_x = \int \int x \,.\, h(x,y) dxdy$$

$$E(Y) = \mu_y = \int \int y \,.\, h(x,y) dxdy$$

ويكون $E(XY)$ وفق العلاقة التالية :

$$E(XY) = \iint x\, y \,.\, h(x,y) dxdy$$

ب – التباين : [1]

- حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة :

$$V(X) = \sigma^2(X) = \sum_x \sum_y (x_i - E(X))^2 . h(x_i, y_j)$$

$$V(Y) = \sigma^2(Y) = \sum_x \sum_y (y_j - E(Y))^2 . h(x_i, y_j)$$

- حالة المتغيرات العشوائية المتصلة :

$$V(X) = \sigma^2(X) = \iint (x - E(X))^2 . h(x, y) dxdy$$

$$V(Y) = \sigma^2(Y) = \iint (y - E(X))^2 . h(x, y) dxdy$$

جـ- التباين المشترك (التغاير) :

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك $h(x_i, y_j)$ وكان توقع كل منهما على التوالي μ_x و μ_y فإن التغاير بين X و Y ويرمز له بالرمز $Cov(X, Y)$ يعرف كما يلي :

- حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة :

$$Cov(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) . h(x_i, y_j) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

أو بطريقة مكافئة كما يلي :

$$Cov(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i y_j) . h(x_i, y_j) - \mu_x \mu_y = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

- حالة المتغيرات العشوائية المتصلة :

$$Cov(X, Y) = \iint (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) . h(x_i, y_j) dxdy$$

د- معامل الارتباط :

يعرف معامل الارتباط بين X و Y ويرمز له بالرمز $\rho(X, Y)$ كما يلي :

[1] بيصار عبد الحكيم، مرجع سبق ذكره.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

ويعتبر الارتباط نسبة بلا تمييز وله الخواص التالية :

1) $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$ 2) $\rho(X,X) = 1$ 3) $\rho(X,-X) = -1$

4) $-1 \leq \rho \leq 1$ 5) $\rho(aX+b, cY+d) = \rho(Y,X)\ ;\ if a,c \neq 0$

مثال 01 :

نفرض أن X و Y لهما التوزيع المشترك التالي :

X \ Y	-3	2	4	المجموع
1	0.1	0.2	0.2	0.5
3	0.3	0.1	0.1	0.5
المجموع	0.4	0.3	0.3	1

المطلوب :

1- أوجد توزيع كل من X و Y ؟

2- أوجد $Cov(X,Y)$ أي تشتت X و Y ؟

3- أوجد $\rho(X,Y)$ أي الارتباط بين X و Y ؟

4- هل يعتبر X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين ؟

الحل :

1- التوزيع الهامشي الموجود يسار الجدول هو توزيع X (أي الدالة الحدية له) والتوزيع الهامشي الموجود أسفل الجدول هو توزيع Y (أي الدالة الحدية له) وهما مبينان في الجدولين التاليين :

x_i	1	3
$f(x_i)$	0.5	0.5

توزيع X

y_i	-3	2	4
$g(y_i)$	0.4	0.3	0.3

توزيع Y

-2 حساب $Cov(X,Y)$ أي تشتت X و Y:

- نحسب أولا μ_x و μ_y :

$$\mu_x = \sum x_i . f(x_i) = 1(0.5) + 3(0.5) = 2$$

$$\mu_y = \sum y_i . g(y_i) = -3(0.4) + 2(0.3) + 4(0.3) = 0.6$$

- ثم نحسب بعد ذلك $E(XY)$:

$$E(XY) = \sum x_i\, y_j\ .h(x_i, y_j)$$
$$= (1)(-3)(0.1) + (1)(2)(0.2) + (1)(4)(0.2) + (3)(-3)(0.3)$$
$$+ (3)(2)(0.1) + (3)(4)(0.1) = 0$$

ومنه نجد $Cov(X,Y)$ كما يلي:

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i\, y_j).h(x_i, y_j) - \mu_x\, \mu_y = E(XY) - \mu_x\, \mu_y = 0 - (2)(0.6)$$
$$= -1.2$$

3 – حساب $\rho(X,Y)$ أي الارتباط بين X و Y:

- نحسب أولا σ_x و σ_y :

$$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) = 1(0.5) + 9(0.5) = 5$$

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - \mu_x^2 = 5 - 2^2 = 1$$

$$\sigma_x = \sqrt{1} = 1$$

وأيضا:

$$E(Y^2) = \sum y_i^2 g(y_i) = 9(0.4) + 4(0.3) + 16(0.3) = 9.6$$

مثال 04 : إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين المنفصلين العشوائيين معطاة بالعلاقة التالية:

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-2}}{x!\,y!} & ,x=0,1,2,\dots\dots\ ;y=0,1,2,\dots.\\ 0 & \text{لقيم } x,y \text{ الاخرى}\end{cases}$$

والمطلوب إيجاد الدوال الاحتمالية الحدية لكل من المتغيرين المنفصلين x,y ؟

الحل :

الدالة الحدية للمتغير X هي :

$$P_x(x)=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-2}}{x!\,y!}=\frac{e^{-2}}{x!}\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{1}{y!}$$

وعلى اعتبار أن $\frac{e^{-2}}{x!}$ هو كمية ثابتة بالنسبة للمجموع وأن $\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{1}{y!}=e^{1}$ ينتج أن الدالة الاحتمالية الحدية :

$$P_x(x)=\frac{e^{-2}}{x!}e^{1}=\frac{e^{-1}}{x\,!}$$

ويمكن كتابة الدالة على الصورة :

$$P_x(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-2}}{x!} & ,\quad x=0,1,2,\dots\dots.\\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى}\end{cases}$$

وبالمثل نجد الدالة الاحتمالية للمتغير y

$$P_y(y)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-2}}{x!\,y!}=\frac{e^{-2}}{y!}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}=\frac{e^{-2}}{y!}.e^{1}$$

$$P_y(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-1}}{y!} & ,y=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{لقيم } y \text{ الأخرى}\end{cases}$$

مثال 05 : إذا كانت دالة التوزيع المشترك للمتغير العشوائي معطات بالعلاقة التالية:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & ,0<x \quad ,y<0\\ \dfrac{x^2y^2}{4} & ,0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1\\ 1 & ,X\ge 2 \quad ,\ \ y\ge 1\end{cases}$$

- أوجد دوال التوزيع الحدية للمتغيرين العشوائيين ؟

الحل:

دالة التوزيع الحدية للمتغير العشوائي X هي :

$$F_x(x) = \lim_{y\to 1} \frac{x^2y^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع الحدية للمتغير العشوائي بالصورة التالية:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ,0 \leq x \leq 2 \\ 1 & ,x \geq 2 \end{cases}$$

أما بالنسبة لدالة التوزيع الحدية للمتغير العشوائي Y فإن :

$$F_y(y) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2y^2}{4} = \frac{4y^2}{4} = y^2$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع الحدية للمتغير العشوائي Yعلى النحو .

$$F_y(y) = \begin{cases} 0 & ,y < 0 \\ y^2 & ,0 \leq y \leq 2 \\ 1 & ,y \geq 1 \end{cases}$$

مثال 06 : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير المتصل معطاة بالعلاقة التالية:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ e^{-x} & ,x < 0\ ,-x < y < x \\ 0 & \text{لقيم } x,y \text{ الأخرى} \end{cases}$$

- أوجد دوال الكثافة الحدية لكل من المتغيرين المتصلين X ,Y ؟

الحل :

نجد أولا دالة الكثافة الحدية للمتغير العشوائي المتصل X :

$$f_x(x) = \int_{-x}^{x} \frac{1}{2}.e^{-x}dy$$

في هذه الحالة نعتبر $\frac{1}{2}.e^{-x}$ قيمة ثابتة تخرج خارج إشارة التكامل ونأخذ التكامل بالنسبة للمتغير Yوعليه:

قائمة المراجع:

أولا: المراجع العربية

1 محمد عبد العال النعيمي ومزهر شعبان العاني، الأساليب الإحصائية باستخدام حزمة MATLAB، دار وائل، عمان، 2008.

2 محمد حسين رشد، **الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي**، دار الصفا للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.

3 محمد صبحي أبو صالح، **مبادئ الإحصاء**، دار اليزاوي العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2007.

4 جيلاطو جيلاني، **الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2002.

5 سالم عسيي بدر، **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، دار الميسرة للنشر والتوزيع، الأردن، 2007.

6 عبد المحسن، عادل، **مدخل إلى الإحصاء والاحتمالات**. دار المريخ للنشر، الرياض، 2016.

7 عبابسة، عبد القادر. **الاحتمالات والإحصاء التطبيقي**. دار الهدى للطباعة والنشر، الجزائر، 2018.

8 إبراهيم محمد البطاينة، مبادئ الإحصاء، دار المسيرة، عمان الاردن.

9 مراد كمال عوض، أساسيات الإحصاء، دار البداية، عمان، الاردين، 2010.

10 بيصار عبد الحكيم، **محاضرات في الإحصاء 03**، مطبوعة دروس موجهة لطلبة سنة ثانية محاسبة ومالية، جامعة محمد بوضياف المسيلة، 2024/2023.

11 حمدان، عبد الله محمد، مبادئ الاحتمالات والإحصاء. دار صفاء للنشر والتوزيع، عمّان، 2019، 161.

12 - أحمد السيد، الإحصاء التطبيقي، مكتبة بستان المعرفة، مصر، 2009.

ثانيا: المراجع الأجنبية

1 Chamoun Chamoun, Elements De Statistiques Et De Probabilités , Opu,2009.

2 Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2017). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists* (10th ed.). Pearson Education.

3 Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2018). Applied Statistics and Probability for Engineers (7th ed.). Wiley.

4 Ross, S. M, Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists (5th ed.). Academic Press, 2014.

5 Mood, A. M., Graybill, F. A., & Boes, D. C. Introduction to the Theory of Statistics,3rd ed, McGraw-Hill.

6 David S. Moore, George P. McCabe, Introduction to the Practice of Statistics, Sixth Edition, Bruce A. New York, Craig.

7 Bernard Verlant, Statistiques Et Probabilités, Berti Edition, 2008.

المقرر الوزاري:

دليل المادة التعليمية Syllabus			
اسم المادة: إحصاء 3			
الميدان:	علوم اقتصادية والتسيير وعلوم تجارية	الفرع الشعبة:	علوم مالية ومحاسبة
التخصص:	////////////	المستوى:	الثانية ليسانس
السداسي:	الثالث	السنة الجامعية:	....
التعرف على المادة التعليمية			
اسم المادة	إحصاء 3	وحدة التعليم	المنهجية
عدد الأرصدة	5	المعامل	3
الحجم الساعي الأسبوعي	4.5 ساعة	المحاضرة (عدد الساعات في الأسبوع)	03 ساعة
أعمال م/تط(عدد الساعات في الأسبوع)	/	أعمال م/ت (عدد الساعات في الأسبوع)	1.5 ساعة

مسؤول المادة التعليمية			
الاسم، اللقب	دشاش محمد الصالح	الرتبة	أستاذ محاضر أ
تحديد موقع المكتب	الكلية	البريد الالكتروني	**Mohamedsalah.dechache@univ-bba.dz**
رقم الهاتف	**0668.96.57.46**	توقيت الدرس ومكانه	يوم الخميس والأربعاء

وصف المادة التعليمية	
المكتسبات	الرياضيات، الإحصاء الوصفي والاحتمالات
الهدف العام للمادة التعليمية	الهدف الأساسي هو التمهيد التطبيقي للنماذج الاقتصادية النظرية وإعطائها صيغة رياضية.
أهداف التعلم (المهارات المراد الوصول إليها)	- التعرف على أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة - إكساب الطالب القدرة على تطبيق التوزيعات الاحتمالية لمعالجة وحل المشكلات الاقتصادية والإدارية والاجتماعية. - استيعاب المتغيرات العشوائية الثنائية المنفصلة والمتصلة وأهم خواصها. - التعرف على التوزيعات ذات المتغيرين.
محتوى المادة التعليمية	

المحور الأول	أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة
المحور الثاني	أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة
المحور الثالث	تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية
المحور الرابع	المتغيرات العشوائية الثنائية

طريقة التقييم

التقييم بالنسبة المئوية	العلامة		الوزن النسبي للتقييم		
امتحان	20/20		وزن المحاضرة	% 60	% 60
امتحان جزئي	6	20	وزن الأعمال الموجهة	% 40	%12
أعمال موجهة (البحث : إعداد/إلقاء/ تطبيقات)	4				%08
أعمال تطبيقية	-				-
المشروع الفردي	-				-
الأعمال الجماعية (ضمن فريق)	-				-
خرجات ميدانية	-				-
المواظبة (الحضور/ الغياب)	6				% 12
عناصر أخرى (المشاركة)	4				08%

تدرس المادة في شكل محاضرات وأعمال موجهة/تطبيقية و طبيعة تقييمها امتحان و مراقبة مستمرة يقاس معدل المادة بالوزن الترجيحي للمحاضرة والأعمال الموجهة:

معدل المادة	**نقطة المحاضرة * 0.6 + نقطة الأعمال الموجهة/التطبيقية* 0.4=**
Moy.M	*= (Note Ex * 0.6) + (Note Td * 0.4)*

المصادروالمراجع

المرجع الأساسي الموصى به :

عنوان المرجع	المؤلف	دار النشر و السنة

نظرية الاحتمالات ومبادئ الحساب الاحتمالي: دروس وتمارين الجزء الأول.	السعدي رجال	ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2005، الطبعة02
ملخصات شوم، نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي.	دومينيك سالفادور، ترجمة سعدية حافظ منتصر،	الدار الدولية للنشر والتوزيع جمهورية مصر العربية، 1982
الإحصاء و الاحتمالات :النظرية و التطبيق،	علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي.	مالطا، 2000 ، (ELGA)منشورات
, Statistiques et Probabilités en économie gestion	Hurlin Christophe	Dunod, 2015

مراجع الدعم الإضافية (إن وجدت):

1. بوعبد الله صالح مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي دروس وتمارين، 2006.
2. عبد الحميد ربيع غيطان،نظرية الاحتمالات، الجزء الثاني،دار الكتب الأكاديمية، مصر،2004، ط1
3. محمد كبيه وماهر بدوي " الإحصاء التطبيقي" منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد، 2003.

التوزيع الزمني المرتقب لبرنامج المادة

الأسبوع	محتوى المحاضرة	التاريخ
الأسبوع الأول	توزيع بيرنولي؛توزيع ذي الحدين (الثنائي)	
الأسبوع الثاني	توزيع بواسون	
الأسبوع الثالث	التوزيع الهندسي	
الأسبوع الرابع	التوزيع فوق الهندسي	
الأسبوع الخامس	التوزيع الطبيعي	
الأسبوع السادس	التوزيع المنتظم	
الأسبوع السابع	التوزيع الأسي	
الأسبوع الثامن	توزيع قاما(Gamma)	
الأسبوع التاسع	توزيع Betta	
الأسبوع العاشر	توزيع كاي مربع؛ توزيع ستيودنت؛ توزيع فيشر	
الأسبوع الحادي عشر	توزيع ستيودنت؛ توزيع فيشر	
الأسبوع الثاني عشر	تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية	

الأسبوع الثالث عشر	المتغيرات العشوائية المزدوجة المنفصلة والمتصلة وخواصها	
الأسبوع الرابع عشر	دوال المتغيرات العشوائية المزدوجة.	
الأسبوع الخامس عشر	مراجعة	
	امتحان نهاية السداسي	تحدده الإدارة
	الامتحان الاستدراكي للمادة	تحدده الإدارة

الأعمال الشخصية المقررة للمادة

-إعداد بطاقة قراءة حول أحد كتب الإحصاء الرياضي (تشجيع الطالب على البحث على مراجع واستعمالها)

-واجب منزلي عبارة عن بعض المسائل والتمارين تخص توزيعات المتغير العشوائي المنفصل (ذي الحدين، بواسون ...إلخ)

-واجب منزلي عبارة عن بعض المسائل والتمارين تخص توزيعات المتغير العشوائي المتصل (الطبيعي، الأسي ...إلخ)

-واجب منزلي عبارة عن بعض المسائل والتمارين تخص تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية.

-واجب منزلي عبارة عن بعض المسائل والتمارين تخص المتغيرات العشوائية المزدوجة.

-واجب منزلي عبارة عن بعض المسائل والتمارين تخص دوال المتغيرات العشوائية المزدوجة.

-استجواب تقييمي؛

-تقييم الأسئلة التفاعلية للطلبة عبر منصة Moodle.

-الحضور والتفاعل في منصة Moodle.

-إنشاء دردشة ومنتدى في منصة Moodle للتعليم الالكتروني.

مصادقات الهيئات الإدارية والبيداغوجية

رئيس القسم	مسؤول الشعبة	الأستاذ مسؤول المادة	نائب العميد المكلف بالبيداغوجيا أو مدير الدراسات

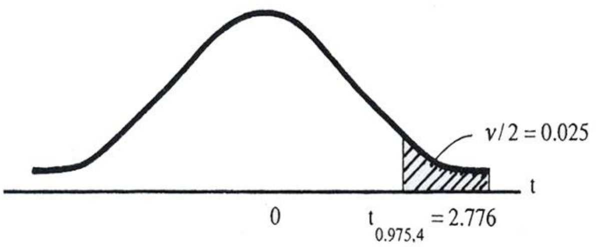
ملاحظة هامة: بعد المصادقة على دليل المادة في بداية كل سداسي يتم نشره على الموقع الرسمي للمؤسسة الجامعية

الملاحق

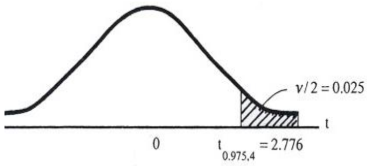
Areas Under The Standard Normal Curve التوزيع الطبيعي المعياري

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Values of – t



cum. prob one-tail	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
two-tails	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
Confidence Level	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%



– χ^2 Values of

ν	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	.0000393	.000157	.000982	.00393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0506	.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	.0717	.155	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	5.214	.554	.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	.676	.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	14.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

Values of $F_{0.05}$

v_1 Degrees of freedom for numerator درجات حرية البسط

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	563
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.01	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.91	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.95
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92

19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.98	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	169	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Values of $F_{0.025}$

/	**df$_1$=1**	**2,00**	**3,00**	**4,00**	**5,00**	**6,00**	**7,00**	**8,00**	**9,00**	**10,00**	**12,00**	**15,00**	**20,00**	**24,00**	**30,00**	**40,00**	**60,00**	**120,00**	∞
df$_2$=1	647.79	799.5	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	976.71	984.87	993.10	997.25	1001.41	1005.6	1009.8	1014.02	1018.26
2,00	38.51	39.00	39.16	39.25	39.298	39.33	39.35	39.373	39.387	39.398	39.41	39.43	39.45	39.456	39.465	39.47	39.48	39.490	39.498
3,00	17.4434	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.4731	14.4189	14.3366	14.2527	14.1674	14.1241	14.081	14.037	13.992	13.947	13.902
4,00	12.2179	10.65	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.461	8.411	8.360	8.309	8.257
5,00	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5245	6.4277	6.3286	6.2780	6.227	6.175	6.123	6.069	6.015
6,00	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.065	5.012	4.959	4.904	4.849
7,00	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.362	4.309	4.254	4.199	4.142
8,00	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.894	3.840	3.784	3.728	3.670
9,00	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.560	3.505	3.449	3.392	3.333
10,00	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.311	3.255	3.198	3.140	3.080

11,00	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.118	3.061	3.004	2.944	2.883
12,00	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.963	2.906	2.848	2.787	2.725
13,00	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.837	2.780	2.720	2.659	2.595
14,00	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.732	2.674	2.614	2.552	2.487
15,00	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.644	2.585	2.524	2.461	2.395
16,00	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.568	2.509	2.447	2.383	2.316
17,00	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.502	2.442	2.380	2.315	2.247
18,00	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.445	2.384	2.321	2.256	2.187
19,00	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.394	2.333	2.270	2.203	2.133
20,00	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.349	2.287	2.223	2.156	2.085
21,00	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.308	2.246	2.182	2.114	2.042
22,00	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.272	2.210	2.145	2.076	2.003
23,00	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.239	2.176	2.111	2.041	1.968

24,00	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.209	2.146	2.080	2.010	1.935
25,00	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.182	2.118	2.052	1.981	1.906
30,00	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.074	2.009	1.940	1.866	1.787
40,00	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.943	1.875	1.803	1.724	1.637
60,00	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.815	1.744	1.667	1.581	1.482
120,00	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.690	1.614	1.530	1.433	1.310
∞	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2875	2.1918	2.1136	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.566	1.484	1.388	1.268	1.000

ملاحظة:لإيجاد قيم $F0.975(V1,V2)$ نستخدم العلاقة التالية $F0.975(V1,V2) = {}^{1}/_{F0.025\,(V2,V1)}$