

**Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi**  
**Bordj Bou Arreridj**

**FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**  
**Département de Génie Civil**

Polycopié

**ÉLASTICITÉ**

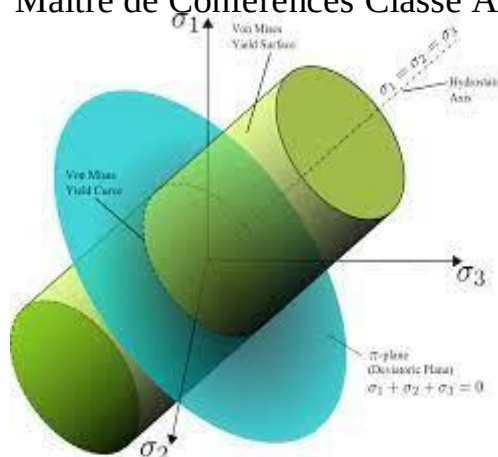
*Cours et Exercices Corrigés*

*Ouvrage Pédagogique Destiné aux Étudiants du 1<sup>ère</sup> Année Master-Structures-*

Réalisé par

**Dr. Hocine Ziani**

Mâitre de Conférences Classe A



Année Académique: 2024/2025

## *Avant-propos*

Le présent polycopié est destiné aux étudiants du 1<sup>ère</sup> Année master, structures, matériaux de constructions en génie civil et même aux futurs ingénieurs des écoles. C'est un concept fondamental dans la science et l'ingénierie qui étudie le comportement des matériaux déformables. L'élasticité et le phénomène qui mesure la capacité "la sensibilité" du matériau à se déformer au cours du chargement et à reprendre sa forme initiale dès que les forces provocants cessent (supprimées). Le but primordial de ce polycopié est de clarifier aux étudiants cette étape de déformations et les principaux paramètres qui gèrent le comportement mécanique des solides dans cette zone ainsi de faire la conception et l'analyse des structures dans les différentes étapes de réalisation, sous les hypothèses de petites perturbations (HPP) et la notion de limite élastique qui constitue la fin d'acceptation du matériau d'avoir des déformations réversibles.

Ce polycopié d'*Élasticité*, enseigné par l'auteur aux étudiants de la spécialité *master structures* et le fruit de 5ans d'expériences, dont le contenu est simplifier afin d'atteindre les objectifs suivants :

- Donner aux étudiants les principes de l'élasticité sous des formes simples et compréhensibles.
- Préciser le passage obligatoire par cette zone pour la résolution des problèmes dans les structures qui rencontrent les ingénieurs en général et ceux du génie civil en particulier.
- Initier les étudiants à aborder la modélisation des phénomènes physiques (expérimentaux) en utilisant leur acquis sur la mécanique des milieux continus.

Cet ouvrage est scindé en huit chapitres (08) : *le premier chapitre* a été consacré à l'introduction des à la théorie d'élasticité. *Le deuxième chapitre* traite l'état de contraintes, le tenseur de contrainte, les équations différentielles d'équilibre, l'état de contrainte sur un plan, contraintes principales et leurs directions et enfin la représentation géométrique (tri-cercle de Mohr). *Le 3<sup>ème</sup> chapitre*, se focalise sur la théorie de l'état de déformation, tenseur de déformation, relation entre déformation et déplacement, déformations et directions principales, la représentation géométrique (tri-cercle de Mohr), les équations de comptabilités et mesures de déformations. *Chapitre 4*, est consacré aux relations contraintes –déformations, loi de Hooke généralisée, l'influence de la température et l'énergie de déformation. *Chapitre 5*, évoque les équations générales d'élasticité linéaire, les équations de Lamé de Beltrami-Michell et le principe de Saint Venant. *Chapitre 6*, pour la résolution des problèmes d'élasticité plane, fonction d'AIRY, problème de déformation planes et problèmes de constantes planes. *Chapitre 7 et 8* sont consacrés aux études des poutres et des plaques minces respectivement.

Enfin j'espère que ce travail va aider les étudiants à élargir leurs connaissances et sert comme un support de préparations pour le cours et les TD.

Dr. Hocine Ziani

*What you plant today you will harvest tomorrow*

---

## TABLES DE MATIERES

### Chapitre 1 : Introduction sur la Théorie d'Élasticité

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 1.1 Généralités sur l'élasticité | 5  |
| 1.2 Rappels mathématiques        | 5  |
| 1.3 Notations indicielles        | 9  |
| Série d'exercices                | 12 |

### Chapitre 2 : Théorie de l'État de Contraintes

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| 2.1 Généralités                                     | 14 |
| 2.2 Notion de contrainte                            | 14 |
| 2.3 Equation différentielle d'équilibre             | 17 |
| 2.4 Contraintes et directions principales           | 17 |
| 2.5 Représentation géométrique (Tri-Cercle de Mohr) | 22 |
| Série d'exercices                                   | 27 |

### Chapitre 3: Théorie de l'État de Déformation

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 Généralités                                                                        | 32 |
| 3.2 Description d'un mouvement d'un point matériel                                     | 32 |
| 3.3 Tenseur de déformations                                                            | 33 |
| 3.4 Déformations et directions principales                                             | 35 |
| 3.5 Représentation graphique d'un état de déformation en un point (Tri-Cercle de Mohr) | 37 |
| 3.6 Équation de compatibilité des déformations                                         | 38 |
| 3.7 Mesure des déformations                                                            | 39 |
| Série d'exercices                                                                      | 40 |

### Chapitre 4: Relation entre les Contraintes et les Déformations et Lois de Comportement

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 4.1 Introduction                           | 43 |
| 4.2 Loi de Hooke généralisée               | 43 |
| 4.3 Loi de comportement élastique linéaire | 44 |
| 4.4 Formulation de loi élastique linéaire  | 49 |
| 4.5 Énergie de déformation                 | 49 |
| Série d'exercices                          | 52 |

### Chapitre 5: Équations Générales de l'Élasticité Linéaire

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.1 Introduction                                                                            | 54 |
| 5.2 Résolution des équations de l'élasticité en déplacement (Équations de Lamé)             | 54 |
| 5.3 Résolution des équations de l'élasticité en contraintes (Équations de Beltrami-Michell) | 55 |
| 5.4 Équation de comptabilités (Principe de Saint Venant)                                    | 57 |
| Série d'exercices                                                                           | 58 |

### Chapitre 6: Résolution des Problèmes d'Élasticité Plane

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| 6.1 Les deux états plans d'élasticité                             | 61 |
| 6.2 Equation Fondamentale de l'élasticité plane                   | 63 |
| 6.3 Fonction de contrainte ou fonction D'AIRY                     | 65 |
| 6.4 Solution du problème de déformations planes par les polynômes | 66 |
| Série d'exercices                                                 | 69 |

---

## Chapitre 7: Flexion des Poutres

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 7.1 Les deux états plans d'élasticité                 | 77 |
| 7.2 Introduction                                      | 77 |
| 7.3 Hypothèses de la théorie des poutres              | 77 |
| 7.4 Schématisation d'une poutre                       | 78 |
| 7.5 Extension-compression                             | 79 |
| 7.6 Types de flexion (théorème d'Euler et Timoshenko) | 81 |
| Série d'exercices                                     | 87 |

## Chapitre 8: Étude des Plaques Minces

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| 8.1. Introduction                                  | 89 |
| 8.2. Hypothèses fondamentales                      | 89 |
| 8.3. Définition d'une plaque                       | 89 |
| 8.4. Cinématique d'une plaque mince                | 90 |
| 8.5. Déformation d'une plaque mince                | 91 |
| 8.6. Tenseur de contraintes et loi de comportement | 91 |
| 8.7. Équations d'équilibre d'une plaque            | 93 |
| 8.8. Énergie de déformation d'une plaque mince     | 94 |
| Série d'exercices                                  | 95 |
| Exercices Divers                                   | 97 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| <b>Références Bibliographiques</b> | 107 |
|------------------------------------|-----|

# Chapitre 1

## Introduction sur la Théorie d'Élasticité

### 1.1 Généralités sur l'Élasticité

Tout corps soumis sous un champ de forces  $\vec{F}$ , se déforme. Si la force  $\vec{F}$  appliquée est faible, une fois supprimer le solide reprend sa forme initiale (approximativement), on dit que le matériau a un comportement *élastique*. Le corps est dit parfaitement élastique, si les déformations disparaissent totalement après enlèvement de  $\vec{F}$ , à l'inverse si la force  $\vec{F}$  est suffisamment grande le matériau subit des perturbations dans sa forme initiale, qui resteront même après l'élimination de  $\vec{F}$ , on dit que le solide a subi des déformations *plastique*. L'intensité de  $\vec{F}$  qui induit les déformations plastiques est dite le *seuil d'élasticité* (la limite d'élasticité).

Ce cours sera consacré spécialement à l'étude de l'*Elasticité* (déformations) (Mécanique des corps solides déformables).

#### Définition

La *théorie de l'élasticité* étudie les *déplacements*, les *déformations* et les *contraintes* dans un solide soumis à des forces extérieures. On considère les hypothèses suivantes :

- *L'homogénéité du matériau* (mêmes propriétés en tout point)
- *L'isotropie* (en un point donné, possèdent les mêmes propriétés dans toutes les directions).
- *Le comportement linéaire* du matériau (proportionnalité entre les contraintes et les déformations)

### 1.2 Rappels Mathématiques

Lors de l'étude de phénomènes physiques on recourt souvent à l'utilisation de deux grandeurs à savoir la notion de *scalaires* et de *vecteurs*. Un *scalaire* étant défini par un seul nombre indépendamment des axes de références (masse, température, volume, pression....etc.). Par contre un *vecteur* possède une direction (support), un sens et une norme (intensité, module), le cas d'une force, un champ électrique...etc.

#### 1.2.1 Composantes scalaires d'un vecteur

On peut caractériser un vecteur dans un repère cartésien par un déplacement horizontal (x) et vertical (y) entre son origine et son extrémité. Ces déplacements sont les *composantes* du vecteur, qui nous permet de calculer son *norme* de même que son *orientation* et Inversement.

Soit un trièdre trirectangle Ox, Oy, Oz, les composantes du vecteur sur les axes Ox, Oy, Oz, représentent le vecteur  $\vec{V}$ .  $\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$

L'écriture concise et détaillée d'un vecteur  $\vec{V}$  grâce à ses composantes est :

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}_{b_1}, \text{ ou } \vec{V} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix}_{b_1}$$

$\vec{V}$ : S'écrit en forme *indicielle* comme suit :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^3 V_i \vec{e}_i \quad (1)$$

La convention d'Einstein permet d'écrire la relation (1) sous la forme simplifiée.

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i \quad (2)$$

$V_1, V_2$  et  $V_3$  sont les *coordonnées* du vecteur  $\vec{V}$ .

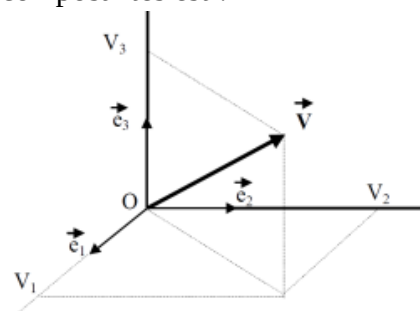


**Fig.1.1** Composantes d'un vecteur

### 1.2.2 Module (Norme) d'un vecteur

La norme du vecteur  $\vec{V}$  indique sa longueur et elle est notée  $\|\vec{V}\|$ .

Si  $\vec{V} (V_1, V_2, V_3)$ , alors :  $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$

### 1.2.3 Opération sur les vecteurs

◆ Le produit scalaire de  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  est le nombre réel noté  $\vec{U} \cdot \vec{V}$ , tel que :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\vec{U}, \vec{V}) \quad (3)$$

Donc en déduit que le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un nombre.

Si le produit scalaire est nul, alors :

$$(\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2})$$

$$\vec{U} = \vec{0}$$

Ou

$$\vec{V} = \vec{0}$$

Ou

$$\cos(\vec{U}, \vec{V}) = 0$$

$\Rightarrow \vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont orthogonaux

Dans la base orthogonale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$  (4)

Dans ce cas l'angle entre les deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  est égal à  $0^\circ$  alors le produit scalaire de ces vecteurs est  $U \cdot V$  s'ils sont de même sens, et  $-(U \cdot V)$  s'ils sont opposés. Dans la base orthogonale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \quad (5)$$

Des deux dernières relations (5) et (6) on peut déduire la relation suivante:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (6)$$

$\delta_{ij}$ , est appelé symbole de Kronecker, qui très utilisé dans le calcul des tenseurs.

En forme matricielle le Kronecker  $\delta_{ij}$  est la *matrice identité* définie en fonction des indices libres  $i$  et  $j$ .

#### Exemple

Pour  $i, j=1, 2, 3$ , on définit une matrice de  $3 \times 3$ .

$$\delta_{ij} = I = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad (7)$$

◆ On appelle Produit Vectoriel  $\vec{U} \wedge \vec{V}$ , le vecteur  $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

Tel que :  $\vec{W}$  soit orthogonal à  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ ,

$\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  forment trièdre direct,

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \sin(\vec{U}, \vec{V})$$

$\vec{V}) \rightarrow$  (Correspond à l'aire d'un parallélogramme ayant  $U$  et  $V$  comme cotés adjacents).

**NB:** - Deux vecteurs sont *colinéaires* si (et seulement si) leur produit vectoriel est nul ;

◆ Deux vecteurs sont *orthogonaux* si et seulement si la norme de leur produit vectoriel est égale au produit de leurs normes ;

#### ◆ Propriétés du produit vectoriel

-Antisymétrique :  $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$ ,

-Bilinéarité :  $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W})$ ,

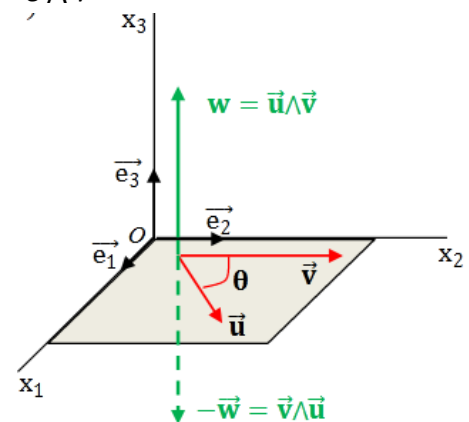


Fig.1.2 Produit vectoriel d'un vecteur

-Multiplication par un scalaire :  $\lambda(\vec{U} \wedge \vec{V}) = (\lambda \vec{U}) \wedge \vec{V}$

Le produit scalaire est nul :  $\vec{U} = \vec{0}$  ou  $\vec{V} = \vec{0}$  ou  $\sin(\vec{U}, \vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont colinéaires  
(L'un est le produit de l'autre par un réel :  $\vec{U} = k \cdot \vec{V}$ ) cad (sur la même ligne).

#### ◆ Changement de base de vecteur

Considérant l'espace vectoriel E à 3 dimensions, muni d'une base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , soit  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ , une *nouvelle* base orthonormée de E, ayant la même origine O.

Soit P un point quelconque de l'espace.

$$\vec{OP}_{/Xi} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$$

Et

$$\vec{OP}_{/X'i} = x'_1 \cdot \vec{e}'_1 + x'_2 \cdot \vec{e}'_2 + x'_3 \cdot \vec{e}'_3$$

Avec :  $\vec{PM}_{/Xi} = \vec{PM}_{/X'i}$

On peut écrire:  $\vec{e}'_1 \cdot \vec{OP}_{/X'i} = \vec{e}'_1 \cdot \vec{OP}_{/X'i} = \|\vec{e}'_1\| \cdot \|\vec{OP}_{/X'i}\| \cdot \cos(\vec{e}'_1, \vec{OP}_{/X'i}) = x'_1$

Ce qui conduit d'écrire d'un coté:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_3 \\ x'_2 = x_1 \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_3 \\ x'_3 = x_1 \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \quad (8)$$

Et de l'autre coté :  $x_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{OP}_{/Xi} = \vec{e}_1 \cdot \vec{OP}_{/X'i} = x'_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_3$

De même pour le reste on obtient 3 équations

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_3 \\ x_2 = x'_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_3 \\ x_3 = x'_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_3 \end{cases} \quad (9)$$

Les cosinus directeurs des vecteurs unitaires sont définis comme suit :

| $\times$    | $\vec{e}'_1$                              | $\vec{e}'_2$                              | $\vec{e}'_3$                              |
|-------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\vec{e}_1$ | $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_1 = \beta_{11}$ | $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_2 = \beta_{21}$ | $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_3 = \beta_{31}$ |
| $\vec{e}_2$ | $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_1 = \beta_{12}$ | $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_2 = \beta_{22}$ | $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_3 = \beta_{32}$ |
| $\vec{e}_3$ | $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_1 = \beta_{13}$ | $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_2 = \beta_{23}$ | $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_3 = \beta_{33}$ |

Avec:  $\|\vec{e}'_1\| = \|\vec{e}'_1\| = 1 \Rightarrow \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_1 = \|\vec{e}'_1\| \cdot \|\vec{e}'_1\| \cdot \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}'_1) = \beta_{11}$  (10)

De même pour les autres facteurs, d'où l'équation (10) devient comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = \beta_{11} \cdot x'_1 + \beta_{21} \cdot x'_2 + \beta_{31} \cdot x'_3 \\ x_2 = \beta_{12} \cdot x'_1 + \beta_{22} \cdot x'_2 + \beta_{32} \cdot x'_3 \\ x_3 = \beta_{13} \cdot x'_1 + \beta_{23} \cdot x'_2 + \beta_{33} \cdot x'_3 \end{cases} \quad (11)$$

D'où la translation analytique des vecteurs  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  de la nouvelle base à l'ancienne base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  se fait la façon suite :

$$\begin{cases} x'_1 = \beta_{11} \cdot x_1 + \beta_{12} \cdot x_2 + \beta_{13} \cdot x_3 \\ x'_2 = \beta_{21} \cdot x_1 + \beta_{22} \cdot x_2 + \beta_{23} \cdot x_3 \\ x'_3 = \beta_{31} \cdot x_1 + \beta_{32} \cdot x_2 + \beta_{33} \cdot x_3 \end{cases} \quad (12)$$

Les relations (11) et (12) expriment le passage d'une base à une autre.

- Sous la *forme indicelle* de la façon suivante :

$$\vec{X}'_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} \cdot \vec{X}_j = \beta_{ij} \cdot X_j \quad (13)$$

$$\vec{X}_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} \cdot \vec{X}'_j = \beta_{ij} \cdot X_i \quad (14)$$

- Sous la forme matricielle comme suit :  $[\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3][M]$

$$\text{Avec : } [M] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \beta_{ij} \quad (15)$$

$[M]$ : Matrice de passage de dimension  $(3 \times 3)$ .

$$[X'] = [M][X] \quad [M] = \beta_{ij}$$

$$[M]^T = \beta_{ji} \quad [X] = [M]^T[X']$$

$[M]^T$ : Matrice transposée de  $[M]$

**NB/** Les deux bases de E sont orthonormées, d'où la matrice de passage M est dite *orthogonale* est vérifié :

$$[M]^{-1} = [M]^T$$

En d'autre terme :  $[M] \cdot [M]^T = [M]^{-1} \cdot [M] = [I]$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Exemple

Dans le plan, considérons le vecteur  $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Considérons maintenant la base  $\mathcal{B} = (b_1; b_2)$ , dont les vecteurs sont :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche à trouver les composantes de x relativement à  $\mathcal{B}$ ?

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Cela signifie que :  $X = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$

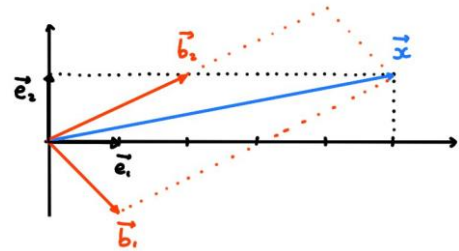


**Fig.1.3** Changement de base d'un vecteur

Or cette équation s'exprime comme :  $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 5 = \beta_1 + 2\beta_2 \\ 1 = -\beta_1 + \beta_2 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = 1 \text{ et } \beta_2 = 2$$

D'où,  $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  c.à.d.  $X = b_1 + 2b_2$

**NB/** Il est plus utile de penser que x est un vecteur dans le plan, et que ce vecteur peut être représenté en composantes, relativement à la base canonique  $\mathcal{B}_{can}$  ou à la base  $\mathcal{B}$ .

$$[X]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et dans le nouveau base } \mathcal{B} \quad [X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1:** Soient deux bases d'un espace vectoriel E.

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0) & \vec{e}_2 &= (0, 1, 0) & \vec{e}_3 &= (0, 0, 1) \\ \vec{e}'_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) & \vec{e}'_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \vec{e}'_3 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Soit un vecteur  $\vec{M}$  dont les composantes dans la base  $\mathcal{B} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont :  $\vec{M} = (1, 1, 1)$

Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{M}$  dans la nouvelle base  $\mathcal{B}' (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \text{ et } \vec{e}'_3)$

**Solution :** Calculant les cosinus directeurs des vecteurs unitaires dans la nouvelle base  $\mathcal{B}'$ , d'après

$$(11) \text{ on a : } \begin{cases} \vec{e}_1' = \beta_{11} \cdot \vec{e}_1 + \beta_{21} \cdot \vec{e}_2 + \beta_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \beta_{12} \cdot \vec{e}_1 + \beta_{22} \cdot \vec{e}_2 + \beta_{32} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = \beta_{13} \cdot \vec{e}_1 + \beta_{23} \cdot \vec{e}_2 + \beta_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = 0 \cdot \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$

La matrice de passage  $M$  de l'ancienne base à la nouvelle ( $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ ) est :

$$\begin{array}{ccc|ccc} e_1' & e_2' & e_3' & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & e_1 & & \\ 0 & 1 & 0 & e_2 & & \\ 0 & 0 & 1 & e_3 & & \end{array} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

**Exercice 2:** On considère les deux bases  $\mathcal{B} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $\mathcal{B}' (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$  d'un même espace vectoriel  $\mathbb{E}$  de dimension  $n$ .

Sachant que les vecteurs de la base  $\mathcal{B}'$  sont définis par :

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = e_1 - e_2 + e_3 \\ \vec{e}_2' = e_1 + e_2 - e_3 \\ \vec{e}_3' = e_1 - e_3 \end{cases}$$

-Déterminer la matrice de passage  $P$  ( $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ ) et  $P^{-1}$  de ( $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ )?

**Solution**

1-La matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2-La matrice de passage  $P^{-1}$  de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2} e_1' + \frac{1}{2} e_2' \\ e_2 = e_2' - e_3' \\ e_3 = \frac{1}{2} e_1' + \frac{1}{2} e_2' - e_3' \end{cases}$$

$$[P]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

### 1.3 Notation Indicielles

L'écriture indicielle du repère  $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$  sera une simplifiée comme suit :

$$R_1 (O, \vec{x}_i) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3, 4$$

Le vecteur  $\vec{V}$  de composantes  $v_1, v_2$  et  $v_3$ , on écriture indicielle est :

$$\vec{V} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = v_i \vec{e}_i$$

Une répétition d'indice signifie une sommation par rapport à celui-ci (convention d'Einstein).

#### 1.3.1 Convention de sommation (convention d'Einstein)

La convention stipule que : "Si, dans un monôme, un indice est répété deux fois, alors il y a sommation sur cet indice dans son intervalle. Cet indice est appelé *muet*, les autres étant appelés indices libres".

Par exemple,  $a_i b_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) est la notation compacte pour :  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ . L'indice répété sur lequel on effectue la sommation est appelé *indice muet*. Dans le cas d'une présence d'un indice non répété, ce dernier sera désigné comme *indice franc*. Comme le montre l'exemple suivant :

$$T_{ij} \cdot \vec{e}_1 = T_{i1} \cdot \vec{e}_1 + T_{i2} \cdot \vec{e}_2 + T_{i3} \cdot \vec{e}_3 \quad (16)$$

### NB/

-Un indice non *muet* est dit *franc* (*libre*).

-Ainsi, dans  $a_{ij} b_j$ , l'indice  $i$  est *franc* et l'indice  $j$  est *muet*; donc on peut remplacer  $j$  par n'importe quel autre indice sauf le  $i$ .

### 1.3.2 Symbole de permutation (permutation de Levi-Civita)

Le produit mixte de trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $(\vec{v} \wedge \vec{w})$  en mathématiques, peut être défini par le symbole de Levi-Civita, noté  $\varepsilon_{ijk}$  qui est défini par :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1; & \text{si } (i, j, k) \text{ est la permutation paire } (123, 231, 312) \\ -1; & \text{si } (i, j, k) \text{ est la permutation impaire } (132, 321, 213) \\ 0; & \text{autrement} \end{cases} \quad (17)$$

Cela peut être expliqué par : une permutation est dite paire si  $i, j, k$  forment un trièdre direct et dite impaire si le trièdre est indirecte.

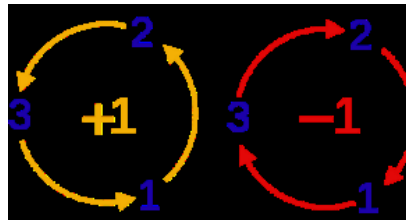


Fig.1.4 Permutation de Levi-Civita

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 \\ \varepsilon_{111} &= \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \dots = 0 \end{aligned}$$

### 1.3.3 Notion de tenseurs

Un tenseur désigne un objet très général, dont la valeur s'exprime dans un espace vectoriel. Un tenseur est généralement une fonction des coordonnées de l'espace, à  $n$  dimensions par  $n^k$  composantes, où  $k$  est l'ordre du tenseur. La différence entre la matrice et le tenseur, c'est que la matrice n'est qu'un simple tableau de nombres qui représente des objets abstraits, cependant le tenseur est comme les vecteurs et les applications multilinéaires. La notion de tenseur est nécessaire pour établir des relations entre effets physiques et les causes dans un milieu continu, car l'application d'une charge (cause), suivant une direction donnée, peut avoir un effet orienté selon une autre direction. Les phénomènes physiques sont alors décrits par des tenseurs.

### Exemple

$$[1], [1, 2, 3], \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}, [1, 2, 3, 4, 5, \dots, 25, 26, 27]$$

- le scalaire  $[1]$  est un tenseur d'ordre 0.

Par exemple en mécanique classique, la masse, la température, sont des quantités scalaire cela implique ce sont des tenseurs d'ordre 0.

- le vecteur  $[1, 2, 3]$  est un tenseur d'ordre 1

- la matrice  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  Est un tenseur d'ordre 2
- le vecteur  $[1, 2, 3, 4, 5, \dots, 25, 26, 27]$  est un tenseur d'ordre 3 que l'on représente par un cube.
- Il est utile d'utiliser une notation à plusieurs indices, ou un élément surmonté par plusieurs barres pour désigner l'ordre d'un tenseur.

Par exemple  $i$  varie de 1 à 3.

- le scalaire  $T$  est un tenseur d'ordre 0
- le vecteur  $T_i$  ou  $\overline{T}$  est un tenseur d'ordre 1
- la matrice  $T_{ij}$  ou  $\overline{\overline{T}}$  est un tenseur d'ordre 2
- le cube  $T_{ijk}$  ou  $\overline{\overline{\overline{T}}}$  est un tenseur d'ordre 3

### **NB/**

L'ordre d'un tenseur est égal au nombre d'indices dans l'écriture indicielle.

Le nombre de composantes d'un tenseur d'ordre  $n$  dans une base tridimensionnelle (chaque indice varie de 1 à 3) est égal à  $3^n$ .

## **1.3.1 Opération sur les tenseurs**

### **a/ Égalité de deux tenseurs**

Un tenseur est égal à un autre, s'ils appartiennent au même espace et du même type, c'est à dire des tenseurs associés au même espace vectoriel  $E_n$  et présentant le même nombre et la même disposition des indices. Donc deux tenseurs sont égaux si leurs composantes sont les mêmes.

$$U = V \rightarrow u_k^{ij} = v_k^{ij} \rightarrow (u_k^{ij}) = (v_k^{ij})$$

Un tenseur est nul, si toutes ses composantes dans une base sont nulles.

#### ◆ **Produit tensoriel de deux vecteurs**

$$(U \otimes V) = U_i V_i \quad i=1, 2, 3$$

#### ◆ **Produit tensoriel d'un vecteur et d'une matrice**

$$(U \otimes \vec{v})_{ijk} = U_{ij} v_k$$

#### ◆ **Produit tensoriel de deux matrices** : Soit deux matrices $\sigma$ et $\tau$ , avec :

$$\begin{cases} \sigma_{ijk} \rightarrow \text{Tenseur d'ordre 3} \\ \sigma_{lm} \rightarrow \text{Tenseur d'ordre 2} \end{cases} \Rightarrow (\sigma \otimes \tau)_{ijklm} = \sigma_{ijk} \tau_{lm} \quad (18)$$

◆ **Contraction** : Soient deux tenseurs  $U$  et  $V$  d'ordre  $p$  et  $q$  respectivement et supérieurs ou égale à 1. On appelle contraction le produit  $(U \otimes V) = T$ , tel que l'ordre de  $T$  ( $p + q - 2$ ) dans les composantes sont obtenues par sommation du dernier indice de  $U$  et du dernier indice de  $V$ .

$$\text{Si : } p=3 \text{ et } q=2 \Rightarrow p+q-2 \quad (U \otimes V)_{ijl} = U_{ijk} V_{kl}$$

### **b/ Propriétés des tenseurs**

Un tenseur  $T_{ij}$  est : - Symétrique si  $[T_{ij}] = [T_{ji}]$

- Antisymétrique si :  $[T_{ij}] = -[T_{ji}]$

### **c/ Tenseurs d'ordre deux**

Un tenseur d'ordre 2 comprend :  $3^2 = 9$  composantes. Dans ce cas :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} \quad \text{ou} \quad C_i = A_{ij} B_j$$

Un tenseur cartésien d'ordre 2 peut être décomposé en la somme d'un *tenseur symétrique*  $T_s$  et d'un *tenseur antisymétrique*  $T_a$ , tel que:

$$\bar{T}_s = \frac{1}{2} (\bar{T} + \bar{T}^T) \quad (19)$$

$$\bar{T}_a = \frac{1}{2} (\bar{T} - \bar{T}^T) \quad (20)$$

◆ **En notation indicielle**

$$\bar{T} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \quad (21)$$

$$\bar{T}^d = \bar{T} - \bar{T}^s \quad (22)$$

◆ chaque tenseur possède des *invariants*, un invariant est une caractéristique propre d'un tenseur (intrinsèque au tenseur), indépendante d'un changement de base, dont:

$$I_1 = \text{Trace } \bar{T} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (23)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{trace } \bar{T})^2 - \text{trace}(\bar{T} \cdot \bar{T})] \quad (24)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} (\det \bar{T}) \quad (25)$$

◆ tout tenseur peut se décomposer en *partie sphérique*  $T^s$  et *deviatorique*  $T^d$

$$\bar{T}^s = \frac{1}{3} (\text{trace } \bar{T}) \bar{I} \quad (26)$$

**NB/**

On remarque que la *partie sphérique* d'un tenseur est *diagonale (symétrique)* et que la *partie déviatorique* à une *trace nulle*.

**d/ Polynôme caractéristique**

Les valeurs propres d'un tenseur du second ordre s'obtiennent par la résolution de l'équation caractéristique suivante :

$$P(\lambda) = \det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad (27)$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 I_1 - \lambda I_2 + I_3 = 0 \quad (28)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} I_1 = A_{jj} = \text{tr}[A] \\ I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr}[A])^2 - \text{tr}[A]^2) = \frac{1}{2} (A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ij}) \\ I_3 = \det[A] \end{cases} \quad (29)$$

Les  $I_i$  sont les *invariants principaux* du tenseur  $[A]$ . Les racines de l'équation (27) (valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $\det([A] - \lambda[I]) = 0$ ), sont nommées *valeurs propres* du tenseur  $[A]$ . Que l'on note  $\lambda_I, \lambda_{II}$  et  $\lambda_{III}$ .

Série d'exercices

**Exercice 1:** Soit le tenseur  $[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Décomposer le tenseur  $[T_{ij}]$  d'ordre 2, en un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique, puis en un tenseur sphérique et autre déviateur.

Tout tenseur se décompose d'une façon unique en la somme de deux tenseurs : un *symétrique* et l'autre *antisymétrique*.

**Exercice 2:** On considère dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  un tenseur  $\mathbf{T}$ , ayant les composantes suivantes :

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ Déterminer l'équation caractéristique du tenseur } \mathbf{T} \text{ et ces solutions ?}$$

Solution

Les valeurs propres du tenseur  $\mathbf{t}$  sont les racines du polynôme caractéristique :

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

Avec :  $I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 1 + 2 + 2 = 5$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 + 4 + 2 = 8$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-2) - 2(1) + 2(2) = 4$$

Le polynôme caractéristique est comme suit :

$$-\lambda^3 + 5 \lambda^2 - 8 \lambda + 4 = 0 \dots\dots\dots (E)$$

Les solutions de (E) sont :  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

## Chapitre 2

# Théorie de l'État de Contraintes

### 2.1 Généralités

Les contraintes sont des *efforts internes* qui naissent dans un *corps solide déformable* après l'avoir soumis à des actions extérieures, qui peuvent être ; des forces de *contact (surfaciques)* comme la pression atmosphérique, ou *volumiques (massiques)*, lorsqu'il s'agit simplement du poids de l'élément de volume  $dV$ , comme les forces de pesanteur (Fig.2.1). Un corps solide peut être classé selon l'importance de ses dimensions : *unidimensionnel* (poutre, corde), *bidimensionnels (plaques, coques ou* tridimensionnels (*massif de fondation*). La mécanique des solides déformables se focalise sur le comportement des solides sous les différentes forces (traction, compression, cisaillement, flexion ou torsion) et leur réversibilité des déformations (élasticité) et leur irréversibilité (plasticité).

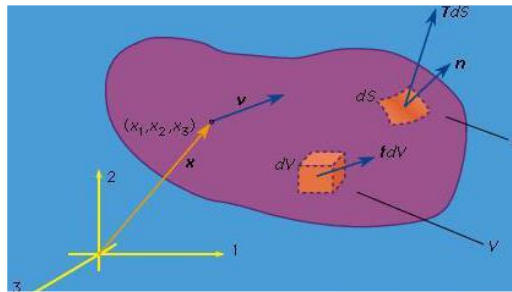


**Fig.2.1** Types de forces appliquées sur un corps déformable

#### ◆ Définitions et vocabulaires utiles dans l'élasticité

- *Continuité* : le matériau se déforme après chargement sans être brisé (sans cassure).
- *Homogénéité*: possède des propriétés physiques analogues dans tous les points (masse volumique, densité, Inertie.)
- *Isotropie* : avoir les mêmes propriétés élastiques dans tous les sens (module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$  etc..).
- *Linéarité* : les relations entre les contraintes et les déformations du matériau sont linéaires.
- *Élasticité* : on ne tiendra compte que des déformations réversibles (comportement du matériau dans le domaine élastique).

### 2.2 Notion de Contrainte

Si on effectue une coupure (fictive) dans un milieu continu (Fig.2.2), on le divise en deux parties A et B. La partie A du corps solide est en équilibre sous l'action des forces extérieures et les forces intérieures réparties sur sa surface (S). Si M un point appartenant à (S) et  $dS$  une surface infinitésimale de celle-ci. Soit  $d\vec{F}$  la force qui s'exerce sur la facette  $\vec{n}$  en M. On appelle *vecteur contrainte* sur cette facette en M, la quantité:

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \left( d\vec{F} / dS \right) \quad (1)$$

$\vec{T}(M, \vec{n})$ , représente la contrainte au point M sur la facette  $dS$ , dont l'orientation est définie par la normale unitaire  $\vec{n}$  sortant de la facette  $dS$ .

$$\vec{F} = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS \quad (2)$$

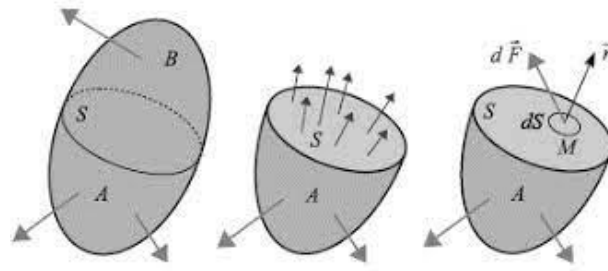


**Fig.2.2** État de contrainte sur une facette après coupure.

Le vecteur de contrainte  $\vec{T}$  peut être projeté suivant deux directions, une selon  $\vec{n}$  normale à l'aire  $dS$ , cependant l'autre est tangentielle à  $dS$  et de normale unitaire  $\vec{t}$  (Fig.2.3). Donc, on peut écrire :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t} \quad (3)$$

Avec

$\sigma_n$  : Contrainte normale

$\tau_n$  : Contrainte tangentielle (cisaillement)

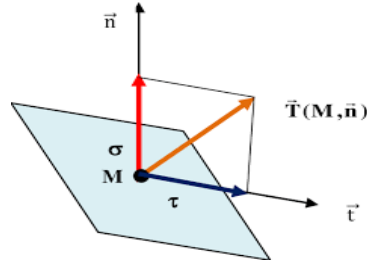


**Fig.2.3** Décomposition du vecteur contrainte

#### ◆ Tenseur de contraintes

C'est un tenseur d'ordre 2, utilisé en MMC pour caractériser l'état interne du milieu après sollicitations. Ces efforts intérieurs se manifestent sur chaque point de la surface coupant le milieu sont représentés par un *champ tensoriel* (champ de contrainte). Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le champ de contrainte est relié au champ de déformation par la loi de Hooke généralisée.

Le vecteur de contraintes associées aux facettes de normale :  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , se décompose selon les axes (X, Y, Z) comme suit (Fig.2.4):

Le tenseur qui lie les vecteurs  $\vec{T}$  et  $\vec{e}$  est un vecteur, appelé *tenseur des contraintes*.

$$\vec{T} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad \text{Ou} \quad T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad (4)$$

$$\vec{T}_{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix}; \quad \vec{T}_{yz} = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zy} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T}_{xz} = \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

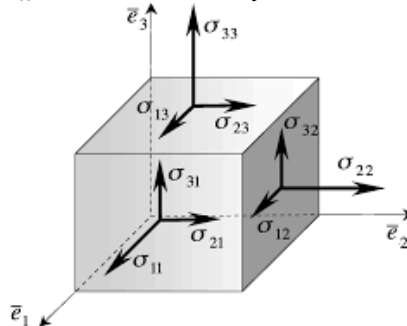


**Fig.2.4** État de contrainte sur une facette

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} T_{xy} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \end{bmatrix} \\ \vec{e}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} T_{yx} \\ T_{yy} \\ T_{zy} \end{bmatrix} \\ \vec{e}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{xz} \end{bmatrix} \end{cases} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

La matrice de ce tenseur, sera écrite sous la forme:  $\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$

$$\text{Sous la forme développée: } \vec{T}(\vec{e}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Soit :

$$\vec{T}(\vec{e}) = (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\vec{e}_1 + (\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3)\vec{e}_2 + (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3)\vec{e}_3 \quad (7)$$

Considérons maintenant les *facettes perpendiculaires* aux vecteurs des coordonnées  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , l'équation (5) donne :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ et } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} \vec{T}(\vec{e}_1) = \vec{\sigma} \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{T}(\vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{T}(\vec{e}_2) = \vec{\sigma} \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{T}(\vec{e}_2) = \sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{T}(\vec{e}_3) = \vec{\sigma} \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{T}(\vec{e}_3) = \sigma_{13}\vec{e}_1 + \sigma_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

Les composantes diagonales,  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , sont donc perpendiculaires aux facettes considérées (sont des contraintes de tension ou de compression suivant leurs signes, souvent notées  $\sigma_{ij}$ , si  $i = j$ ), tandis que les composantes non diagonales  $\sigma_{ij}$ , notées  $\tau_{ij}$  si  $i \neq j$  sont tangentielles à la facette considérée et sont appelées *contraintes tangentielles* (contraintes de cisaillement).

On tenant compte de la *réciprocité* des contraintes tangentielles ( $i \neq j$ ):  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Finalement, le tenseur de contrainte selon les trois axes sera écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Du fait de cette symétrie, la notation *de Voigt* nous permet d'écrire le tenseur de contrainte comme un vecteur de six (6) composantes.

Si on pose :  $\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}$  ;

$$\sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_5 = \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21} ;$$

$$\text{Ce qui nous permet d'écrire le tenseur sous la forme: } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (10)$$

L'équation (7) nous facilite l'écriture de la *loi de Hooke généralisée*. On remarque aussi que l'espace des contraintes est un *espace vectoriel à six dimensions*.

**NB/**

Dans la composante de contrainte, le premier indice ( $i$ ) indique la direction selon l'axe considéré, l'indice ( $j$ ) indique la normale de la facette considérée (Fig.2.4).

### 2.3 Équation Différentielle D'équilibre

Soit un parallélépipède infiniment petit, s'appuient sur le repère ( $x, y, z$ ) dont les côtés sont ( $dx, dy, dz$ ). Soit la force volumique  $F$  de composantes  $F_x, F_y$  et  $F_z$  agissant sur cet élément. Le tenseur  $\sigma$  de l'équation (5) s'écrit aussi :

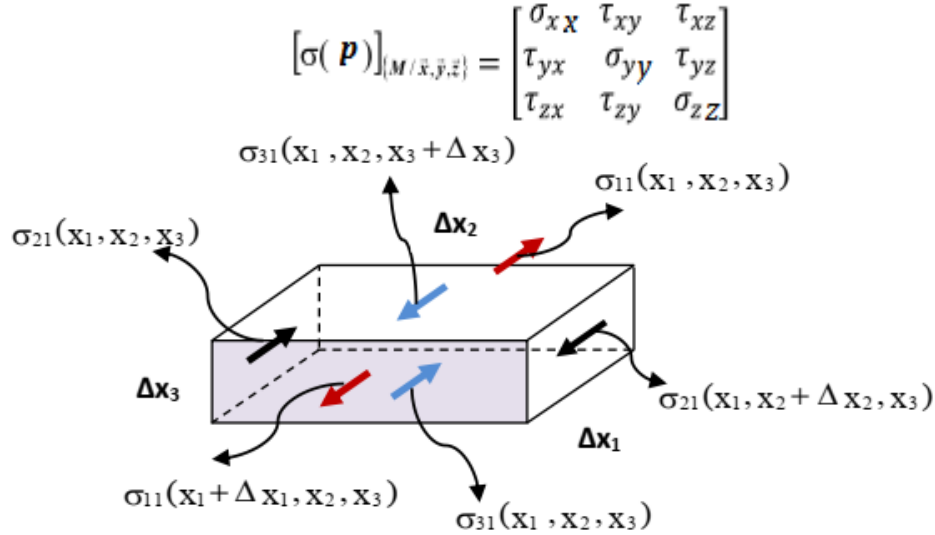


**Fig.2.5** Equilibre d'un parallélépipède sous chargement extérieur

Pour faciliter l'écriture des équations, nous projetons l'équation d'équilibre statique sur une direction donnée. L'équilibre du système est donné par

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (11)$$

Ces équations doivent être vérifiées en tout point du corps.

### 2.4 Contraintes et Directions Principales

La symétrie du tenseur de contraintes entraîne l'apparence de trois(3) vecteurs propres réels, appelés *contraintes principales*. Le repère par lequel passent ces contraintes est dit repère principal ou direction principale.

- Repère quelconque ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ )

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

- Repère principale  $O(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

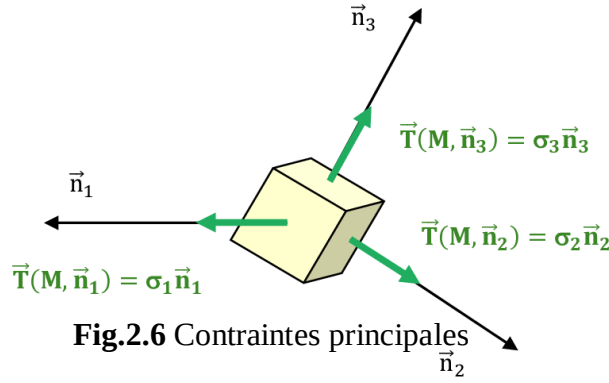


**Fig.2.6** Contraintes principales

La connaissance des contraintes principales est très importante lorsque on étudier les risques de *rupture des structures*. En effet, l'utilisation d'une contrainte équivalente scalaire comme la contrainte de (*von Mises ou de Tresca*), n'indique pas au juste la zone de traction, de compression et/ou du cisaillement. Or, une contrainte de compression est *moins dangereuse* car elle a tendance à *refermer les fissures*.

$$\sigma_{rupture} = \sigma_r = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ : Sont les contraintes principales qui peuvent être déterminées par :

- Cercle de Mohr ;
- Résolution de l'équation caractéristique.

$$\begin{aligned} \det[(\bar{\sigma} - \lambda \bar{I})\vec{x}] &= \vec{0} \\ \det[\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}] &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

L'équation linéaire(13) admet une famille vectorielle comme solution. On choisit de retenir des vecteurs unitaires formant une base orthonormée directe.

Pour une matrice carrée ( $n \times n$ ), l'équation (14) possède  $n$  solutions où :

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , sont les valeurs propres de  $\sigma_{ij}$
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sont les vecteurs propres de  $\sigma_{ij}$  et correspondent à  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  respectivement.

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\lambda^2 + (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2)\lambda - (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2) = 0 \quad (16)$$

On pose:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{trace}(\sigma_{ij}) \quad (17)$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \quad (18)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \det(\sigma_{ij}) \quad (19)$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (20)$$

Les trois coefficients  $I_1, I_2$  et  $I_3$  de ce polynôme sont nommés *invariants principaux de  $\sigma_{ij}$* , sont des constantes quelle que soit la base. Ces invariant sont intrinsèque au tenseur  $\sigma_{ij}$ .

Dans le repère principale  $O(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ : les invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$  sont donnés par les relations

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \text{tr}(\sigma) \\ I_2 = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III} \\ I_3 = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} = \det \sigma \end{cases} \quad (21)$$

On note:  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$ , les contraintes principales sont souvent classées de la plus grande à la plus petite valeur :  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ .

L'équation (20) peut être exploitée de la façon suivante :

$$P(\lambda) = (\lambda - \sigma_I)(\lambda - \sigma_{II})(\lambda - \sigma_{III}) = 0 \quad (22)$$

**NB/** Sur une facette orientée par un vecteur directeur principal, il n'y a pas de cisaillement, l'état de contrainte est *hydrostatique*.

#### 2.4.1 États de contraintes remarquables

- **État des contraintes sphérique (isotrope):** un tenseur de contrainte est *sphérique* lorsque

$$\text{les termes de la diagonale sont égaux (Fig.2.7). } \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (23)$$

Les invariants sont :  $I_1 = 3\sigma$ ;  $I_2 = 3\sigma^2$ ;  $I_3 = \sigma^3$

Le polynôme caractéristique prend la forme suivante :  $-\lambda^3 + 3\sigma\lambda^2 - 3\sigma^2\lambda + \sigma^3 = 0$

La solution de polynôme est :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \sigma$

Donc les directions principales suivants:  $\lambda_1 = \sigma \Rightarrow \vec{e}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{e}_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  Et  $\vec{e}_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les trois cercles de Mohr des contraintes se réduisent dans ce cas à un point (état de contrainte isotrope) (Fig.2.7). Si  $\sigma > 0$ , il s'agit d'une *tension* et si  $\sigma < 0$  c'est une *compression*.



Fig.2.7 État de contraintes isotrope  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

- **État de contrainte uni axiale (maximale):** un tenseur de contrainte est dit *maximal* lorsqu'il est principal et lorsqu'il seul terme de la diagonale et non nul (Fig.2.8).

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

C'est le cas d'un barreau en *traction* ou en *compression* ou d'un fil en *tension*.

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_1 \neq 0$$

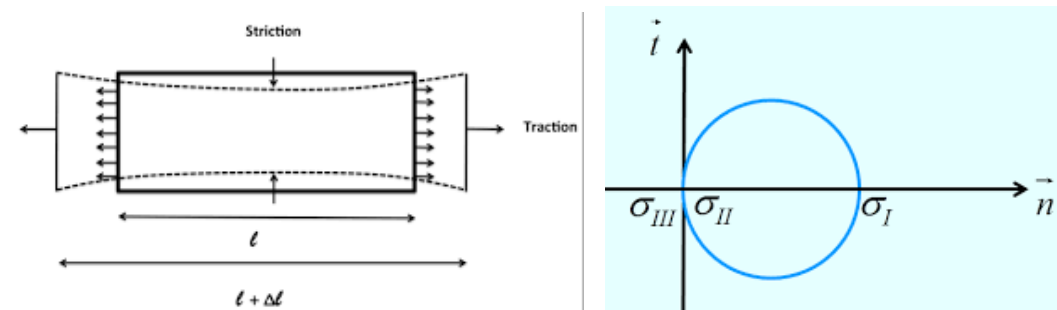


Fig.2.8 État de contrainte uni-axiale

- **État des contraintes cisaillement simple:** dans deux directions orthogonales (Fig.2.9)

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Les contraintes principales et les directions principales sont :

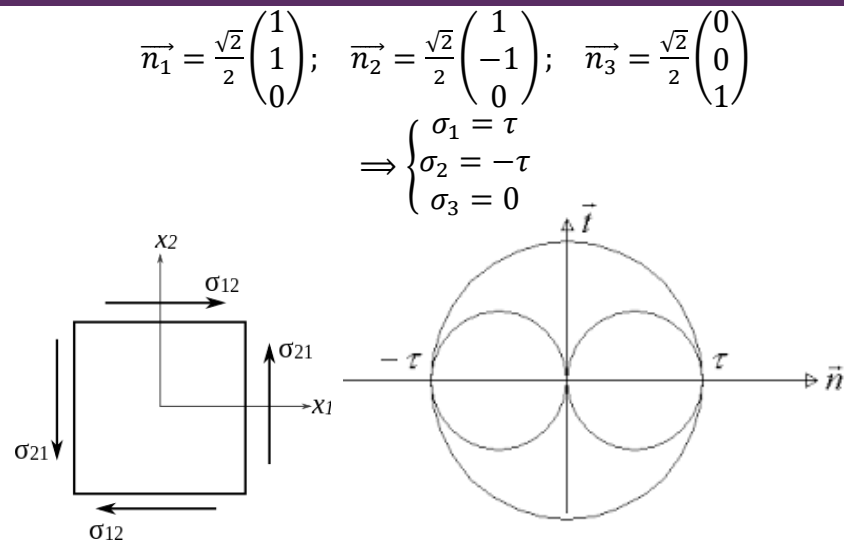


Fig.2.9 Etat de cisaillement simple

• **État des contraintes plan:** un tenseur est dit plan lorsqu'il a la forme suivante

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Les deux directions principales sont solution de l'équation

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cette équation n'a de solution que si :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\lambda + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = 0 \quad (27)$$

Les contraintes principales sont:

$$\begin{cases} \sigma_I = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{II} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases} \quad (28)$$

Les directions principales correspondantes sont :

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} n_2 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{Avec : } n_1^2 + n_2^2 = 1$$

$$\theta: \text{L'angle compris entre } n_1 \text{ et l'axe } x \text{ est: } \tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_I - \sigma_{22}}$$

$$\Rightarrow \theta_{01} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \text{ et } \theta_{02} = \theta_{01} + \frac{\pi}{2}$$

$A = \sigma_{II}$  ;  $C = \sigma_{III} = 0$  ;  $B = \sigma_I$  . C'est le cas d'une plaque mince chargée dans son poids propre plan (Fig.2.10).

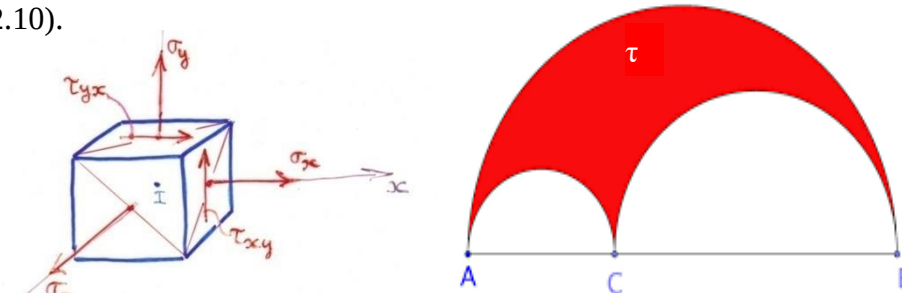


Fig.2.10 Tri cercle de Mohr d'un état de contraintes.

♦ **État de cisaillement pur:** L'état de contrainte en un point quelconque P est en cisaillement pur s'il existe un repère orthonormé (P, X, Y, Z) de façon que la contrainte moyenne en ce point est nulle :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z}{3} \quad (29)$$

### exercice 1

Soit  $[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  -Déterminer les valeurs des vecteurs propres du tenseur A ?

### Exercice 2

Soit  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  -Calculer les valeurs et les vecteurs propres du tenseur T ?

## 2.4.2 Décomposition du tenseur contrainte

Le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  peut se décomposer en la somme d'un *tenseur sphérique*  $\sigma_{sp}$  et à un *tenseur déviateur*  $\sigma_{dv}$  (symétrique de trace nulle).

$$\sigma_{ij} = \sigma_{sp} + \sigma_{dv} \quad (30)$$

Avec :  $\text{tr}(\sigma_{dv}) = 0$  ;  $\text{tr}(\sigma_{ij}) = \text{tr}(\sigma_{sp}) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$  (31)

### ♦ Tenseur sphérique ( $\sigma_{sp}$ )

$$\sigma_{sp} = \frac{1}{3} (\text{tr} \sigma_{ij}) \bar{I} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \cdot \bar{I} \quad \text{Où } \bar{I} \text{ est le tenseur Identité}$$

Si on pose :  $\sigma_m = \frac{1}{3} (\text{tr} \sigma_{ij}) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$

$$\sigma_{sp} = \sigma_m \quad (\sigma_m: \text{Contrainte moyenne}) \quad (32)$$

### ♦ Tenseur déviateur ( $\sigma_{dv}$ )

C'est un tenseur qui exprime la *partie non-sphérique* de  $\sigma_{ij}$ , de trace nulle et ayant mêmes directions principales que  $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{dv} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} (\text{tr} \sigma_{ij}) \cdot \bar{I} \quad (33)$$

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{11}-\sigma_{22}-\sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{1}{3}(2\sigma_{22}-\sigma_{33}-\sigma_{11}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{1}{3}(2\sigma_{33}-\sigma_{11}-\sigma_{22}) \end{pmatrix}}_{\sigma_{dv} \text{ dans une base quelconque}} + \underbrace{\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_{sp}}$$

Et dans la base principale  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  de  $\sigma_{ij}$ , la matrice de  $\sigma_{dv}$  s'écrira :

$$\sigma_{dv} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(2\sigma_{II} - \sigma_I - \sigma_{III}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(2\sigma_{III} - \sigma_I - \sigma_{II}) \end{pmatrix} \quad (34)$$

On en déduit que les valeurs propres  $\sigma_{ij}$  et  $\sigma_{dv}$  ont les mêmes directions.

## 2.4.3 Invariants du tenseur déviateur ( $\sigma_{dv}$ )

Le tenseur déviateur est caractérisé par les invariants :  $J_1, J_2$  et  $J_3$

$$\begin{cases} J_1 = \text{tr}(\sigma_{ij}) = 0 \text{ par définition} \\ J_2 = -\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_{dv}^2) = -\frac{1}{2} \sigma_{dvij} \sigma_{dvji} \\ J_3 = \det |\sigma_{dv}| \end{cases} \quad (35)$$

Pour expliciter davantage ces termes, on peut diagonaliser le déviateur dans la même base de directions principales que le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Dans la base des directions principales } (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

$$\text{Alors } \begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] \\ J_3 = s_I s_{II} s_{III} \end{cases}$$

## 2.5 Représentation Graphique d'un État de Contrainte (Tri-Cercle de Mohr)

Otto Mohr est un ingénieur Allemand, en 1882, Il a développé plusieurs procédés de construction géométrique on utilisant la théorie du tri cercle dit “*cercles de Mohr*”. Le cercle de Mohr est la conception circulaire qui permet la détermination ou la représentation graphique des contraintes ou déformations principales ainsi que les relations existantes.

### 2.5.1 Approche en 2D

L'analyse des contraintes est faite en un point M, entouré par un rectangle infinitésimal dont les côtés sont parallèles aux axes x et y (contraintes planes). Il apparaît les contraintes normales  $\sigma_x, \sigma_y$  et les contraintes tangentielles  $\tau_{xy}$ . La matrice des contraintes est de la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

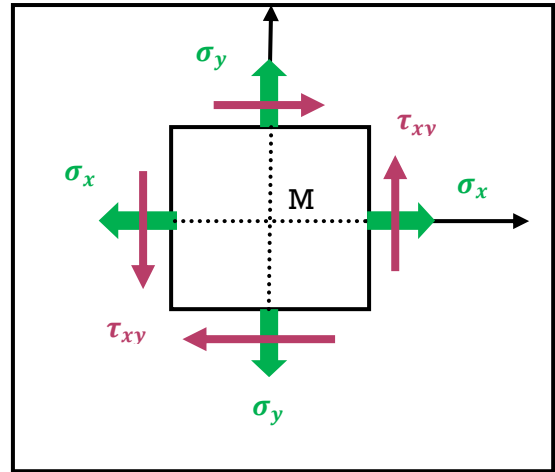


Fig.2.11 État de contraintes plan (2D).

Une rotation de la facette initiale dans le plan, les contraintes normales et tangentielles varient en fonction de l'angle  $\alpha$ . La nouvelle matrice des contraintes sera alors comme suit :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1} & \tau_{x1y1} \\ \tau_{x1y1} & \sigma_{y1} \end{bmatrix}_{x1y1}$$

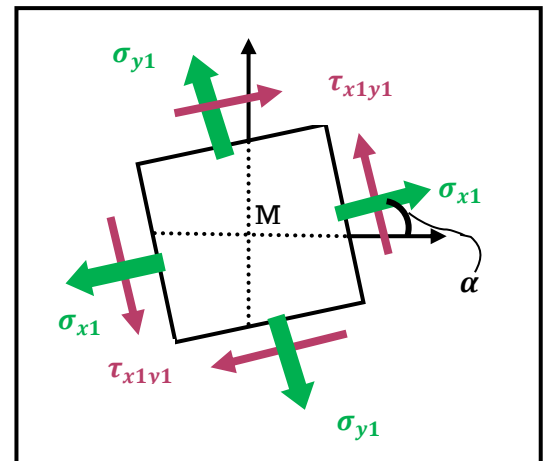


Fig.2.12 État de contraintes plan (2D) après une rotation.

Dans le cas où les directions sont principales, les contraintes tangentielles sont nulles ( $\tau_{ij} = 0$  pour un certain angle  $\alpha = \alpha_p$ ). La matrice des contraintes dans le plan principal s'écrit comme suit :

$$\sigma_P = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

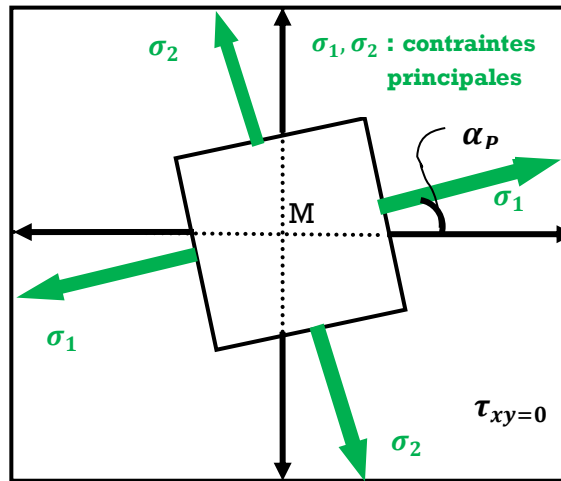


**Fig.2.13** État de contraintes plan (2D) dans le plan principal.

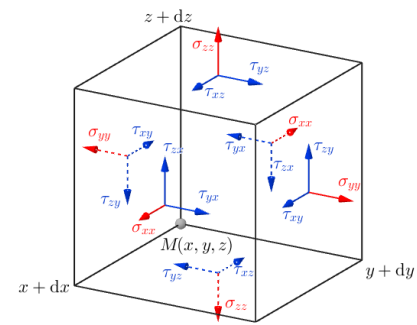
La représentation graphique de  $(\sigma, \tau)$  en fonction de  $2\alpha_p$ , forme un cercle et permet par conséquent de visualiser facilement les relations existant entre les contraintes. Pour dessiner ce cercle, il faut placer les contraintes normales  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sur les abscisses et  $\tau_{xy}$  et  $-\tau_{xy}$  sur les ordonnées, nous obtenons alors les points A et B où [AB] est le diamètre du cercle de Mohr. Le point C d'abscisse  $\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}$  est le centre de ce cercle.

### 2.5.2 Approche en 3D

Soit le cube suivant soumis à différentes sollicitations.

Sa matrice des contraintes a la forme suivante :

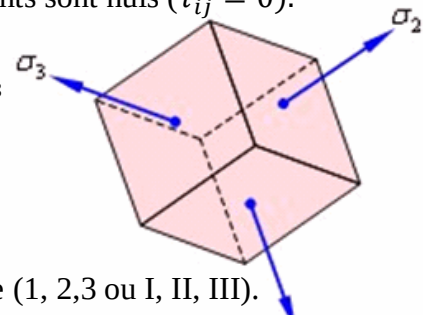
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$



Dans le plan principal (X, Y, Z), les contraintes de cisaillements sont nuls ( $\tau_{ij} = 0$ ).

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{(X,Y,Z)} \quad \text{Avec } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

On dessine ainsi le tricerclle de Mohr en plaçant les trois contraintes principales sur l'axe  $\sigma_x$ .



**NB/** Les contraintes principales sont notées par un seul indice (1, 2,3 ou I, II, III).

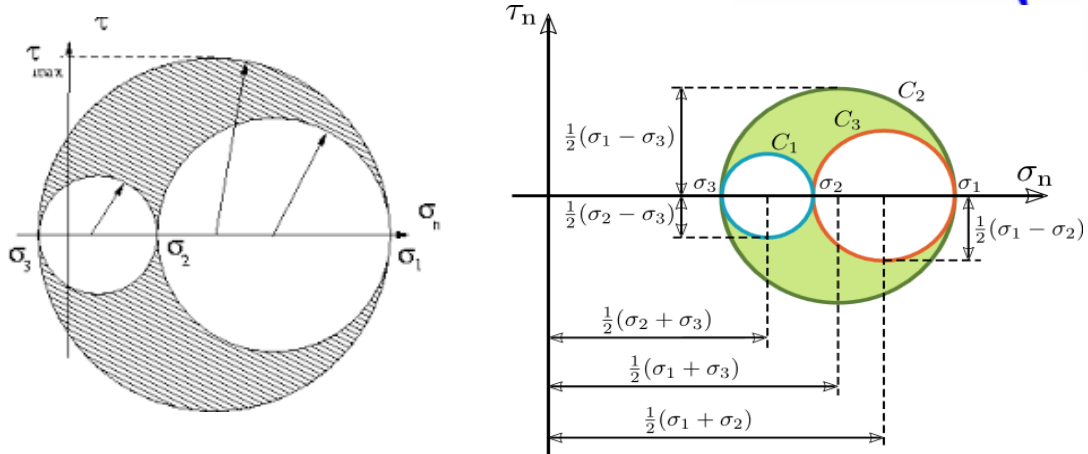


**Fig.2.14** Représentation graphique dans le plan principal

### 2.5.3 Traçage du tri-cercle de Mohr (Christian Otto Mohr 1835-1918)

La méthode du cercle de Mohr est une technique de représentation graphique d'usage pratique pour le tenseur de Cauchy. Il s'agit d'un repère abstrait dans lequel l'axe horizontal représente la composante normale d'un vecteur contrainte, et l'axe vertical représente sa composante tangentielle. Dans la base des directions principales de contraintes, la matrice représentative du tenseur des contraintes en un point M du solide (S) est donnée par l'équation (12). Considérons la facette centrée en M et orientée par le vecteur  $\vec{n}$  de composantes  $n_1; n_2; n_3$  dans la base des vecteurs propres  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , le vecteur contrainte agissant en M sur la dite facette vaut :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Avec :  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Or, on sait que d'après (3):  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$

De plus, nous avons le choix de prendre  $\tau_n$  positif (sens de  $\vec{t}$ ), alors :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ \tau_n = \|\vec{T} - \sigma_n \vec{n}\| = \sqrt{T^2 + \sigma_n^2} \quad (\text{Théo. pythagore}) \end{cases} \quad (37)$$

On réunit les équations et inéquations :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ \tau_n = \|\vec{T} - \sigma_n \vec{n}\| = \sqrt{T^2 + \sigma_n^2} \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \end{cases} \quad (38)$$

Ce qui permet de déterminer les trois inconnues :  $n_1^2, n_2^2, n_3^2$  (cosinus directeurs)

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) + \tau_n^2}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \\ n_2^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III}) + \tau_n^2}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})} \\ n_3^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) + \tau_n^2}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})} \end{cases} \quad (39)$$

Si on utilise la convention  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$  et du fait que  $n_j^2 \geq 0$ , les trois équations précédentes impliquent les trois inégalités suivantes :

$$\begin{cases} (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) + \tau_n^2 \geq 0 & (a) \\ (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III}) + \tau_n^2 \leq 0 & (b) \\ (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) + \tau_n^2 \geq 0 & (c) \end{cases} \quad (40)$$

Si, à tout vecteur contrainte  $\vec{T}$  on fait correspondre un point image  $\Phi$  dans le plan  $(\sigma, \tau)$  (plan de Mohr), les inéquations précédentes montrent que le point  $\Phi(\sigma_n; \tau_n)$  est inclus dans l'espace géométrique délimité par trois cercles : c'est le *tricerclle de Mohr*.

$$\text{Ces inéquités peuvent se reformuler par : } \begin{cases} \left( \sigma_n - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right) + \tau_n^2 \geq \frac{(\sigma_{II} - \sigma_{III})}{2} \\ \left( \sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right) + \tau_n^2 \leq \frac{(\sigma_I - \sigma_{III})}{2} \\ \left( \sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right) + \tau_n^2 \geq \frac{(\sigma_I - \sigma_{II})}{2} \end{cases} \quad (41)$$

$$\text{Que l'on transforme en : } \begin{cases} \left( \sigma_n - \frac{(\sigma_{II} + \sigma_{III})}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left( \frac{(\sigma_{II} - \sigma_{III})}{2} \right)^2 \\ \left( \sigma_n - \frac{(\sigma_I + \sigma_{III})}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \leq \left( \frac{(\sigma_I - \sigma_{III})}{2} \right)^2 \\ \left( \sigma_n - \frac{(\sigma_I + \sigma_{II})}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left( \frac{(\sigma_I - \sigma_{II})}{2} \right)^2 \end{cases} \quad (42)$$

La première inégalité de l'équation (38) prévoit que le point T est situé à l'extérieur du cercle que l'on nommera  $\mathcal{C}_1$  de centre,  $c_1(\frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}, 0)$  et de rayon  $\mathcal{R}_1 = (\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2})$ . La troisième inégalité stipule également que ce point T est à l'extérieur du cercle que l'on nommera  $\mathcal{C}_3$  dont le centre est,  $c_3(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0)$  et de rayon  $\mathcal{R}_2 = (\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2})$ . Enfin, la deuxième ligne stipule que le point T est situé à l'intérieur du cercle que l'on nommera  $\mathcal{C}_2$  de rayon  $\mathcal{R}_2 = (\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2})$  et dont le centre noté  $c_2$  est sur l'axe horizontal à l'abscisse  $(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2})$  (Fig.2.11).

Les équations de la MMC expriment que l'extrémité du vecteur contrainte se situe dans la zone grise, c'est-à-dire à la fois à l'intérieur du cercle  $\mathcal{C}_2$  et à l'extérieur des cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_3$ .

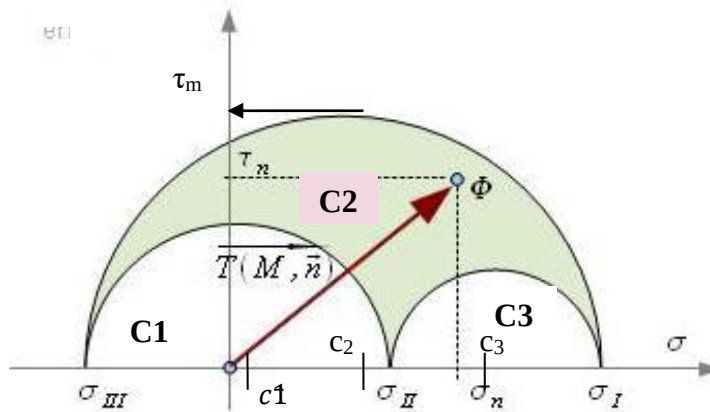


Fig.2.15 Tri cercle de Mohr

Pour des raisons de symétrie, on a souvent coutume de ne représenter que la moitié supérieure du plan de Mohr.

#### 2.5.4 Contrainte de cisaillement maximal

On remarque sur les représentations graphiques que la valeur maximale de  $T_t$  est égale au rayon du grand cercle de Mohr. Cette valeur est appelée *contrainte de cisaillement maximale*, et vaut :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (43)$$

La contrainte normale correspondante vaut alors :  $T_n = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}$  (44)

Le point T correspondant à cette configuration est situé sur le cercle  $\mathcal{C}_2$ , donc on vérifie  $n_2 = 0$ .

On en déduit que le cisaillement maximal que l'on obtient en un point donné d'un milieu continu est toujours obtenu sur une facette dont la normale est sur le plan défini par les contraintes principales maximale et minimale, c'est-à-dire que  $\vec{n}$  appartient au plan  $\text{plan}(\vec{X}, \vec{Y})$ . Par ailleurs, les équations (41) et (42) fournissent :

$$n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2}$$

#### 2.5.3 Cercle de Mohr

L'état de contrainte est ainsi caractérisé par un tenseur des contraintes réduit dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ .  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  Conventionnellement, on le réduit en 2D à la forme :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{pmatrix} \{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$$

L'objet du cercle de Mohr est de permettre la détermination graphique (quantitative et rapide) des vecteurs contraintes agissant sur des facettes contenant le vecteur  $\vec{e}_{III}$ ; le vecteur directeur d'une telle facette exclut donc  $\vec{e}_{III}$  et, par conséquent:

$$\vec{n} = n_1 \vec{e}_I + n_2 \vec{e}_{II}$$

$n_1; n_2$  sont les cosinus directeurs du vecteur  $\vec{n}$  dans la base  $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$ .

On introduit ainsi :

$$\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_I + \sin \theta \vec{e}_{II}$$

Où,  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur  $\vec{n}$  avec l'axe  $\vec{e}_I$  :  $\theta = (\vec{e}_I, \vec{n})$

Pour alléger encore l'écriture on pose :  $c = \cos \theta$  et  $s = \sin \theta$ .

Le vecteur contrainte agissant sur la dite facette est donc :  $\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 c \\ \sigma_1 s \end{pmatrix}$  dans la base  $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$

On décompose ce vecteur selon la normale  $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$  et le vecteur  $\vec{t} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$  obtenu par rotation de  $\frac{\pi}{2}$  de  $\vec{n}$  autour de  $\vec{e}_{III}$ .

Alors,

$$T_1 = \sigma_1 \vec{n} + \tau_1 \vec{t}$$

Avec :

$$\sigma_1 = \sigma_I c^2 + \sigma_{II} s^2 \quad (45)$$

et

$$\tau_1 = cs(\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (46)$$

Par commodité, on introduit l'angle double  $2\theta$  de sorte que :

$$\sigma_1 = \left( \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right) \cos 2\theta \quad \tau_1 = - \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right) \sin 2\theta \quad (47)$$

$$\sigma_1 = \left( \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right) \cos(-2\theta) \quad (48)$$

$$\tau_1 = - \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right) \sin(-2\theta) \quad (49)$$

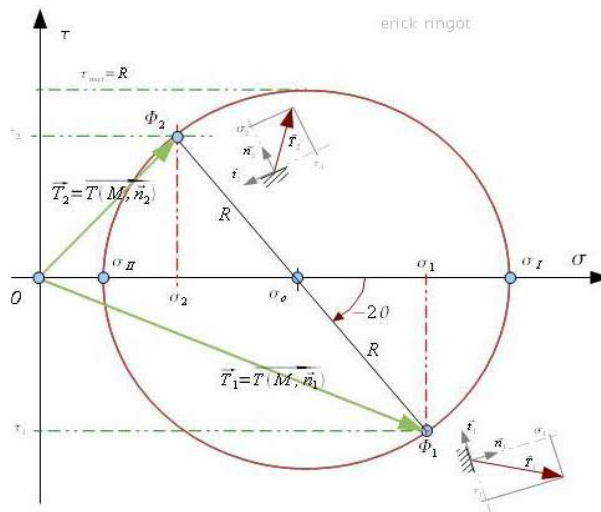


**Fig.2.16** Cercle de Mohr final de l'état des contraintes

Série d'exercicesExercice 1

En un point (M) d'un milieu continu l'état de contrainte est donné par le tenseur suivant :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les contraintes principales:  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$ .
2. Déterminer les contraintes : totale  $T$ , normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\tau_t$ , suivant une facette de normale unitaire  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \vec{e}_2$

Solution**1. Contraintes principales**

$$\det [\sigma_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 120 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 40 - \lambda & 10 \\ 0 & 10 & 40 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(120 - \lambda)[(40 - \lambda)^2 - 100] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 120 \\ \lambda_2 = 30 \\ \lambda_3 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 120 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 30 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

**2. Contrainte totale**

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 40 \sqrt{3} = 69.3 \text{ MPa} \\ T_2 = \frac{40}{3} \sqrt{6} = 32.65 \text{ MPa} \\ T_3 = \frac{10}{3} \sqrt{6} = 8.16 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2} = 77.03 \text{ MPa}$$

**3. Contrainte normale**

$$\sigma_N = n_n \sigma_{ij} n_j = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \ 0 \right) \cdot \left( 40\sqrt{3} \ \frac{40}{3}\sqrt{6} \ \frac{10}{3}\sqrt{6} \right) = 66.67 \text{ MPa}$$

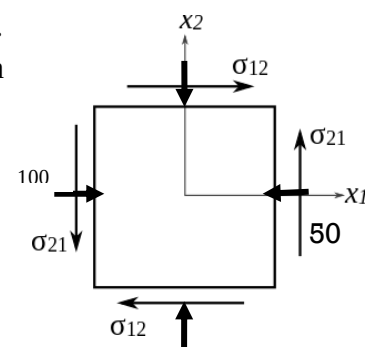
**4. Contrainte tangentielle**

$$\tau = \sqrt{T^2 + \sigma_N^2} = 38.6 \text{ MPa}$$

Exercice 2

Considérons l'état plan de contraintes au point P représenté sur la figure ci-dessous. Les contraintes sont en MPa.

- 1- Ecrire la matrice des contraintes en P dans le repère xyz.
- 2- Déterminer les éléments principaux des contraintes. Représenter les éléments principaux des contraintes dans le plan xy.
- 3- Tracer le tri-cercle de Mohr. En déduire la valeur du cisaillement maximum. Dans quel plan se trouve les normales relatives aux plans de coupe soumis au cisaillement maximum.



**Solution**

1- Matrice des contraintes en P dans le repère xyz :

$$[\sigma]_{P(xyz)} = \begin{bmatrix} -50 & 100 & 0 \\ 100 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

2-Détermination des éléments principaux des contraintes.

On a un état plan de contraintes : la facette z est donc principale et  $\sigma_z=0$ .

Les 2 autres valeurs propres sont déterminées à partir de l'équation caractéristique

$$\det[\sigma]_P = \begin{bmatrix} -50 - \lambda & 100 \\ 100 & 50 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Les deux valeurs sont :

$$\sigma_X = 50 \text{MPa}$$

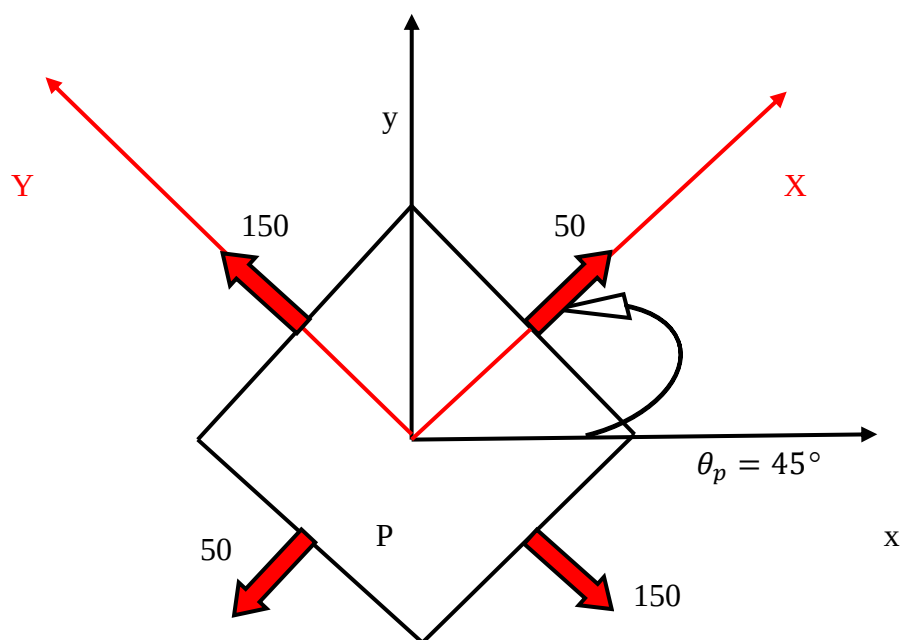
$$\sigma_Y = -150 \text{MPa}$$

Les axes principaux sont positionnés par :  $\hat{\theta} = (\vec{x}, \vec{X})$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\sigma_{xy}}{\left(\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right)} = \frac{100}{\left(\frac{50 - (-150)}{2}\right)} = 1 \Rightarrow \theta_p = 45^\circ$$

La matrice du point P dans le plan des axes principaux XYZ est :

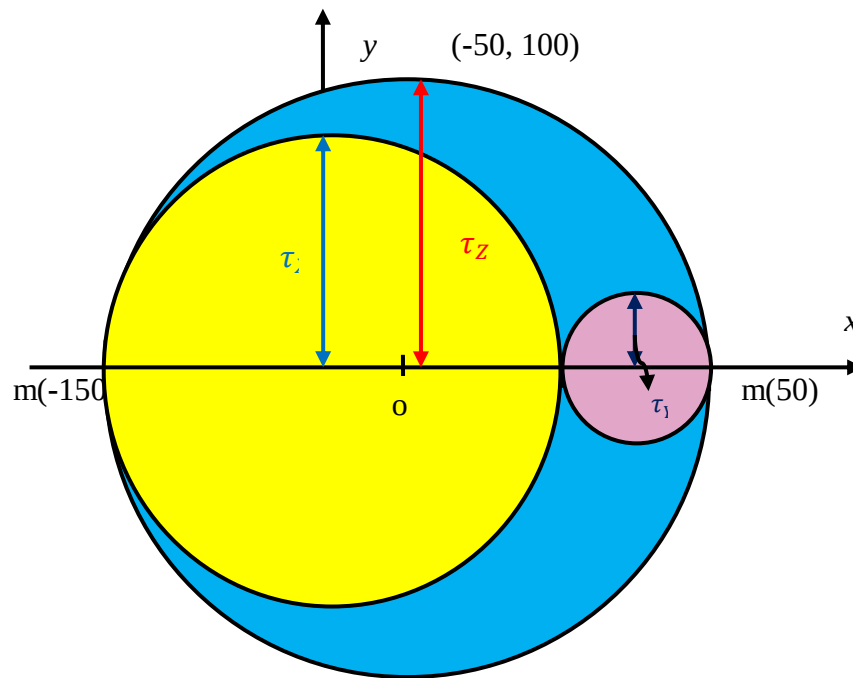
$$[\sigma]_{P(XYZ)} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



3-Tricercler de Mohr :

Les trois cercles CX, CY, et CZ sont construits à partir des 3 valeurs propres de la matrice des contraintes.  $\sigma_X = 50 \text{MPa}$ ,  $\sigma_Y = -150 \text{MPa}$  et  $\sigma_Z = 0$ .

Positionner les points :  $m_X(50)$ ,  $m_Y(-150)$ , et  $m_Z(0)$ , et tracer les 3 cercles.



La valeur du cisaillement maximum est donnée par le rayon du plus grand des 3 cercles :

$$\tau_z = \tau_{max} = \frac{50 + 150}{2} = 100 \text{ MPa}$$

### Exercice 3

On considère à un état de contraintes uniforme dont les composantes cartésiennes sont :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} (\text{N/mm}^2)$$

- 1) Déterminer les contraintes principales.
- 2) Déterminer les directions principales normalisées.
- 3) Ecrire la matrice  $C$  des cosinus directeurs des axes principaux.
- 4) Calculer la contrainte moyenne normale et la contrainte tangentielle maximale
- 5) Vérifier les invariants des contraintes  $I_1$  et  $I_3$ .

### Solution

1- Contraintes principales

$$\det(\sigma - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 - \lambda & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)[(\lambda + 4)^2 - 4] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = +2 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = +2 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 = -2 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_3 = -6 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

2- Directions principales

a) direction  $X_1$  correspondant à  $\sigma_1$  :

$$\begin{bmatrix} -4 - 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 - 2 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0, \text{ donne un système trivial, } X_1 = X_2 \wedge X_3$$

b) direction  $X_2$  correspondant à  $\sigma_2$

$$\begin{bmatrix} -4+2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1+2 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{pour, } n_1 = 1 \\ n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ La normalisation donne } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) direction  $X_3$  correspondant à  $\sigma_3$  :

$$\begin{bmatrix} -4+6 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1+6 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{pour, } n_1 = 1 \\ n_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ La normalisation donne } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \text{ d'où } X_1 = X_2 \wedge X_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

3- Matrice C des cosinus directeurs des directions principales

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4- Contraintes moyenne normale

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -2 \text{ N/mm}^2$$

- Contraintes tangentielle maximale

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm 4 \text{ N/mm}^2$$

5- Invariants

$$I_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -6$$

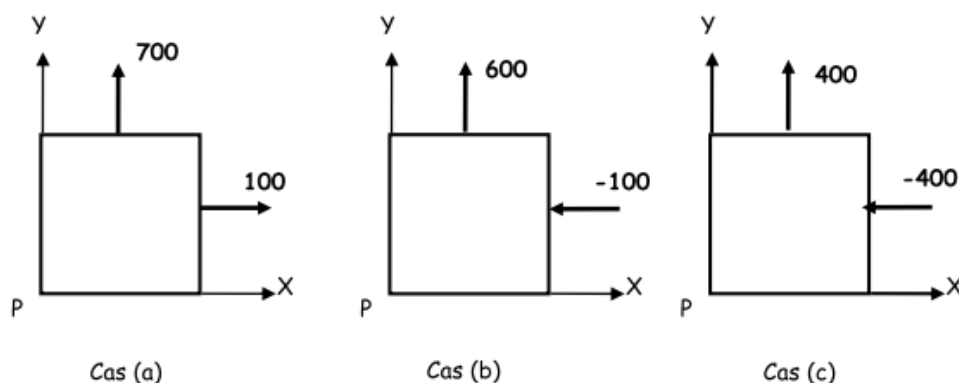
$$I_3 = \det(\sigma) = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) = 24$$

#### Exercice 4

Considérons les trois états plans de contrainte ci-dessous. Les axes sont principaux. Les contraintes sont en MPa.

1- Ecrire les matrices relatives à ces trois états de contrainte.

2- D'après le critère de VON MISES, quel est l'état de contrainte le plus dangereux ?



**Solution**

$$[\sigma]_{XYZ}^{P(a)} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa ; [\sigma]_{XYZ}^{P(b)} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa ; [\sigma]_{XYZ}^{P(c)} = \begin{bmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

La contrainte  $\sigma_{\text{équi}}^{VM}$  en 2D compte tenu que dans les 3 cas  $\sigma_z=0$  s'écrit :  $\sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}$

$$\sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{100^2 + 700^2 - 100 \cdot 700} ; \sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{100^2 + 600^2 + 100 \cdot 600} ; \sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{400^2 + 400^2 + 400 \cdot 400}$$

$$\sigma_{\text{équi}}^{VM(a)} = 655,74 MPa \quad \sigma_{\text{équi}}^{VM(b)} = 655,74 MPa \quad \sigma_{\text{équi}}^{VM(c)} = 692,82 MPa$$

L'état de contrainte le plus dangereux, au sens de VON MISES, est donc le cas (c) .

## Chapitre 3

# Théorie de l'Etat de Déformation

### 3.1 Généralités

Lorsqu'un corps est soumis à des contraintes externes, celui-ci subit des déformations qui dépendent de l'intensité de ces contraintes. Les déformations qui apparaissent sur la forme du corps sont le résultat de différents types de mouvements, dont le déplacement relatif entre les particules elles-mêmes du corps. Ce dernier, produit des formes compliquées dues à la variation d'angles, ce qui explique sa non-linéarité. Si les contraintes appliquées sont faibles, les déformations observées sont proportionnelles aux pressions appliquées. Dans ce chapitre nous intéressons à la variation d'angles pour construire le tenseur de déformation.

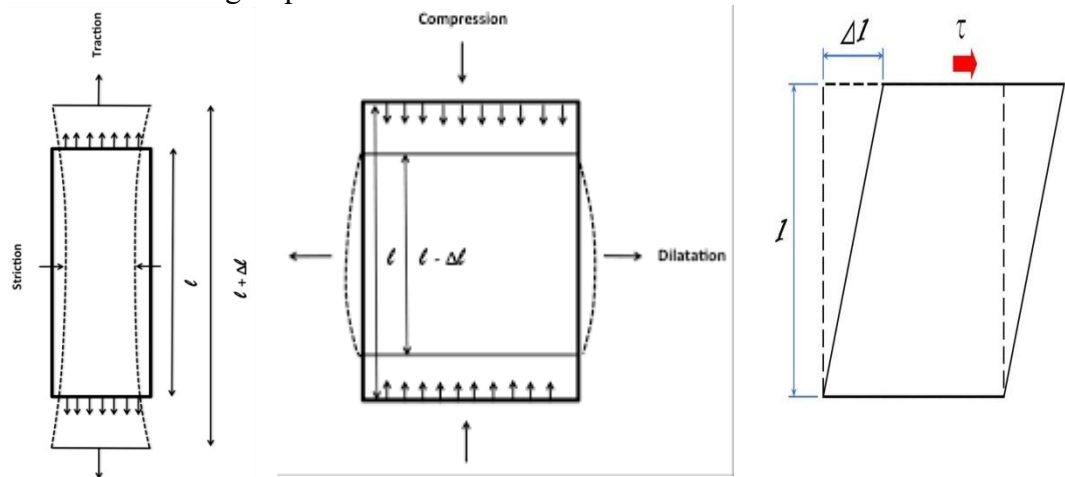


**Fig.3.1** Exemples de déformations (traction, compression et distorsion (angulaire))

### 3.2 Description d'un Mouvement d'un Point Matériel

En cinématique le mouvement des *particules* particule est déterminé par un vecteur qui peut être en fonction du temps:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(t) \quad \text{Ou bien} \quad \mathbf{M}(t) = X(t)\vec{e}_1 + Y(t)\vec{e}_2 + Z(t)\vec{e}_3$$

Pour un *milieu continu*, on identifie les points d'un corps quelconque par leur *position* qu'ils occupent au *temps de référence*  $t_0$ .

#### ◆ Vecteur déplacement

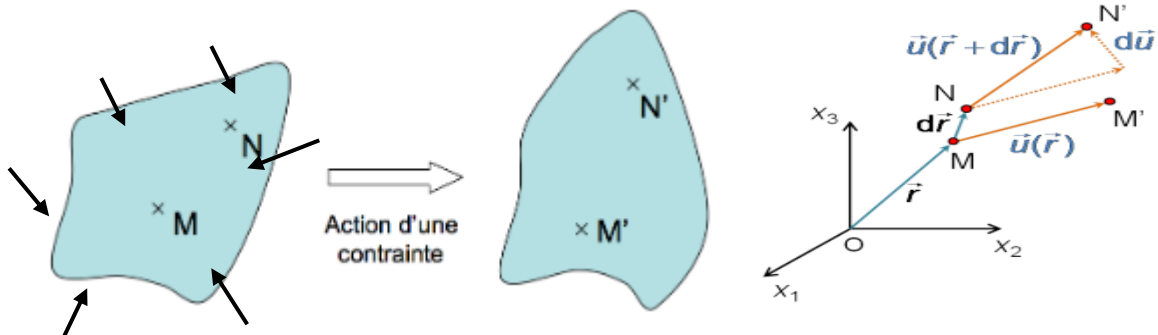


**Fig.3.2** Etat de déformation d'un corps sous l'action des contraintes

Le point matériel  $M(\vec{r})$  d'un milieu solide est sollicité mécaniquement par un déplacement  $\vec{u}$  en  $M'$ . On aura donc :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Le déplacement du point N en N'  $\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r})$ , peut alors se formuler en fonction du déplacement du point M,  $\vec{u}(\vec{r})$ , et d'un accroissement de déplacement  $d\vec{u}$ , caractérisant la susceptibilité d'un point de ce déplacé différemment dans le solide par rapport à l'origine de la déformation.

$$\overrightarrow{MN'} = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) = \begin{pmatrix} u_1 + du_1 = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ u_2 + du_2 = u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ u_3 + du_3 = u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{pmatrix} = \vec{u} + d\vec{u} \quad (2)$$

$\vec{u} + d\vec{u}$  : est **le vecteur déplacement** des points matériels M et N du solide en M' et N' à ( $t \neq 0$ ).

Si l'on ne considère que les petites déformations, l'état des déformations en un point M est complètement caractérisé par le tenseur symétrique  $[\varepsilon]$  et la relation donnant le déplacement en un point M du milieu et pour une direction  $\vec{n}$  est :

$$\vec{u}(M, \vec{n}) = [\varepsilon](M) \cdot \vec{n}$$

La connaissance des vecteurs déplacements au point M pour trois vecteurs unitaires définis par la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  suffit à déterminer l'état des déformations en ce point :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(M, \vec{e}_1) &= \varepsilon_{11}\vec{e}_1 + \varepsilon_{12}\vec{e}_2 + \varepsilon_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2(M, \vec{e}_2) &= \varepsilon_{21}\vec{e}_1 + \varepsilon_{22}\vec{e}_2 + \varepsilon_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3(M, \vec{e}_3) &= \varepsilon_{31}\vec{e}_1 + \varepsilon_{32}\vec{e}_2 + \varepsilon_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

### 3.3 Tenseur de Déformation

De l'équation (2), on peut identifier l'accroissement comme suit :

$$d\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{u} = \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \vec{e}_i \quad (4)$$

Sous forme matricielle :

$$d\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Où  $[\varepsilon]$ , est appelé: *tenseur des gradients de déformations* et  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ , leurs composantes.

On pose,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

Si on prendre compte de l'hypothèse des petites déformations (HPP le tenseur  $[\varepsilon]$  des déformations  $[\varepsilon]$  est le tenseur des déformations linéarisés.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sachant que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \varepsilon_{11} ; & \gamma_{12} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 2\varepsilon_{12} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \varepsilon_{22} ; & \gamma_{13} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 2\varepsilon_{13} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \varepsilon_{33} ; & \gamma_{23} &= \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 2\varepsilon_{23} \end{aligned} \quad (9)$$

◆ Les modifications des angles après déformation  $\gamma_{ij}$  sont appelées *déformations de cisaillement* ou *distorsions*.

◆ Les allongements unitaires  $\varepsilon_{ij}$  sont appelées *déformations longitudinales* ou *Extensions*

$$[\varepsilon] = [E] = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) & \frac{1}{2}(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) & \frac{1}{2}(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Le tenseur de déformation est symétrique d'ordre 2, on peut l'exprimer sous la forme suivante :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \text{Sym} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Ce tenseur caractérise un changement (longitudinal et transversal) qui subit une petite perturbation.

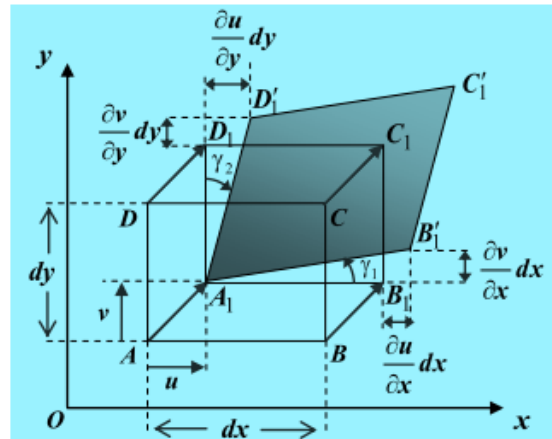


Fig.3.3 Déformation angulaire d'un élément

### ◆ Rotations

Les composantes du tenseur de rotation peuvent être assemblées sous la forme suivante:

$$\overline{\overline{G}} = [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) &= \omega_{12} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= \omega_{21} = -\omega_{12} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) &= \omega_{23} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) &= \omega_{32} = -\omega_{23} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) &= \omega_{13} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) &= \omega_{31} = -\omega_{13} \end{aligned} \quad (12)$$

- Le tenseur de rotation  $\omega_{ij}$  est antisymétrique.
- Les éléments de la diagonale de ce tenseur sont nuls.
- ◆ Le tenseur  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  est un tenseur symétrique d'ordre 2 qui

peut être exprimé comme étant la somme d'un tenseur *symétrique* et un autre *antisymétrique* tel que :

$$\varepsilon_{ij} + \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

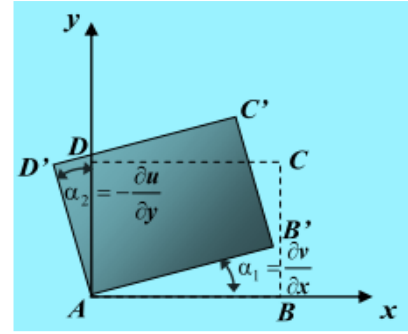


Fig.3.4 Rotation d'une facette par rapport à z

#### ◆ Dilatation cubique (volumétrique)

La trace du tenseur ( $\varepsilon_{ij}$ ) est définie par la quantité  $\varepsilon_v$  qui représente la somme des déformations longitudinales. Cette quantité exprime la variation par unité de volume, est appelée *dilatation cubique (volumétrique)*.

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (13)$$

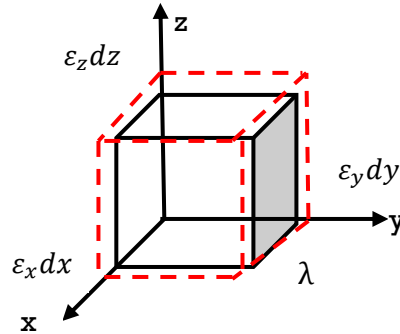


Fig.3.5 Variation volumétrique d'un cube.

### 3.4 Déformations et Directions Principales

L'état des déformations étant représenté par une matrice symétrique à coefficients réels, on montre que dans le cas général il existe trois directions ( $E_1, E_2, E_3$ ) pour lesquelles il n'existe pas de *distorsion*. Le tenseur des déformations est représenté dans cette base par :

$$[\varepsilon]_{(E_1, E_2, E_3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$

Les déformation *normales*, ou *dilatations*, *principales*, prises dans l'ordre conventionnel

$$\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III}$$

C'est-à-dire sont la solution de l'équation caractéristique suivante :

$$\det[\varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = \lambda^3 - \lambda^2 I_1 + \lambda I_2 - I_3 = 0 \quad (14)$$

Où:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ : Sont les valeurs principales de la matrice des déformations selon les directions principales  $E_1, E_2, E_3$ , notés souvent avec un seul indice. Leurs directions propres selon ( $E_1, E_2, E_3$ ) se calculent de la même manière déjà vue précédemment dans le tenseur des contraintes.

$I_1, I_2$  et  $I_3$  : Ce sont les *invariants* du tenseur des déformations.

$$I_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{tr}[\varepsilon]$$

$$I_2 = \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{33} - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ii} \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ik}^2)$$

$$I_3 = \det[\varepsilon_{ij}]$$

**NB/**

- Les déformations principales représentent les dilatations linéaires dans les directions principales.
- Les directions principales ne subissent aucune distorsion (termes non diagonaux nuls c.à.d.  $\varepsilon_{ij} = 0$ ); les plans principaux restent orthogonaux après déformations.

**3.4.1 Tenseur déviateur et sphérique**

Le tenseur des déformations peut être décomposé en partie sphérique et partie déviatorique dont la trace nulle. La décomposition est unique.

$$\text{Soit le tenseur de déformations principales } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_D$$

$$\varepsilon_S = \text{tr}(\varepsilon) \frac{1}{3} = \varepsilon_i \frac{1}{3} \rightarrow (\text{Transformation responsable de la dilatation volumique})$$

$$\varepsilon = \text{tr}(\varepsilon) \frac{1}{3} + \varepsilon_D$$

$$[\varepsilon_S] = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_m & 0 & 0 \\ 0 & e_m & 0 \\ 0 & 0 & e_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$e_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

Alors que,

$$\varepsilon_D = \varepsilon - \varepsilon_S \Rightarrow [\varepsilon_D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - e_m & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - e_m & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - e_m \end{bmatrix} \quad (16)$$

→ (Transformation responsable de glissement).

Comme la trace du tenseur représente la variation relative de volume, avec *le tenseur sphérique, on change le volume sans changer la forme*, cependant *le tenseur déviatorique, on change la forme sans changer le volume*.

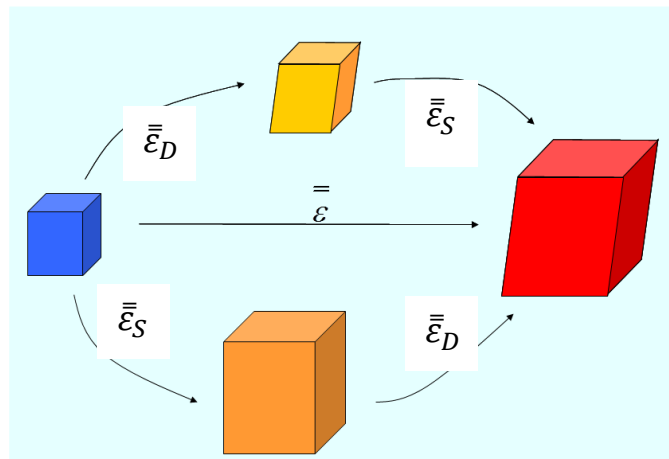
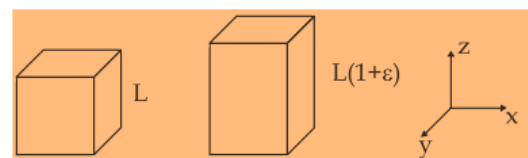


**Fig.3. 6** Représentation de tenseur sphérique et déviatorique

**3.4.2 Etats des déformations particuliers**

◆ Etat de déformations simples

$$\bullet [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Extension géométrique (oz)}$$



$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Expansion} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Cisaillement simple}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Cisaillement pur}$$

### • 3.4.2 Etats des déformations planes

Dans ce cas l'état de déformation est caractérisé par un tenseur plan, dont les composantes dans une des directions (par exemple z) sont nulles. C'est le cas pour un milieu bloqué dans une direction.

- Vecteur de déplacement : 
$$\begin{cases} u_1 = u_1(x, y) \\ u_2 = u_2(x, y) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

- Le tenseur des déformations donné par la formule suivante : 
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 3.5 Représentation Graphique de l'État de Déformation en un Point

L'état de déformation en un point quelconque P est caractérisé par les coordonnées  $(\varepsilon, g)$ , sachant que :  $g = \frac{1}{2}\gamma$ . Les équations obtenues après résolution par la méthode de Crammer et effectuant les transformations nécessaires tout en satisfaisant les conditions suivantes :

$$\varepsilon_x > \varepsilon_y > \varepsilon_z \quad \text{et} \quad n_1^2 \geq 0, n_2^2 \geq 0 \text{ et } n_3^2 \geq 0$$

On trouve : 
$$\begin{cases} g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_y)(\varepsilon - \varepsilon_z) \geq 0 \\ g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_z)(\varepsilon - \varepsilon_x) \leq 0 \\ g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_x)(\varepsilon - \varepsilon_y) \geq 0 \end{cases}$$

Ces équations peuvent être simplifiées et écrites comme suit :

$$\begin{cases} \left( \varepsilon - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right) + g^2 \geq \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 \rightarrow R = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} ; \text{origine } O = \left( \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0 \right) \\ \left( \varepsilon - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{2} \right) + g^2 \leq \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{2} \right)^2 \rightarrow R = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{2} ; \text{origine } O = \left( \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{2}, 0 \right) \\ \left( \varepsilon - \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2} \right) + g^2 \geq \left( \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2} \right)^2 \rightarrow R = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2} ; \text{origine } O = \left( \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2}, 0 \right) \end{cases}$$

On abouti donc à 3 cercles de centres et rayons différents.

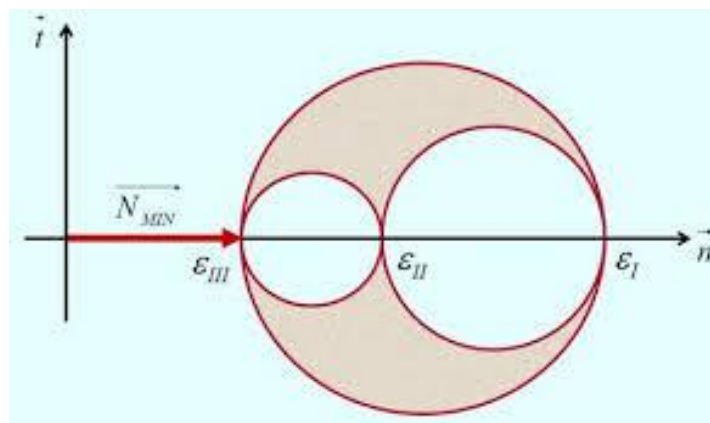


**Fig.3. 7** Représentation graphique de déformations dans le plan principale

L'approche en déformation est analogue à celle en contrainte. Les relations établies sont particulièrement utiles pour les études expérimentales utilisant des jauges de contraintes.

- Cas des déformations planes: on ne prend en compte que :  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$

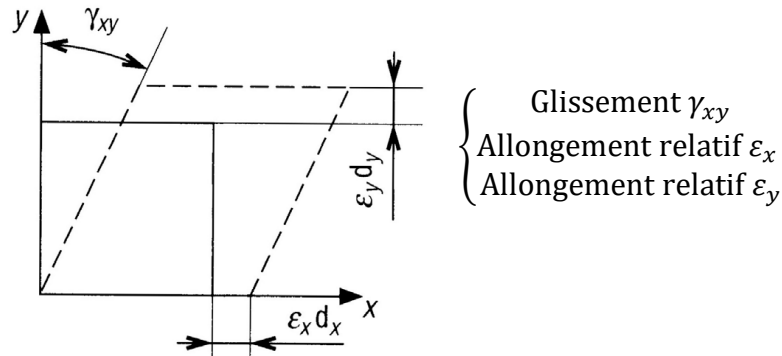


Fig.3.8 Représentation graphique

Les équations de transformations sont analogues à celles en contrainte en remplaçant:  $\begin{cases} \varepsilon \rightarrow \sigma \\ \tau \rightarrow \frac{\gamma}{2} \end{cases}$

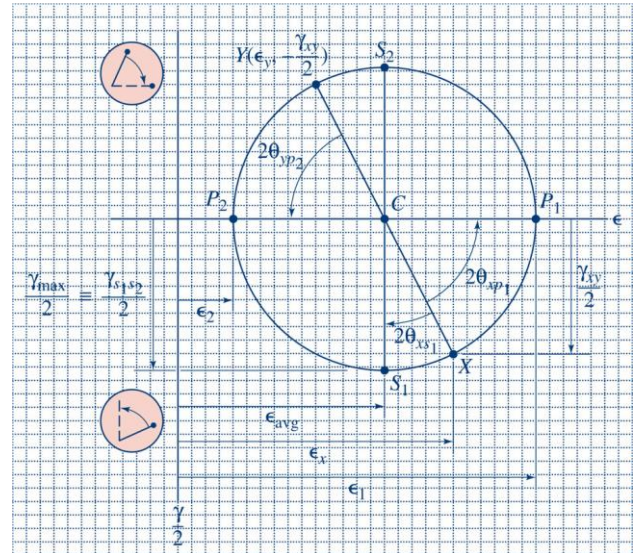
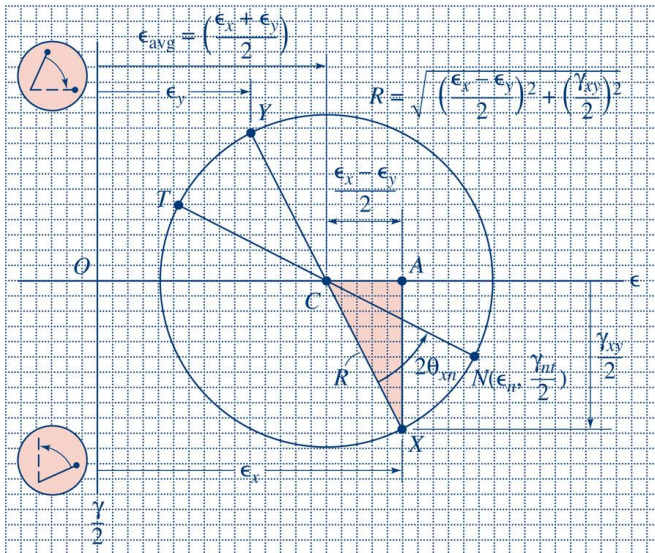
La démarche de construction du cercle est la même qu'en contrainte

◆ **Déformations principales (normales)**

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan 2\theta_P = \left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right)$$

◆ **Déformations principales (cisaillement) :  $\gamma_{max} = -\gamma_{min} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$**



### 3.6 Équation de Compatibilité des Déformations

Les équations de compatibilité sont des équations mathématiques aux secondes dérivées qui expriment la comptabilité des déformations issues du mouvement du matériau ou d'une structure donnée. **Ce sont les conditions d'intégrabilité. Physiquement, elles signifient qu'on ne peut pas choisir arbitrairement le champ des déformations sans altérer la continuité de la matière.** Ces équations sont couramment utilisées pour analyser le comportement des structures déformables. Ces conditions nous donnent un système de six équations **indépendantes** (on notation indicielle).

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

Ces équations peuvent se présenter sous forme développées dans un système de coordonnées cartésiennes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0$$

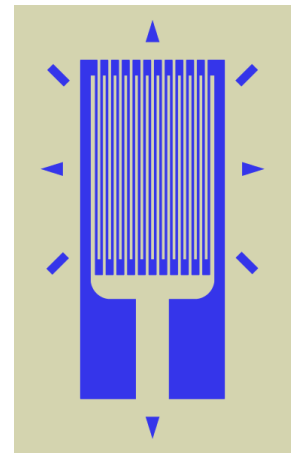
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0$$

Si les conditions de compatibilités sont satisfaites, il est alors possible de déterminer les champs de déplacement générateurs de l'état de déformation.

### 3.7 Mesure des Déformations

La déformation est généralement mesurée par une jauge (extensomètres) de contrainte (1938), qui permet d'observer le comportement des matériaux sous contrainte, fournissant des données vitales pour l'évaluation de l'intégrité et de la performance des structures. Elle mesure de faibles déformations, utilisable en pratique que dans le *domaine élastique*. Sont des outils essentiels de capture de changements de résistance lorsqu'ils sont étirés ou comprimés. Leurs applications vont des simples expériences de laboratoire à la surveillance complète de structures à grande échelle telles que *les ponts* et *les gratte-ciel*, afin de garantir la sécurité et la durabilité des structures.



A la surface d'un corps la matrice des déformations s'écrit :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

La déformation  $\varepsilon_{zz}$  n'est pas indépendante. Elle vaut :  $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$

La dilatation linéaire unitaire  $\varepsilon_{hh}$  suivant l'axe h se calcule par :

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

Série d'exerciceExercice 1

- Déterminer  $\varepsilon_{ij}$  (extension simple) :

$$\text{Soit : } \begin{cases} u_1 = \alpha x_1 \\ u_2 = -\beta x_2 \\ u_3 = -\beta x_3 \end{cases}$$

Solution

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \alpha \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = 0 \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = -\beta \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = -\beta \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

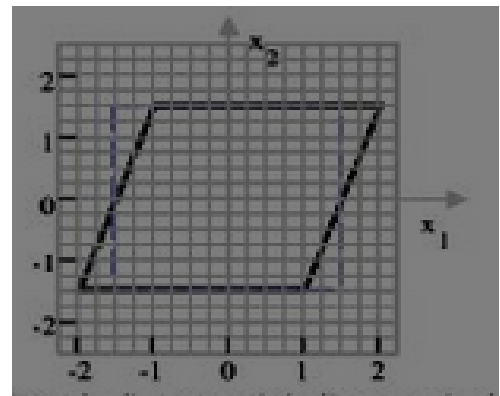
Exercice 2

Un disque plat est soumis à du glissement simple comme le montre la figure en face.

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2/3 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

On demande de calculer :

- 1- le tenseur gradient de la transformation
- 2- le tenseur des dilatations de Cauchy-Green
- 3- la dilatation selon les trois axes  $X_1, X_2$
- 4- l'angle entre les axes 1 et 2 après transformation
- 5- le tenseur des déformations de Green-Lagrange
- 6- la déformation selon les trois axes (HPP).
- 7- le tenseur des petites déformations

Solution

1-Tenseur gradient de la transformation, d'après l'équation (6),

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2-Tenseur des dilatations de Cauchy-Green, d'après l'équation (7) et (13),

$$C = F^T \cdot F$$

$$F^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = F^T \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-Dilatation dans une direction, d'après l'équation (22),

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx_0\}^T [C] \{dx_0'\} = \|F_{ij} \cdot d\vec{x}'_0\|$$

$$= (\sqrt{1^2 + 0 + 0}, \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 + 0}, \sqrt{1^2 + 0 + 0}) = (1, \frac{1}{3}\sqrt{10}, 1)$$

4-Glisement de deux directions orthogonales

D'après la figure ci-dessus,  $\tan(\alpha) = \frac{0.5}{1.5} = 18.53^\circ$

L'angle entre  $x_1$  et  $x_2$  est  $90^\circ \Rightarrow \beta = 90 - 18.53 = 71.56^\circ$

5- le tenseur des déformations de Green-Lagrange, d'après l'équation (23),

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Déplacement en fonction des coordonnées (Hypothèse des petites perturbations). On observe que nous avons un déplacement U dans le plan de  $x_1 x_2$ , la translation vaut

$$x_1 = \frac{X_2}{3}$$

$$U = \left(\frac{1}{3}X_2, 0, 0\right)$$

$$F = I + H$$

H: le tenseur gradient des déformation exprimé en variable lagrangienne :  $H = \text{grad} \vec{U}$

$$H = F - I = \left( \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7-Tenseur des petites déformations, de (15) on a

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7-le tenseur des petites déformations  $\delta_{ij} = E_{ij} - \varepsilon_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exercice 3**

L'état de déformation en un point M d'un milieu continu est donné dans une base orthonormée (o, x, y, z) par le tenseur :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5.2 \\ 0 & -5.2 & 13 \end{bmatrix}$$

- 1- Calculer les déformations principales.
- 2- Calculer les invariants scalaires du tenseur  $\varepsilon_{ij}$ .
- 3- Calculer les déformations sphériques.

**Solution**

- 1- Déformations principales:

$$\det([\varepsilon] - \lambda[I]) = 0 \Rightarrow \det \begin{vmatrix} 25 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 7 - \lambda & -5.2 \\ 0 & -5.2 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(25 - \lambda)[(7 - \lambda)(13 - \lambda) - (-5.2)^2] = 0 \Rightarrow (25 - \lambda)(\lambda^2 - 20\lambda + 63.96) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 25 \\ \lambda_2 = 16 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases} \quad \text{Avec: } \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

- 2- Calcul des invariants scalaires du tenseur  $\varepsilon_{ij}$ .

$$E_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 25 + 16 + 4 = 45$$

$$E_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 25 + 7 + 13 = 45$$

$$E_2 = -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1) = (-25.16 + 16.4 + 25.4) = -564$$

$$E_2 = -(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}) + (\varepsilon_{xy})^2 + (\varepsilon_{yz})^2 + (\varepsilon_{zx})^2$$

$$= -(25.7 + 7.13 + 25.13) + (-5.2)^2 \approx -564$$

$$E_3 = (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) = 25.16.4 = 1600$$

$$E_3 = \det[\varepsilon] = 1599 \approx 1600$$

- 3- Calcul des déformations sphériques:  $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{25 + 16 + 4}{3} = 15$

$$[\varepsilon]^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad (\text{déformation hydrostatique})$$

## Chapitre 4

# Relation entre les Contraintes et les Déformations et Lois de Comportement

*"Imagination is more important than knowledge" A. Einstein*

### 4.1 Introduction

Les contraintes et les déformations, sont liées par des lois mathématiques qui permettent de décrire le comportement du solide étudié sous l'effet de charges extérieures. Ces lois sont le résultat de différents tests expérimentaux sur le matériau associées aux cycles de chargement et déchargement. La loi de comportement modélise l'état de déformation du matériau sous les contraintes issues de l'application de forces extérieures.

Le dénombrement d'un bilan des inconnues et des équations, nous permet de mener à bien une étude de mécanique des solides déformables.

✚ Le nombre d'inconnues est 16:

- La masse volumique  $\rho$  ..... (1 scalaire),
- le champ de déplacement  $\vec{u}$  ..... (3 scalaires),
- tenseur des contraintes (symétriques)..... (6 scalaires),
- le tenseur des déformations (symétrique)..... (6 scalaires).

✚ Le nombre d'équations est 10:

- conservation de la masse (la continuité)..... (1),
- relation déformations-déplacements..... (6),
- les équations d'équilibres..... (3).

Donc le bilan est déficitaire de 6 équations scalaires. Pour dépasser ce manque, on se sert des relations (empiriques) issues des observations expérimentales pour caractériser exactement le comportement du matériau en question. Ces relations sont appelées *lois de comportement*. En pratique, les matériaux de construction suivent des lois de comportement très variées et complexes, i.e. dépend de sa nature (matériaux nouveaux) et son domaine d'application. Ces équations restent les mêmes dans l'hypothèse (théorie HPP) pour tout type de matériau : acier, aluminium, plastique, caoutchouc, bois, béton, argile...

Dans ce chapitre nous exposerons le modèle de comportement des matériaux élastiques, sous l'hypothèse des petites perturbations.

### 4.2 Loi de Comportement

La résolution d'un problème de structure exige, pour relier les efforts appliqués (forces de volume  $\mathbf{F}_{Vi}$  et forces surfaciques  $\mathbf{F}_{Si}$ ) aux déplacements  $\mathbf{u}_i$ , de passer par les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$  et les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$  qui en résultent à l'échelle du matériau. La loi de comportement se présente comme une *relation* reliant le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ , le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ , la température  $T_i$  et la vitesse de déformation  $\mathbf{v}_i$ .

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, T_i, \mathbf{v}_i) \quad (1)$$

D'après les observations à la réponse des sollicitations exercées telles que les essais uniaxiaux (compression, traction, cisaillement...), on distingue trois grandes classes de comportement mécanique:

➤ **Élasticité:** est un champ particulier d'étude des matériaux solides où les causes (contraintes) et les effets (déformations) sont liés par une relation *linéaire*. Elle est symbolisée

souvent par un ressort dont l'allongement  $\Delta l$  est proportionnel à la charge appliquée  $F$ . Le facteur de proportionnalité est la *souplesse*  $1/k$ , où  $k$  est la *raideur* du ressort ( $\text{N.m}^{-1}$  ou  $\text{Pa.m}$ ) :

$$F = k \cdot \Delta l \quad (2)$$

Où la raideur  $k$ , une caractéristiques élastiques intrinsèques du matériau utilisé.

➤ **Viscosité**: le comportement visqueux uni-axial est celui d'un amortisseur ou d'un piston dont la réponse dépend de la vitesse de sollicitation, ici de manière linéaire pour simplifier:

$$F = \eta \cdot \Delta \dot{l} \quad (3)$$

Où  $\eta$  le coefficient de viscosité de l'amortisseur en  $\text{N.m}^{-1}.\text{s}$  ou  $\text{Pa.s.m}$  ou Poiseuille.m (PI.m)

$$1\text{Pa.s}=1\text{Poiseuille (PI)}$$

➤ **Plasticité**: traite des *déformations irréversibles* indépendantes du temps, qui peut se modéliser comme un frottement solide, il y a une résistance à la déformation, mais la déformation est définitive. La déformation plastique est toujours associée à de la déformation élastique.

## 4.3 Loi de Comportement Élastique Linéaire

### 4.3.1 Introduction

Le modèle de comportement le plus simple est le modèle *élastique*. Même pour les matériaux ayant un comportement *élastoplastique* ou *viscoplastique*, ce modèle convient parfaitement, sous condition à ne pas dépasser *le seuil de plasticité*. Cependant pour les matériaux dont le comportement est *viscoélastique*, on peut les ramener à un comportement élastique par la transformation de Laplace. Même pour des matériaux ayant un comportement plus complexe, un calcul élastique peut fournir des résultats intéressants, exemple pour le calcul des fondations en mécanique des sols. Enfin, le traitement d'un problème numérique dans la mécanique des solides, avec une loi de comportement quelconque, nécessite le passage par une résolution d'une suite de problèmes élastiques. Ce qui oblige à réserver une place importante à ce modèle de comportement.

### 4.3.2 Loi de Hooke: Essai de traction

Chaque matériau se déforme d'une manière qui lui est propre et qui le caractérise, i.e. à un comportement mécanique intrinsèque, formalisé par une relation mathématique dite: *loi de comportement*. La mise en évidence de ce comportement passe par la réalisation d'un certain nombre d'essais, où l'on cherche à réaliser dans une éprouvette, un état de contrainte et de déformation homogène. L'exemple le plus simple est les essais de traction ou de compression simple.

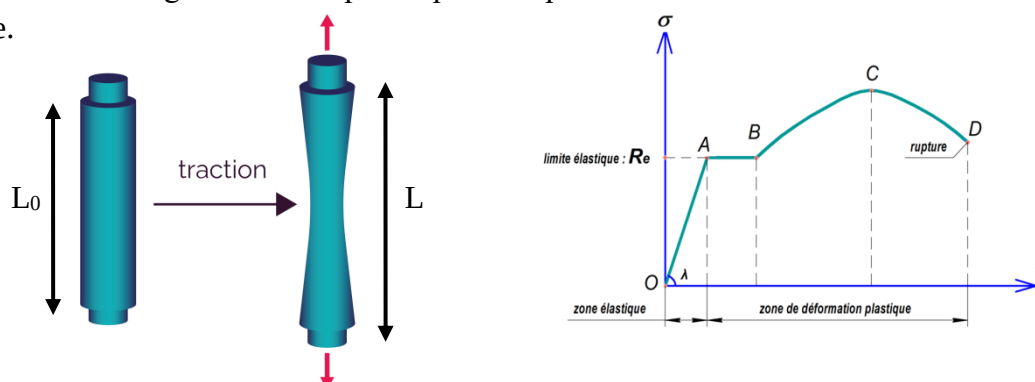


Fig.4.1 Courbe contrainte-déformation d'un essai de traction.

Sur la (Fig.4.1) on a choisi une éprouvette de section cylindrique sous l'effet d'une force de traction  $\vec{F}$  croissante et progressive jusqu'à rupture. L'évolution de l'allongement relatif de la longueur initiale  $L_0$  en fonction de la force de traction  $F$ , ou du rapport  $\frac{F}{S_0}$  est suivie de près.

Sachant que,  $S_0$  représente l'aire de la section droite initiale de l'éprouvette.

$R_e$  Ou  $\sigma_e$  : limite d'élasticité (*yield stress*), qui sert à caractériser le domaine conventionnel de réversibilité.

Nous nous plaçons dans un repère orthonormé. En choisissant l'axe  $\vec{x}_1$  comme axe de traction,

- le diagramme est indépendant de la vitesse de chargement
- Cependant, on observe une réduction dans la section transversale de l'éprouvette i.e. le rapport  $\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} < 0$  et constant.

- la partie OA, réversible est linéaire. Si on charge l'éprouvette jusqu'à un niveau inférieur à  $\sigma_e$ , alors la décharge décrit la même courbe OA. Cette valeur est voisine de 360MPa pour les aciers doux de construction et peut atteindre 1600MPa pour l'acier constitutif des câbles de précontrainte.

- l'augmentation de la charge au delà du seuil  $\sigma_e$ , l'éprouvette présente des déformations permanentes.

- la partie réversible (OA) de la courbe de traction, représente par définition le *comportement élastique du matériau*. qui se traduit par la *loi de Hooke*:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  (4)

$E = tg \frac{\sigma}{\varepsilon}$  : *Module de Young*, ou module d'élasticité longitudinale, exprimé en (MPa), ou (GPa) ou N/mm<sup>2</sup>. Ce module est voisin de 200 000MPa = 200GPa pour la plupart des aciers.

Lorsque la contrainte cesse, pas de déformation résiduelle. Cela implique exactement que les déplacements sont linéairement dépendants des efforts appliqués. Pratiquement tous les métaux présentent ces propriétés, si le niveau de contrainte ne soit pas trop élevé (pas de sensibilité à la vitesse de déformation, température basse).

L'égalité (4) peut s'écrire comme suit: 
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{L-L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \\ \sigma_1 = \frac{F}{S_0} = E \cdot \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 = -\nu \cdot \varepsilon_1 \end{cases} \quad (5)$$

Où  $\nu$  est adimensionnel appelé coefficient de contraction ou encore *coefficient de Denis Poisson* (1781-1840), qui dépendra du matériau utilisé, généralement vaut 0.3 pour les aciers.

**Tableau 1** Valeurs de E et  $\nu$  de quelques des matériaux en GC (à 20°C).

| Matériaux                 | E (GPa)      | $\nu$      |
|---------------------------|--------------|------------|
| Acier de construction     | 210          | 0.27÷0.3   |
| Béton en compression      | 10 ÷ 13      | 0.15       |
| Aluminium                 | 69           | 0.33       |
| Marbre                    | 26           | 0.3        |
| Brique creuse             | 5.128        | 0.15       |
| Verre                     | 69           | 0.25       |
| Sable (grand Erg Algérie) | 0.472÷0.927  | 0.171      |
| Caoutchouc                | 0.2          | 0.5        |
| Bois (Pin)                | 7            | 0.2        |
| Os                        | 21           | 0.27       |
| Argile humide             | 0.472        | 0.4÷0.5    |
| Sols limoneux             | 0.035÷ 0.150 | 0.15÷0.21  |
| Sols argileux             | 0.035÷0. 100 | 0.243÷0.41 |

$$1\text{MPa} = 10^{-3}\text{GPa} = 10^6\text{Pa} = 1\text{N/mm}^2$$

$$1\text{kgf/mm}^2 = 9,81\text{N/mm}^2$$

$$1\text{psi (pounds per square inch)} \dots\dots\dots 1\text{psi} = 6,895.10^3\text{Pa}$$

### 4.3.3 Approche expérimental

Sur la figure 4.2, un barreau conçu à partir d'un matériau élastique isotrope équipé de trois jauges extensiométriques qui servent à mesurer les déformations selon les directions ( $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) (Fig.4.2).

- La jauge 1: enregistre les déformations suivant la direction  $z$
- La jauge 2: enregistre les déformations suivant la direction  $x$
- La jauge 3: enregistre les déformations suivant la direction  $y$

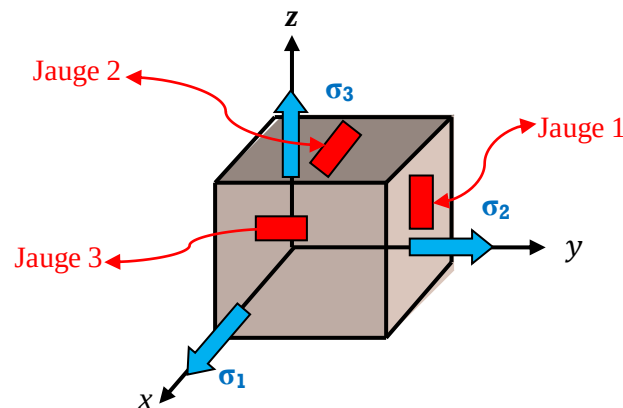


**Fig.4.2** Détermination des déformations dans barreau en traction

Un allongement proportionnel à la contrainte de traction appliquée dans le sens  $\vec{x}$  est enregistré dans la jauge 2, dans ce cas et selon la loi de Hooke on aura :

$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

Cependant des contractions latérales sont enregistrées par les deux autres jauges 1 et 3 :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \nu \cdot \varepsilon_1 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$$

C'est-à-dire que la contrainte  $\sigma_3$  seule déforme le barreau dans les trois directions ( $x, y, z$ ).

Le tenseur de contrainte résultant la 1<sup>ère</sup> sollicitation est comme suit :

$$\bar{\sigma} = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Cependant le tenseur de déformation prend la forme suivante:

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \cdot \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \cdot \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

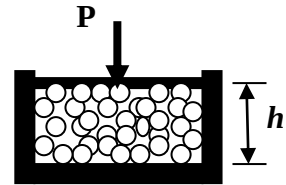
On obtient les mêmes résultats pour les essais dans les deux directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  (jauges 1 et 3).

La superposition des trois essais de traction nous donne les relations suivantes:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (8)$$

Ces équations traduisent la loi de Hooke en axes principaux. Dans l'essai *oedométrique*, on comprime l'échantillon de sol dans une bague rigide. On réalise ainsi un état de contrainte et de déformation de la forme:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} P/S & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_T & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_T \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta h/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



#### 4.3.4 Loi de Hooke généralisée

Dans un essai de traction-compression, dans le domaine élastique, la linéarité  $\sigma$ - $\varepsilon$  est traduite par l'existence d'un module d'élasticité  $E$  et la linéarité des déformations axiale et transversale traduite par un coefficient de contraction  $\nu$ . Dans des conditions de température voisine de la température ambiante (généralement entre  $0^\circ\text{C}$  à  $60^\circ\text{C}$ ), on pourra admettre que les matériaux se dilatent proportionnellement à l'accroissement de température, et le facteur de proportionnalité est appelé *coefficient de dilatation thermique* (noté  $\alpha$ ) et indépendant de la température.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\bar{S}}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0) + \bar{\alpha} \delta T \quad (9)$$

$\bar{\bar{S}}$ : est le tenseur d'ordre 4: ( $3^4$ ) = 81 composantes) des *compliances*.

$\bar{\sigma}_0$ : Contraintes initiales (résiduelles) dites *autocontraintes*  $\sigma_0$  en l'absence même de forces extérieures à la température de référence  $T_0$  (en kelvin (K)).

$\bar{\alpha}$ : est le tenseur des coefficients de dilatation. Il est notable que le coefficient de dilatation de l'acier et celui du béton sont voisins. Ils valent  $\alpha_{\text{acier}} = \alpha_{\text{béton}} = 10.10^{-6} \text{ Kelvin}^{-1}$  environ.

La loi que nous utiliserons sera limitée à des matériaux isotropes, c'est à dire que la formulation ne dépend pas du référentiel utilisé, ce qui peut être résumé par l'utilisation d'un matériau homogène, isotrope, la transformation est continue, infinitésimale, monotherme réversible sans aucune transformation chimique, ni de changement d'état, dans le domaine linéaire on peut écrire les relations suivantes : (loi de Hooke-Duhamel):  $\varepsilon_{\text{défor thermique}}$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \left[ \frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\sigma}) + \alpha \delta T \right] \bar{\mathbf{I}} \quad (10)$$

Cette relation montre bien que les directions principales de contrainte et de déformation sont confondues. Cependant la loi de Lamé-Duhamel est réciproque à (10) car elle exprime les contraintes en fonction de déformation (et de température): (loi de Gabriel Lamé)

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon} + [\lambda \text{tr}(\bar{\varepsilon}) - \beta \delta T] \bar{\mathbf{I}} \quad (11)$$

Où:  $\mu$  (noté aussi  $G$ ): module d'élasticité transversale

$\lambda$ : coefficient de Lamé.

Ces deux paramètres dépendent du matériau considéré, mais ne sont pas directement accessibles par mesure expérimentale. Généralement on préfère employer le module de Young ( $E$ ) et le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) des grandeurs que l'on peut facilement déterminer par un simple essai de traction. Le lien entre ces expressions est :

$$\text{Lamé} \longrightarrow \text{Hooke} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (12)$$

$$\text{Hooke} \longrightarrow \text{Lamé} \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (13)$$

De l'équation (11), si on néglige l'effet de la température on aura et on considère le cas d'un matériau élastique homogène isotrope, la loi de comportement s'écrit:

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{\mathbf{I}} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad (14)$$

$$\text{On notation indicielle:} \quad \sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon_{kk}) + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (15)$$

$$\text{Et de même à partir de l'équation (10): } \bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\sigma}) \bar{\mathbf{I}} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} \quad (16)$$

### 4.3.5 Notation de Voigt (1850-1919)

Dans les conditions normales de température (isothermes) et pas de contraintes initiales, il y a dépendance linéaire des tenseurs de contrainte et de déformation.

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \Leftrightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$\bar{\bar{C}}$  : Tenseur d'élasticité de dimension 4.

$\bar{\bar{S}}$  : Tenseur de *compliance*.

Ce sont des tenseurs du quatrième ordre et sont représentés par une matrice à 4 dimensions. Compte tenu de la symétrie des tenseurs de contrainte et de déformation, Voigt donne une représentation vectorielle à ces tenseurs :

$$\bar{\bar{\sigma}} \rightarrow \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\varepsilon}} \rightarrow \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2 \cdot \varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2 \cdot \varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2 \cdot \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (20)$$

Où, le tenseur d'élasticité  $[C]$  vaut :

$$[C] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (21)$$

Cependant la matrice d'élasticité inverse-compliance- $[S]$ , est la matrice qui permettant le passage des contraintes aux déformations. Elle est définie comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[S] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \quad (23)$$

La matrice de compliance  $[S]$  à toutes les propriétés d'un tenseur symétrique du 4<sup>émé</sup> ordre. Si en utilise la notation indicielle d'Einstein, la loi de comportement s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (24)$$

#### 4.4 Formulations de la Loi Élastique Linéaire

À partir de l'équation (15), on peut tirer les relations contraintes-déformations suivantes, dites *équations de Lamé* (dépendent que des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ ):

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} \\ \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_{33} \\ \tau_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \tau_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} \\ \tau_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \end{cases} \quad (25)$$

On pose:  $\varepsilon_v = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \rightarrow$  la déformation volumique

L'écriture finale de l'équation (15) sera donc comme suit:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_v \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (26)$$

C'est la loi de Hooke pour *un milieu élastique, linéaire, isotrope, et homogène*.

Pour déterminer les déformations sous sollicitation triaxiale, on applique le principe de superposition c'est-à-dire formuler sa forme inverse, *dénommée équations de Young* qui se

présente comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} = \gamma_{21} \\ \varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} = \gamma_{31} \\ \varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} = \gamma_{32} \end{cases} \quad (27)$$

Alors:

$$\text{si } i \neq j, \quad \delta_{ij} = 0$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} \quad (28)$$

Et

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{2\mu} = \frac{\tau_{ij}}{2G}$$

#### 4.5 Energie de Déformation

L'expression de l'énergie en fonction des contraintes et des déformations est de très grande importance en mécanique des matériaux. L'énergie élastique est l'énergie associée à la *déformation élastique* d'un matériau solide ou liquide. En effet, pour déformer un solide ou un fluide, il faut le mettre sous un chargement  $\vec{F}$  externe afin de provoquer une variation dans son volume  $\Delta V$ . Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'énergie stockée dans un matériau élastique isotrope.

#### 4.5.1 Expression de l'énergie en fonction des contraintes et déformations

• *Traction uni axiale*: Considérant une barre ou un ressort de raideur  $k$ , l'énergie  $W_e$  nécessaire pour déformer la barre est donnée par : (Fig.4.3).

$$W = \int_0^{u^{(final)}} F(u) du \quad (29)$$

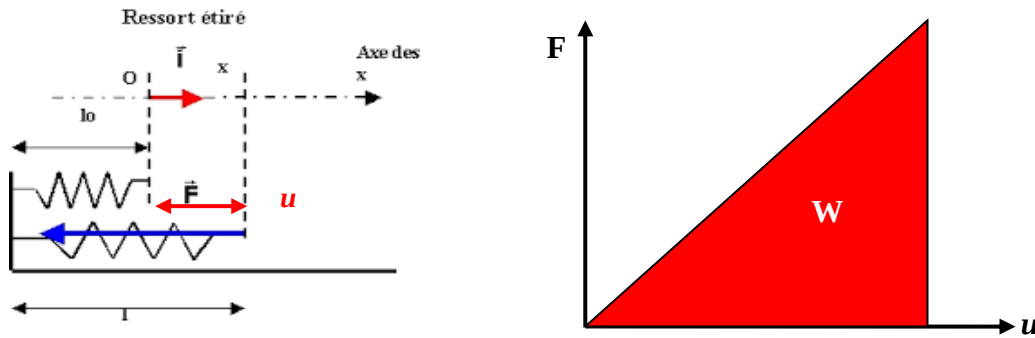


Fig.4.3 Déformation uniaxiale d'un ressort en traction

Où :  $u$  est le déplacement imposé par l'application de la force de traction  $\vec{F}$  de la barre.

$l_0$  et  $l$ , la longueur initiale et finale respectivement de la barre.

$S_0$  et  $S$ , la section initiale et finale respectivement de la barre.

$$W_e = \int_0^{u^{(final)}} F(u) du = \int_0^{u^{final}} \sigma S dx = \int_0^{u^{final}} E(\epsilon) S. l d\epsilon \quad (30)$$

Pour de petites déformations élastiques, nous pouvons remplacer  $S$  et  $l$  par leurs valeurs initiales  $S_0$  et  $l_0$  respectivement, d'où la loi de Hooke en traction s'écrit :

$$W_e = S_0 l_0 \int_0^{u^{final}} E \epsilon. d\epsilon = V_0 \cdot \frac{E \epsilon^2}{2} = V_0 \frac{\sigma^2}{2E} \quad (31)$$

Donc l'énergie élastique  $W_e$  dépend d'une façon quadratique des déformations  $\epsilon$  et des contraintes  $\sigma$ .

Dans le cas général où le matériau est soumis à un chargement multiaxial et après l'utilisation des simplifications apportées par le théorème de Gauss ou d'Ostrogradsky.

$$W_e = \int \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV \quad (32)$$

#### 4.5.2 Densité d'énergie, potentiel de déformation

##### ✚ Densité d'énergie (énergie par unité de volume)

L'énergie par unité de volume, est le travail des contraintes sur les déformations.

$$W_{e\ vol} = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij} \quad (33)$$

Que nous pouvons l'écrire sous forme de vecteur comme suit :

$$W_{e\ vol} = \int_0^\epsilon \vec{\sigma}^T \cdot d\vec{\epsilon}$$

La proportionnalité entre les contraintes et les déformations, nous permet d'écrire:

$$W_{e\ vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \quad (34)$$

Cependant, la loi de Hooke permet d'exprimer l'énergie par unité de volume en fonctions des contraintes seules ou déformations seuls.

$$W_{e\ vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \cdot C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (35)$$

##### ✚ Potentiel des contraintes et potentiel des déformations

Le potentiel des déformations permet de calculer les contraintes en connaissant les déformations et vis versa. Pour un matériau élastique linéaire les deux potentiels sont égaux à

l'énergie de déformation. Alors que pour les matériaux non linéaires les valeurs des deux potentiels ne sont pas identiques.

**NB:** -De l'équation (34), on déduit que  $W_{e\ vol}$  est toujours positif ou nulles.

- $W_{e\ vol}$  est nulles cela implique que les contraintes et les déformations sont nulles toutes les deux.

### ✚ Tenseur déviateur des contraintes et déviateur des déformations

L'énergie élastique peut être décomposée en deux parties :

-Un changement de volume sans la forme (accroissement volumétrique).

-Un changement de forme sans celui de volume (distorsion angulaires à volume onstant).

Du d'équations (24), on peut écrire:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \end{cases}$$

Remplaçant  $\lambda$  et  $\nu$  par leurs valeurs respectives on aura :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2G\left(\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right) \\ \sigma_{22} = 2G\left(\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right) \\ \sigma_{33} = 2G\left(\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right) \end{cases} \quad (36)$$

Faisant l'addition des 3 équations de (35) on aura:

$$\begin{aligned} \underbrace{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}_{3\sigma_m} &= 2G[(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \frac{3\nu}{(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})] \\ 3\sigma_m &= 2G\left[(tr\bar{\varepsilon}) + \frac{3\nu}{(1-2\nu)}(tr\bar{\varepsilon})\right] = 2G\left[1 + \frac{3\nu}{(1-2\nu)}\right](tr\bar{\varepsilon}) \\ &= 2\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}(tr\bar{\varepsilon})\right] = \frac{E}{(1-2\nu)}(tr\bar{\varepsilon}) \\ \sigma_m &= \frac{E}{3(1-2\nu)}(tr\bar{\varepsilon}) = \frac{E}{3(1-2\nu)}\varepsilon_{kk} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{Posons: } K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (38)$$

Donc  $K$  lie la contrainte moyenne (pression hydrostatique  $(-p)$ ) et les déformations,  $K$  est appelé module de compressibilité cubique.

$$p = -\sigma_m = -K \cdot \varepsilon_{kk} \quad (39)$$

Soient :  $\bar{s}$ : tenseur déviateur des contraintes, tel que  $\bar{s} = \sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij} = 2G \cdot e_{ij}$

:  $\bar{e}$ : tenseur déviateur des déformations  $\bar{e} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m\delta_{ij}$

### ✚ Energie élastique en fonction de l'accroissement de volume et distorsion angulaires

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}(s_{ij} \cdot e_{ij} + 3\sigma_m \cdot \varepsilon_m) \\ s_{ij} &= 2G \cdot e_{ij} \\ \sigma_m &= 3K \cdot \varepsilon_m \end{aligned} \quad (40)$$

### ✚ Energie élastique en fonction des invariants des tenseurs de contraintes et déformations

Si  $e_{eq}$ : le tenseur déviateur des déformations élastiques angulaires (distorsion), avec :

$$e_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot e_{ij} \cdot e_{ij}} \quad (41)$$

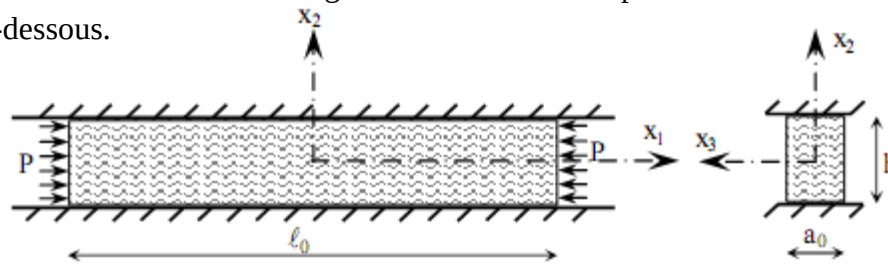
En peut écrire l'énergie élastique en fonction des contraintes seules

$$W_{e\ vol} = \frac{1}{2}(s_{ij} \cdot e_{ij} + 3\sigma_m \varepsilon_m) \quad (42)$$

## Série d'exercices

### Exercice 1

Une plaque de hauteur  $h$  et de faible épaisseur  $a_0 = 10$  cm devant une longueur  $\ell_0 = 243$  cm, est confinée entre deux solides infiniment rigides et soumise à une pression uniforme  $P$  tel que montré sur la figure ci-dessous.



- 1)- Quelles sont les composantes nulles des tenseurs des contraintes et des déformations ?
- 2)- Si on suppose que le matériau de la plaque est élastique et isotrope avec un module d'élasticité  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$ , déterminer en fonction de  $P$ ,  $E$  et  $\nu$  les composantes non nulles des deux tenseurs ?
- 3)- Déterminer, en fonction de  $E$ ,  $\nu$  et des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ , les expressions des composantes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  du champ des déplacements ?
- 4)- Si  $E = 150$  Mpa et  $\nu = 0.36$ , calculer la pression  $P$  nécessaire pour réduire la longueur de la plaque à  $\ell = 200$  cm ?
- 5)- Que devient alors la nouvelle épaisseur  $a$  de la plaque ?

### Solution

1- Les composantes nulles :

Les composantes de cisaillement et de glissement

$\epsilon_{22} = 0$  empêché par les deux solides

$\sigma_{33} = 0$  la plaque est libre de se dilater sur son épaisseur

2- Les composantes non nulles :

La pression est uniforme  $\sigma_{11} = -P$  ; c'est une compression

$\sigma_{22}$  fonction de  $\sigma_{11}$  et  $\nu$

On a  $\epsilon_{ij} = [(1+\nu)/E] \cdot \sigma_{ij} - (\nu/E) \cdot \text{trace}(\sigma) \cdot I$

$\epsilon_{11} = \sigma_{11}/E - (\nu/E) \sigma_{22}$

$\epsilon_{22} = \sigma_{22}/E - (\nu/E) \sigma_{11} = 0$  donne  $\sigma_{22} = \nu \sigma_{11} = -\nu P$

$\epsilon_{33} = \sigma_{33}/E - \nu/E (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\nu \sigma_{11} (1 + \nu)/E = \nu (1 + \nu) P/E$  et  $\epsilon_{11} = - (P/E) \cdot (1 - \nu^2)$

3- Déplacements:

$u_1 = \int \epsilon_{11} dx_1 = - (P/E) (1 - \nu^2) x_1$  ne dépend pas des autres directions puisque pas de glissement.

$u_2 = \int \epsilon_{22} dx_2 = 0$

$u_3 = \int \epsilon_{33} dx_3 = (P/E) \nu (1 + \nu) x_3$

4) Pression :

La déformation :  $\epsilon_{11} = \Delta l/l_0 = (200 - 243)/243 = -0.177 = -17.7 \%$

D'où :  $P = E \epsilon_{11} / (1 - \nu^2) = 30.49 \approx 30.5$  MPa

5) Epaisseur finale :

$\epsilon_{33} = \nu (1 + \nu) P/E = 0.099 = 9.9 \%$  d'où  $a = a_0 (1 + \epsilon_{33}) \approx 11$  cm.

### Exercice 2

Soit le massif rectangulaire de grande longueur représenté sur la figure ci dessous

On pose plusieurs hypothèses :

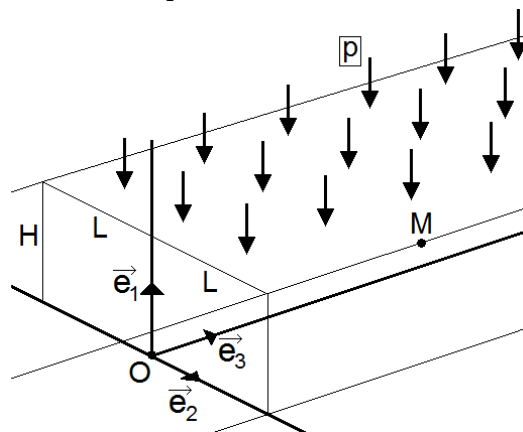
- Comportement élastique linéaire, de paramètres  $E$  et  $\nu$ .
- Face supérieure soumise à une pression uniforme  $p$ .
- Face inférieure en appui glissant et non-frottant, fixée seulement sur l'axe  $(O, \vec{e}_3)$
- Forces de volume négligeables.
- Hypothèse des petites perturbations.
- On se place dans la zone centrale du massif pour se prémunir des effets de bord.
- Champ de déplacement donné par:  $\vec{U} = (A.X_1 + C.X_2)\vec{e}_1 + (-C.X_1 + B.X_2)\vec{e}_2$

1. Représenter la section du massif contenant le point  $M$  ainsi que les conditions aux limites sur cette section.
2. Calculer le tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$ , et donner ses valeurs principales et ses directions principales. De quel type de déformation s'agit-il?
3. Exprimer analytiquement le tenseur de Cauchy  $\bar{\sigma}$  (utiliser les coefficients de Lamé pour simplifier les notations).

• Si :  $A = p \frac{-2\mu - \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)}$   $B = p \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)}$   $C = 0$

On pose  $E = 210000 \text{ MPa}$  et  $\nu = 0.3$  (Massif en acier). Les dimensions de la section sont :  
 $L = 0.20 \text{ m}$  et  $H = 0.15 \text{ m}$ , et le chargement vaut  $p = 500 \text{ MPa}$ .

4. Calculer le vecteur déplacement du point  $M$ . Tracer la déformée de la section.



## Chapitre 5

# Équations Générales de l'Élasticité Linéaire

### 5.1 Introduction

Généralement, la loi de comportement, nous fournit suffisamment d'équations fondamentales qui puisse s'appliquer à tout point du solide pour pouvoir traiter un problème d'élasticité (détermination des composantes du vecteur déplacement). Toutefois souvent nous serons face à un système d'équations différentielles relativement délicat à résoudre. D'où la nécessité de faire appel à des équations complémentaires pour avoir une forme simplifiée des lois physiques.

### 5.2 Résolution des Équations de l'Élasticité en Déplacement (Méthode de Lamé)

Dans ce cours on s'intéresse spécifiquement au domaine élastique des déformations, nous proposons ici d'utiliser les lois de comportement mises en place dans le chapitre précédent pour établir l'équation fondamentale de l'élastostatique, dite équation de *Lamé-Clapeyron*.

Soit un système solide de volume  $V$  délimité par la surface  $S$ , soumis sous la densité de forces extérieures (volumiques et surfaciques), l'équation fondamentale de la statique s'exprime :

$$\iiint_V \vec{f}_V dV + \iint_S \vec{f}_S dS = \vec{0} \quad (1)$$

Où  $\vec{f}_V$  et  $\vec{f}_S$  sont respectivement les forces volumique et surfacique.

La force surfacique  $\vec{f}_S$  correspond à la contrainte  $\vec{\sigma}$  s'exerçant sur un élément de surface  $dS$  de normale  $\vec{n}$ , d'où :

$$\vec{f}_S = \vec{\sigma}(\mathbf{M}, \vec{n}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \text{div} \vec{\sigma} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (2)$$

Sachant que l'opérateur  $\vec{\nabla}$  est appelé *nabla* :

$$\vec{\nabla} f = \vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (3)$$

Le théorème de *Green-Ostrogradsky* permet alors de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume :

$$\iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} dV \quad (4)$$

L'équation fondamentale de la statique peut donc se réécrire :

$$\iiint_V \vec{f}_V dV + \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \vec{0} \quad (5)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'équation locale en tout point du solide comme suit :

$$\vec{f}_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \vec{0} \quad (6)$$

Avec :

$$\vec{f}_V = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Par projection sur les trois axes d'un repère orthonormé, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (7)$$

Qui représentent les équations de la statique de *Navier*.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Connaissant les équations des extensions et extorsions de *Cauchy* :

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{cases} \quad (9)$$

Selon la loi de comportement déjà établie entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations, on peut développer le gradient de  $\sigma$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1}(\lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_{11}) + G \frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma_{12}) + G \frac{\partial}{\partial x_3}(\gamma_{13}) + f_1 = 0 \dots \dots (a) \\ G \frac{\partial}{\partial x_1}(\gamma_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_{22}) + G \frac{\partial}{\partial x_3}(\gamma_{23}) + f_2 = 0 \dots \dots (b) \\ G \frac{\partial}{\partial x_1}(\gamma_{13}) + G \frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma_{23}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\lambda \varepsilon_V + 2G \varepsilon_{33}) + f_3 = 0 \dots \dots (c) \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{Sachant que:} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma_{12}) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\gamma_{13}) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma_{23}) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial(\varepsilon_{11})}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial(\varepsilon_{22})}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial(\varepsilon_{33})}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \end{cases} \quad (11)$$

Faisant un réarrangement de termes dans le système d'équation (5.10(a)), on aura :

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_V) + 2G \frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_{11}) + G \frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma_{12}) + G \frac{\partial}{\partial x_3}(\gamma_{13}) + f_1 &= 0 \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_V) + 2G \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + G \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right] + G \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right] + f_1 &= 0 \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_V) + G \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right] + G \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] + f_1 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$\nabla^2 u_1$   $\varepsilon_V$

Avec:  $\nabla^2 u_1 = \Delta u_1 \rightarrow$  est le Laplacien de  $u$ .

Donc l'équation (5.10(a)) sera comme suit:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_V) + G \nabla^2 u_1 + G \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_V + f_1 = 0$$

Idem pour (5.10(b)) et (5.10(c)), finalement, on obtient les équations d'élasticité en déplacement dite *équations la Lamé*.

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_V + \mu \nabla^2 u_1 + f_1 = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \varepsilon_V + \mu \nabla^2 u_2 + f_2 = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon_V + \mu \nabla^2 u_3 + f_3 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

En notation indicielle les équations (5.13) s'écrivent comme suit:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + f_i = 0 \quad (14)$$

La résolution d'un problème d'élasticité consiste alors à résoudre cette équation à laquelle il convient d'adjoindre les conditions aux limites.

### 5.3 Résolution des Équations de l'Élasticité en Contraintes (Méthode de Beltrami-Michell)

La méthode de Beltrami-Michell est une approche différente. Il permet alors de déterminer les contraintes s'exerçant sur le système et d'en déduire les déformations subies à l'aide de la loi de comportement élastique. Pour cela on dérive les équations (5.13) respectivement par rapport à  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et on suppose que les forces de *volume sont constantes*.

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 u_1 + f_1 = 0 & /x_1 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 u_2 + f_2 = 0 & /x_2 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 u_3 + f_3 = 0 & /x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} [(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 u_1 + \mathbf{f_{1=0}}] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} [(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 u_2 + \mathbf{f_{2=0}}] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} [(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 u_3 + \mathbf{f_{3=0}}] = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \varepsilon_V + \mu \cdot \nabla^2 \frac{\partial}{\partial x_3} u_3 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

En additionnant les équations (5.16) membre à membre on aura:

$$(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \varepsilon_V + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \varepsilon_V + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \varepsilon_V \right) + \mu \cdot \nabla^2 \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} u_3 \right)}_{\varepsilon_V} = 0$$

$$(\lambda + 2 \cdot \mu) \nabla^2 \varepsilon_V = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varepsilon_V = 0 \quad (17)$$

Lorsque les forces de *volume* sont constantes, le Laplacien de la déformation volumique est nul. Pour cela il faut transformer les équations (15) des déformations en équations des contraintes.

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda \varepsilon_V + 2\mu \cdot \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda \varepsilon_V + 2\mu \cdot \varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda \varepsilon_V + 2\mu \cdot \varepsilon_{33} \end{cases} \quad (18)$$

Multipliant les équations (18) par le Laplacien, on aura :

$$\begin{cases} \nabla^2 \cdot \sigma_{11} = \nabla^2 \cdot (\lambda \varepsilon_V + 2\mu \cdot \varepsilon_{11}) \\ \nabla^2 \cdot \sigma_{22} = \nabla^2 \cdot (\lambda \varepsilon_V + 2\mu \cdot \varepsilon_{22}) \\ \nabla^2 \cdot \sigma_{33} = \nabla^2 \cdot (\lambda \varepsilon_V + 2\mu \cdot \varepsilon_{33}) \end{cases} \quad (19)$$

Sachant que,  $\nabla^2 \varepsilon_V = 0$ , le système (19) devient:

$$\begin{cases} \nabla^2 \cdot \sigma_{11} = 2\mu \cdot \nabla^2 \cdot \varepsilon_{11} \\ \nabla^2 \cdot \sigma_{22} = 2\mu \cdot \nabla^2 \cdot \varepsilon_{22} \\ \nabla^2 \cdot \sigma_{33} = 2\mu \cdot \nabla^2 \cdot \varepsilon_{33} \end{cases} \quad (20)$$

L'additionnant membre à membre la loi de Hooke dans le système (18) on aura:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \theta = 3\lambda \varepsilon_V + 2\mu \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 3\lambda \cdot \varepsilon_V + 2\mu \cdot \varepsilon_V = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_V$$

$$\theta = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_V \Rightarrow \varepsilon_V = \frac{\theta}{3\lambda + 2\mu} \quad (21)$$

Dérivant  $\varepsilon_V$  deux fois par rapport à  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , on aura:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \varepsilon_V = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \nabla^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \varepsilon_V = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \nabla^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \varepsilon_V = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \nabla^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \end{cases} \quad (22)$$

Utilisant les équations (20) et (22) dans le système (16) :

$$\begin{cases} \frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \mu \cdot \nabla^2 \frac{\sigma_{11}}{2\mu} = 0 \\ \frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \mu \cdot \nabla^2 \frac{\sigma_{22}}{2\mu} = 0 \\ \frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} + \mu \cdot \nabla^2 \frac{\sigma_{33}}{2\mu} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Pour la 1<sup>ère</sup> équation du système (23), après développement on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)} \cdot \nabla^2 (\sigma_{11}) &= 0 \\ (1+\nu) \cdot \nabla^2 (\sigma_{11}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} &= 0 \end{aligned}$$

D'où le système final:

$$\begin{cases} (1+\nu) \cdot \nabla^2 (\sigma_{11}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} = 0 \\ (1+\nu) \cdot \nabla^2 (\sigma_{22}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = 0 \\ (1+\nu) \cdot \nabla^2 (\sigma_{33}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = 0 \\ (1+\nu) \cdot \nabla^2 (\tau_{12}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ (1+\nu) \cdot \nabla^2 (\tau_{13}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \\ (1+\nu) \cdot \nabla^2 (\tau_{23}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\nu) \Delta \sigma_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \\ (1+\nu) \Delta \sigma_{22} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \\ (1+\nu) \Delta \sigma_{33} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \\ (1+\nu) \Delta (\tau_{12}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \\ (1+\nu) \Delta (\tau_{13}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \\ (1+\nu) \Delta (\tau_{23}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Ces six équations ont été obtenues par Beltrami (1892) puis généralisées par Michel en 1900, et portent le nom de Beltrami-Michell. Elles présentent l'intérêt de se simplifier dans un certain nombre de configurations. En particulier, dans le cas où les forces volumiques sont uniformes (ce qui est généralement le cas).

En notation indicielle:  $(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (25)$

La résolution de *Beltrami-Michell* et les conditions aux limites sont suffisantes pour obtenir le tenseur de contrainte à constantes près. Cette formulation est utilisée pour résoudre des problèmes plans (contraintes planes dans les tôles minces ou déformations planes). Alors que pour des problèmes tridimensionnels ces équations sont rarement utilisées, on fait recours à la résolution par la méthode des déplacements.

### Conclusion:

En pratique, il est difficile d'introduire les conditions aux limites en déplacements, En effet, le champ de déplacements n'est pas obtenu directement à partir du champ de contraintes. Il faut pour cela intégrer les déformations. Pour cette raison, la résolution en contraintes est moins utilisée que celle en déplacements

## 5.4 Équations de Comptabilité de Saint Venant

Ces équations ont été établies par saint venant (1864), Les six (06) équations représentent les conditions de comptabilités pour la déformation. Dans tous les problèmes, les déformations doivent satisfaire l'ensemble de ces six équations. La satisfaction de ces six équations de comptabilité garantit l'existence d'un champ de déformation continu univoque (*l'unicité des déplacements*). Les équations de compatibilité sous forme développées comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{-\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{-\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{-\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{array} \right.$$

### Série d'exercices

#### Exercice 1

Etablir les formes des équations d'équilibre et de comptabilité pour un milieu élastique à deux dimensions.

#### Solution

Deux cas possibles peuvent se présenter :

##### ♦ En contrainte plane

Par définition c'est le cas dans lequel :  $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$

Cas d'un corps dont la distribution de contraintes est très faible sur une dimension par rapport aux autres.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + X = 0 \dots \dots (1) \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + Y = 0 \dots \dots (2) \end{array} \right.$$

Les autres équations sont nulles puisque le milieu est élastique à deux dimensions. X et Y, peuvent s'obtenir en différentiant la fonction potentielle  $\Omega(x_1, x_2)$  définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\ Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \end{array} \right.$$

Admettant que il n'y a pas de changement de température, la loi de Hooke est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \mu\sigma_{22}) \dots \dots (3) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}) \dots \dots (4) \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{22} + \mu\sigma_{11}) \dots \dots (5) \end{array} \right.$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G} \tau_{12}; \quad \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \dots \dots (a)$$

Ces équations montrent que, dans le cas de contraintes planes, les déformations dépendent uniquement des axes  $x_1$  et  $x_2$ .

Introduisant la fonction  $\phi(x, y)$ , connu sous le nom de fonction de contrainte d'Airy, définie par trois équations indépendantes de z

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial x_2^2} + \Omega \dots (6) \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial x_1^2} + \Omega \dots (7) \\ \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \varnothing}{\partial x_1 \partial x_2} \dots (8) \end{cases}$$

On remarque que ces contraintes satisfont les équations d'équilibre (1) et (2).

Partons de (6), (7) et (8) dans (3), (4) et (5) et retranchant les expressions obtenues de déformations dans l'équation de comptabilité (a). On trouve :

$$\frac{\partial^4 \varnothing}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \varnothing}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varnothing}{\partial x_2^4} = -(1 - \mu) \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2^2} \right)$$

La quantité  $\nabla^4$ , est dite opérateur bi-harmonique définie par :

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$$

Cependant  $\nabla^2$  est appelée le laplacien est définie par :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

D'où on obtient la relation :

$$\nabla^4 \varnothing = -(1 - \mu) \nabla^2 \Omega$$

Dans le cas où les forces à distance sont nulles on aura :  $\nabla^4 \varnothing = 0$

#### ◆ En déformation plane

Dans ce cas par définition :  $\varepsilon_{33} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$

et la force à distance Z doit également être nulle.

Un corps très long soumis à des charges latérales est un exemple de ce type de déformation.

Les équations d'équilibre sont les mêmes que le 1<sup>er</sup> cas :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \mu\sigma_{22}) \dots \dots (9) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}) \dots \dots (10) \\ 0 = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{22} + \mu\sigma_{11}) \dots \dots (11) \end{cases}$$

$$\sigma_{33} = \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Utilisant la même fonction de contraintes d'Airy  $\varnothing(x, y)$  que celle employée dans le 1<sup>er</sup> cas et donnée dans les équations: (6), (7) et (8). Dans le cas de la déformation plane, les équations (6), (7) et (8) sont satisfaites et reste que l'équation (a). Expriment les déformations données par les équations (9), (10) et (11) en fonction de la fonction d'Airy et en portant les résultats dans l'équation (a) on aura :

$$\nabla^4 = -\frac{1}{1-\mu} \nabla^2 \Omega$$

Dans le cas où les forces à distance sont nulles on aura :  $\nabla^4 \varnothing = 0$

qui est la même obtenue dans l'état de contrainte.

#### Exercice 2

La fonction de contrainte  $\varnothing = Bx^3y^2$  peut-elle représenter un état de contrainte plane lorsque les forces à distances sont nulles?

**Solution**

Pour cette étude, vérifiant si cette équation satisfait l'équation

$$\nabla^4 \emptyset = 0$$

$$\nabla^4 (Bx_1^3 x_2^2) = \frac{\partial^4 (Bx_1^3 x_2^2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 (Bx_1^3 x_2^2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 (Bx_1^3 x_2^2)}{\partial x_2^4} = 0 + 24Bx_1 + 0 = 24Bx_1$$

Donc :  $\nabla^4 (Bx_1^3 x_2^2) = 24Bx_1 \neq 0$

La fonction  $\emptyset = Bx^3 y^2$  ne peut pas représenter un état de contrainte.

**Exercice 3**

Soit la fonction  $\emptyset = Ax_1 x_2^2$  Peut-elle représenter un état de contrainte plane? Si oui, décrire cet état  
Les forces à distance sont supposées nulles.

**Solution**

Il faut vérifier que:  $\nabla^4 (Ax_1 x_2^2) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4 (Ax_1 x_2^2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 (Ax_1 x_2^2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 (Ax_1 x_2^2)}{\partial x_2^4} = 0$

Les contraintes qui lui sont correspondent sont tirées des équations : (6), (7) et (8).

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_2^2} + \cancel{\emptyset} = 2Ax_1 \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_1^2} + \cancel{\emptyset} = 0 \\ \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_1 \partial x_2} = -2Ax_2 \end{cases}$$

Il est évident que ces relations représentent un état de contrainte dans un bloc rectangulaire plan sous charges appliquées aux frontières.



Dans le plan, l'état de déformation est complètement défini par les trois grandeurs:  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_{xy}$ . Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

Avec:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij_M} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y & \frac{\tau_{xy}}{G} & 0 \\ \frac{\tau_{xy}}{G} & \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix} \quad (5)$$

*Il faut faire bien attention: dans le cas de la contrainte plane, la 3ème déformation n'est pas nulle ( $\varepsilon_z \neq 0$ ).*

L'inversement des expressions de  $\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  dans la relation (4) nous donne:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2}\nu & 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2}\nu & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \rightarrow \text{C'est la matrice d'élasticité (D) (en utilisant E et } \nu)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases} \quad (7)$$

### 6.1.2 État de déformations planes

Considérons un tunnel ou un puits de mine de très grande étendue selon la direction  $z$ . Si les sections perpendiculaires à l'axe  $z$  sont toutes identiques, deux sections distantes de  $dz$  se déforment de façon identique.

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

En tout point M du tunnel et par rapport à un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

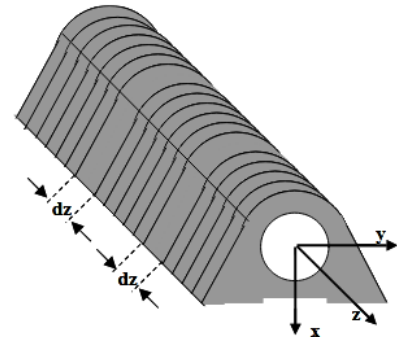


**Fig. 6.2** Tunnel sollicitée dans son plan.

Le champ de déplacement est de la forme: 
$$\begin{cases} u = u(\vec{x}, \vec{y}) \\ v = v(\vec{x}, \vec{y}) \\ w = 0 \end{cases}$$

Le tenseur des déformations s'écrit:

$$\bar{\epsilon} = [\epsilon] = \epsilon_{ij_M} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\epsilon_{ij_M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

→ En tout point de ce solide, les déformations et les contraintes sont indépendantes de la direction  $\vec{z}$ . Le tenseur de contrainte sera de la forme après avoir posé  $\epsilon_z = 0$  dans le système (3) donc la contrainte selon l'axe z existe et s'obtient par la loi de Hooke:

$$\begin{aligned} \epsilon_z = 0 &\Rightarrow \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \\ &\Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

D'où le tenseur de contrainte en M s'écrit:

$$\sigma_{ij_M} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

*Il faut faire bien attention: dans le cas de déformation plane, la contrainte selon l'axe z n'est pas nulle ( $\sigma_z \neq 0$ ).*

→ La loi de comportement reliant les contraintes et déformations s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right) \\ \epsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \epsilon_y = \frac{1+\nu}{E} [-\nu\sigma_y - (1-\nu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad (14)$$

L'état de déformations planes se présente lorsqu'on a affaire à un cylindre d'axe Oz très long satisfaisant aux conditions suivantes:

- ➡ les forces appliquées au solide sont normales à l'axe Oz et indépendantes de z.
- ➡ les forces appliquées au solide sont normales à l'axe Oz et indépendantes de z

## 6.2 Équation Fondamentale de l'Élasticité Plane

### 6.2.1 Équation d'équilibre

Sont dites aussi contrainte statique sous la forme d'équation d'équilibre.

Soit une plaque (P) sollicitée par les forces représentées sur la figure 6.1, sachant que les composantes des forces de volume sont  $F_x$  et  $F_y$ .

$$\diamond \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dx + F_x dx dy = 0 \dots (a)$$

$$\diamond \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \sigma_y dx + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{xy} dy + F_y dy dx = 0 \dots (b)$$

Après simplifications de (a) et (b), on trouve:  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$  et  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$

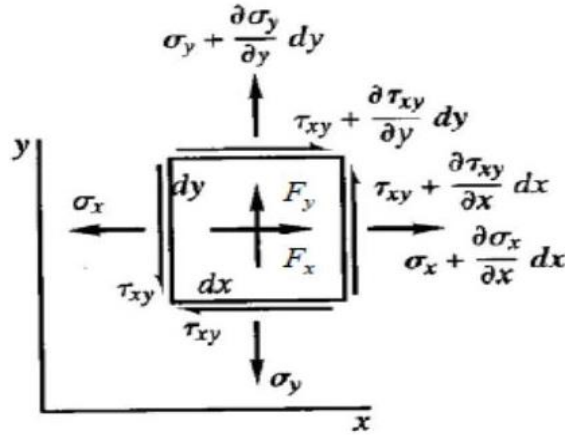


Fig. 6.3 Plaque sollicitée dans le plan (x, y)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0 \end{cases} \quad (15)$$

### 6.2.2 Conditions de contour (aux rives)

$F_x$  et  $F_y$ : Fonctions extérieures aux bords

$\sigma_y$  et  $\sigma_{xy}$ : Fonctions intérieures. Ces équations expriment l'équilibre de translation selon les axes coordonnées du prisme élémentaire.

Soient  $T_x$  et  $T_y$  les tractions superficielles imposées sur les rives. Cependant la définition du tenseur de contraintes nous permet d'écrire:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x dl - \sigma_x dy - \tau_{xy} dx = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \bar{F}_x dl - \sigma_y dx - \tau_{xy} dy = 0$$

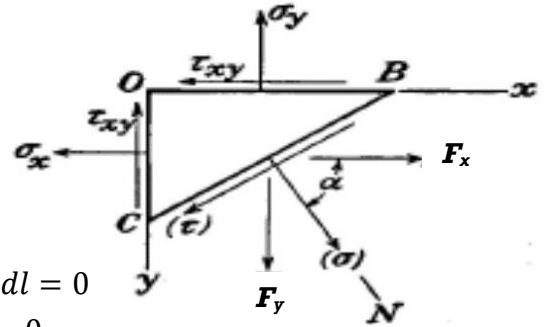
Or: 
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{dy}{dl} = l \\ \sin \alpha = \frac{dx}{dl} = m \end{cases}$$

Donc :  $F_x - \sigma_x dy - \tau_{xy} dx = F_x dl - \sigma_x l \cdot dl - \tau_{xy} m \cdot dl = 0$

$$F_x - \sigma_x l - \tau_{xy} m = 0$$

De même selon y, on aura:  $F_y - \sigma_y m - \tau_{xy} l = 0$

$$\begin{cases} F_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ F_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ F_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{cases} \quad (16)$$



### 6.2.3 Équations de compatibilité

Si les déformations  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  sont nulles et que toutes les autres déformations sont indépendantes de z, les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

### a/ État plan de contrainte

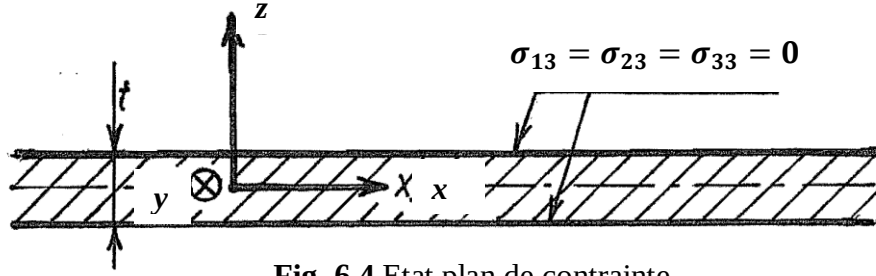


Fig. 6.4 Etat plan de contrainte

Soit la plaque d'épaisseur  $t$  (fig 6.4), sollicitée dans son plan et ayant ses surfaces  $y = \pm t/2$  libres. On aura donc :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \right] = \frac{1}{E} \left[ 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right] \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [(\sigma_x - \nu\sigma_y)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\sigma_y - \nu\sigma_x)] = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

Or d'après (15) on a:  $\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 & (a) \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0 & (b) \end{cases}$  dérivant (a) / x et (b) / y, on aura  $\quad (20)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Additionnant membre à membres on aura:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial x} &= -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad (22) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(\sigma_x - \nu\sigma_y)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\sigma_y - \nu\sigma_x)] &= -(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= -(1+\nu) \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= -(1+\nu) \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) &= -(1+\nu) \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= -(1+\nu) \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (23) \end{aligned}$$

En l'absence des forces de volumes:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (24)$$

### b/ État plan de Déformation

On fera la même démonstration, on aura l'équation de déformation plane exprimée en contrainte. Soit:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) &= -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

Ces équations sont appelées équations de *Levy*.

### 6.3 Fonction de Contrainte ou Fonction d'Airy

La solution de (24), consiste à trouver les quantités  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  qui seront les solutions exactes. Pour cela revenant à trouver la *solution homogène* du

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

*Airy* a introduit un champ de contrainte  $\phi(x, y)$  tel que les conditions aux rives sont satisfaites, on obtient toutes les contraintes inconnues ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ ).

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Remplaçant les quantités de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  dans l'équation (24) où les *forces de volumes* sont *négligeables* on aura:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2}\right) &= 0 \\ \frac{\partial^4 \phi(x, y)}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi(x, y)}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \phi(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi(x, y)}{\partial y^2 \partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^4 \phi(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi(x, y)}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \phi(x, y)}{\partial x^4} &= 0 \\ \nabla^4 \phi &= \Delta^2 \phi = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

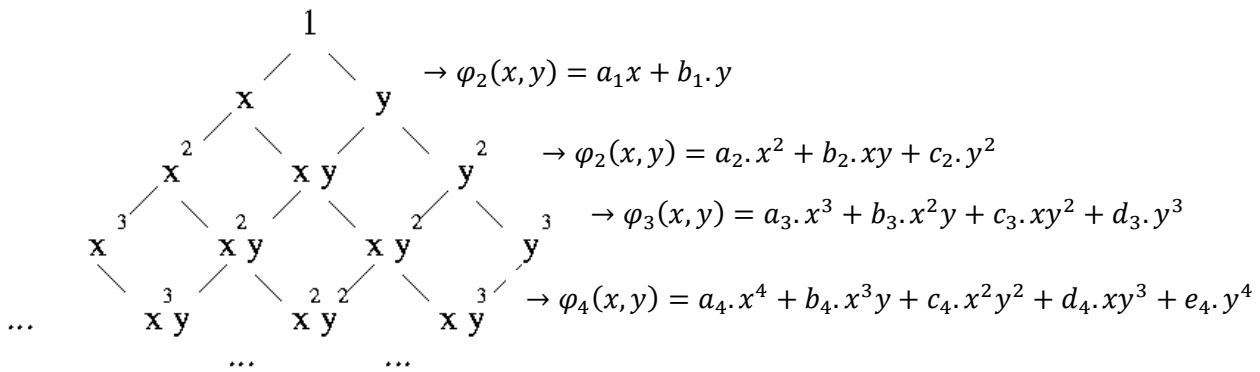
Est une équation aux dérivées partielles d'ordre 4  $\Rightarrow$  Équation biharmonique.

Où  $\nabla$  est l'opérateur nabla.  $\Delta$  est l'opérateur laplacien. L'opérateur  $\Delta^2$  est aussi connu sous le nom d'opérateur biharmonique ou bilaplacien.

Donc résoudre un problème de l'élasticité plane où la seule force de volume agissante est son poids propre, revient à trouver une fonction  $\phi(x, y)$  qui satisfait l'équation (26).

### 6.4 Solution du Problème Plan par les Polynômes

Le choix de la résolution des problèmes plans par les polynômes doit obligatoirement satisfaire aux conditions de la fonction d'Airy. Dans les cas des poutres ayant une section rectangulaire de faible épaisseur, on peut trouver des solutions pratiquement intéressantes en adaptant comme expression de  $\phi$  des polynômes de divers degrés et en ajustant leurs coefficients de façon adéquate.



#### 6.4.1 Solution par le polynôme du 2<sup>ème</sup> degré

$$\varphi_2(x, y) = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot xy + c_2 \cdot y^2$$

➤ vérification de l'équation de compatibilité:  $\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} = 0$

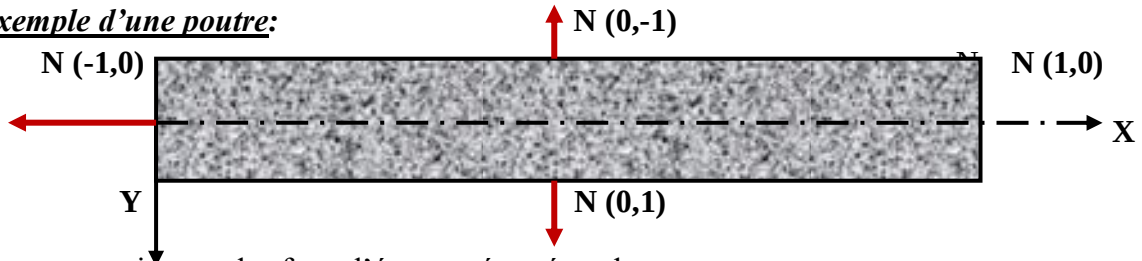
Revient à vérifier les contraintes: 
$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 2c_2, & \text{traction/compression} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = 2a_2, & \text{traction/compression} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = -b_2, & \text{cisaillement simple} \end{cases}$$

On observe que la solution est la combinaison d'une traction/compression selon les axes x et y et un cisaillement dans le plan xy.

➤ Vérification de toutes les conditions aux limites:

$$\begin{cases} F_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ F_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 2c_2 \cdot l - b_2 \cdot m \\ F_y = -b_2 \cdot l + 2a_2 \cdot m \end{cases}$$

Exemple d'une poutre:



On aura aux niveaux des faces l'état représenté au dessus.

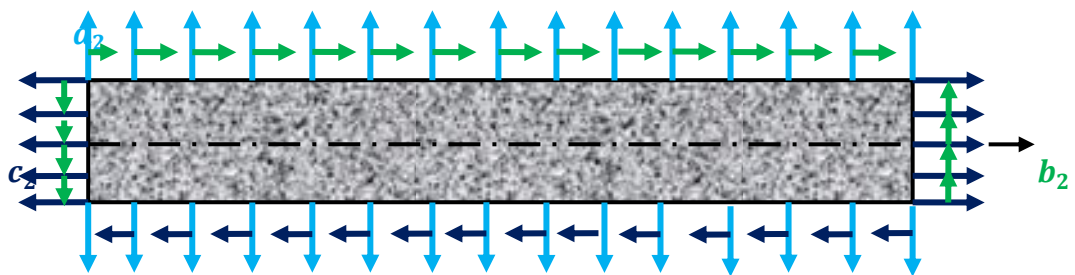


Fig.6.4 Etat de déformation dans une poutre

#### 6.4.2 Solution par polynôme du 3<sup>ème</sup> degré

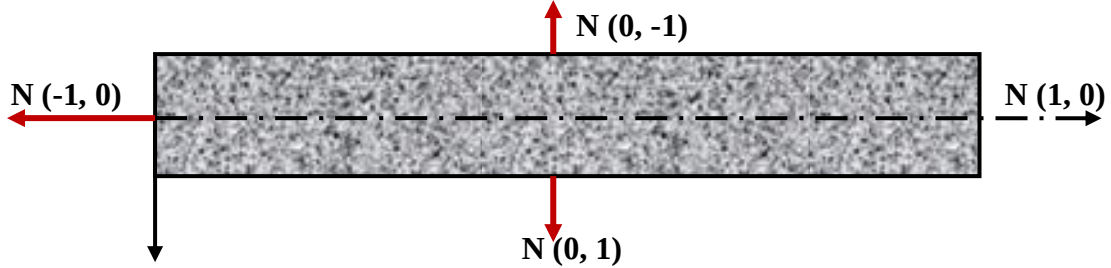
$$\varphi_3(x, y) = \frac{a_3}{6} \cdot x^3 + \frac{b_3}{2} \cdot x^2 y + \frac{c_3}{2} \cdot xy^2 + \frac{d_3}{6} \cdot y^3$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = -(b_3 x + c_3 y) \end{cases}$$

➤ **Vérification de toutes les conditions aux limites**

$$\begin{cases} \sigma_x = c_3 x + d_3 y \\ \sigma_y = a_3 x + b_3 y \\ \tau_{xy} = -(b_3 x + c_3 y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = (c_3 x + d_3 y) \cdot l - (b_3 x + c_3 y) \cdot m \\ F_y = -(b_3 x + c_3 y) \cdot l + (a_3 x + b_3 y) \cdot m \end{cases}$$

**Exemple:** Considérant toute les faces dans la poutre ci-dessous.

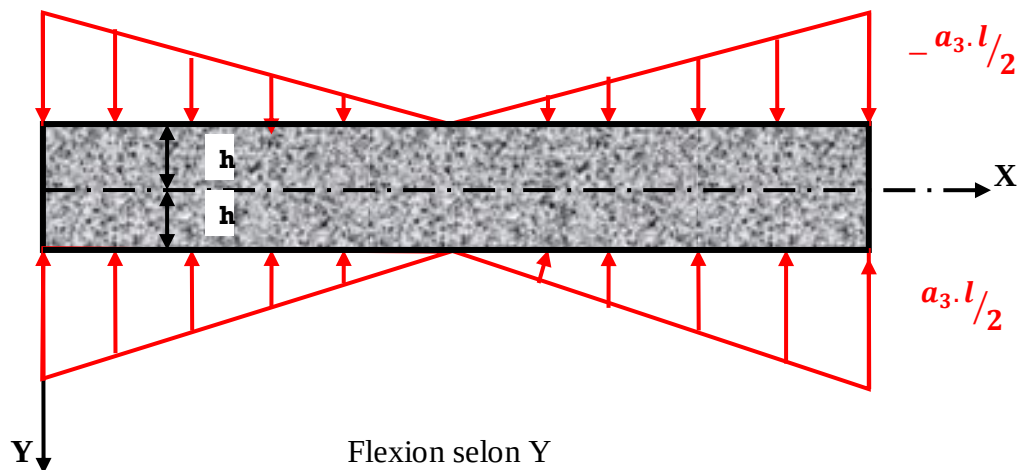


1<sup>ère</sup> Cas particulier

Si:  $b_3 = c_3 = d_3 = 0$  et  $a_3 \neq 0 \Rightarrow \varphi_3(x, y) = \frac{a_3}{6} \cdot x^3$

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = a_3 \cdot x \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = (a_3 \cdot x) \cdot m \end{cases}$$

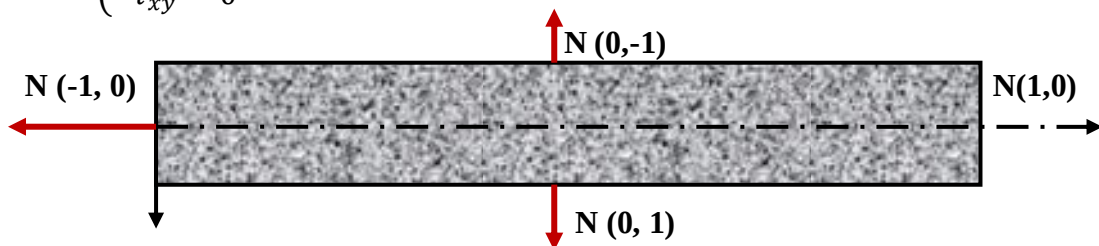
On aura au niveau des faces:

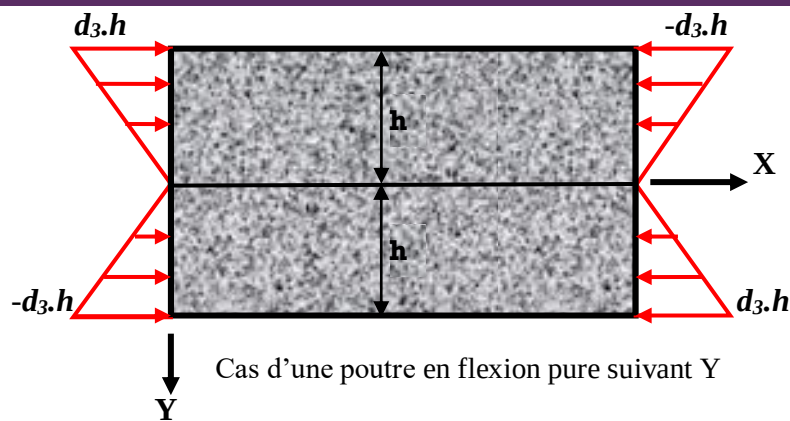


2<sup>ème</sup> Cas particulier

Si:  $a_3 = b_3 = c_3 = 0$  et  $d_3 \neq 0 \Rightarrow \varphi_3(x, y) = \frac{d_3}{6} \cdot y^3$

$$\begin{cases} \sigma_x = d_3 \cdot y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = (d_3 \cdot y) \cdot l \\ F_y = 0 \end{cases}$$





### 4.3 Résumé

$$\varphi_2(x, y) = a_2 \cdot x^2$$

Traction/compression  
Selon Y

$$\varphi_2(x, y) = a_2 \cdot y^2$$

Traction/compression  
Selon X

$$\varphi_2(x, y) = a_2 x \cdot y$$

Cisaillement simple  
Selon XY

$$\varphi_2(x, y) = a_2 \cdot x^3$$

Flexion selon Y

$$\varphi_2(x, y) = a_2 \cdot y^3$$

Flexion selon x

Cependant la combinaison des fonctions peut donner d'autres états de contraintes: flexion composée, flexion déviée...

### Série d'exercices

#### Exercice 1

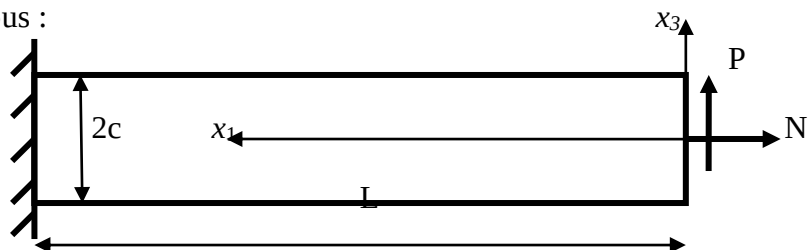
Si  $\Phi = Ax_1^3x_2^2 - Bx_1^5$

Où A et B sont des constantes.

Déterminer la relation entre A et B pour que  $\Phi$  soit une fonction de contrainte admissible.

#### Exercice2

Montrer que la fonction d'Airy suivante est la solution du problème de la poutre console montrée sur la figure ci- dessous :



#### Exercice 3

On considère un solide élastique linéaire et isotrope, de module d'élasticité E et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Les points de ce solide subissent des déplacements donnés par le champ suivant:

$$u_1 = 2\alpha x_1 x_2$$

$$u_2 = 2\alpha x_1 x_2$$

$$u_3 = 4\alpha(x_1 + x_2)x_3$$

Où  $\alpha$  est une constante suffisamment petite pour assurer la linéarité géométrique.

a- Calculer le tenseur de rotations.

- b- Calculer le tenseur de déformations.
- c- Déterminer en fonction de E et  $\nu$  le tenseur de contraintes.
- d- Dédire le vecteur de forces de volume garantissant l'équilibre statique de ce solide.

#### Exercice 4

Soit la plaque carrée de côté  $a=30\text{cm}$  et de très faible épaisseur ( $\varepsilon_{33} = 0$ ), faite d'un matériau élastique isotrope de module d'élasticité  $E=10^5 \text{ MPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu=0.3$

1/ La plaque est soumise à une contrainte de traction

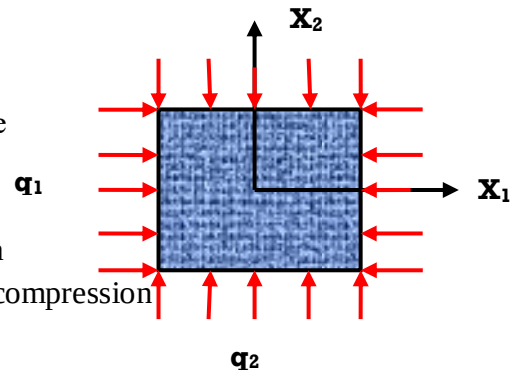
$q_1 = 200 \text{ MPa}$  dans le sens  $X_1$  et à une contrainte de compression

$q_2 = 100 \text{ MPa}$  dans le sens  $X_2$ .

a- Calculer les déformations  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$ .

b- Dédire la déformation  $\varepsilon_{33}$  et la surface finale  $S_f$  de la plaque (en  $\text{cm}^2$ ).

2/ Si la plaque est soumise uniquement à une contrainte de traction  $q_1 = 200 \text{ MPa}$  dans le sens  $X_1$ , recalculer les nouvelles valeurs de  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  et  $S_f$ .



#### Exercice 5

L'état de contraintes en un point quelconque  $(x,y,z)$  est donné par la distribution suivante :

$$\sigma_x = \frac{x^2}{2}; \quad \sigma_y = \frac{y^2}{2}; \quad \sigma_z = \frac{z^2}{2}; \quad \tau_{xy} = x - \left(\frac{y^2}{2}\right); \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

a - déterminez les composantes des forces de volume.

b - déterminez les composantes du vecteur normal  $\vec{N}$  au plan passant par le point  $(1, 1, 1)$

Pour le quel on a : La contrainte normale :  $\sigma_n = 1/2$  ; La contrainte tangentielle :  $\sqrt{2}/4$

c - déterminez les contraintes et directions principales au point  $(1, 1, 1)$ .

d - déterminez la contrainte de cisaillement maximale.

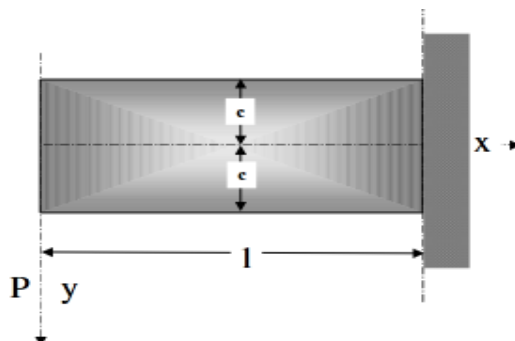
e- Au point  $(1,1,1)$ , décomposez ce tenseur en tenseurs sphérique et déviatorique puis déterminer les contraintes principales de ce tenseur.

#### Exercice 6

Considérons une poutre console ayant une section droite rectangulaire étroite (dont nous prendrons la largeur pour unité) qui est fléchiée par une force  $P$  appliquée à son extrémité libre (figure). Démontrez que les contraintes peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{I} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = -\frac{3P}{2\Omega} \left( 1 - \left( \frac{y}{c} \right)^2 \right)$$

Où  $I$  est le moment d'inertie de la section droite et  $\Omega$  est sa section.



## Rappel

### Equations d'élasticité plane

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

### Fonctions d'Airy polynômiales

$$\Phi_2(x, y) = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 & -b_2 \\ -b_2 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_3(x, y) = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + d_3 y^3$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_3 x + 6d_3 y & -2b_3 x - 2c_3 y \\ -2b_3 x - 2c_3 y & 6a_3 x + 2b_3 y \end{pmatrix}$$

## Solutions

I- Pour que  $\Phi = (x_1, x_2) = Ax_1^3 x_2^2 - Bx_1^5$  soit une fonction de contrainte en élasticité plane, il faut qu'elle vérifie l'équation biharmonique (26):

$$\frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = 0$$

Qui nous donne après remplacement de l'expression de  $\Phi(x_1, x_2)$ :

$$\frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} = 120Bx_1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} = 120Bx_1 \\ 2 \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 12Ax_1 \Rightarrow A = 10B \\ \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = 0 \end{cases}$$

II- Cette fonction vérifie l'équation biharmonique :

$$\frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \Delta^2 \Phi = 0$$

Elle est par conséquent une forme admissible.

L'état de contrainte qui lui est associé

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{N}{2c} - \frac{3Px_1 x_2}{2c^3} \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{12} = \frac{3P(1 - \frac{x_2}{c^2})}{4c} \end{cases}$$

Examinant, maintenant les conditions aux limites.

Pour  $x_2 = \pm c \Rightarrow \vec{T} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3P(1 - \frac{x_2}{c^2}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour  $x_2 = 0 \Rightarrow \int_s \vec{T} ds = \begin{pmatrix} -N \\ P \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{\sigma} \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \end{pmatrix} \\ \int_s \vec{T} ds &= \int_s \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \end{pmatrix} dx_2 dx_3 = - \int_s \begin{bmatrix} \frac{N}{2c} - \frac{3Px_1x_2}{2c^3} \\ \frac{3P(1 - \frac{x_2}{c^2})}{4c} \end{bmatrix} dx_2 dx_3 \\ &= \begin{pmatrix} -N \\ \frac{3P}{4c} \end{pmatrix} \int_s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{x_2}{c^2} \end{pmatrix} dx_2 dx_3 = \begin{pmatrix} -N \\ \frac{3P}{4c} \times 2c - \frac{3P}{4c} \int_s x_2^2 dx_2 dx_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -N \\ \frac{3P}{2} - \frac{3P}{4c^3} \times \frac{8c^3}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N \\ P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc  $\Phi = (x_1, x_2)$  est une fonction d'Airy solution du problème de poutre console soumise à un effort tranchant normal à l'extrémité.

### III- a- Le tenseur de rotations

L'expression indicielle du tenseur de rotation est donnée par:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

D'où :  $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$

$$\begin{cases} \omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \alpha(x_1 - x_2) \\ \omega_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = -2\alpha x_3 \\ \omega_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = -2\alpha x_3 \end{cases}$$

Sachant que le tenseur de rotation est antisymétrique, alors

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(x_1 - x_2) & -2\alpha x_3 \\ -\alpha(x_1 - x_2) & 0 & -2\alpha x_3 \\ 2\alpha x_3 & 2\alpha x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

**b-** Calcul du tenseur de déformation: la relation déformation-déplacement sous forme indicielle est donnée par:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = 2\alpha x_2 \\ \varepsilon_{22} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 2\alpha x_1 \\ \varepsilon_{33} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 4\alpha(x_1 + x_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \alpha(x_1 - x_2) \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 2\alpha x_3 \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 2\alpha x_3 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :  $\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 2\alpha x_2 & \alpha(x_1 - x_2) & 2\alpha x_3 \\ \alpha(x_1 - x_2) & 2\alpha x_1 & 2\alpha x_3 \\ 2\alpha x_3 & 2\alpha x_3 & 4\alpha(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$

**c-** Détermination du tenseur contrainte, la loi de Hooke permet d'écrire les contraintes en fonctions des déformations comme suit:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{(1-2\nu)}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, remplaçant par leurs expressions respectives, il vient:

$$\sigma_{11} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \frac{E}{(1-2\nu)} \varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu \varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{33} + (1-2\nu) \varepsilon_{11})$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})] = \frac{2\alpha E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [x_2 + \nu x_2 + 3\nu x_1] \\ \sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \varepsilon_{22} + \nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})] = \frac{2\alpha E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [x_1 + \nu x_1 + 3\nu x_2] \\ \sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \varepsilon_{33} + \nu(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11})] = \frac{2\alpha E(x_1 + x_2)(2-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{12} = \frac{2\alpha E(x_1 + x_2)}{(1+\nu)} = \sigma_{21} \\ \sigma_{13} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{13} = \frac{2\alpha E x_3}{(1+\nu)} = \sigma_{31} \\ \sigma_{23} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{23} = \frac{2\alpha E x_3}{(1+\nu)} = \sigma_{32} \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [x_2 + \nu x_2 + 3\nu x_1] & \frac{2\alpha E(x_1 + x_2)}{(1+\nu)} & \frac{2\alpha E x_3}{(1+\nu)} \\ \frac{2\alpha E(x_1 + x_2)}{(1+\nu)} & \frac{2\alpha E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [x_1 + \nu x_1 + 3\nu x_2] & \frac{2\alpha E x_3}{(1+\nu)} \\ \frac{2\alpha E x_3}{(1+\nu)} & \frac{2\alpha E x_3}{(1+\nu)} & \frac{2\alpha E(x_1 + x_2)(2-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{bmatrix}$$

**d-Déduction du vecteur force de volume  $f_i$  garantissant l'équilibre statique du solide.**

A partir de l'équation d'équilibre, on a:  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i = 0$

D'où, on obtient les formes explicites suivantes:

$$\begin{cases} f_1 = -\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}\right) = -\frac{3\alpha E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ f_2 = -\left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}\right) = -\frac{3\alpha E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ f_3 = -\left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3\alpha E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \frac{-3\alpha E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

**IV- 1/** Comme l'épaisseur de la plaque est très faible et la contrainte  $\sigma_{33} = 0$ , le problème peut être traité en contraintes planes. Dans ce cas, on a pour les déformations.

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} \\ \varepsilon_{22} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{11}) \end{cases}$$

Pour la surface finale:  $S_f = S_i + \Delta S$

D'autre part, la variation relative de la surface est donnée par:

$$\frac{\Delta S}{S_i} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \Rightarrow \Delta S = S_i (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Qui nous permet d'avoir

$$S_f = S_i + S_i(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = S_i(1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

**AN : a)**  $q_1 = 200\text{MPa}$ ,  $q_2 = 100\text{MPa}$  effort de compression dans le sens  $X_2$

$$\sigma_{11} = q_1 = 200\text{MPa}$$

$$\sigma_{22} = -q_2 = 100\text{MPa}$$

D'où, il vient:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} = \frac{1}{10^5}(200) - \frac{0.3}{10^5}(-100) = 2,3 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} = \frac{1}{10^5}(-100) - \frac{0.3}{10^5}(200) = -1,6 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{11}) = -\frac{0.3}{10^5}(200 - 100) = -0,3 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

$$S_f = (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = (30.30)(1 + 2,3 \cdot 10^{-3} - 1,6 \cdot 10^{-3} - 0,3 \cdot 10^{-3}) = 900,629\text{cm}^2$$

**b)** Pour uniquement une traction :  $\sigma_{11} = q_1 = 200\text{MPa}$

On pose  $\sigma_{22} = 0$  aura:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} = \frac{1}{10^5}(200) = 2 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} = -\frac{0.3}{10^5}(200) = -0,6 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} = -\frac{0.3}{10^5}(200) = -0,6 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

$$S_f = (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) (30.30)(1 + 2 \cdot 10^{-3} - 0,6 \cdot 10^{-3}) = 901,26\text{cm}^2$$

**V- a-** Les composantes de forces de volume:

En utilisant les équations différentielles d'équilibre sur le tenseur de contrainte  $[\sigma]$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_x = \frac{x^2}{2}; \quad \sigma_y = \frac{y^2}{2}; \quad \sigma_z = \frac{z^2}{2}; \quad \tau_{xy} = x - \left(\frac{y^2}{2}\right); \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ x - \left( \frac{y^2}{2} \right) \right] + f_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ x - \left( \frac{y^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{y^2}{2} \right] + f_y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{z^2}{2} \right] + f_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + f_x = 0 \\ 1 + y + f_y = 0 \\ z + f_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = y - x \\ f_y = -1 - y \\ f_z = -z \end{cases}$$

**b-** Les composantes du vecteur normal  $\vec{N}$ :

Le plan considéré passe par le point (1, 1,1), pour lequel on a:

La contrainte normale :  $\sigma_n = \frac{1}{2}$

La contrainte tangentielle :  $\tau = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \frac{1}{2}; \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

c- Le tenseur au point (1, 1,1) s'écrit:

$$[\sigma]_p = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{Les contraintes principales seront: } \det [\sigma - \sigma_i I] = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\sigma \left( \frac{1}{2} - \sigma \right) (\sigma - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = \frac{1}{2} \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

d- Les contraintes de cisaillement maximales sont :

$$\begin{cases} \tau_{1max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) = \pm \frac{1}{4} \\ \tau_{2max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \pm \frac{1}{2} \\ \tau_{3max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \frac{1}{4} \end{cases}$$

D'où le maximum de ces contraintes est :  $\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}$

f- Au point (1, 1,1), décomposez ce tenseur en tenseurs sphérique et déviatorique puis déterminer les contraintes principales de ce tenseur.

$$[\sigma]_p = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = [\sigma^S] + [\sigma^d] \quad \text{Avec } [\sigma^S] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m \frac{1/2 + 1/2 + 1/2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$[\sigma^S] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{et } [\sigma^d] = [\sigma] + [\sigma^S] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculons les contraintes principales du tenseur déviatorique équation caractéristique s'écrit:

$$\sigma_d^3 - j_1 \sigma_d^2 - j_2 \sigma_d - j_3 = 0$$

Dans notre cas:

$$j_1 = 0, \quad j_2 = 1/4, \quad j_3 = 0$$

Donc l'équation caractéristique sera:  $\sigma_d \left( \sigma_d - \frac{1}{2} \right) \left( \sigma_d - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow$  Où racines sont :  $\begin{cases} \sigma_{d1} = \frac{1}{2} \\ \sigma_{d2} = 0 \\ \sigma_{d3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

IV- Choisir pour la fonction d'Airy :  $\varphi(x, y) = b_2 xy + \frac{d_4}{6} xy^3$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = d_4 xy \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = 0 \\ \sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = -b_2 + \frac{d_4}{2} y^2 \end{cases}$$

Pour rendre les côtés longitudinaux libres de toute force on doit avoir:

$$\sigma_{xy}|_{y=\pm c} = -b_2 + \frac{d_4}{2}c^2 = 0 \rightarrow d_4 = 2\frac{b_2}{c^2}$$

Il faut en plus satisfaire l'équilibre sur le bord chargé par la force distribuée P

$$P = \int_{-c}^c \sigma_{xy}|_{x=l} dy = \int_{-c}^c \left(-b_2 + \frac{b_2}{2}y^2\right) dy \rightarrow b_2 = \frac{3P}{4C}$$

Donc: 
$$d_4 = 2\frac{b_2}{c^2} \Rightarrow d_4 = \frac{3}{2}\left(\frac{P}{c^3}\right)$$

En remplaçant  $b_2$  et  $d_4$  par leurs valeurs respectives on trouve:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{3}{2}\left(\frac{P}{c^3}\right)xy \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = -\frac{3P}{4C} + \frac{3}{4}\left(\frac{P}{c^3}\right)y^2 = -\frac{3P}{4C}\left[1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right] \end{cases}$$

Si l'on note que  $\frac{2c^3}{3}$  est le moment d'inertie de la section droite et que  $2c$  est sa section  $W$ , on peut encore écrire les formules précédentes sous la forme:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{P}{I}xy \\ \sigma_{xy} = -\frac{3P}{4C} + \frac{3}{4}\left(\frac{P}{c^3}\right)y^2 = -\frac{3P}{4C}\left[1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right] \end{cases}$$

## Chapitre 7

# Flexion des Poutres

### Généralités

La théorie de la flexion des poutres de Saint-Venant, pilier de l'RDM, stipule qu'à une distance suffisante des points d'application des charges, l'état de contrainte et de déformation dépend uniquement de la résultante et du moment résultant, indépendamment de la distribution locale précise des forces. La théorie des poutres de Barré de Saint-Venant, n'est pas entièrement satisfaisante pour les besoins de la pratique, par sa complication, et de ne pas prendre en considération la torsion non uniforme de manière correcte. Par ailleurs, pour toutes les poutres longues, on peut négliger les déformations dues à l'effort tranchant.

### 7.1 But d'Étude de la Théorie des Poutres

La théorie des poutres est un outil supplémentaire pour déterminer des solutions analytiques en utilisant des hypothèses additionnelles. L'avantage des solutions analytiques sur les prévisions obtenues par des méthodes numériques est de permettre de visualiser l'influence de différents paramètres (de forme, de taille, de comportement du matériau, d'hétérogénéité). En effet, la théorie des poutres développée par Euler, Navier et Bernoulli permet un certain nombre de simplifications de problème 3D complexes.



### 7.2 Introduction

Le terme "poutre" désigne un corps élancé, c'est-à-dire qu'une de ses dimensions surpasse largement les autres. Elle est utilisée dans le domaine de la construction (*bâtiments*), travaux publics (ponts), maritime (navires) et l'industrie (machines). Une poutre est engendrée par une section droite plane  $S$  dont le centre de gravité  $G$  décrit une courbe  $(C)$  appelée *fibre moyenne* du solide. Les fibres situées vers l'extérieur de la flexion sont en extension, elles sont soumises à de la *traction*. Les sections peuvent être constantes ou variables (selon la géométrie de la poutre). La ligne moyenne  $L$  peut être une droite ou une courbe. Les fibres situées à l'intérieur de la flexion sont en *compression*. La théorie des milieux curvilignes élastiques adopte l'hypothèse selon laquelle la poutre peut-être modélisée par la courbe  $(C)$ . L'ensemble des efforts appliqués sur la surface est reporté sur la ligne moyenne. Le calcul en est ainsi simplifié (Fig.7.1).

La RDM est divisée en deux grands domaines dépendant de la géométrie des solides à étudier, de nombreuses hypothèses sont utilisées pour chaque type, afin d'obtenir rapidement des résultats exploitables: théorie des poutres et théorie des plaques et coques.

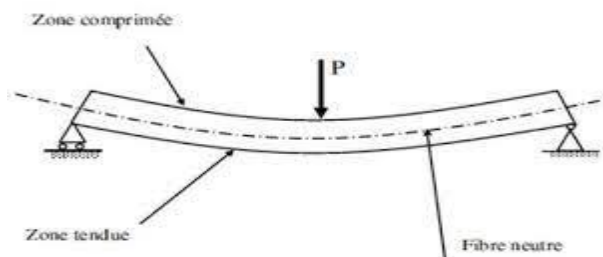


Fig.7.1 Flexion d'une poutre appuyée (milieu curviligne)

### 7.3 Hypothèses de la Théorie des Poutres

Dans la **théorie des poutres**, on utilise deux modèles :

- la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du *cisaillement* ;
- la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du *cisaillement*.

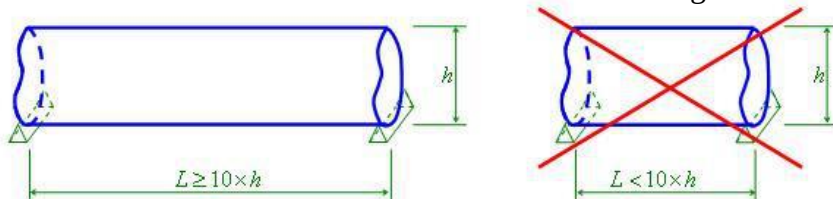
Les deux méthodes supposent que :

- ♦ Le matériau est homogène et isotrope.
- ♦ Le matériau est sollicité dans le domaine élastique. Les déformations (déplacements) sont réversibles, donc leur comportement est traduit par la loi de Hooke. Cela nous permet d'utiliser le **principe de superposition** qui stipule:

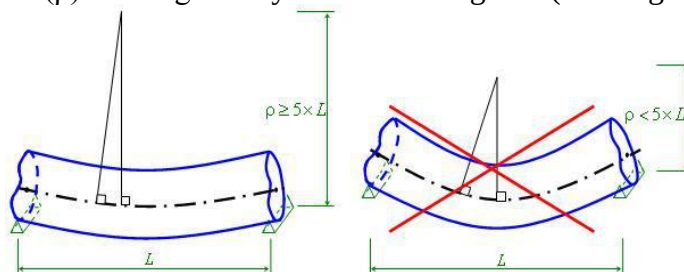
Dans la limite des déformations élastiques, l'effet produit par plusieurs actions mécaniques est égal à la somme des effets produits par ces actions mécaniques prises séparément. Le principe de superposition peut alors être utilisé pour décomposer un chargement complexe en plusieurs chargements simples afin de faciliter le calcul de la flèche ou de l'élongation d'une poutre.

- ♦ Géométrie des poutres:

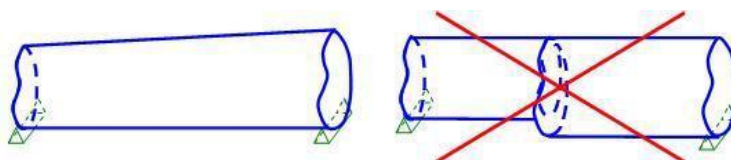
-ses dimensions transversales doivent être faibles devant la longueur de l'élément;



-le rayon de courbure ( $\rho$ ) de la ligne moyenne doit être grand ("cintrage" faible);



-une section droite (S) constante ou qui varie continûment (lentement) le long de (C);



-une perpendicularité entre (S) et (C) et un plan de symétrie (P) qui contient (C).

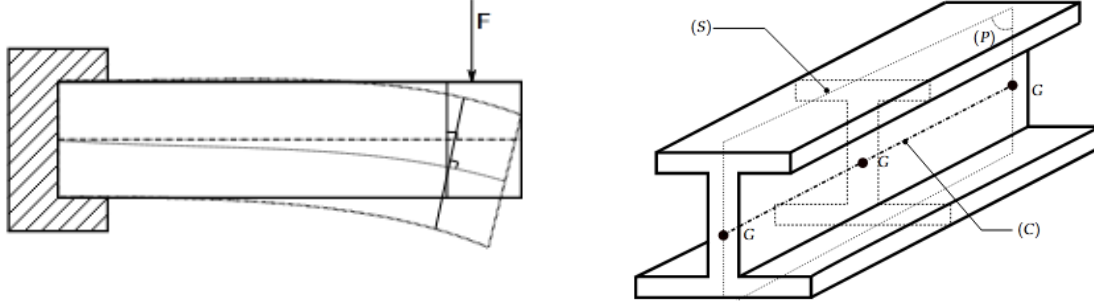


Fig. 7.2 Exemple de géométrie de poutres

## 7.4 Schématisation d'une poutre

L'hypothèse de base porte sur une schématisation du champ de déplacement à l'intérieur de la poutre qui est assimilée à un milieu curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la "ligne moyenne" ainsi définie reste plane. En un point quelconque du milieu curviligne, il est donc possible de résumer la solution du problème par la connaissance de trois composantes de déplacement (selon  $x, y, z$ ), et de trois rotations (de type flexion autour de  $y$  et  $z$ , et de type torsion autour de  $x$ ).

Désignons par (E) la poutre étudiée et  $(\bar{E})$  le milieu extérieur à la poutre (Fig. 7.3). Supposons le repère  $R(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à (E). Soit un plan (P) perpendiculaire à  $(O, \vec{x}_0)$  et soit (S) la section droite ainsi définie. Soit G, d'abscisse  $x$ , le centre de surface de (S), ainsi:

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{x}_0$$

Définie la position de la section droite (S). Cette coupure fictive passant par (P) partage la poutre en deux tronçons  $(E_1)$  et  $(E_2)$ . L'ensemble des actions mécaniques exercées par le tronçon  $(E_2)$  sur  $(E_1)$  au travers de la coupure fictive (S) est appelé *torseur de cohésion*  $(\mathcal{T}_{\text{coh}})$ :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = \{\mathcal{T}_{E_1 \rightarrow E_2}\}_G = \begin{Bmatrix} R_{E_1 \rightarrow E_2} \\ M_{G, E_1 \rightarrow E_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{GG} \quad (1)$$

On définit alors les composantes du *torseur de cohésion* comme:

- $N_x$ , la composante algébrique de l'effort normal,  $\vec{N} = N\vec{x}_0$
- $T_y$  et  $T_z$ , les composantes algébriques de l'effort tranchant,  $\vec{T} = T_y\vec{y}_0 + T_z\vec{z}_0$
- $M_{tx}$ , la composante algébrique du moment de torsion,  $\vec{M}_t = M_{tx}\vec{x}_0$
- $M_{fy}$  et  $M_{fz}$ , les composantes algébriques du moment de flexion,  $\vec{M}_f = M_{fy}\vec{y}_0 + M_{fz}\vec{z}_0$

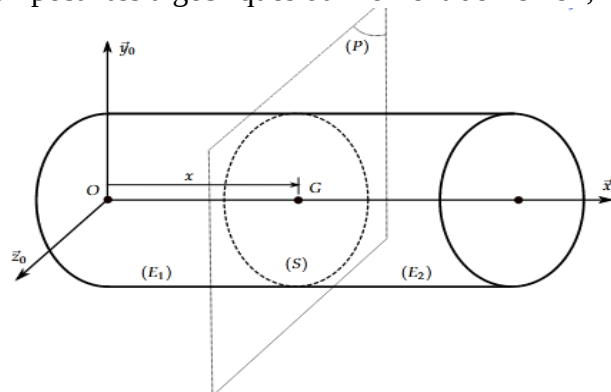


Fig.7.3 Coupure fictive dans une poutre

### 7.3.1 Différentes sollicitations simples

Les différentes sollicitations simples en fonction de différentes expressions du torseur de cohésion sont récapitulées dans le tableau ci dessous.

**Tableau 7.1** Récapitulatif du torseur de cohésion

| Torseur de cohésion                                                                                                                                                       | Sollicitation                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $\left\{ \begin{matrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$               | $N_x > 0$ ; Traction<br>$N_x < 0$ ; Compression |
| $\left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$             | Cisaillement                                    |
| $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{M}_t \end{matrix} \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & M_{tx} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$                | Torsion simple                                  |
| $\left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ \vec{M}_f \end{matrix} \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ | Flexion plane                                   |
| $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{M}_f \end{matrix} \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$           | Flexion pure                                    |

### 7.3.2 Equations d'équilibre (tronçons d'une poutre)

En réalisant l'équilibre statique des systèmes matériels ( $E$ ), ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ), on démontre que :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = -\{\mathcal{T}_{E \rightarrow E_1}\}_G = \{\mathcal{T}_{E \rightarrow E_2}\}_G \quad (2)$$

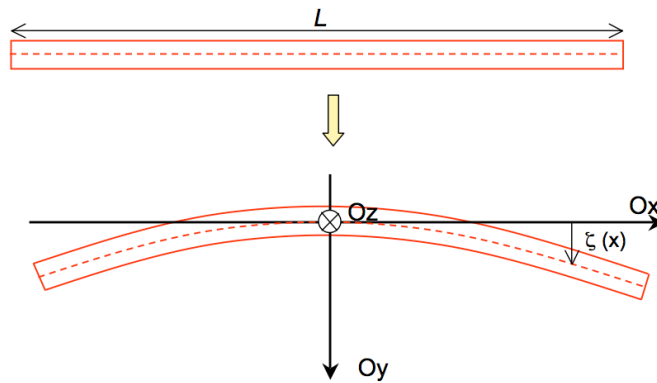


**Fig. 7.4** Flexion faible d'une poutre

Soit le moment infinitésimal  $d\vec{m}$  qui s'exerce sur un élément de surface  $dydz$  perpendiculaire à l'axe  $Ox$ , située à la hauteur  $y$ , est :

$$d\vec{m} = -\sigma_{xx}(y - y_0)dydz \cdot \vec{e}_z$$

$$\mathcal{M}_f = \int d\vec{m} \quad (3)$$

A l'équilibre, le moment fléchissant de la poutre  $\mathcal{M}_f$  doit être égal à la composante selon  $Oz$  du moment extérieur appliqué à la poutre pour la fléchir. Appelons  $M_z$  la composante  $z$  du moment extérieur  $\vec{M}$ . On a :

$$M_z \cdot \vec{e}_z = \mathcal{M}_f \quad (4)$$

$$\text{D'où l'équation d'équilibre des moments:} \quad M_z = EI_z \frac{d^2 \xi}{dx^2} \quad (5)$$

•  $\mathcal{M}_f$  le moment fléchissant de la poutre devient donc:  $\mathcal{M}_f = EI_z \frac{d^2 \xi}{dx^2} \vec{e}_z$

La poutre a donc une rigidité à la flexion qui est le produit  $EI_z$ . Si on veut augmenter la rigidité de la poutre en faisant des économies de matériau, il suffit donc de placer la matière le plus loin possible de la ligne neutre  $((y - y_0)$  grand de façon à augmenter  $I_z$ ) (le cas des poutres en I utilisée en bâtiment).

En général,  $\vec{M}$  est le moment d'une force extérieure  $\vec{F}$  appliquée à la poutre. Considérons une section de la poutre de longueur  $dx$ . Le moment élémentaire  $d\vec{M}$  de la force  $\vec{F}$  qui fléchit la poutre est:

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= dx \vec{e}_x \wedge \vec{F} \\ \Rightarrow dM_z &= F_y dx \\ \Rightarrow F_y &= \frac{dM_z}{dx} \end{aligned} \quad (6)$$

•  $F_y$  est dite *effort tranchant par rapport à z*.

De l'équation (7.5) on obtient l'équation d'équilibre des forces:

$$F_y = E \frac{d}{dx} \left( I_z \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right) \quad (7)$$

La force  $F_y$  ne dépend pas de  $x$ , par exemple dans le cas d'une force ponctuelle appliquée à l'extrémité de la poutre.

On peut avoir une force extérieure par unité de longueur  $F_y = \frac{dF_y}{dx}$  (qui est constante dans le cas de la pesanteur et d'une poutre de section constante). On aura alors une *équation d'équilibre des forces linéiques* ( $f_y$ ):

$$f_y = E \frac{d^2}{dx^2} \left( I_z \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right) \quad (8)$$

Les équations (5), (7) et (8) forment les *équations d'équilibre d'une poutre faiblement fléchie*. Dans le cas d'une poutre de section constante, le moment d'inertie  $I_z$  ne dépend pas de  $x$  et ces équations se transforment en système suivant:

$$\begin{cases} M_z = EI_z \left( \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right) \\ F_y = EI_z \left( \frac{d^3 \xi}{dx^3} \right) \\ f_y = EI_z \left( \frac{d^4 \xi}{dx^4} \right) \end{cases} \quad (9)$$

### 7.3.3 Conditions aux limites

Pour trouver la forme  $\xi(x)$  d'une poutre fléchie, on a les équations d'équilibre ci-dessus et des conditions aux limites. Les conditions aux limites sont de deux types:

**Poutre posée:** impose une condition sur  $\xi$  à l'abscisse du point sur lequel repose la poutre.

**Poutre encastrée:** cela impose une condition sur la position  $\xi$  et sur la pente  $\xi'$  de la poutre au point d'encastrement.

## 7.5 Extension-Compression

Un certain nombre de matériaux usuels, utilisés en construction, ont un comportement différent en extension et en compression. Par exemple, on observe avec certains bétons ou matériaux réfractaires une *rigidification* apparente en compression. Cela induit un comportement asymétrique en traction et en compression avec:  $E_{\text{compression}} > E_{\text{traction}}$ . Au niveau microscopique, ce comportement s'explique par le fait que les microfissures présentes dans le matériau se referment au cours de la compression. Contrairement aux métaux où ce comportement asymétrique est peu observé, il est important de caractériser le comportement des matériaux

céramiques en traction, mais aussi en compression. Il sera toutefois supposé ici un comportement strictement identique en traction et en compression.

Dans le repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié à la section droite de la poutre (S), l'expression du tenseur de cohésion pour un état d'extension/compression est :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{avec} \begin{cases} N_x > 0 \rightarrow \text{traction} \\ N_x < 0 \rightarrow \text{compression} \end{cases} \quad (10)$$

**NB:** Dans la plupart des applications d'extension et de compression, le poids de la poutre peut être négligé devant les forces extérieures en présence.

♦ **Hypothèses Cinématiques**

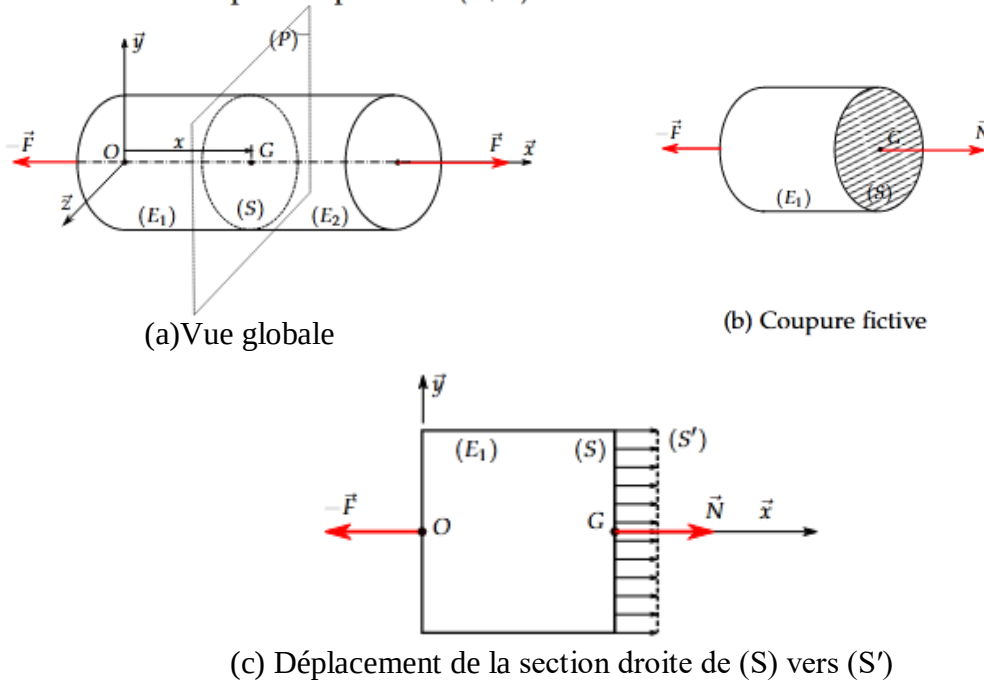


**Fig.7.5** Définition de l'extension-compression

Comme il est supposé que les sections droites restent droites après déformations, alors ils en résultent une translation suivant l'axe  $\vec{x}$  (Fig.7.5). Pour garantir ce mouvement, on peut donc supposer que la déformation  $\varepsilon_{xx}$  est constante et uniforme dans (S). Donc on peut déduire la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  à partir de la loi de Hooke en traction uniaxiale

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \quad (11)$$

D'où le tenseur de cohésion lié à la contrainte normale est ( $\mathcal{T}_{\text{coh}}$ ):

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} R_{\text{coh}} \\ M_{G, \text{coh}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \left\{ \iint \vec{\sigma}_{xx} dS \right\}_G = \left\{ (\vec{\sigma}_{xx} dS) \right\}_G \quad (12)$$

Où S est l'aire de la section droite (S). Ainsi, comme  $\vec{F} = \vec{N}$ , donc la relation algébrique entre effort et contrainte d'un essai de traction est:

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{S} \quad (13)$$

Comme l'effort normal N est constant le long de la poutre, les contraintes  $\sigma_{xx}$  sont également. On peut donc en déduire grâce à la loi de Hooke que les déformations longitudinales  $\varepsilon_{xx}$  sont constantes dans la poutre. La déformation longitudinale de la poutre est :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} \quad (14)$$

Où  $l$  est la longueur initiale de la poutre et  $\Delta l$  son allongement dans le sens longitudinal.

## 7.6 Types de flexion

Il existe plusieurs types de flexions : pure, plane, déviée. Nous nous limitons notre étude au cas de la flexion simple.

### Hypothèses

En plus des hypothèses déjà énoncées au début du cours de RDM, la flexion plane simple nous amène à supposer que :

- la ligne moyenne de la poutre est rectiligne.
- la section droite de la poutre est rectiligne.
- la poutre admet un plan de symétrie longitudinal.
- toutes les forces appliquées à la poutre sont disposées perpendiculairement à la ligne moyenne et dans le plan de symétrie longitudinal.

**7.5.1 Théorie d'Euler-Bernoulli** (la théorie des poutres classiques) (Classical Laminated Beam Theory- CLBT):

S'applique aux poutres *longues/minces*, où les déformations transversales sont négligeables.

- Les déformations transversales sont négligeables par rapport aux déformations longitudinales.
- Les sections planes restent planes après la déformation, et que les lignes neutres initiales restent droites et parallèles à l'axe longitudinal de la poutre.

$$-M_z = EI_z \left( \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right)$$

Où :

$\xi(x)$  est le déplacement vertical de la poutre en fonction de la position  $x$ ,

$E$  est le module d'élasticité du matériau,

$I$  est le moment quadratique de la section transversale,

$M(x)$  est le moment fléchissant le long de la poutre en fonction de la position  $x$ .

◆ Pour le tenseur de contrainte:  $\sigma_{xx} = -E \frac{d^2 \xi}{dx^2}$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

◆ Pour le tenseur de déformation:  $\varepsilon_{xx} = \frac{d^2 \xi}{dx^2}$

$$\varepsilon_{yy} = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$\sigma_{xx}$  et  $\varepsilon_{xx}$  composantes axiales du tenseur de contrainte et de déformation respectivement.

$\sigma_{yy}$  et  $\varepsilon_{yy}$  composantes transversales.

$\tau_{xy}$  et  $\gamma_{xy}$  composantes de cisaillement.

$E$  est le module d'élasticité, et  $G$  est le module de cisaillement.

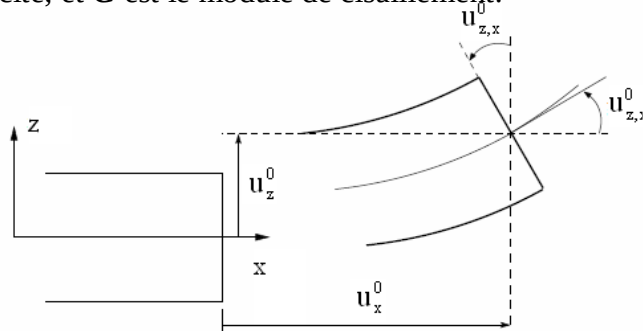


**Fig.7.6** Cinématique d'Euler Bernoulli [Dufort, 2000a]

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

$$\Psi(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Dans le cas de poutres élancées, selon la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est géré par les deux composantes suivantes:

$$\begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases}$$

Avec

$u(x, z)$ : le déplacement suivant X.

$w(x, z)$ : le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

$u^0(x)$  et  $w^0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w'_{,x}(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

**NB :** L'utilisation de cette théorie pour l'analyse des poutres, donnent des *flèches sous-estimées*. Ceci est dû à la négligence de la déformation de transversal.

### 7.5.2 Théorie de Timoshenko (la théorie du premier ordre) (FSDBT)

Cette théorie est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres. Elle permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [Timoshenko.et al, 1972].

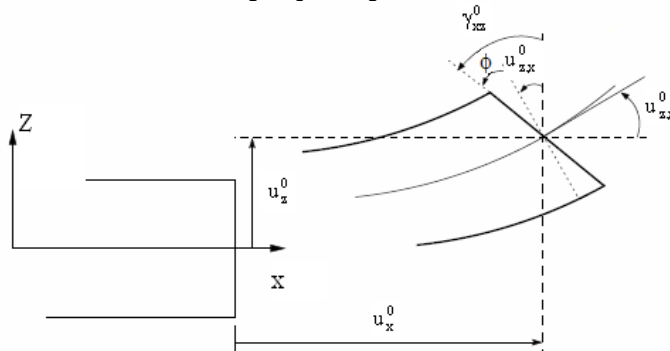


**Fig .7.7** Cinématique de Timoshenko [Timoshenko.et al, 1972]

Elle s'applique aux poutres courtes/épaisses, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle non perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre. Ceci est dû au cisaillement transversal.

$$EI \frac{d^2 \omega}{dx^2} + GI \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 \omega}{dx^2} = -M(x)$$

Où :  $w(x)$  : est le déplacement vertical de la poutre en fonction de la position  $x$ ,

$E$  : est le module d'élasticité du matériau,

$I$  : est le moment quadratique de la section transversale,

$G$  : est le module de cisaillement du matériau,

$J$  : est le moment polaire de la section transversale,

$M(x)$  : est le moment fléchissant le long de la poutre en fonction de la position  $x$ .

◆ Pour le tenseur de contrainte:  $\sigma_{xx} = -E \frac{d^2 \xi}{dx^2}$

$$\sigma_{yy} = -\frac{G}{2} \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

$$\tau_{xy} = -G \frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

◆ Pour le tenseur de déformation:  $\varepsilon_{xx} = -\frac{d^2 \xi}{dx^2}$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

Avec:

$\sigma_{xx}$  et  $\varepsilon_{xx}$  représentent les composantes axiales du tenseur de contrainte et de déformation, respectivement.

$\sigma_{yy}$  et  $\varepsilon_{yy}$  représentent les composantes transversales.

$\tau_{xy}$  et  $\gamma_{xy}$  représentent les composantes de cisaillement.

$E$  est le module d'élasticité, et  $G$  est le module de cisaillement.

### 7.5.2.1 Coefficient de Correction de Cisaillement Transversal

Le coefficient de correction de cisaillement transversal ( $K_{CT}$ ), est utilisé dans la théorie des poutres et des plaques. Il est utilisé dans la théorie de Timoshenko (les poutres épaisses), permet de corriger l'effet de cisaillement transversal qui n'est pas pris en compte dans la théorie de Bernoulli-Euler.

Sa valeur dépend de la géométrie de la section transversale de la poutre. Pour une poutre de section rectangulaire il est de 5/6. Pour des sections plus complexes, des calculs ou des tables spécifiques sont utilisés pour déterminer la valeur appropriée. Le facteur de correction du cisaillement transversal est crucial pour une modélisation plus précise des poutres épaisses, des poutres courtes ou des matériaux composites, car les effets de cisaillement ne peuvent pas être négligés pour améliorer la précision des modèles de poutres en flexion, notamment dans des contextes de cisaillement.

### 7.5.2.2 Équation du Coefficient de Correction de Cisaillement Transversal

$$K_{CT} = \frac{Q^2}{GA} \iint \left[ \frac{\tau_{xy}}{G} \right]^{-1} dA$$

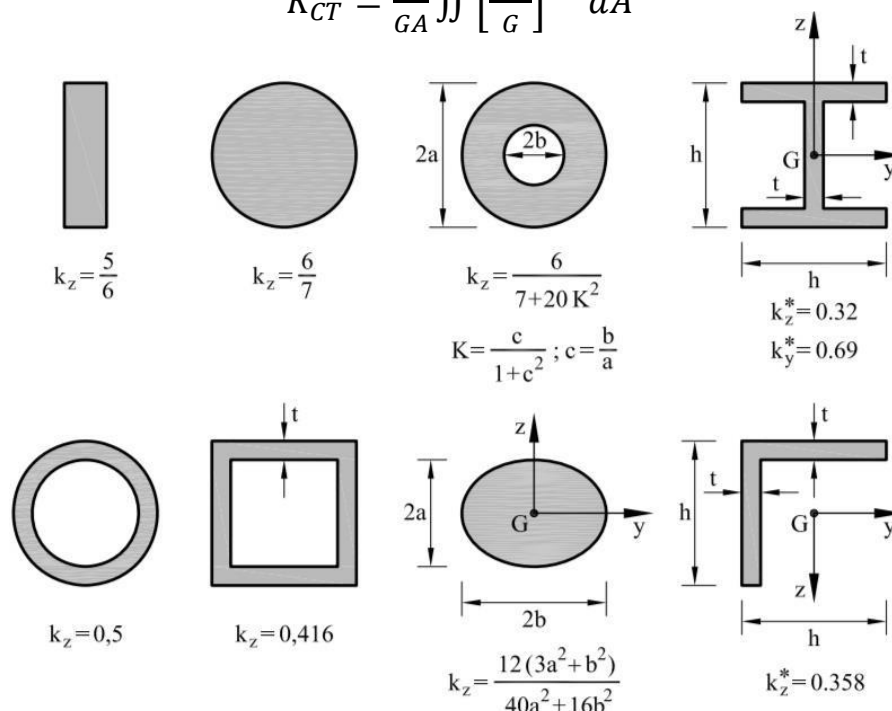


**Fig. 7.8** Coefficient de correction  $K_{CT}$  pour certaines sections.

### 7.5.3 Théorie d'Ordre Elevé

Etant donné que les contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre sont non nulles et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ceci incite les chercheurs à chercher une autre théorie qui prend en considération ces paramètres; c'est "*la théorie d'ordre élevé*".

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est *non linéaire* selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie Timoshenko puisqu'elle fait intervenir le phénomène de "gauchissement". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (fig.7.8). La fonction  $\psi(z)$  représente le gauchissement et sa dérivée  $\psi'(z)$  le cisaillement

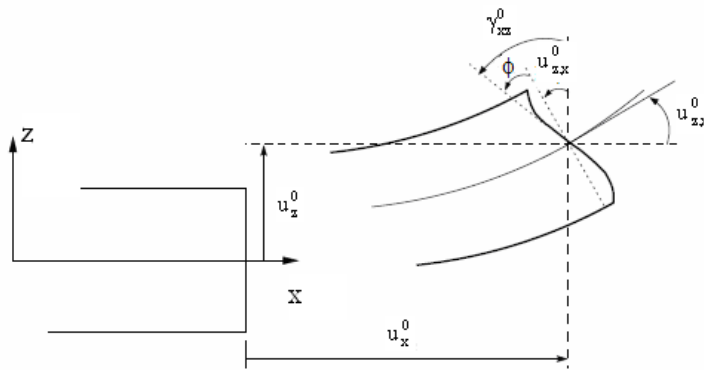


**Fig.7.8** Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

### Série d'exercices

**I-** Soit une poutre encastrée à une extrémité et simplement supportée à l'autre extrémité, soumise à une charge concentrée à son milieu.

Calculer les contraintes normales et les déformations normales au niveau de la section médiane de la poutre?

#### Solution

♦ Le déplacement vertical au milieu de la poutre :  $v = \frac{pL^3}{48EI}$

♦ Les contraintes normales  $\sigma_{xx}$  et les déformations normales  $\epsilon_{xx}$  peuvent être calculées à partir de la flexion selon la théorie d'Euler Bernoulli.

$$\sigma_{xx} = -E \frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\frac{M}{I} y$$

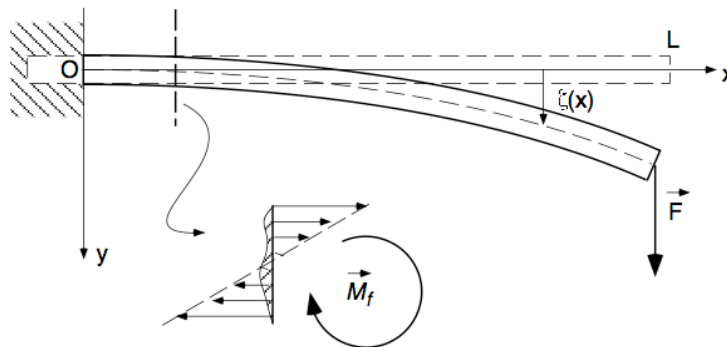
$$\epsilon_{xx} = \frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\frac{y}{R}$$

♦ Le moment fléchissant  $M$  au milieu de la poutre peut être calculé à partir de la charge concentrée :

$$M = \frac{pL}{4}$$

♦ Le rayon de courbure  $R$  est lié au moment fléchissant par:  $R = \frac{EI}{M}$

**II.** Soit la poutre de section rectangulaire, encastrée à une extrémité et soumise à une force concentrée à l'autre extrémité. Déterminer les déformations que subit cette poutre.



On considère une poutre de section rectangulaire :

- longueur  $L$  le long de l'axe  $Ox$ ,
- épaisseur  $h$  le long de  $Oy$ ,
- largeur  $w$  le long de  $Oz$ , avec  $h, w \ll L$ .

#### Solution

♦ **Surface neutre:** Aucune extérieure n'est appliquée dans la direction  $Ox$ ,

$$\begin{aligned} \iint \sigma_{xx} dS &= \iint \sigma_{xx} dy dz = 0 \\ &= w \int_0^h \frac{E}{R} (y - y_0) dy = 0 \\ &= w \int_0^h \frac{E}{R} (y - y_0) dy = 0 \\ &= \int_0^h (y - y_0) dy = \left[ \frac{y^2}{2} - yy_0 \right]_0^h = 0 \\ \frac{h^2}{2} - hy_0 &= 0 \Rightarrow y_0 = \frac{h}{2} \end{aligned}$$

La surface neutre est située au centre de la poutre, pour simplifier on pose:  $y_0 = 0$

◆ **Forme de la poutre:**

On considère une tranche de poutre à l'abscisse  $x$ . Le moment de la force extérieure qui s'exerce en  $x$  est :  $\vec{M} = (r_2 - r) \wedge \vec{F}$

Avec  $r_2$  est le point d'application de la force  $\vec{F}$ , Soit:  $M_z = F(L - x)$

Or on sait que:  $M_z = EI_z \frac{d^2 \xi}{dx^2}$

Donc  $M_z = EI_z \frac{d^2 \xi}{dx^2} = F(L - x)$

Le moment d'inertie de la section  $S_x$  de la poutre est:

$$I_z = \iint y^2 dydz = w \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = w \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Rightarrow I_z = \frac{wh^3}{12}$$

$I_z$  est indépendant de  $x$ .

L'équation d'équilibre de la poutre est :

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{12F}{Ewh^3} (L - x)$$

Après deux intégrations, on trouve :  $\xi(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Ax + B$

La poutre est encastree en  $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ \xi'(0) = 0 \rightarrow A = 0 \end{cases}$

La forme de la poutre encastree est:

$$\xi(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Déviatiion maximale de la poutre

La flèche maximale  $f$  de la poutre est ici sa déviatiion en  $x = L$  :

$$f = \xi(L) = \frac{4FL^3}{Ewh^3}$$

La poutre peut être considérée comme une tige élastique linéaire : la flèche est proportionnelle à la force appliquée :

$$\text{Où } F = k \cdot f \Rightarrow k = \frac{Ewh^3}{4FL^3} = \frac{Ew}{4F} \left( \frac{h}{L} \right)^3$$

$$k = \frac{Ew}{4F} \left( \frac{h}{L} \right)^3$$

$k$ : est la constante de raideur de la poutre élastique fléchiée. Plus le rapport d'aspect  $h/L$  est petit, moins la poutre présente de rigidité à la flexion.

◆ **Déformatiion maximale:** La déformatiion de la poutre en  $(x; y)$  est :

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{R} = -y \frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{12F}{Ewh^3} (L - x)$$

$|(\varepsilon_{xx})_{max}|$  est maximal en  $x = 0$  et  $|y| = h/2$  :

$$|(\varepsilon_{xx})_{max}| = \frac{6FhL}{Ewh^3} = \frac{3h}{2L} \times \frac{f}{L}$$

D'où

$$|(\varepsilon_{xx})_{max}| \ll \left( \frac{3}{2} \frac{h}{L} \right) \times \frac{f}{L}$$

◆ **Etat de contrainte de la poutre:**

$$|\sigma_{xx}|_{max} = E |\varepsilon_{xx}|_{max} \sim \frac{FL}{wh^2}$$

Cependant il existe aussi une contrainte tangentielle  $\tau_{xy}$  liée à la force extérieure  $\vec{F}$  appliquée dans la direction  $Oy$  sur la surface de la poutre de normale  $\vec{e}_x$  :

$$\tau_{xy} = \frac{F}{wh}$$

## Chapitre 8

# Étude des Plaques Minces

### 8.1 Introduction

La théorie des plaques issue de la théorie des poutres, afin de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces "également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love". Cependant, la théorie des plaques semi-épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Timoshenko et Reissner. On parle d'une *plaque mince*, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Les plaques peuvent être classées en trois groupes: les plaques minces à petites déformations, les plaques minces à grandes déformations et les plaques épaisses.

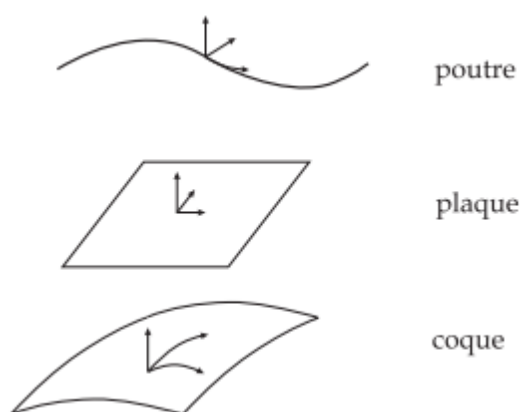


Fig.8. 1 Géométries courantes en mécanique des structures

### 8.2 Hypothèses Fondamentales

Les hypothèses de la *RDM* apportent des simplifications sur la réversibilité et de linéarité en domaine élastique. Nous nous estimons qu'on a de *petites déformations et petits déplacements*, c'est-à-dire que les déformations de la structure issues de son chargement sont négligeables en n'affectant pratiquement pas sa géométrie. De plus on admet que le matériau est:

- Élastiques (réversibilités de déformation, le matériau reprend sa forme initiale après un cycle chargement-déchargement),
- Linéaires (les déformations sont proportionnelles aux contraintes),
- Homogènes (le matériau est de même nature dans toute sa masse),
- Isotropes (les propriétés du matériau sont identiques dans toutes les directions).
- Le comportement en un point quelconque du matériau est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces (*principe de saint venant*) et peut ainsi être modélisé par un torseur des forces internes en ce point;
- L'ordre d'applications des efforts extérieurs sur le solide n'influe pas, c'est-à-dire que le résultant final et la même quelque soit l'ordre d'applications des forces (*principe de superposition*). Ce principe permet de décomposer.

### 8.3 Définition d'une Plaque

Les plaques minces sont des types spéciaux et importants de structure d'ingénierie, dans lequel la dimension transversale ( $e$ ) ou l'épaisseur ( $h$ ) est significativement petite par rapport aux dimensions (longueur ( $L$ ) et de largeur ( $l$ )). Les plaques sont généralement employées pour modéliser des structures minces, car seule une dimension est faible par rapport aux deux autres. En général, si la structure présente une courbure géométrique on privilégie les éléments de coque à éléments de plaque qui sont plans.

Pour étudier le comportement de la plaque, nous définissons son *plan moyen* auquel nous associons un repère orthonormé  $(O, x, y, z)$  tangent à ce plan. Le plan moyen est ainsi situé dans le plan  $(0, x, y)$  à équidistance entre les deux faces. L'origine du repère étant située sur le plan moyen avec  $z$  la direction de l'épaisseur, la face inférieure est ainsi positionnée en  $z = -h/2$  et la face supérieure en  $z = +h/2$ . Dans la théorie des plaques, le plan moyen représente l'équivalent de la courbe moyenne dans la théorie des poutres. Autour du plan moyen, on appelle la surface d'épaisseur infinitésimale, *feuille neutre* (ou *feuille moyen*) qui est l'équivalent de la fibre neutre dans les poutres.

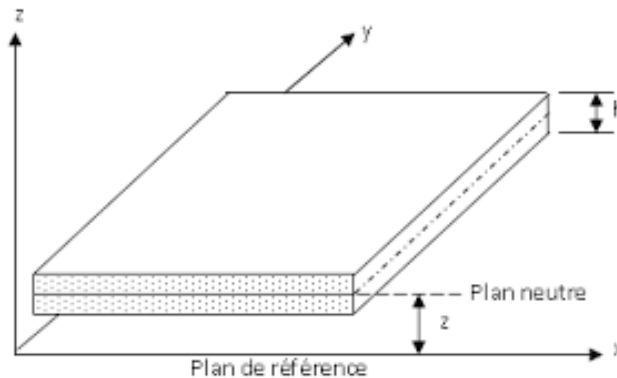


Fig.8.2 Géométrie d'une plaque

### 8.4 Cinématique d'une Plaque Mince

Le modèle le plus simple est le plus général appelé modèle de *Love-Kirchhoff*. Ce modèle est basé sur une *distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur*. On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement  $(L/h)$ .

Suite à la déformation  $\phi$  appliquée à la plaque, le déplacement  $\vec{u}$  de ce point est défini par  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^{translation} = (u_1, u_2, u_3)^T = (u, v, w)^T$  correspondant au déplacement du point de la plaque entre l'état de référence et l'état déformé de la plaque. Les composantes  $u, v, w$  sont définies en fonction des composantes  $x, y, z$ . Les déplacements sont exprimés en fonction du mouvement du plan moyen de la plaque (comme les poutres). Ce mouvement peut être décomposé en une *translation* et une *rotation*.

Soit  $\vec{u}_0 = ((u_0(x, y, z), v_0(x, y, z), w_0(x, y, z))^T$  le déplacement par translation du plan moyen. Les composantes  $u_0, v_0$  correspondent ainsi au déplacement du plan moyen dans le plan  $(0, x, y)$ . Le plan moyen étant positionné en  $z = 0$ , elles ne dépendent ainsi que de  $x$  et  $y$  avec  $u_0(x, y, z) = u_0(x, y)$  et  $v_0(x, y, z) = v_0(x, y)$ . La composante  $w_0$  correspond quant à elle, au déplacement du plan moyen dans la direction  $z$ . Selon les hypothèses de Kirchhoff-Love, les déplacements verticaux sont les mêmes pour tous les points d'une fibre normale positionnée en  $(x, y)$  dans le plan  $(0, x, y)$  du plan moyen, et la composante  $w_0$  ne dépend que de  $x$  et  $y$  avec  $w_0(x, y, z) = w_0(x, y)$ .

$y)$ . Selon cette même hypothèse, nous savons également que pour tout point de la plaque  $w(x, y, z) = w_0(x, y, z) = w_0(x, y)$ .

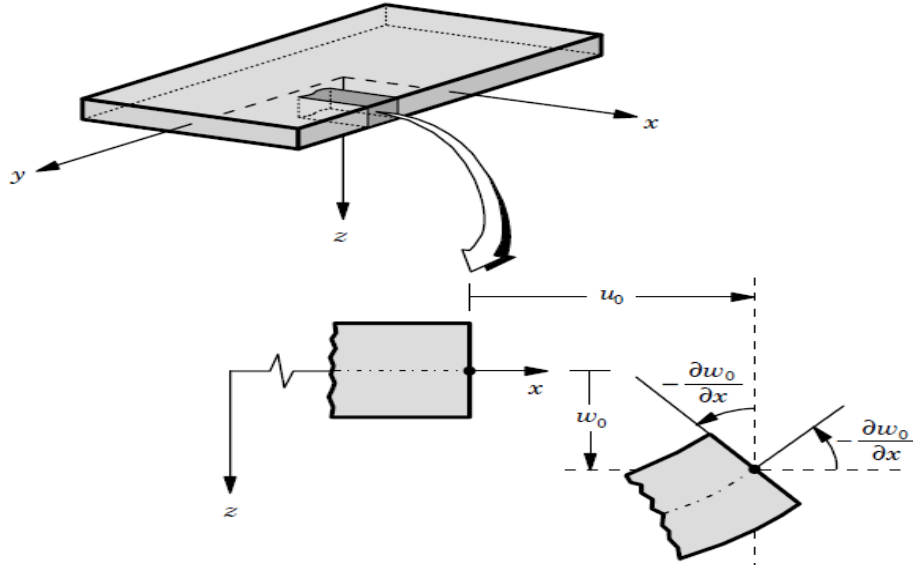


**Fig.8.3** Cinématique de Love-Kirchhoff

$$\begin{cases} u(x, y, z) = w(x, y) - z \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Tenant compte que les tangentes des angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$  représentent aussi la pente que prend le feuillet moyen. Ceci induit les relations suivantes :

$$\tan \theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \tan \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

Finalement, si la translation et la rotation du plan moyen, le déplacement  $\vec{u}$  de tout point de la plaque de position  $(x, y, z)^T$  dans l'état de référence, s'exprime sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \theta_y(x, y) \\ -\theta_x(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

## 8.5 Déformation d'une Plaque Mince

Soit un point  $\mathbf{M}$  dans l'état de référence, correspondant à la plaque au repos, ayant pour position  $(X_1, X_2, X_3)^T = (x, y, z)^T$ . Suite à la déformation  $\phi$ , nous avons vu que ce point subit un déplacement  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = (u, v, w)^T$ . dans le cadre HPP, nous pouvons considérer le *tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé* pour modéliser cette déformation en fonction du déplacement. Ce tenseur est symétrique et ses composantes écrites avec la notation de Voigt sont définies par:

$$\epsilon^g = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^g \\ \epsilon_{yy}^g \\ \epsilon_{zz}^g \\ \epsilon_{yz}^g \\ \epsilon_{xz}^g \\ \epsilon_{xy}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (4)$$

En employant les relations relatives au déplacement  $\vec{u}$  établies dans l'équation (3), nous obtenons pour le point  $(x, y, z)$  de la plaque au repos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx}^g = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \\ \epsilon_{yy}^g = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} \\ \epsilon_{zz}^g = \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial z} \\ \epsilon_{yz}^g = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial z} - \theta_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{xz}^g = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial z} + \theta_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{xy}^g = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \right) \right] \end{array} \right. \quad (5)$$

Ce qui nous donne comme tenseur des déformations en notation de Voigt:

$$\epsilon^g = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^g \\ \epsilon_{yy}^g \\ \epsilon_{zz}^g \\ \epsilon_{yz}^g \\ \epsilon_{xz}^g \\ \epsilon_{xy}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} + z \left( -\frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} \right) \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} - \theta_x(x, y) \right) = 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \theta_y(x, y) \right) = 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} \right) + z \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Nous pouvons décomposer le tenseur global des déformations  $\epsilon^g$  pour faire apparaître :

♦ le tenseur  $\epsilon_m$ , modélisant les *déformations membranaires* issues des efforts de membrane et induisant la translation de la plaque dans le plan  $(x, y)$  avec

$$\epsilon_m = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (7)$$

♦ le tenseur  $\epsilon_b$ , modélisant les *déformations de flexion*, issues des efforts de flexion qui se traduisent par une rotation de la plaque autour des axes  $x, y$  avec

$$\epsilon_b = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \right) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

♦ le tenseur  $\epsilon_c$ , modélisant les *déformations de cisaillement* issues des efforts de cisaillement qui sont considérés comme négligeables dans le cadre des plaques minces avec

$$\epsilon_c = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \theta_y(x, y) \\ \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} - \theta_x(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Au final, le *tenseur de déformation pour la plaque mince* modélisant à la fois les déformations membranaires (translation dans le plan  $(x, y)$ ) et de flexion (rotation autour des axes  $x$  et  $y$ ) est défini de la façon suivante :

$$\epsilon^g = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^g \\ \epsilon_{yy}^g \\ \epsilon_{xy}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \epsilon_m + z \epsilon_b \quad (10)$$

Ce qui abouti aux relations suivantes

$$\begin{cases} \epsilon_{xx}^g = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \\ \epsilon_{yy}^g = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} \\ \epsilon_{xy}^g = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (11)$$

## 8.6 Tenseur de Contraintes et Loi de Comportement

La plaque mince est sollicitée uniquement dans son plan  $(x, y)$  du fait de son faible épaisseur et que la direction  $z$  est orthogonale à la plaque. Les composantes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$  du tenseur de contraintes sont nulles sur les deux faces de la plaques et par raison de continuité sont négligeables à l'intérieur de la plaque. Pour la même raison, les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  sont non nulles et constantes mais peu dépendantes de  $z$ .

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & \sigma_{xy}(x, y) & \sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{yx}(x, y) & \sigma_{yy}(x, y) & \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zx} = 0 & \sigma_{zy} = 0 & \sigma_{zz} = 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

la formulation de la *loi de Hooke* en fonction de  $E$  et  $\nu$ , la relation entre le tenseur de contraintes  $\bar{\sigma}$  et le tenseur de déformation  $\bar{\epsilon}$  s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (13)$$

En considérant le tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé établi dans l'équation (10), nous obtenons comme loi de comportement pour la plaque mince :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (e_{xx} + z \kappa_{xx} + \nu e_{yy} + \nu z \kappa_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu e_{xx} + \nu z \kappa_{xx} + e_{yy} + z \kappa_{yy}) \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{1 + \nu} (e_{xy} + z \kappa_{xy}) \end{cases} \quad (14)$$

Au final, nous avons ainsi la relation suivante entre les tenseurs  $\sigma$  (avec  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ ) et  $\epsilon$  (avec  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ ) en considérant la loi de Hooke pour la place mince :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (15)$$

## 8.7 Équations d'Équilibre d'une Plaque

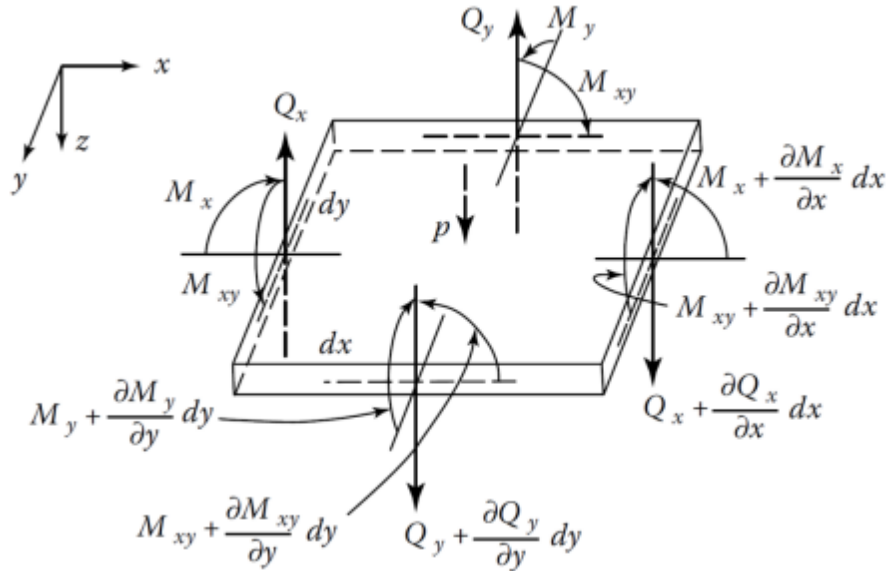


**Fig.8.4** Élément d'une plaque uniformément chargée

Les contraintes réparties sur l'épaisseur de la plaque provoquent des moments de flexion, des moments de torsion et des forces verticales de cisaillement. Les résultantes (moments et forces) par unité de longueur peuvent s'écrire

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz ; \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (16)$$

L'équation différentielle de l'équilibre des plaques minces s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (17)$$

L'équation différentielle qui exprime la flexion des plaques peut être obtenue comme suit:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (18)$$

w : est la flèche

D : étant la rigidité flexionnelle de la plaque :  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$

## 8.8 Énergie de Déformation d'une Plaque Mince

L'énergie de déformation développée dans une plaque mince est donnée par:

$$W = \frac{1}{2} \int_{A_t} \left( \epsilon_m^T \frac{E h}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \epsilon_m + \epsilon_b^T \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \epsilon_b \right) dx dy. \quad (19)$$

Série d'exercicesExercice 1

On considère une plaque semi-infinie dans la direction 2 et encastree en  $x_1 = 0$ . Le bord situé en  $x_1 = L$  est soumis à une densité linéique d'efforts  $F\vec{e}_3$ . La plaque est soumise à une pression  $-p\vec{e}_3$  comme indiqué sur la figure. On considère que la plaque obéit aux hypothèses de Love-Kirchhoff. Sachant que les tenseurs des tensions et des moments sont de la forme suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} ax_1^2 + bx_1 + c & 0 \\ 0 & \nu(ax_1^2 + bx_1 + c) \end{pmatrix}$$

1. Quelle hypothèse du caractère semi infini de la plaque suggère-t-il de faire ?
2. Calculer les constante **a**, **b** et **c** de manière à vérifier l'équilibre de la plaque ?
3. En déduire les réactions dans l'encastrement.

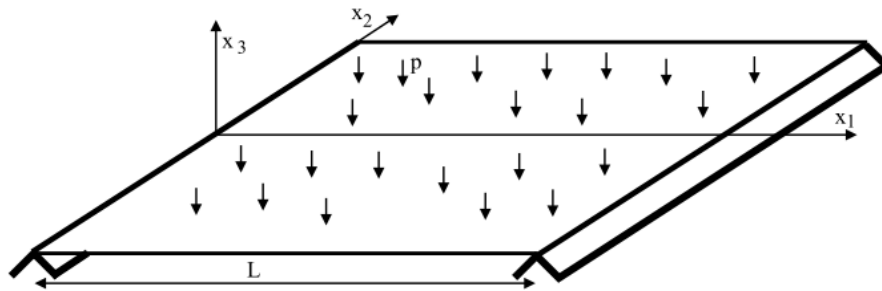


Fig.8.5 Plaque semi infinie en flexion

Solution

1. Le modèle étant semi-infini dans la direction  $x_2$ , la solution loin des bords situés à l'infini est indépendante de  $x_2$ :  $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$ .

Par ailleurs, la plaque étant sollicitée en flexion uniquement, le tenseur des moments et celui des déformations sont nuls en tout point de la plaque.

2. La plaque est soumise à une pression  $-p\vec{e}_3$ . L'équation d'équilibre en déplacement (8.17)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$$

Devient,

$$2a + p = 0 \Rightarrow a = -\frac{p}{2}$$

Sur les bords :  $x_1 = 0$  (normale  $\vec{n} = -\vec{e}_r$ ) et  $x_1 = L$  (normale  $\vec{n} = \vec{e}_r$ ). La condition en effort est de type moment  $Z$  nul. L'équation sur les deux bords donne :

$$\vec{n} \cdot M \cdot \vec{n} + Z \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{cases} -M_{xx}(x_1 = 0) + 0 = 0 \\ -M_{xx}(x_1 = L) + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ aL^2 + bL = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = \frac{pL}{2} \end{cases}$$

La solution est donc :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2}x_1(x_1 - L) & 0 \\ 0 & -\nu\frac{p}{2}x_1(x_1 - L) \end{pmatrix}$$

3. La réaction dans les appuis est calculée en  $x_1 = 0$  et  $x_1 = L$  par la relation suivante :

$$\vec{div} \cdot M \cdot \vec{n} + Y = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}(x_1 = 0) + Y(0) = 0 \\ -\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}(x_1 = L) + Y(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(0) = \frac{pL}{2} \\ Y(L) = \frac{pL}{2} \end{cases}$$

**Exercice 2**

Dans la zone la plus sollicitée d'une pièce chargée, on relève l'état de contrainte suivant :  
 $\sigma_{xx} = 200\text{MPa}$ ,  $\sigma_{yy} = -150\text{MPa}$ ,  $\sigma_{zz} = 200\text{MPa}$ ,  $\sigma_{xy} = 100\text{MPa}$ ,  $\sigma_{xz} = 0\text{MPa}$  et  $\sigma_{yz} = 0\text{MPa}$ .  
 La limite élastique est identifiée sur la courbe de traction et vaut  $\sigma_0 = 250\text{MPa}$ .

1. Déterminer les expressions analytiques des contraintes principales. Pour les valeurs données, comparer les contraintes principales à la limite élastique.
2. Sur quelle hypothèse est basé le critère de Tresca? Appliquer ce critère à l'état de contrainte étudié.
3. Sur quelle hypothèse est basé le critère de Von Mises? Appliquer ce critère à l'état de contrainte étudié.

**Solution**

1. Contraintes principales

$$\sigma_I = \frac{1}{2} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4(\sigma_{xy})^2}]$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{zz}$$

$$\sigma_{III} = \frac{1}{2} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4(\sigma_{xy})^2}]$$

Application numériques :

$$\sigma_I = -176.56\text{MPa} ; \sigma_{II} = 200\text{MPa} ; \sigma_{III} = 226.56\text{MPa}$$

$$(\sigma_{III} > \sigma_{II} > |\sigma_I|) < \sigma_0$$

Toutes les contraintes principales sont inférieures à la limite élastique ( $\sigma_0$ ) en valeur absolue.

2. Critère de Tresca : critère sur le cisaillement maximal

$$\sigma_{\text{Tresca}} = \sigma_{III} - \sigma_I = 403.1\text{MPa} > \sigma_0 \Rightarrow \text{Le critère de Tresca non vérifié.}$$

3. Critère de Von Mises : critère énergétique sur le déviateur des contraintes.

$$\sigma_{\text{v.mises}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{II} - \sigma_I)^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 + (\sigma_{III} - \sigma_{II})^2]} = 390.50\text{MPa} > \sigma_0$$

$\Rightarrow$  Le critère de Von Mises non vérifié.

**Exercice 3**

La plaque est rapportée à ses axes de symétrie, Ox, Oy, Oz. Les côtés parallèles à Ox et Oy ont pour longueurs d'arêtes 2a et 2b.

L'épaisseur est h.

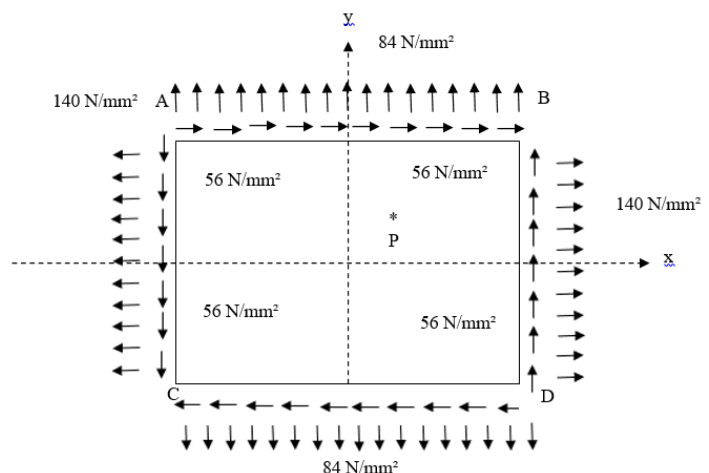
Les coefficients élasticité sont notés E et  $\nu$ . Le chargement a lieu exclusivement sur les bords sous forme de forces surfaciques uniformément réparties. Comme l'indique la figure.

On prendra : A=1m; b=0.5 m; h=0.01m; E=200 GPa;  $\nu=0.25$ .

Donner au point courant  $P(x,y,z)$ , les composantes des tenseurs de contrainte et de déformation, celles du vecteur translation et du pseudo-vecteur rotation.

- Quelles sont en particulier les déplacements des sommets du rectangle ?

**NB:** On considérera que le voisinage de la particule 0 ne subit ni translation ni rotation, c'est-à-dire que les axes sont liés à ce voisinage.



**Solution**

Nous pouvons superposer trois chargements :

1) Un chargement de traction simple parallèlement à qui donne au point courant  $P$ , comme seule composante non nulle de  $\Sigma: \sigma_x$  d'où les trois seules composantes non nulles de  $\xi$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 700 \times 10^6 \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -175 \times 10^6$$

Pour le vecteur déplacement :  $\overrightarrow{P_0 P_1}$ :  $u = x\varepsilon_x$ ;  $v = y\varepsilon_y$ ;  $w = z\varepsilon_z$

Le pseudo-vecteur rotation  $\vec{\omega}$  est identiquement nul

Un chargement de traction pure parallèlement à  $y'y$  qui donne en  $P$ , comme seule composante non nulle de  $\sigma$  :

$$\sigma_y = 84 \text{ MPa}$$

D'où les trois seules composantes non nulles de  $\varepsilon$  sont:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = 420 \times 10^6 \quad \varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_y = -105 \times 10^6$$

## Exercices Divers

### Exercice 1

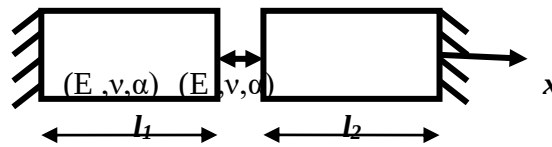
On considère un bloc constitué de deux pièces cylindriques d'axe (x-x), de section (S) de longueur  $l_1$  et  $l_2$  respectivement, constitué d'un même matériau thermoélastique linéaire et isotrope ( $E, \nu, \alpha$ ). Ces deux pièces sont retenues entre deux plateaux fixes et séparées entre elles par un joint de dilatation d'épaisseur ( $\Delta$ ) (figure 5.2). A l'état initial les contraintes sont nulles (état naturel), la température est  $T_0$  et les forces volumiques sont négligées. On impose à ces deux pièces une augmentation de température  $\theta_1 = T_1 - T_0$  uniforme.

1. Déterminer la valeur de  $T_1$  correspondant au contact entre les deux pièces.

A.N :  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\alpha = 12.106^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $l_1 = 10\text{m}$ ,  $l_2 = 7\text{m}$ ,  $\Delta = 5\text{mm}$ .

2. On impose ensuite une autre augmentation de température  $\theta_2 = T_2 - T_1$ .

Calculer la contrainte  $\sigma_{xx}$  résultant dans les pièces.



A.N :  $\theta_1 = 10^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \lambda \text{tr} \bar{\varepsilon} \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} - K\theta \bar{I} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \nu(\text{tr} \bar{\sigma}) \bar{I} - \alpha \theta \bar{I}\end{aligned}$$

### Solution

1. Déterminer la valeur de  $T_1$  correspondant au contact entre les deux pièces.

On a un état de contrainte uni-axial :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcul des déformations :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha\theta & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} + \alpha\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} + \alpha\theta \end{bmatrix}$$

Le joint de dilatation permet aux deux pièces de se déplacer librement sans contraintes :

$$\Delta \neq 0 ; \sigma_{xx} = 0$$

Sans variation de température la déformation relative est la même dans les deux pièces.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^1 = \varepsilon_{xx}^2 = \alpha\theta_1$$

$$\text{Dans la pièce 1 : } \Delta l_1 = \varepsilon_{xx} l_1$$

$$\text{Dans la pièce 2 : } \Delta l_2 = \varepsilon_{xx} l_2$$

Le contact entre les deux pièces se produit pour :  $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta$

$$\varepsilon_{xx} (l_1 + l_2) = \Delta \leftrightarrow \alpha \theta_1 (l_1 + l_2) = \Delta \leftrightarrow \alpha (T_1 - T_0) (l_1 + l_2) = \Delta$$

$$T_1 = \frac{\Delta}{\alpha (l_1 + l_2)} + T_0 = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{12.106 \cdot 10^{-6} (10 + 7)} + 20 = 25.2^\circ\text{C}$$

2. Contrainte résultante d'une augmentation  $\theta_2 = T_2 - T_1$  :

Après contact les deux pièces ne peuvent plus s'allonger :

$$\varepsilon_{xx} = 0 \rightarrow \sigma_{xx} E + \theta_2 \alpha = 0 \rightarrow \sigma_{xx} = -E \alpha \theta_2 = -2.1 \cdot 10^5 \cdot 12.106 \cdot 6.10 = 25.2 \text{ Mpa}$$

**Exercices 2**

Soit le tenseur de contraintes suivant :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Déterminer les composantes du tenseur des déformations, sachant que :

$$E = 125 \text{ Mpa et } \mu = 45 \text{ Mpa.}$$

**Solution****1. Tenseur des déformations**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

$$\sigma_{kk} = \text{tr}(\bar{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 4 + 3 + 1 = 8 \text{ Mpa}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightarrow \nu = \frac{E}{2\mu} - 1 = \frac{125}{2 \cdot 45} - 1 = 0,39$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \delta_{11} \sigma_{kk} = \frac{1+0,31}{125} 4 - \frac{0,39}{125} 1,8 = 1,952 \times 10^{-2}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \delta_{22} \sigma_{kk} = \frac{1+0,31}{125} 3 - \frac{0,39}{125} 1,8 = 0,84 \times 10^{-2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} \delta_{33} \sigma_{kk} = \frac{1+0,31}{125} 1 - \frac{0,39}{125} 1,8 = -1,38 \times 10^{-2}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} - \frac{\nu}{E} \delta_{12} \sigma_{kk} = \frac{1+0,31}{125} 2 - 0 = 2,22 \times 10^{-2} \quad (\delta_{12} = 0)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} - \frac{\nu}{E} \delta_{13} \sigma_{kk} = \frac{1+0,31}{125} 0 - 0 = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} - \frac{\nu}{E} \delta_{23} \sigma_{kk} = \frac{1+0,31}{125} 0 - 0 = 0$$

$$\text{Donc : } \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1,952 & 2,22 & 0 \\ 2,22 & 0,84 & 0 \\ 0 & 0 & -1,38 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

**2. Tenseur des contraintes**

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightarrow \nu = \frac{E}{2\mu} - 1 = \frac{125}{2 \cdot 45} - 1 = 0,39$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{0,39 \times 125}{(1-2 \times 0,39)(1+0,39)} = 159,42$$

$$i = 1 ; j = 1 :$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11} + \lambda (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &= (159,42 + 2 \times 0,39) 1,952 \times 10^{-2} + 159,42 (0,84 - 1,38) 10^{-2} \\ &= 226,62 \times 10^{-2} \text{ Mpa} \end{aligned}$$

$$i=1 ; j=2 :$$

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12} = 2 \times 2,22 \times 10^{-2} = 2,44 \times 10^{-2} \text{ Mpa}$$

$$i=1 ; j=3 :$$

$$\sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13} = 0 \text{ Mpa}$$

$$i=2 ; j=2 :$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{33} \\ &= (159,42 + 2 \times 0,39) 0,84 \times 10^{-2} + 159,42 \times 1,952 \times 10^{-2} + 159,42 \times (-1,38 \times 10^{-2}) \\ &= 105,11 \text{ Mpa} \end{aligned}$$

$$i=2 ; j=3 :$$

$$\sigma_{23} = 2\mu \varepsilon_{23} = 0 \text{ Mpa}$$

$$i = 3; j = 3:$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33} + \lambda \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ &= (159.42 + 2 \times 0.39)(-1.38 \times 10^{-2}) + 159.42 \times 10^{-2}(1.952 + 0.84) \\ &= 224 \times 10^{-2} \text{ Mpa}\end{aligned}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 226.62 & 2.44 & 0 \\ 2.44 & 105.11 & 0 \\ 0 & 0 & 224 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

### Exercice 3

Soit un barrage poids dans la base  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  de section triangulaire OAB (figure ci-dessous), encastré à sa base. Le barrage est soumis à son poids propre  $\rho b g$  et à la poussée  $\rho_e g x_2$  de l'eau, sa surface est située à une hauteur  $h$  égale à celle du barrage. Le matériau du barrage est considéré élastique linéaire et isotrope, de paramètres  $E$  et  $\nu$ . La pression atmosphérique est négligée.

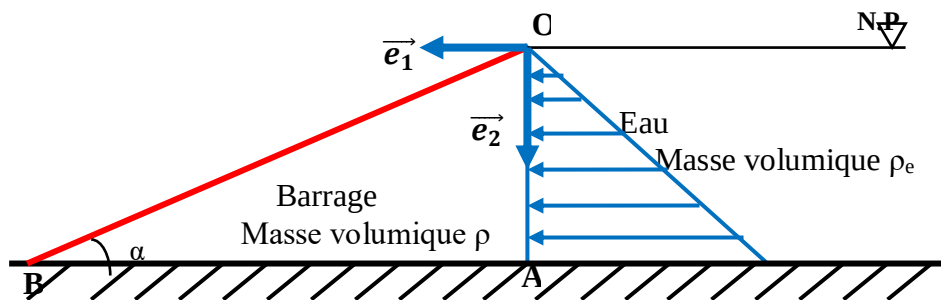


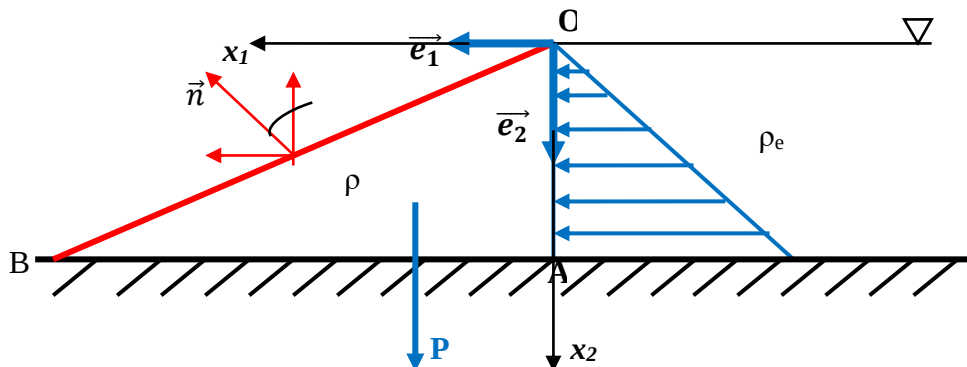
Figure du Barrage dans le plan

1. Pourquoi il s'agit de déformation plane et donner les formes générales de  $\vec{U}$ ,  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\varepsilon}$ .
2. Ecrire les conditions aux limites d'une tranche du barrage et écrire les équations d'équilibres mécaniques à l'intérieur du domaine puis au niveau de ces conditions limites en contrainte.

On postule que tous les termes du tenseur de contrainte sont des fonctions linéaires des coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ . Donner l'expression générale de la matrice d'un tel champ de contrainte. Montrer qu'il vérifie l'équation de Beltrami et donc la solution du problème élastique.

### Solution

1. Pourquoi déformations planes :



La section du barrage est identique sur toute sa longueur, de même que le chargement subit, et on déduit le champ de déplacement entièrement situé dans le plan perpendiculaire à sa longueur. La déformation dans le sens de la longueur est empêchée.

Le champ  $\vec{U}$  vaut :  $\vec{U} = \begin{cases} U_1(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2) \\ U_3 = 0 \end{cases}$

Le tenseur de déformation  $\bar{\varepsilon}$  :  $\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Le tenseur de contrainte  $\bar{\sigma}$  :  $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

2. Conditions aux limites :

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}(\vec{n})$$

a. Face immergée OA :  $x_1 = 0$  ;  $\vec{n} = -\vec{e}_1 = (-1 \ 0 \ 0)$

$$\vec{T}(-\vec{e}) = \begin{pmatrix} \rho_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Face OB :  $x_1 = x_2$  ;  $\vec{n}_1 = (\cos\alpha \ -\sin\alpha \ 0) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0)$  ; car  $\alpha = 45^\circ$

$$\vec{T}(\vec{n}_1) = (0 \ 0 \ 0)$$

• Equations d'équilibres  $\vec{f} = \{f_1 \ f_2 \ f_3\} = (0 \ \rho_b g \ 0)$

$$\vec{\text{div}} \bar{\sigma} + \vec{f} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + 0 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

On pose :  $\begin{cases} \sigma_{11} = Ax_1 + Bx_2 \\ \sigma_{22} = A'x_1 + B'x_2 \\ \sigma_{12} = Cx_1 + Dx_2 \end{cases}$  ;  $\vec{\text{div}} \bar{\sigma} + \vec{f} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A + D = 0 \\ C + B' = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

- On utilise la première condition à la limite:  $\bar{\sigma} \cdot (-\vec{e}) = \vec{T}(-\vec{e}_1)$ ;  $x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_e g x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = \rho_e g x_2 \\ \sigma_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Ax_1 - Bx_2 = \rho_e g x_2 \\ Cx_1 + Dx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \rho_e g \\ D = 0 \end{cases}$$

De (1) :  $D = 0 \rightarrow A = 0$

- La deuxième condition à la limite:

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}(\vec{n}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = -\sigma_{12} \\ \sigma_{12} - \sigma_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax_1 + Bx_2 - Cx_1 - Dx_2 = 0 \\ Cx_1 + Dx_2 - A'x_1 - B'x_2 = 0 \end{cases}$$

Sur cette face :  $x_1 = x_2$  :

$$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 - Cx_1 - Dx_2 = 0 \\ Cx_1 + Dx_2 - A'x_1 - B'x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = B = -\rho_e g \\ A' + B' = C \end{cases}$$

De (2) :

D'où :

$$B' = -\rho_b g - C = -\rho_b g + \rho_e g = B'$$

$$A' = C - B' = -\rho_e g + \rho_b g - \rho_e g = -2\rho_e g + \rho_b g$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\rho_e g x_2 \\ \sigma_{22} = (\rho_b - 2\rho_e)g \cdot x_1 + (\rho_e - \rho_b)g \cdot x_2 \\ \sigma_{12} = -\rho_e g \cdot x_1 \end{cases}$$

$$\sigma_{33} = v[(\rho_b - 2\rho_e)g \cdot x_1 - \rho_b g \cdot x_2]; \text{ car : } \sigma_{33} = v(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

**N.B:** Les équations de Beltrami sont vérifiées comme les composantes du tenseur de contraintes sont des fonctions linéaires en  $x_1$  et  $x_2$ .

#### Exercice 4

L'état de contrainte en un point d'un solide est défini par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 6a \\ 0 & 6a & 4a \end{bmatrix} (Mpa) \quad a : \text{constante réelle}$$

1. Déterminer l'état de contrainte pour  $a = 0$ .
2. Déterminer en fonction de  $a$  les contraintes principales.
3. Tracer le cercle de Mohr pour  $a = 1$ .

#### Solution

1. Détermination l'état de contrainte pour  $a = 0$ .

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 6a \\ 0 & 6a & 4a \end{bmatrix} (Mpa)$$

C'est l'état de contrainte uni axial suivant la première direction (elle peut être une traction ou compression).

2. Détermination de contraintes principales en fonction  $a$ :

$$\det(\bar{\sigma} - \sigma \bar{I}) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 6a \\ 0 & 6a & 4a \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 6a \\ 0 & 6a & 4a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow (2 - \lambda)[(4a - \lambda)^2 - (6a)^2] = 0$$

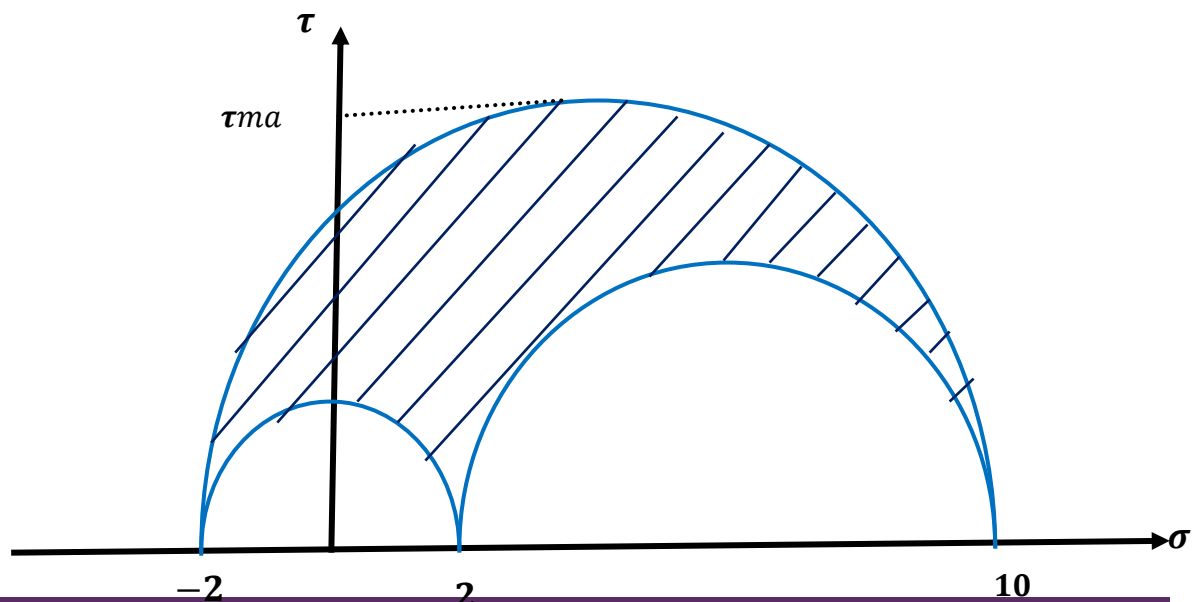
Les solutions de l'équation sont donc:

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 10a \\ \lambda = -2a \end{cases}$$

Classement des contraintes principales :  $\sigma_I = 10a \text{ Mpa}$  ;  $\sigma_{II} = 2 \text{ Mpa}$  ;  $\sigma_{III} = -2a \text{ Mpa}$  (si  $a > 0$ )

3. Tracer le cercle de Mohr pour  $a = 1$  :

Les contraintes principales sont :  $\sigma_I = 10 \text{ Mpa}$  ;  $\sigma_{II} = 2 \text{ Mpa}$  ;  $\sigma_{III} = -2 \text{ Mpa}$



Tricercle de Mohr pour état de contrainte demandé ( $a = 1$ ).

### Exercice 5

En tout point M du solide, on définit le vecteur déplacement suivant :

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 - x_2 - x_3 \\ U_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 4x_2 \\ U_3(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 4x_3 \end{cases}$$

1. Déterminer le tenseur de déformation correspondant.
2. Déterminer les déformations principales.
3. Déterminer l'allongement unitaire suivant la direction  $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .
4. Déterminer le glissement selon  $\vec{n}$  et  $\vec{m} = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ .

### Solution

1. Détermination du tenseur de déformation correspondant :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{U} + (\overline{\text{grad}} \vec{U})^t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2}) & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2}(-1-1) & \frac{1}{2}(-1-1) \\ \frac{1}{2}(-1-1) & 4 & \frac{1}{2}(0+0) \\ \frac{1}{2}(-1-1) & \frac{1}{2}(0+0) & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer les déformations principales.

Nous avons :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\bar{\varepsilon} - \lambda \bar{I}) = 0 \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \det \left( \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (5-\lambda)[(4-\lambda)(4-\lambda)-0] + 1[(-1)(4-\lambda)-0] + 1[(4-\lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)[(5-\lambda)(4-\lambda)-1-1] = 0 \rightarrow (4-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

Dont les solutions sont:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

Classement des déformations principales :  $\varepsilon_I = 6$  ;  $\varepsilon_{II} = 4$  ;  $\varepsilon_{III} = 3$

3. Détermination de l'allongement unitaire suivant la direction  $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

$$\varepsilon(\vec{n}) = \vec{n} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 3$$

4. Calcul du glissement selon  $\vec{n}$  et  $\vec{m} = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ .

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{e}_3, \vec{e}_1) &= 2\vec{n} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \vec{m} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= 2\left(\frac{1.5}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

### Exercice 6

La répartition des contraintes dans un corps solide déformable en équilibre statique sans effet des forces de volume est donnée par le tenseur suivant rapporté au repère  $\{0; e_1, e_2, e_3\}$  :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} \text{ (Mpa)}, \text{ (L'état des contraintes est indépendant de l'axe vertical } ox_3 \text{)}$$

La contrainte agissant au point  $M(0,1)$  sur un plan verticale de normale inclinée de  $45^\circ$  par rapport à  $ox_1$ , est une contrainte de cisaillement pure  $\tau$ .

- Déterminer  $\sigma_{12}(x_1, x_2)$  et donner la valeur de  $\tau$ .

### Solution

$$\begin{aligned} \text{Les équations d'équilibre statique : } \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 & (1) \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} - 2 = 0 & (2) \\ 0 = 0 & (3) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = -1 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation (1) donne :  $\sigma_{12} = -x_2 + f(x_1)$

Avec l'équation (2) :  $f(x_1) = 2x_1 + c$

$c$ : constante

D'où :  $\sigma_{12} = 2x_1 - x_2 + c$

$$\text{Donc: } \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 + c & 0 \\ 2x_1 - x_2 + c & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} \text{ (Mpa)}$$

Le tenseur des contraintes au point  $M(0,1)$  :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 + c & 0 \\ -1 + c & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Mpa)}$$

Le vecteur contrainte au point  $M$  selon  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T = \sigma \cdot \vec{n} = \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -1+c & 0 \\ -1+c & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} c \\ c-3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La composante normale :  $\sigma_n = \vec{n}^t \cdot \sigma \cdot \vec{n} = \vec{n}^t \cdot T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} c \\ c-3 \\ 0 \end{pmatrix} = c - \frac{3}{2}$

La contrainte est une contrainte de cisaillement pure:  $\sigma_n = 0$  d'où  $c = \frac{3}{2}$

Finalement:  $\sigma_{12} = \tau_{12} = 2x_1 - x_2 + c = 2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}$

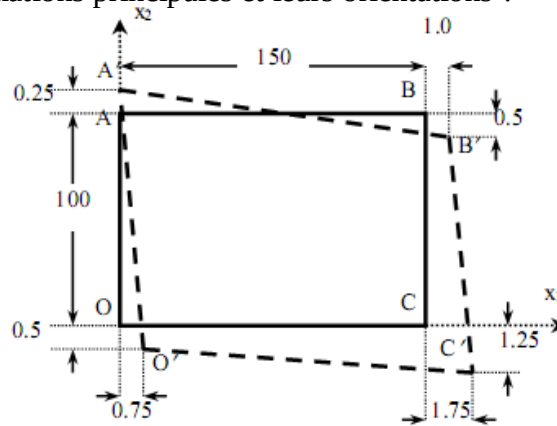
La composante tangentielle :  $\tau_n = \sqrt{|T|^2 - \sigma_n^2}$

$$\Rightarrow \tau_n = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(c - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \text{ Mpa}$$

### Exercice 7

Une plaque mince rectangulaire OABC de section initiale (150x100) mm<sup>2</sup> est déformée en 'A'B'C' tel que montré sur la figure ci-dessous. En supposant un champ des déplacements uniformes :

- 1-Déterminer les déformations dans le système d'axes ( $x_1, x_2$ ) ?
- 2-Calculer les déformations principales et leurs orientations ?



### Solution

1-Les déformations dans le système d'axes ( $x_1, x_2$ ) :

- Les déformations longitudinales

$$\varepsilon_{x_1x_1} = \varepsilon_{AB} = \frac{U_B - U_A}{AB} = \frac{1 - 0}{150} = 6,67 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{x_2x_2} = \varepsilon_{CB} = \frac{U_B - U_C}{CB} = \frac{-0.5 - (0.1.25)}{150} = 7,5 \cdot 10^{-3}$$

- Les déformations angulaires

$$\gamma_{x_1x_2} = \frac{U_O - U_A}{OA} - \frac{V_O - V_C}{OC} = \frac{0,75 - 0}{100} - \frac{-0.5 - (0.1.25)}{150} = 12,5 \cdot 10^{-3}$$

On prend  $\gamma_{x_1x_2} = -12,5 \cdot 10^{-3}$ , car l'angle CBA à augmente plus de 90°.

2-Les déformations principales et leurs orientations :

$$\varepsilon_{x_1x_2} = \frac{\varepsilon_{x_1x_1} - \varepsilon_{x_2x_2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{x_1x_1} - \varepsilon_{x_2x_2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{x_1x_2}}{2}\right)^2} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 13,350 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_2 = 0,821 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{x_1x_2}}{\varepsilon_{x_1x_1} - \varepsilon_{x_2x_2}} = -\frac{12.5}{6,67-7.5} = 15,06$$

$$\Rightarrow \theta_p \cong 43^\circ$$

### Exercice 8

Dans un repère orthonormé ( $oe_1e_2e_3$ ) soit le tenseur de contraintes suivant :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1- Décomposez le tenseur déviateur et sphérique ?

2- Trouvez le tenseur de contraintes  $\bar{\sigma}'$  dans la base orthonormé ( $Oe'_1e'_2e'_3$ ) dont la matrice de transformation est donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

### Solution

1- Le tenseur déviateur et sphérique ?

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_m I + \bar{\sigma}_D \quad \text{Sachant que} \begin{cases} \text{tr}(\bar{\sigma}_D) = 0 \\ \bar{\sigma}_m = \frac{I_1}{3} = 8 \end{cases}$$

• Le tenseur sphérique ( $\bar{\sigma}_m I$ ).2

$$\bar{\sigma}_S = 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

• Le tenseur déviateur des contraintes ( $\bar{\sigma}_D$ ):

$$\bar{\sigma}_D = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_S = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-8 & 4 & 0 \\ 4 & 9-8 & -2 \\ 0 & -2 & 3-8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma}_D = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

2- Le tenseur de contraintes  $\bar{\sigma}'$ .

$$\bar{\sigma}' = [\bar{\sigma}'] = [C] \cdot [\bar{\sigma}] \cdot [C]^T$$

$$\bar{\sigma}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{3\sqrt{2}+4}{2} & \frac{3\sqrt{2}-4}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}+4}{2} & 2\sqrt{2}+10 & -2 \\ \frac{3\sqrt{2}-4}{2} & -2 & -2\sqrt{2}+10 \end{bmatrix}$$

## Références Bibliographiques

- [1] L. Khazzar et A. Haddad : Mécanique des milieux continus, une introduction. Cours et exercices corrigés. Office des publications universitaires (2015)
- [2] Christian wielgosz : Cours et exercices de résistance des matériaux, Elasticité, plasticité, et éléments finis. Edition ellipses. Paris (1999).
- [3] Ali Bouafia, Mohamed Guenfoud, Ilhem Toumi , Amina Benrabah-Ammar , Abdelhali Bouruba et Younès Abed : Elasticité, rappels de cours et problèmes résolus. Edition Pages Bleues. Alger (2015).
- [4] Deghboudj Samir : Mécanique des milieux continus cours et applications. Université Tébessa (2016).
- [5] Yves Debard : Elasticité. Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique, IUT le Mans (France), 2011
- [6] Jean Salençon : Mécaniques des Milieux Continus, les éditions de l'école polytechnique. Palaiseau cedex (2016)
- [7] Samuel Forest : Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables, Centre des Matériaux/UMR 7633 Mines ParisTech /CNRS BP 87, 91003 Evry, France
- [8] Roland Fortunier : Comportement Mécanique des Matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Saint-Etienne (2004), France
- [9] Pierre Suquet : Rupture et Plasticité
- [10] G. Cailletaud : MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX SOLIDES, Notes de cours. MINES ParisTech, Mars (2012)
- [11] Jean-Claude Charmet : Mécanique du solide et des matériaux ´Elasticité-Plasticité-Rupture. ESPCI - laboratoire d'Hydrodynamique et mécanique Physique
- [12] Pierre Badel : Cours de mécanique des milieux déformables. Ecole des Mines Saint Etienne (2011-2012).
- [13] Sylvie Pommier : Mécanique des matériaux. Hal archives ouvertes.fr. France (2017)
- [14] Michel Maya : Mécanique des solides déformables- Contraintes. Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Campus de CLUNY. France
- [15] Erick Ringot : POLYCOPIE DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ELASTICITE LINEAIRE. Université Paul Sabatier, Toulouse 3
- [16] François Sidoroff : Mécanique des milieux continus. Ecole Centrale de Lyon (2010)
- [17] Guilhem Mollon : INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS-PARTIE 1. Polytech Grenoble. Département géotechnique (2012-2013)
- [18] Golay Frédéric : Mécanique des Milieux Continus. SEATECH
- [19] Jean Coirier, carole Nadot-Martin, Mécaniques des Milieux continus cours et exercices corrigés. Edition Dunod, Paris (2013).
- [20] N. MOËS, Mécanique des milieux continus, Cours de mécanique des milieux continus, Ecole centrale de Nantes, (2012).
- [21] S. Timoshenko, J.N. Goodier, Theory of elasticity, Edition McGRAW HILL, (1951).
- [22] Bertrand Sangrand, δ'ingénierie du crash dans les véhicules de transports (Matériaux Métalliques et lois de comportement dynamiques. Université de valenciennes et Hainaut-Cambrésis. ONERA-V1.01 Juillet 2007.
- [23] Boudier Bachir : Elasticité Cours et Exercices. Université de Tissemsilt 2023- Algérie
- [24] Draiche Kada, Polycopié de Cours Mécanique des solides déformables “ ELASTICITE I ” Université Ibn Khaldoun Tiaret. Septembre 2016.

- [25] Yves Debard, Résistance des matériaux : élasticité, méthodes énergétiques, méthode des éléments finis Rappels de cours et exercices avec solutions Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique <http://iut.univlemans.fr/ydlogi/index.html> 20 juin 2011
- [26] A.Bennani - Y.lafon-jalby - M.Massenzio - S.Ronel, Elasticité linéaire problèmes et corrigés, semestre 3 module M3102. IUT Lyon 1.
- [27] Abdellatif MEGNOUNIF, Théorie de l'Elasticité, Cours en ligne-2020, Université Abou Bekr Belkaïd de Tlemcen-Algérie
- [28] Nicolas Garraud, Guillaume Millet, Laurent Zamponi, Cercle de Mohr Agrégation de mécanique 2004
- [29] Khebizi Mourad, Cours d'Elasticité-2021/2022, Université des Frères Mentouri Constantine Algérie
- [30] James-A.Goulet, Transformation des contraintes et des déformations 2D-3D (2011) : Cercle de Mohr Département des génies civil, géologique et des mines Polytechnique Montréal-Canada
- [31] A. Alliche, Mécanique des solides, élasticité - UPMC Paris 6.
- [32] Djebbloun Youcef, Hecini Mabrouk (2020/2021), Cours Elasticité, Université Mohamed Khider Biskra, Algérie
- [33] A Bouafia, M Guenfoud, I Toumi, A B Ammar, A B Bourouba et Y Abed. Elasticité rappels de cours et problèmes résolus (2016). Série Pages Bleues. Algérie.
- [34] M Kaddour. Introduction à la Mécanique des Milieux Continus et Elasticité (2018). Série Pages Bleues. Algérie.
- [35] C Wielgosz. Cours et exercices de RDM élasticité, plasticité, éléments finis), édition ellipses, 1999.
- [36] S Belkahla. Cours d'Elasticité-Plasticité. Publications de l'université Badji Mokhtar- Annaba. Algérie.
- [37] Belhocine Malika, Polycopié Théorie d'élasticité cours et application UMLTO. Septembre 2024-2025.Algérie.
- [38] DJEBLOUN Youcef et. HECINI Mabrouk cours élasticité Université Mohamed Khider – Biskra. Septembre 2021-2022.Algérie.

**Toutes les ressources internet en Open Access ont été utilisées pour réaliser ce travail de synthèse.**