Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Bentaleb Abdelaziz

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Systèmes Dynamiques

Thème

Algèbres de Leibniz

Soutenu publiquement le ... septembre 2020 devant le jury composé de

Dekkar Khadra	Président
Adimi Hadjer	Encadrant
Chebel Zoheir	Examinateur

Promotion 2019/2020

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu ma directrice de mémoire, madame Adimi Hadjer, professeure chercheure à l'université de Bordj Bouareridj, qui a su me faire profiter de son expertise en me prodiguant de judicieux conseils. Son dévouement, son ouverture d'esprit, de même que son support indéfectible, dans les bons moments comme dans les périodes plus difficiles, m'ont permis de mener à bien ce projet, et je lui en suis infiniment reconnaissant.

Je réserve mes plus grands remerciements à ma famille, qui ont toujours cru en moi et qui m'ont offert leur soutien moral et affectif. Sans leurs encouragements répétés, la réalisation de ce travail n'aurait pas été possible.

Enfin, je remercie madame Benterki Rebiha, professeure chercheure à l'université de Bordj Bouareridj, qui a si gentiment m'a aider chaque fois que j'avais besoin d'aide et m'a accordé une partie de son précieux temps.

Résumé

Le but de notre mémoire est d'étudier les algèbres de Leibniz pour cela on a défini les espaces vectoriels, et les applications linéaire. Les algèbres de Leibniz sont des algèbres dont le produit, noté $[\cdot,\cdot]$, satisfait une certaine forme de l'identité Jacobi, sans aucune hypothèse de symétrie. Ainsi, toutes les algèbres de Lie sont Leibniz. Et on parle sur les propriétés des algèbres de Leibniz, résoluble, nilpotentes, nullfiliforme, filiforme, simple et semi-simple.

Introduction

L'algèbre a d'abord été une branche des mathématiques qui concernait les lois des opérations sur les nombres et la résolution des équations pour devenir plus tard une théorie des opérations puis des propriétés sur les êtres mathématiques en général. Cette rubrique tente de retracer la longue épopée d'une discipline qui a commencé, il y a plus de 4000 ans, à l'époque de la civilisation babylonienne et qui aujourd'hui encore poursuit son évolution. L'algèbre s'appuie sur des structures algébriques, comme la topologie. Plusieurs types d'algèbres existent et ont été étudiés de façon approfondie, notamment les algèbres de Lie, de Leibniz, Associatives...

Dans notre mémoire on concentre sur l'algèbre de Leibniz qui a été introduite pour la première fois par Bloh dans le milieu des années soixante du siècle dernier (voir [1,2,3]) puis oublié pendant près de trente ans. Au début des années 1990, ils ont été redécouverts par Loday qui, avec ses étudiants et collaborateurs, a développé une grande partie de la théorie des algèbres de Leibniz, modules de Leibniz (bi) et cohomologie Leibniz (voir [4,5,6]) Une algèbre de Leibniz gauche (resp. Droite) est un espace vectoriel avec une multiplication pour lequel chaque opérateur de multiplication gauche (resp. droite) est une dérivation (c'est-à-dire un opérateur linéaire satisfaisant la loi habituelle du produit de Leibniz). En tant que telles algèbres de Leibniz sont des versions non anticommutatives des algèbres de Lie. En particulier, les algèbres de Leibniz sont des exemples d'algèbres non associatives (voir [7]). Contrairement à d'autres papiers à ce sujet, nous étudions les algèbres de Leibniz exclusivement de ce point de vue. On essaie de rendre notre mémoire suffisamment autonome pour qu'elle puisse servir d'une première introduction aux algèbres de Leibniz, leurs modules (ou représentations). Les algèbres de Leibniz jouent un rôle important dans différents domaines de mathématiques et physique (voir [4]). Au cours des trois dernières décennies, de nombreux articles sur des algèbres de Leibniz sont apparues et de nombreux résultats ont été dupliqués. Dans notre mémoire nous développons les bases de la théorie des algèbres de Leibniz de manière systématique en les considérant comme une classe spéciale d'algèbres non associatives. Dans ce qui suit, nous décrirons le contenu de cette mémoire plus en détail.

On a deux chapitres dans notre mémoire :

Le premier chapitre est dévoué aux espaces vectoriels qu'on aura besoin plus tard dans notre mémoire, est fait de cinq sections. La première section contient des définitions de bases des espaces vectoriel et ses propriétés. Dans la deuxième section on montre comment faire le produits de deux espaces vectoriels avec des exemples. La troisième section contient les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir des sous-espaces vectoriels avec des exemples. Dans la quatrième section on définit les applications linéaires, leur caractéristiques et les cas particulier avec des exemples. La cinquième section on définit les différentes algèbres, sous-algèbres et leur conditions.

Dans le deuxième chapitre on parle sur les algèbres de Leibniz, le reste des sections sont dévouées à plusieurs résultats pour les constants de structures, sous-algèbres de Leibniz, et les idéaux. De plus on prouve les idéaux et les quotients des algèbres. Puis on introduits les opérateurs de multiplication, les algèbres de Leibniz résoluble, Nilpotente, filiforme, nulfiliforme simple et semi simple, de plus les séries, dérivées, centrales inférieurs, caractéristiques et la base adapté.

Table des matières

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

1.1 Définitions de bases

Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel sont définies :

* Une addition interne (on peut ajouter entre deux éléments de l'ensemble et cela donne un élément de l'ensemble), Notée additivement (+).
* Une multiplication externe (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel et cela donne Un élément de l'ensemble, notée multiplicativement (·), de $\mathbb{K} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$.

Ces deux opérations doivent vérifier certaines propriétés de compatibilité.

1.1.1 Définition d'un espace vectoriel

Définition 1.1.1. *On dit que $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si $\mathbb{E}$ est muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes :*

* Addition : $\begin{cases} \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ (v, w) \longmapsto v + w \end{cases}$

1. Associativité : $\forall\ u, v, w\ \in \mathbb{E}, \qquad u + (v + w) = (u + v) + w.$
2. Élément neutre : $\exists\ e \in \mathbb{E}, \forall\ v \in \mathbb{E}, \quad v + e = e + v = v.$
3. Opposé : $\forall\ v \in \mathbb{E}, \exists\ v' \in \mathbb{E}, \qquad v + v' = v' + v = e.$
4. Commutativité : $\forall\ v,\ w \in \mathbb{E}, \qquad v + w = w + v.$

Ces Propriétés font de ($\mathbb{E}$,+) un group commutatif.

* Multiplication externe : $\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ (\lambda, v) \longmapsto \lambda v \end{cases}$

5. Associativité mixte : $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\ v \in \mathbb{E}, \qquad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v.$
6. Élément neutre : $\forall\ v \in \mathbb{E}, \qquad 1v = v.$
7. Distributivité(1) mixte : $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\ v \in \mathbb{E}, \qquad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v.$
8. Distributivité(2) mixte : $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \forall v,\ w \in \mathbb{E}, \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w.$

1.1.2 Quelques lois de calcul

Théorème 1.1.1. *Soit* $\mathbb{A}$ *un ensemble quelconque et* $\mathbb{E}$ *l'ensemble des applications de* $\mathbb{A}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$\mathbb{E} = \{\, v \;:\; x \in \mathbb{A} \longmapsto v(x) \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{E}$ *est muni des deux opérations suivantes.*

* *Addition :*

$$(v+w) : x \longmapsto v(x) + w(x)$$

* *Multiplication externe :*

$$(\lambda v) : x \longmapsto \lambda v(x)$$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{E}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 1.1.2. *Soit* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

1) $\forall x \in \mathbb{E}, \quad 0 \cdot x = 0 \quad$ *et* $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot 0 = 0.$

2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}, \quad \lambda \cdot x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad$ *ou* $\quad x = 0.$

Théorème 1.1.3. *Soit* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

1) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}, \quad (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x.$

2) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E} \times \mathbb{E}, \quad \lambda \cdot (x-y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \quad$ *et* $\quad \forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{E}, (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x.$

1.2 Produit d'espaces vectoriels

Théorème 1.2.1. *Soient* $(\mathbb{E}_1, +_1, \cdot_1), (\mathbb{E}_2, +_2, \cdot_2), \ldots, (\mathbb{E}_n, +_n, \cdot_n)$*, des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension n (n*≥ 2*). On définit sur le produit cartésien* $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \ldots \times \mathbb{E}_n$ *les lois produits :*

$$\forall ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in (\mathbb{E}_1 \times \ldots \times \mathbb{E}_n)^2, (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 +_1 y_1, \ldots, x_n +_n y_n),$$

et

$$\forall (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{K} \times (\mathbb{E}_1 \times \ldots \times \mathbb{E}_n), \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot_1 x_1, \ldots, \lambda \cdot_n x_n).$$

Donc $(\mathbb{E}_1 \times \ldots \times \mathbb{E}_n, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

1.2.1 Exemples

1. On munit $\mathbb{R}^2$(resp. $\mathbb{R}^3$) des lois de calculs suivantes :
$\forall ((x,y),(x',y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$ et $\forall (\lambda, (x,y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$

$(res.\ \forall((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$.
et $\forall(\lambda,(x,y,z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \lambda \cdot (x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z))$.
Muni de ces deux lois $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ $(resp.(\mathbb{R}^3,+,\cdot))$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Plus généralement, pour $n \geq 1$, on munit $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$ des lois $(+)$ et $(\cdot)$ définies par : $\forall((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n, (x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n) = (x_1+y_1,...,x_n+y_n)$ et $\forall(\lambda,(x_1,...,x_n)) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n, \lambda \cdot (x_1,...,x_n) = (\lambda x_1,...,\lambda x_n)$.
Muni de ces deux loi $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3. On prend $(\mathbb{C},+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les vecteurs sont alors les nombres complexes et les scalaires sont les réels. La loi externe $(\lambda,z) \longmapsto \lambda \cdot z$ est en fait la multiplication d'un réel par un complexe $(\lambda,z) \longmapsto \lambda \times z$. Le vecteur nul est le nombre complexe 0 et l'opposé du vecteur z est $-z$ alors $(\mathbb{C},+,\cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espaces vectoriel.

4. Une fonction affine à deux variables, c'est une fonction de la forme

$$(x,y) \longmapsto ax+by+c.$$

Comme origine, on a la fonction nulle

$$(x,y) \longmapsto 0.$$

Comme opération interne on a l'addition des fonctions :

$$(f,g) \longmapsto ((x,y) \longmapsto f(x,y)+g(x,y)).$$

Comme opération externe on a la multiplication externe des fonctions

$$(\lambda,f) \longmapsto ((x,y) \longmapsto \lambda f(x,y)).$$

Alors c'est un espace vectoriel de dimension trois pareil que $\mathbb{R}^3$.

1.3 Sous-espaces vectoriels

1.3.1 Partie stable pour les deux loi (Lois induites)

Définition 1.3.1. *Soit* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* $\mathbb{F}$ *une partie non vide de* $\mathbb{E}$*.*
$\mathbb{F}$ *est stable pour l'addition si et seulement si* $\forall(x,y) \in \mathbb{F}^2, x+y \in \mathbb{F}$.
$\mathbb{F}$ *est stable pour la loi externe si et seulement si* $\forall x \in \mathbb{F}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x \in \mathbb{F}$.
$\mathbb{F}$ *est stable par combinaison linéaires si et seulement si*
$\forall(x,y) \in \mathbb{F}^2, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in \mathbb{F}$.

1.3.2 Caractérisation d'un sous-espaces vectoriel

Définition 1.3.2. *Soit* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* $\mathbb{F}$ *une partie de* $\mathbb{E}$*.* $\mathbb{F}$ *est un sous-espaces vectoriel de l'espace vectoriel* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *si et seulement si* $\mathbb{F}$ *contient* $\vec{0}$ *et* $\mathbb{F}$ *est stable pour* $+$ *et* $(\cdot)$*. Plus explicitement,* $\mathbb{F}$ *est un sous-espaces vectoriel de l'espace vectoriel* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} \vec{0} \in \mathbb{F} \\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{F}^2\ ,\ x+y \in \mathbb{F} \\ \forall\ x \in \mathbb{F}, \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot x \in \mathbb{F} \end{cases}$$

Définition 1.3.3. *Soit* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* $\mathbb{F}$ *une partie de* $\mathbb{E}$*.* $\mathbb{F}$ *est un sous-espaces vectoriel de l'espace vectoriel* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *si et seulement si* $\mathbb{F}$ *contient* $\vec{0}$ *et* $\mathbb{F}$ *est stable par combinaisons linéaires. Plus explicitement,* $\mathbb{F}$ *est un sous-espaces vectoriel de l'espace vectoriel* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} \vec{0} \in \mathbb{F} \\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{F}^2, \forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in \mathbb{F} \end{cases}$$

Théorème 1.3.1. *Soit* $(\mathbb{E},+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soient* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{E}$*. Alors,* $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{E}$*.*

Remarque 1.3.2 Soit $(\mathbb{E},+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Donc, $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

1.3.3 Des exemples sur les sous-espace vectoriel

1. L'ensemble $\mathbb{S}_n$ des matrices symétriques de taille n est un sous-espace de l'espace des matrices $\mathbb{M}_{n,n}$. En effet la matrice $0_{n,n}$ est symétrique. Par ailleurs si A, $B \in \mathbb{S}_n$, $(A+B)^t = A^t + B^t = (A+B)$, donc $(A+B) \in \mathbb{S}_n$. De même, de $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$, on déduit que $\alpha A \in \mathbb{S}_n$, ce qui montre que $\mathbb{S}_n$ est un sous-espace.

2. Soit $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{J}$) l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est paires (resp. impaires). $\mathbb{P}$ et $\mathbb{J}$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $(\mathbb{K},+,\cdot)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, On note $\mathbb{K}_n[\mathbb{X}]$l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. $\mathbb{K}_n[\mathbb{X}]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$.

4. Soit $\mathbb{T}$ un réel. Soit $\mathbb{P}_T$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et$\mathbb{T}$-périodique. $\mathbb{P}_{\mathbb{T}}$ est un sous-espaces vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{K},+,\cdot)$.

1.4 Les applications linéaires

Définition 1.4.1. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espaces vectoriels sur un même corps* $\mathbb{K}$ *et* f *une application de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$*. Dire que* f *est linéaire signifie que les deux assertions suivantes sont vraies :*

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{E}^2, f(x+y) = f(x) + f(y). \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{E}, f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Ces deux assertions peuvent être réunies en une seule :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{E}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ et $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$.

Proposition 1.4.1. *$\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si f est linéaire, alors $f(0_{\mathbb{E}}) = 0_{\mathbb{F}}$.*

Remarque 1.4.1

* *Un **endomorphisme** d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$.*
* *Un **isomorphisme** de $\mathbb{E}$ sure $\mathbb{F}$ est une application linéaire bijective.*
* *Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.*
* *Une **forme linéaire** sur $\mathbb{E}$ est une application linéaire de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{K}$.*

1.4.1 Exemples

1. La dérivation et l'intégration sont des applications linéaires.
2. L'application de dérivation de $\mathbb{R}[X] \longmapsto \mathbb{R}[x]$ qui à un polynôme P fait correspondre son polynome dérivé P' est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
3. En géométrie vectorielle de dimension deux ou trois, les rotations, symétries, homothéties et projections sont des applications linéaires.
4. L'application $x \longmapsto 2x$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En revanche. L'application carrée, $x \longmapsto x^2$, n'en est pas une.

1.5 $\mathbb{K}$-algèbres

L'algèbre désigne généralement la partie des mathématiques qui s'intéressent à l'étude de certains ensembles sur lesquels on a mis une certaine structure, dite structure algébrique.

Définition 1.5.1. *Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une opération binaire $\times$ (c'est-à-dire que le produit $x \times y$ de deux éléments de A est un élément de A) bilinéaire.*

1.5.1 Exemples

$\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (pour les lois usuelles), et aussi. ($\mathbb{C}$ est aussi une $\mathbb{C}$-algèbre).

1.5.2 Sous-algèbres

Une sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathbb{E},+,*,\cdot)$, c'est une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ qui contient $1_{\mathbb{E}}$ et qui est stable pour chacune des trois lois, c'est-à-dire :

* $1_{\mathbb{E}} \in \mathbb{F}$
* $\forall (u,v) \in \mathbb{F}^2, u+v \in \mathbb{F}\ et\ u*v \in \mathbb{F}$
* $\forall u \in \mathbb{K}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathbb{F}$

Proposition 1.5.1. *Une sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$-algèbre est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

1.5.3 Exemples

L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ constitue une sous-algèbres

1.5.4 Morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre

Un morphisme entre deux algèbres A et B sur $\mathbb{K}$ est une application $f : A \to B$
telle que

$$\forall x,y \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(x \times y) = f(x) \times f(y) et f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha f(y).$$

Deux algèbres A et B sur $\mathbb{K}$ sont dites isomorphes s'il existe une bijection de A dans B qui soit un morphisme d'algèbres.

1.5.5 Exemples

L'ensemble des suites convergentes est une sous-algèbres de la $\mathbb{R}$-algèbres des suites réelles, et l'application qui à une suite convergente associe sa limite est un morphisme d'algèbres.

1.5.6 Généralisation

Dans la définition, $\mathbb{K}$ peut être un anneau commutatif unitaire, et A un $\mathbb{K}$- module. Alors, A est encore appelée une $\mathbb{K}$-algèbre et on dit que $\mathbb{K}$ est l'anneau de base de A.

1.6 Représentations d'algèbres

Définition 1.6.1. *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Une représentation de A est un couple $(\rho, \mathbb{V})$ où $\mathbb{V}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et*

$$\rho : A \to \mathcal{L}(V)$$

un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres (on cherche à représenter A comme une algèbre de matrices sur le corps $\mathbb{K}$). Souvent, sera sous-entendu. Si une représentation est fixé, on notera par absurde

$$a \cdot x \quad = \quad [\rho(a)]x$$

Un sous-espace vectoriel $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ est dit stable par ρ si

$$A \cdot W \subset W$$

Chapitre 2

Algèbres de Leibniz

2.1 Définitions de bases

Une algèbre sur un domaine est un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire binaire. L'opération est dite le produit d'une algèbre. On fonction des propriétés du produit des différents classes d'algèbres sont attribués.

La notion d'une algèbre de Lie pris place dans les études de groupes de Lie, mais après devenue une objet de théorie de soie.

Définition 2.1.1. ***(Algèbres de Lie)*** *Une algèbre de Lie sur un domaine $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$, avec une opération binaire bilinéaire dénoté par $[\cdot,\cdot]$, et l'opération satisfait les conditions suivant :*

- ***antisymétrique*** *:* $[x,y]=-[y,x]$
- ***identité de Jacobi*** *:* $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ *pour tout* $x,y,z\in\mathfrak{g}$

Le concept d'algèbre de Leibniz était introduit par Loday [3] dans l'étude de Leibniz (co)homologie comme une analogue non commutatif de l'algèbre de Lie (co)homologie. En effet, l'algèbre de Leibniz est apparu pour la première fois dans les papiers [4], [5]. L'auteur les appelées D-algèbres valuant leurs relation avec les dérivations.

Définition 2.1.2. ***(Algèbres de Leibniz)*** *Une algèbre de Leibniz L sur un domaine $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}$-application bilinéaire : $[\cdot,\cdot]: L\times L\longmapsto L$ vérifiant*

- ***Identité de Leibniz :*** $[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y]\ \forall\ x,y,z\in L$

Définition 2.1.3. ***(Dimension d'algèbre de Leibniz)*** *On défini la dimension d'une algèbre de Leibniz L comme la dimension de l'espace vectoriel dénoté par $dim(L)$. Dans ce cours, on travail avec $\mathbb{K}\equiv\mathbb{R}$ et avec des algèbres de Leibniz de dimension fini.*

Lemme 2.1.1. *Une algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, alors elle vérifie :

* $[x,y] = -[y,x]$
* $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$

On démontre que $\mathfrak{g}$ vérifie l'identité de Leibniz :

$$[[x,y],z]-[[x,z],y]=[[x,y],z]+[[z,x],y]=-[[y,z],x]=[[z,y],x]$$

D'autres généralisation d'algèbres de Lie sont les algèbres de Malcev.

Définition 2.1.4. ***(Algèbres de Malcev)*** *Une algèbre de Malcev est un algèbre anticommutative (i.e. $[x,y]=-[y,x]$) qui satisfait l'identité suivante :*

$$[[[x,y],z],x]+[[[y,z],x],x]+[[[z,x],x],y]=[[x,y],[x,z]]$$

Lemme 2.1.2. *Une algèbre de Lie est une algèbre de Malcev.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, alors on a que $\mathfrak{g}$ est anticommutative et qu'elle vérifie l'identité de Jacobi :$[[x,y],z]+[y,z],x]+[[z,x],y]=0$.

On démontre que $\mathfrak{g}$ vérifie l'identité de Malcev.

$$[[x,y],[x,z]]=[[x,y],u]=-[[y,u],x]-[[u,x],y]=$$

Pour $u=[x,z]$, on applique l'identité de Jacobi

$$=-[[y,[x,z]],x]-[[[x,z],x],y]=-[[[z,x],y],x]+[[[z,x],x],x],y]=$$

On applique l'identité de Jacobi encore une fois

$$=[[[x,y],z],x]+[[[y,z],x],x]+[[[z,x],x],y]$$

2.2 Exemples

1. Soit L une algèbre de dimension 2 définie par :

$$[x,x]=y$$

L est une algèbre de Leibniz non-Lie.

2. Soit L une algèbre de dimension 3 et soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base avec les multiplications suivantes :

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_1 \\ [e_3, e_2] = e_1 \\ [e_1, e_3] = e_1 \\ [e_3, e_3] = e_1 \end{cases}$$

L est une algèbre de Leibniz non-Lie de dimension 3.

2. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de l'espace vectoriel L sur $\mathbb{C}$, définie par le crochet suivant :

$$[e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 < i \leq n-1$$

alors $(L,[\cdot])$ est une algèbre de Leibniz de dimension n.

2.3 Les Constants de Structures

Soit L une algèbre de Leibniz sur $\mathbb{K}$ de dimension n et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de l'espace vectoriel, donc :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad et \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq n$$

pour tout $x,y \in L$. Alors, on a

$$[x, y] = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right] = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j [e_i, e_j]$$

D'où, L est déterminé, jusqu'à isomorphisme, par loi de multiplication pour la base d'éléments à savoir,

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{i,j}^{k} e_k$$

ou $\gamma_{i,j}^{k}$ sont les constants de structures. Donc, fixant une base, on peut regarder chaque algèbre de dimension n sur un domaine $\mathbb{K}$ comme un point dans un espace de dimension 3 de constants de structures (voir [8]) muni d'une topologie de Zariski. Un changement de la base correspond a une action naturel du groupe $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$; L'orbite d'un point sous cette action est l'ensemble de tout les algèbres isomorphe. Soit $L_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des constants de structures de tout les algèbres de

Leibniz de dimension n sur un domaine $\mathbb{K}$.

L'identité de Leibniz implique les identités polynomiale

$$\sum_{l=1}^{n}(\gamma_{jk}^{l}\gamma_{il}^{m}-\gamma_{ij}^{l}\gamma_{lk}^{m}+\gamma_{ik}^{l}\gamma_{lj}^{m})=0$$

pour les constants de structures. Par conséquent, l'ensemble $L_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^{n^3}$ est une variété affine. Dans l'exemple 2 on a

$$\gamma_{12}^{1}=\gamma_{32}^{1}=\gamma_{13}^{1}=\gamma_{33}^{1}=1$$

le reste des constants de structures sont des zéros.

2.4 Sous-algèbres de Leibniz

Définition 2.4.1. ***(Sous-algèbres de Leibniz)*** *Soit L une algèbre de Leibniz. A sous espace L_1 est noté Sous-algèbres de Leibniz de L si $[x,y]\in L_1$ quelque soit x,y $\in L_1$. On note qu'une sous-algèbres de Leibniz d'une algèbres de Leibniz est aussi une algèbres de Leibniz pour la multiplication induite.*

Exemple 2.4.1

* Soit L une algèbre de Leibniz et $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ une base définie par :

$$\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2\\ [e_3,e_4]=e_2\\ [e_4,e_4]=e_2\end{cases}$$

Le sous-espace L_1 engendré par $\{e_1,e_2\}$ est une sous-algèbre de Leibniz définie par le crochet suivant : $[e_1,e_1]=e_2$.

* Soit L une algèbre de Leibniz définie par $[e_i,e_1]=e_{i+1}$ pour $1\leq i\leq n-1$ avec $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base. Le sous-espace L_i engendré par $\{e_1,e_2,...,e_i\}$ et avec les multiplications suivantes :

$$[e_j,e_1]=e_{j+1},\quad 1\leq j\leq i-1$$

Sont des sous-algèbres de Leibniz de L.

2.5 Les Idéaux

Définition 2.5.1. ***(L'idéal d'une algèbre de Leibniz)*** *Une sous-algèbre J d'une algèbre de Leibniz L est un idéal de L si*

$$[x,y],[y,x]\in J \;\; \forall x\in J,\forall y\in L \;\; ([J,L]\subseteq J \;\; et \;\; [L,J]\subseteq J)$$

Si elle vérifie seulement que : $[y,x]\in J$, $\forall\ x\in J$, $\forall\ y\in L$, $([L,J]\subseteq J)$ l'idéal est dit l'idéal droit de L.
Si elle vérifie seulement que : $[x,y]\in J$, $\forall\ x\in J$, $\forall\ y\in L$, $([J,L]\subseteq J)$ l'idéal est dit l'idéal gauche de L.

Exemple 2.5.1 Soit L une algèbre de Leibniz, le sous-espace [L,L] est un idéal de L.

$$\forall x\in L,\forall y\in[L,L](\Rightarrow y\in L)\Rightarrow[x,y],[y,x]\in[L,L]$$

en d'autre termes, $[L,[L,L]]\subset[L,L]$ et $[[L,L],L]\subset[L,L]$.

Définition 2.5.2. *On dit que l'algèbre de Leibniz est abélienne si [L,L]=0.*

Remarque 2.5.1 Toute algèbre de Leibniz a deux idéaux triviaux {0} et L.

Lemme 2.5.1. *Soit L une algèbre de Leibniz. Alors le sous-ensembles I définie par :*

$$I=<[x,x]:x\in L>$$

est un idéal abélien de L.

DÉMONSTRATION : C'est facile de démontré que I est une sous-algèbre. Maintenant, on démontre que I est un idéal, qui est $[I,L]$,$[L,I]\subset I$.

Soit $v\in I$, donc il existe $x\in L$ tell que $[x,x]=v$. Puis on prend $u\in L$, on montre que

$$[u,v],[v,u]\in I \;\; \forall u\in L, \;\; \forall v\in I$$

- $*$ $[u,v]=[u,[x,x]]=[[u,x],x]-[[u,x],x]=0\in I \quad\Rightarrow$ [L,I]$\subset I$
- $*$ $[v,u]=[[x,x],u]=[x,[x,u]]+[[x,u],x]=[x,z]+[z,x]$ avec $z=[x,u]$.On sait que $[x+z,x+z]\in I$, donc
  $[x+z,x+z]=[x,x]+[x,z]+[z,x]+[z,z]\Rightarrow[x,z]+[z,x]=[x+z,x+z]-[x,x]-[z,z]\in I$
  Par conséquent $[v,u]\in I$, $\forall\ v\in I$, $\forall\ u\in L\rightarrow[I,L]\subset I$.

On a qu'a démontré que I est abélien ($[I,I]=0$), en d'autres termes $[v,w]=0$ avec $v,w \in I$. En effet, soit $v,w \in I$, puis il existe $x,y \in L$ tel que $v=[x,x]$ et $w=[y,y]$ alors,

$$[v,w]=[[x,x],[y,y]]=[[[x,x],y],y]-[[[x,x],y],y]=0$$

Remarque 2.5.2 Si L est une algèbre de Leibniz non-Lie, alors $I \neq \{0\}$ et $I \neq L$

Exemple 2.5.2

* Soit L une algèbre de Leibniz de dimension deux définie par $[x,x]=y$. c'est facile de démontré que $I=<y>$.
* Soit L une algèbre de Leibniz de dimension trois

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=e_1 \\ [e_3,e_2]=e_1 \\ [e_1,e_3]=e_1 \\ [e_3,e_3]=e_1 \end{cases}$$

On calcul I. Soit $x \in L$.

$x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3 \Rightarrow [x,x]=[\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3, \alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3]$

$$=\alpha_1\alpha_2[e_1,e_2]+\alpha_3\alpha_2[e_3,e_2]+\alpha_1\alpha_3[e_1,e_3]+\alpha_3^2[e_3,e_3]$$

$$=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2)e_1 \in I, \forall \alpha_i \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow I=<e_1>.$$

Remarque 2.5.3 Par conséquent, Toute algèbre de Leibniz non-Lie a, au moins, trois idéaux $\{0\}$, I, L.

Définition 2.5.3. ***(Centre d'une algèbre de Leibniz)*** *On définie le centre de l'algèbre L, $Z(L)$, comme suit :*

$$Z(L)=\{z \in L : [x,z]=[z,x]=0, \forall x \in L\}$$

Lemme 2.5.2. *Le centre d'une algèbre de Leibniz L est un idéal de L.*

DÉMONSTRATION : c'est trivial.

Définition 2.5.4. ***(Annihilateur droit d'une algèbre de Leibniz)*** *On définie l'annihilateur droit* *d'une algèbre de Leibniz L, $Ann_d(L)$, comme :*

$$Ann_d(L) = \{x \in L : [y,x] = 0, \forall y \in L\}$$

Lemme 2.5.3. *L'annihilateur droit de L est un idéal.*

Démonstration : C'est facile de démontré que $Ann_d(L)$ est un sous algèbre. Après, on démontre que c'est un idéal. D'après $[L, Ann_d(L)] = \{0\} \Rightarrow [L, Ann_d(L)] \subset Ann_d(L)$.Reste qu'a démontré $[Ann_d(L), L] \subset Ann_d(L)$.

Soit $u \in [Ann_d(L), L]$, alors il existe $z \in Ann_d(L)$ et $y \in L$ tel que $u = [z,x]$. On montre que $u \in Ann_d(L)$. Soit $y \in L$, on calcul $[y,u]$.

$$[y,u] = [y,[z,x]] = [[y,z],x] - [[y,x],z] = 0$$

car $z \in Ann_d(L)$.

On a les Propriétés suivantes :

Lemme 2.5.4. *Soit L une algèbre de Leibniz,c'est vérifie que*

$$[x,x], [x,y]+[y,x], [[x,y],[y,x]] \in Ann_d(L) \qquad \forall x,y \in Ann_d(L)$$

Démonstration :

* $[x,x] \in Ann_d(L)$. Soit $u \in L$.

$$[u,[x,x]] = [[u,x],x] - [[u,x],x] = 0 \Rightarrow [x,x] \in Ann_d(L).$$

* $[x,y]+[y,x] \in Ann_d(L)$. Soit $u \in L$.

$$[u,[x,y]+[y,x]] = [u,[x,y]] + [u,[y,x]] = [[u,x],y] - [[u,y],x] + [[u,y],x] - [[u,x],y] = 0$$

$$\Rightarrow [x,y]+[y,x] \in Ann_d(L).$$

* $[[x,y],[y,x]] \in Ann_d(L)$. Soit $u \in L$. $[u,[[x,y],[y,x]]] \quad = [[u,[x,y]],[y,x]] - [[u,[y,x]],[x,y]]$

$$= [[[u,[u,x]],y],x] - [[[u,[x,y],x],y] - [[[u,[y,x]],x],y]$$

$$+[[[u,[y,x]],y],x] = [[[[u,x],y],y],x] - [[[[u,y],x],y],x]$$

$$-[[[[u,x],y],x],y]+[[[[u,y],x],x],y]-[[[[u,y],x],x],y]$$

$$+[[[[u,x],y],x],y]+[[[[u,y],x],y],x]-[[[[u,x],y],y],x]=0$$

$$\Rightarrow [[x,y],[y,x] \in Ann_d(L).$$

Remarque 2.5.4 On a que $I \subseteq Ann_d(L)$.

Lemme 2.5.5. *Soit L une algèbre de Leibniz non-Lie de $dim(L)=n$. C'est vérifie que*

$$1 \leq dim(Ann_d(L)) \leq n-1$$

Démonstration :

* **Si** $dim(Ann_d(L))=0 \Rightarrow Ann_d(L)=\{0\} \Rightarrow I=\{0\} \Rightarrow L$ *est un algèbre de Lie.C'est une contradiction.*
* **Si** $dim(Ann_d(L))=n \Rightarrow Ann_d(L) \equiv L \Rightarrow [Ann_d(L),Ann_d(L)]=[L,L]=\{0\} \Rightarrow L$ *est un abélien qui est trivial.*

Définition 2.5.5. ***(Annihilateur gauche d'une algèbre de Leibniz)*** *On définie l'annihilateur gauche d'une algèbre de Leibniz L, $Ann_g(L)$, comme :*

$$Ann_g(L)=\{x \in L : [x,y]=0, \forall y \in L\}$$

Remarque 2.5.5

1. $Ann_g(L)$ est un sous-algèbre et un idéal gauche mais pas un idéal.
2. On a que $Z(L)=Ann_d(L) \cap Ann_g(L)$.

2.6 Quotient d'une algèbre

Soit L une algèbre de Leibniz et J un idéal. On peut définir une relation d'équivalence. Qui est additionnellement compatible avec tout les opérations de l'algèbre. On définie une relation d'équivalence sur l'algèbre L, par

$$x \sim y \Leftrightarrow x-y \in J \ \ \forall x,y \in L$$

On note par $\overline{x}$ (ou $x+j$) classe d'équivalence. Dans l'ensemble du quotient L/J on définie les opérations suivantes :

$$\begin{cases} \overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y} \\ a\overline{x}=\overline{ax} \qquad \forall x,y\in L, \quad \forall a\in K \\ [\overline{x},\overline{y}]=[\overline{x,y}] \end{cases}$$

Lemme 2.6.1. *Soit L une algèbre de Leibniz et I son idéal. Alors, l'ensemble quotient, L/I est un algèbre de Lie.*

Démonstration : Prenons l'idéal $I =< [x,x] : x \in L >$, alors l'ensemble quotient L/I est un algèbre de Leibniz. Soit $\overline{z}\in L/I$. On a que

$$[\overline{z},\overline{z}]=[\overline{z,z}]=\overline{0}$$

puisque $[z,z]\in I$. Alors L/I est un algèbre de Lie.

Lemme 2.6.2. *Soit L Une algèbre de Leibniz et $Ann_d(L)$ l'annihilateur droit de L. Alors, l'ensemble quotient, $L/Ann_d(L)$, est un algèbre de Lie.*

Démonstration : On sait que $I\subseteq Ann_d(L)$ et $Ann_d(L)$ est un idéal. alors l'ensemble quotient $L/Ann_d(L)$ est un algèbre de Leibniz. Soit $\overline{z}\in L/Ann_d(L)$. On a que

$$[\overline{z},\overline{z}]=[\overline{z,z}]=\overline{0}$$

car $[z,z]\in I\subseteq Ann_d(L)$. Alors, $L/Ann_d(L)$ est un algèbre de Lie.

2.7 Dérivations des algèbres de Leibniz

Définition 2.7.1. ***(Homomorphisme de l'algèbre de Leibniz)*** *Un homomorphisme entre deux algèbres de Leibniz est une application linéaire qui est compatible avec les crochets de Leibniz respectifs :*

$$f: L\to L' : f([x,y])=[f(x),f(y)], \forall x,y\in L$$

Définition 2.7.2. ***(Dérivation)*** *Une dérivation d'une algèbre de Leibniz L est une application linéaire $d: L\to L$, qui vérifie :*

$$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)] \qquad \forall x,y\in L$$

L'ensemble de tout les dérivations de L est noté par $Der(L)$. C'est clairement un sous espace vectoriel de l'endomorphisme de L, $End(L)$.

Remarque 2.7.1

* C'est facile de montrer que si d_1 et d_2 sont des dérivations, alors $\alpha_1\ d_1 + \alpha_2\ d_2 \in Der(L)$ mais $d_1 \circ d_2 \notin Der(L)$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.
* $(Der(L),+,\cdot\ \mathbb{K},[,]))$ est une algèbre de Lie avec les multiplications suivantes :

$$[\cdot,\cdot] : Der(L) \times Der(L) \to Der(L)$$

$$(d_1, d_2) \to [d_1, d_2] = d_2 \circ d_1 - d_1 \circ d_2$$

2.8 L'opérateur de multiplication droit

Définition 2.8.1. ***(L'opérateur de multiplication droit)*** *Soit L une algèbre de Leibniz et $x \in L$, l'opérateur de multiplication droit de x, R_x, est définie par l'application suivante*

$$R_x : L \to L$$

$$y \to R_x(y) = [y, x]$$

Théorème 2.8.1. $R_x \in Der(L)$, $\forall\ x \in L$

DÉMONSTRATION :

* C'est facile de voir que R_x est un endomorphisme des algèbres de Leibniz $\forall\ x \in L$.
* R_x est une dérivation pour tout $x \in L$.

$$R_x([y,z]) = [[y,z],x] = [y,[z,x]] + [[y,x],z] = [[y,x],z] + [y,[z,x]]$$

$$= [R_x(y), z] + [y, R_x(z)] \quad \forall y, z \in L$$

Théorème 2.8.2. *L'application suivante*

$$R : L \to Der(L)$$

$$x \to R(x) = R_x$$

est un homomorphisme des algèbres de Leibniz.

DÉMONSTRATION : C'est facile de montrer que R est une application linéaire. On montre qu'elle est compatible avec les crochets de Leibniz respectifs, qui sont, $R([x,y]) = [R(x), R(y)]$, $\forall\ x,y \in L$.

$$R([x,y])(z) = R_{[x,y]}(z) = [z,[x,y]] = [[z,x],y] - [[z,y],x] = [R_x(z),y] - [R_y(z),x]$$

$$= R_y(R_x(z)) - R_x(R_y(z)) = (R_yR_x - R_xR_y)(z) = [R_x,R_y](z), \forall z \in L$$

On note $R(L)$=$\{R_x : x \in L\}$ l'ensemble de tout les opérateurs de multiplication droit.

Remarque 2.8.1 L'ensemble $R(L)$ avec la multiplication $R_{[x,y]} = R_yR_x - R_xR_y$, est un algèbre de Lie.

Théorème 2.8.3. *L'ensemble $R(L)$ est un idéal de l'algèbre de Lie $Der(L)$*

DÉMONSTRATION : Soit $d \in Der(L)$. On considère $x \in L$ et :

* $[d,R_x](y) = (R_xd - dR_x)(y) = R_x(d(y)) - d(R_x(y)) = [d(y),x] - d[y,x]$
  $= [d(y),x] - [d(y),x] - [y,d(x)] = [y,-d(x))] = R_{-d(x)}(y)$, $\forall\ y \in L \Rightarrow$
  $\Rightarrow [d,R_x] = R_{-d(x)} \in R(L) \Rightarrow [Der(L), R(L)] \subset R(L)$
* $[R_x,d](y) = (dR_x - R_xd)(y) = d(R_x(y)) - R_x(d(y)) = d[y,x] - [d(y),x] =$
  $= [d(y),x] - [y,d(x)] - [d(y),x] = [y,d(x)] = R_{d(x)}(y)$, $\forall\ y \in L \Rightarrow$
  $\Rightarrow [R_x,d] = R_{d(x)} \in R(L) \Rightarrow [R(L), Der(L)] \subset R(L)$

  Donc, $R(L)$ est un idéal de $Der(L)$.

2.9 Algèbres de Leibniz résoluble

2.9.1 Séries dérivées

Définition 2.9.1. ***(Séries dérivées)*** *Soit L une algèbre de Leibniz, on définie une série dérivée comme suit :*

$$L^{[1]} = L, \qquad L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}], \qquad n \geqslant 1$$

L'idéal $[L,L]$ est noté sous-algèbre dérivée.

Lemme 2.9.1. *Soit A une sous-algèbre de Leibniz. Si $[L,L] \subseteq A$, alors A est un idéal de L.*

DÉMONSTRATION : Soit $A \subseteq L$ une sous-algèbre de Leibniz de L tel que $[L,L] \subseteq A$. On a que :

$$[A,L] \subseteq [L,L] \subseteq A, \qquad [L,A] \subseteq [L,L] \subseteq A$$

Dont, A est un idéal de L.

Lemme 2.9.2. *Soit L une algèbre de Leibniz et $L^{[n]}$ la série dérivée. Alors, $L^{[i+1]}$ est un idéal de $L^{[i]}$.*

Démonstration : On montre par la méthode de récurrence sur i.

* Pour $i = 1$. C'est facile,$L^{[2]} = [L, L]$ et la sous-algèbre dérivé est un idéal de $L = L^{[1]}$.
* on suppose que :
  1. $L^{[i]} \subseteq L^{[i-1]}$
  2. $L^{[i]}$ est une sous-algèbre de $L^{[i-1]}$ ($[L^{[i]},L^{[i]}] \subseteq L^{[i]}$)
  3. $L^{[i]}$ est un idéal de $L^{[i-1]}$

  On considère maintenant $L^{[i+1]}$=$[L^{[i]},L^{[i]}]$. D'abord,

$$L^{[i]} \subseteq L^{[i-1]} \Rightarrow [L^{[i]}, L^{[i]}] \subseteq [L^{[i-1]}, L^{[i-1]}] = L^{[i]} \Rightarrow L^{[i+1]} \subseteq L^{[i]}$$

De plus,
$[L^{[i+1]}, L^{[i+1]}] \subseteq [L^{[i]},L^{[i]}]$=$L^{[i+1]}$ puis $L^{[i+1]}$ est un sous-algèbre de $L^{[i]}$.

Enfin,
$[L^{[i]}, L^{[i+1]}] \subseteq [L^{[i]}, L^{[i]}] = L^{[i+1]} \Rightarrow L^{[i+1]}$ est un idéal droit de $L^{[i]}$
$[L^{[i+1]}, L^{[i]}] \subseteq [L^{[i]}, L^{[i]}] = L^{[i+1]} \Rightarrow L^{[i+1]}$ est un idéal gauche de $L^{[i]}$. Donc $L^{[i+1]}$ est un idéal de $L^{[i]}$.

Remarque 2.9.1 D'après le Lemme 2.9.2, la sequence dérivé est une série décroissante d'idéaux

$$L^{[1]} \supseteq L^{[2]} \supseteq L^{[3]} \supseteq ... \supseteq L^{[n]} \supseteq L^{[n+1]} \supseteq ...$$

comme $dim(L) < +\infty$ cette série stabilise, $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $L^{[k+i]} = L^{[k]}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Définition 2.9.2. ***Algèbre de Leibniz Résoluble*** *Une algèbre de Leibniz de dimension fini L est noté rsoluble s'il exist $m \in \mathbb{N}$ tel que $L^{[m]} \neq 0$ et $L^{[m+1]} = 0$. Le nombre minimum m avec cette propriété s'appelle l'indice de résolubilité de l'algèbre L.*

2.10 Propriétés des algèbres de Leibniz résoluble

Lemme 2.10.1. *Toute sous-algèbre (idéal) d'une algèbre de Leibniz résoluble est résoluble.*

Démonstration : Soit L une algèbre de Leibniz résoluble d'indice m et A une sous-algèbre de L. On peut utilisé la méthode de récurrence mathématique pour montré l'énoncé suivante.

$$A^{[n]} \subseteq L^{[n]}, \forall n \in \mathbb{N}$$

* On montre que l'énoncé est vrai pour $n = 1$.

$$A^{[1]} = A \subseteq L = L^{[1]}$$

* On montre que si $A^{[k]} \subseteq L^{[k]}$ est vrai, alors $A^{[k+1]} \subseteq L^{[k+1]}$ est aussi vrai. On peut faire ça comme suit.

$$A^{[k+1]} = [A^{[k]}, A^{[k]}] \subseteq [L^{[k]}, L^{[k]}] = L^{[k+1]}]$$

Qui est l'hypothèse de récurrence. Donc, $A^{[m]} = \{0\}$ car $L^{[m]} = \{0\}$. alors, A est résoluble avec indice m.

Lemme 2.10.2. *L'image d'un homomorphisme d'une algèbre de Leibniz résoluble est un algèbre de Leibniz résoluble.*

Démonstration : Soit L une algèbre de Leibniz résoluble et L' une algèbre de Leibniz. Soit ϕ un homomorphisme de Leibniz entre L et L'.

C'est Facile de montre que $\phi(L)$ est un sous-algèbre de Leibniz de L'. Maintenant on montre que $\phi(L)$ est résoluble. Pour cela, on utilise la méthode de récurrence pour vérifier que

$$\phi(L^{[n]}) = (\phi(L))^{[n]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

* Pour $n = 1$, c'est trivial de montrer que $\phi(L^{[1]}) = \phi(L) = (\phi(L))^{[1]}$

* Pour $n = k$, Si $\phi(L^{[k]}) = (\phi(L))^{[k]}$ est vrai, alors $\phi(L^{[k+1]}) = (\phi(L))^{[k+1]}$ est aussi vrai. On peut le faire comme suit.

$$\phi(L^{[k+1]}) = \phi([L^{[k]}, L^{[k]}]) = [\phi(L)^{[k]}, \phi(L)^{[k]}] = (\phi(L))^{[k+1]}$$

Alors, comme L est résoluble $\Rightarrow \exists\ m \in \mathbb{N}$ tel que $L^{[m]} \neq \{0\}$, $L^{[m+1]} = \{0\} \Rightarrow \Rightarrow (\phi(L))^{[m+1]} = \{0\} \Rightarrow \phi(L)$ est résoluble d'indice moins ou égale a m.

Corollaire Soit L une algèbre de Leibniz résoluble et J un idéal de L. Alors l'algèbre quotient L/J est résoluble.

Démonstration : On considère le quotient du plan $\pi : L \to L/J$, est un homomorphisme de l'algèbre de Leibniz et d'après le Lemme 2.10.2 on a que $\pi\ (L) = L/J$ est résoluble.

2.11 Algèbres de Leibniz nilpotentes

2.11.1 Série centrale inférieure

Définition 2.11.1. ***(Série centrale inférieure)*** *Soit L une algèbre de Leibniz. On définie les séries suivantes associées a L :*

a) Série centrale inférieure droite : $L^{<1>} = L, \quad L^{<n+1>} = [L^{<n>}, L] \; n \in \mathbb{N}$

b) Série centrale inférieure gauche : $L^1 = L$

$$L^{n+1} = [L, L^n] + [L^2, L^{n-1}] + ... + [L^{n-1}, L^2] + [L^n, L] = \sum_{i=1}^{n} [L^i, L^{n+1-i}], i \in \mathbb{N}$$

Lemme 2.11.1. $[L^{<i>}, L^{<j>}] \subseteq L^{<i+j>}$.

Démonstration : On Le montre utilisant la méthode de récurrence sur j pour chaque i. On fix $i \in \mathbb{N}$.

* Pour $j = 1$. Par définition, $[L^{<i>}, L^{<1>}] = L^{<i+1>}$.
* On suppose que $[L^{<i>}, L^{<j>}] \subseteq L^{<i+j>}$, pour tout $j \leq k$ est vrai. Alors,
  $[L^{<i>}, L^{<k+1>}] = [L^{<i>}, [L^{<k>}, L]] \subseteq [[L^{<i>}, L^{<k>}], L] - [[L^{<i>}, L], L^{<k>}] \subseteq$

$$\subseteq [L^{<i+k>}, L] - [L^{<i+1>}, L^{<k>}] \subseteq L^{<i+k+1>} - L^{<i+k+1>} \subseteq L^{<i+j+1>}$$

$\nwarrow [L^{<i+k>}, L] \subseteq L^{<i+k+1>}$ est l'hypothèse de récurrence.

Lemme 2.11.2. $L^{<n>} = L^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : On utilise la méthode de récurrence sur n.

* Pour $n = 1$. C'est trivial, $L^{<1>} = L = L^1$.

* On suppose que $L^{<i>} = L^i$, pour tout $i \leq k$. On a

$$L^{<k+1>} = [L^{<k>}, L] = [L^{<k>}, L] = \left[\sum_{j=1}^{k-1} [L^j, L^{<k-j>}], L\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} [[L^k, L^{k-j}], L] = \sum_{j=1}^{k-1} ([L^j, [L^{k-j}, L]] + [[L^j, L], L^{k-j}]) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1}([L^j, L^{k+1-j}] + [L^{j+1}, L^{k-j}]) = \sum_{j=1}^{k}[L^j, L^{k+1-j}] = L^{k+1}$$

$$\Rightarrow L^{<k+1>} = L^{k+1}$$

Donc, $L^{<k+1>} = L^{k+1}$. Alors, $L^{<n>} = L^n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

En résumé, Pour Toute algèbre de Leibniz, les séries centrale inférieure droite et centrale inférieure coïncident. En général, on utilise $L^1 = L, L^n = [L^{n-1}, L]$ avec $n \geq 2$ comme la série inférieure centrale.

Lemme 2.11.3. *Soit L une algèbre de Leibniz. Alors, L^{n+1} est un idéal de L^n pour tout $n \in \mathbb{N}$*

DÉMONSTRATION :D'abord, on utilise la méthode de récurrence sur n pour montrer que $L^{n+1} \subseteq L^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Pour $n = 1$, c'est trivial $L^2 = [L, L] \subseteq L^1 = L$
* On suppose que $L^{k+1} \subseteq L^k$, alors $L^{k+2} = [L^{k+1}, L] \subseteq [L^k, L] = L^{k+1}$ Alors, on a $L^{n+1} \subseteq L^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Puis, L^{n+1} est une sous-algèbre de L^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ car

$$[L^n, L^n] \subseteq [L^{n-1}, L^{n-1}] \subseteq [L^{n-1}, L] = L^n$$

  Enfin, on montre que L^{n+1} est un idéal de L^n pour tout n $\in \mathbb{N}$. On a

$$[L^n, L^{n+1}] \subseteq [L^n, L] = L^{n+1} \ , \qquad [L^{n+1}, L^n] \subseteq [L^n, L] = L^{n+1}.$$
$$L^{n+1} \subseteq L \uparrow \qquad\qquad \nwarrow L^{n+1} \subseteq L^n \ , \ L^n \subseteq L$$

  Donc, L^{n+1} est un idéal de L^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.11.1 : D'après le Lemme 2.11.3, la série centrale inférieure est une série décroissante des idéaux

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq ... \supseteq L^n \supseteq L^{n+1} \supseteq ...$$

comme $dim(L) < +\infty$, cette série stabilise, $\exists \ k \in \mathbb{N}$ tel que $L^{k+i} = L^k$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Définition 2.11.2. ***(Algèbre de Leibniz Nilpotente)*** *Une algèbre de Leibniz de dimension fini L est appelée nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $L^m \neq 0$ et $L^{m+1} = 0$. Le nombre minimal de m avec cette propriété est appelée indice de nilpotence de l'algèbre L.*

Remarque 2.11.2 : Toute algèbre nilpotente de Lie est une algèbre nilpotente de Leibniz avec le même indice de nilpotence.

Exemple 2.11.1

* Soit L l'algèbre nilpotente de Leibniz suivant :

$$[e_i, e_1] = e_{i+1}, \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

cette algèbre a l'indice de nilpotence n. En effet, $L^i =< e_i, e_{i+1}, ..., e_n >$ pour $1 \leq u \leq n$ et $L^{n+1} = \{0\}$. (C'est facile de montrer par la méthode de récurrence mathématique).

* L'algèbre suivante :

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_n] = e_{i+1} & 2 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

A n-1 comme indice de nilpotence

* cette algèbre a n-1 comme indice de nilpotence.

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

2.12 propriétés des algèbres de Leibniz nilpotentes

Théorème 2.12.1. *Toute algèbre nilpotente de Leibniz est résoluble.*

Démonstration : On montre, utilisant la méthode de récurrence, que $L^{[n]} \subseteq L^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

* Pour $n = 1$. C'est trivial, $L^{[1]} = L = L^1$.
* On suppose que $L^{[k]} \subseteq L^k$. Après,

$$L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}] \subseteq [L^{[k]}, L^k] \subseteq [L^{[k]}, L] = L^{k+1}$$

$\nwarrow$ (l'hypothèse de récurrence)

Remarque 2.12.1 Le contraire n'est pas vrai. La famille suivante des algèbres sont résolubles mais pas nilpotentes :

$$\begin{cases} [e_2, e_2] = e_1 \\ [e_3, e_2] = \beta e_1 + e_2 \\ [e_1, e_3] = -2e_1 \\ [e_2, e_3] = \beta e_1 - e_2 \\ [e_3, e_3] = \alpha e_1 \end{cases}$$

Ou $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base. Elle vérifie que

$$L^{[2]} =< e_1, e_2 >, L^{[3]} =< e_1 >, L^{[4]} = \{0\}$$

$$L^2 =< e_1, e_2 >, L^3 =< e_1, e_2 >, ..., L^n =< e_1, e_2 > \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lemme 2.12.1. *Toute sous-algèbre (idéal) d'une algèbre de Leibniz nilpotente est nilpotente.*

Démonstration : Soit L une algèbre de Leibniz nilpotente avec indice de nilpotence m et A une sous-algèbre de L. La méthode de récurrence peut être utilisé de montrer l'énoncé suivante.

$$A^n \subseteq L^n, \forall n \in N$$

* Montre queue l'énoncé est vrai pour n=1

$$A^1 = A \subseteq L = L^1$$

* Montre que si $A^k \subseteq L^k$ est vrai, alors $A^{k+1} \subseteq L^{k+1}$ est aussi vrai. On le fait comme suivant.

$$A^{k+1} = [A^k, A] \subseteq [L^k, L] = L^{k+1}$$

$$\uparrow$$

avec l'hypothèse de récurrence et par $A \subseteq L$

Donc, $A^m = \{0\}$ car $L^m = \{0\}$. Alors, A est nilpotente avec indice de nilpotence m.

Lemme 2.12.2. *L'image d'un homomorphisme d'une algèbre de Leibniz nilpotente est un algèbre de Leibniz nilpotente.*

Démonstration : Soit L une algèbre de Leibniz nilpotente et L' une algèbre de Leibniz. Soit ϕ un homomorphisme de Leibniz entre L et L'.

C'est facile de montrer queue $\phi(L)$ est une sous-algèbre de Leibniz de L'. Maintenant, on montre que $\phi(L)$ est nilpotente. pour ce cas, on utilise la méthode de récurrence pour vérifier queue

$$\phi(L^n) = (\phi(L))^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

* Pour $n = 1$, c'est trivial de montrer que $\phi\ (L^1) = \phi(L) = (\phi(L))^1$
* Pour $n = k$. Si $\phi\ (L^k) = (\phi(L))^k$ est vrai, alors $\phi\ (L^{k+1}) = (\phi(L))^{k+1}$ est aussi vrai. On peut le faire comme suivant.

$$\phi(L^{k+1}) = \phi([L^k, L]) = [\phi(L)^k, \phi(L)] = (\phi(L))^{k+1}$$

Alors, comme L est nilpotente

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ tel\ que\ L^{m+1} = \{0\}$$

$$\Rightarrow (\phi(L))^{m+1} = \{0\} \Rightarrow \phi(L)$$

est nilpotente avec indice de nilpotence moins ou égale a m

Corollaire : Soit L une algèbre de Leibniz nilpotente et J un idéal de L.Puis le quotient de l'algèbre est nilpotent L/J.

Démonstration : On considère l'application du quotient $\pi : L \to L/J$, est un homomorphisme de l'algèbre de Leibniz et D'après le Lemme 2.12.2 on a que $\pi\ (L) = L/J$ est nilpotent.

Lemme 2.12.3. *Le centre d'une algèbre de Leibniz nilpotente non trivial est non trivial.*

Démonstration : Soit L un algèbre de Leibniz nilpotente avec indice de nilpotence m. Après, $L^m \neq \{0\}$ et $L^{m+1} = \{0\}$. Par définition $[L^m, L] = L^{m+1} = \{0\}$. Dans l'autre main, d'après le Lemme 2.11.1, on aura, $[L, L^m] \subseteq L^{m+1} = \{0\}$

Donc, on montre que $L^m \subseteq Z(L) \Rightarrow Z(L) \neq \{0\}$

2.13 Série caractéristique.Base Adaptée

On souviens que R_x est un endomorphisme de L définie par $R_x(y) = [y, x]$.

Théorème 2.13.1. ***(Théorème d'Engel pour les algèbres de Leibniz)****Une algèbre de Leibniz de dimension fini est nilpotente si et seulement si R_x est nilpotent pour tout $x \in L$.*

Démonstration :

* $\Rightarrow$ Soit L une algèbre nilpotente avec indice de nilpotence m. On a que

$$[...[[[[x_1,x_2],x_3],x_4],...,x_{m+1}] = 0 \quad \forall x_i \in L, \quad 1 \leq i \leq m+1$$

On considère $x_1 = y, x_2 = x_3 = ... = x_{m+1} = x$, alors

$$[...[[[[y,x],x],x],...,x] = R_x^{m+1}(y) = 0, \forall x \in L, \forall y \in L$$

que, R_x est nilpotent pour tout $x \in L$.

* $\Leftarrow$ Cette démonstration est évident.

Soit L une algèbre de Leibniz nilpotente et $x \in L \,/\, [L,L]$ (x est un générateur). Pour l'opérateur nilpotent de la multiplication droite R_x, on définie une série décroissante $C(x) = (n_1, n_2, ..., n_k)$ qui consiste de dimension de blocs de Jordan de l'opérateur R_x, ou $n_1 + n_2 + ... + n_k = dim(L)$. Dans l'ensemble de tel série on considère l'ordre lexicographique, qui est,

$$c(x) = (n_1, n_2, ..., n_k) \geq c(y) = (m_1, m_2, ..., m_k) \quad x, y \in L/[L,L]$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists i \in \mathbb{N} \quad tel \quad que \quad n_j = m_j \;\; \forall j < i \; et \; n_i > m_i$$

Définition 2.13.1. ***(Série Caractéristique et Vecteur Caractéristique)*** *Soit L une algèbre de Leibniz nilpotente. La série $C(L) = max\{c(x) : x \in L/[L,L]\}$ est appelée série caractéristique de l'algèbre L. Le vecteur $x \in L \,/\, [L,L]$ est appelé vecteur caractéristique.*

Exemple 2.13.1

* Soit L une algèbre de Leibniz de dimension n avec $C(L) = (n,0) = (n)$. Il existe $x \in L/[L,L]$ tel que la forme de Jordan du matrice de R_x est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* Soit L une algèbre de Leibniz de dimension 7 avec $C(L) = (4,2,1)$. Il existe $x \in L/[L,L]$ tel que la forme du matrice de Jordan de R_x est :

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Définition 2.13.2. ***(Base Adapté)*** *Soit L une algèbre de Leibniz de dimension n. Une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est appelée base adapté si e_1 est le vecteur caractéristique et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est la base de Jordan associé a R_{e_1}.*

Remarque 2.13.1

* Clairement, si L est une algèbre de Leibniz de dimension n avec indice de nilpotence m et $C(L) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ la série caractéristique, alors $n_1 \leq m$.

* on a que

$\underline{Indice\ de\ nilpotence}$	$\underline{Srie\ Caractristique}$
n	n
$n-1$	$(n-1,1)$
$n-2$	$(n-2,1,1),(n-2,2)$
$n-3$	$(n-3,1,1,1),(n-3,2,1),(n-3,3)$
$n-4$	$(n-4,1,1,1,1),(n-4,2,1,1),(n-4,3,1),(n-4,4)$
$\vdots$	$\vdots$
2	$(2,1,...,1),(2,2,1,...,1),(2,2,2,1,...,1),...$
1	$(1,1,1,...,1)$

* L'algèbre de Leibniz abélienne a la série caractéristique (1,1,1,...,1).

2.14 Algèbres de Leibniz Nullfiliforme

Définition 2.14.1. ***(Algèbres de Leibniz Nullfiliforme)*** *Une algèbre de Leibniz nilpotente de dimension n est appelé Null filiforme si $dim(L^i) = n+1-i$, pour $1 \leq i \leq n+1$. Cette algèbre a un indice de nilpotence maximal. Dans le théorème suivant, on donne une caractérisation de l'algèbre de Leibniz null filiforme.*

Théorème 2.14.1. *Soit L une algèbre de Leibniz nilpotente de dimension n. les propriétés suivants sont équivalente :*

1. $C(L) = (n)$.
2. $dim(L^i) = n+1-i, 1 \leq i \leq n+1$.
3. *l'indice de nilpotence de L est n,* $(nil(L) = n)$.

DÉMONSTRATION :

* 1) $\Rightarrow$ 2) Soit e_1 un vecteur caractéristique et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de Jordan. Comme $C(L) = (n)$, alors R_{e_1} a la forme suivante :

$$R_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, on a les crochets suivants :

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ [e_n, e_1] = 0 \end{cases}$$

On construit la série inférieur centrale :

$$< e_1, e_2, ..., e_n >= L^1 = L, \quad < e_2, e_3, ..., e_n > \subseteq L^2, \quad < e_3, e_4, ..., e_n > \subseteq L^3$$

et, en générale, on a $< e_i, ..., e_n > \subseteq L^i$, avec $1 \leq i \leq n+1$. On montre que $L^i =< e_i, ..., e_n >$ pour tout $2 \leq i \leq n$ et $L^{n+1} = \{0\}$ on utilisant la méthode de récurrence mathématique.

* Etape 1. Montre que l'énoncé est vrai pour $n = 2$. On a que $e_1 \notin L^2 = [L, L]$, alors $L^2 =< e_2, e_3, ..., e_n >$.
* Etape inductif : Montre que si $L^i =< e_i, ..., e_n >$, alors $L^{i+1} =< e_{i+1}, ..., e_n >$ aussi
  On peut le faire comme suit.
  On suppose le contraire. On a que $e_1, e_2, ..., e_{i-1} \notin L^{i+1}$ (dans l'autre cas,$e_1, e_2, ..., e_{i-1} \in L^i$). Puis, $e_i \in L^{i+1}$, ça implique que $L^{i+1} = L^i$ c'est une contradiction avec le définition de nilpotence.
  En résumé $dim(L^i) = n+1-i$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

* 2) $\Rightarrow$ 3) Si $dim(L^i) = n+1-i$, avec $1 \leq i \leq n+1$, c'est claire que $dim(L^n) = 1$ et $dim(L^{n+1}) = 0$. Donc,l'indice de nilpotence de L est égale a n.
* 3) $\Rightarrow$ 1) On suppose la condition 3), qui inclut que $dim(L^i/L^{i+1}) = 1$, avec $1 \leq i \leq n$. On considère la base $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de L tel que $x_i \in L^i/L^{i+1}$ avec $1 \leq i \leq n$.

Comme $x_2 \in L^2 \Rightarrow \exists\ y_2, z_2 \in L$ tel que

$$x_2 = [y_2, z_2] = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{2i} b_{2j} [x_i, x_j] = \alpha_{11}^2 [x_1, x_1] + u_3$$

avec $u_3 \in L^3$ et $\alpha_{11}^2 [x_1, x_1] \neq 0$ sinon $x_2 \notin L^3$.

De manière analogue, $x_3 \in \Rightarrow \exists\ y_3, z_3, w_3 \in L$ tel que

$$x_3 = [[y_3, z_3], w_3] = \sum_{1 \leq i,j,k \leq n} a_{3i} b_{3j} c_{3k} [[x_i, x_j], x_k] = \alpha_{11}^3 [[x_1, x_1], x_1] + u_4$$

avec $u_4 \in L^4$ et $\alpha_{11}^3 [[x_1, x_1], x_1] \neq 0$ dans l'autre cas, $x_3 \notin L^4$.

Continuant comme ça, on conclu que les éléments

$$e_1 := x_1, e_2 := [x_1, x_1], e_3 := [[x_1, x_1], x_1], ..., e_n := [..., [[x_1, x_1], x_1], ..., x_1]$$

vérifier $e_i \in L^i/L^{i+1}$ avec $1 \leq i \leq n+1$. Sa montre que ses vecteurs sont linéairement indépendant. Donc, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$ avec $1 \leq i \leq n-1$. Comme $e_1 \in L - L^2$ sa implique que e_1 est un vecteur caractéristique de L et $C(L) = (n)$.

Le prochain théorème montre qu'il y a seulement une algèbre de Leibniz Nul filiforme pour chaque dimension.

Théorème 2.14.2. *Jusqu'à isomorphisme, il y a seulement une algèbre de Leibniz non-Lie nul filiforme de dimension n. Elle peut être donnée par la table de multiplications suivante :*

$$[e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

ou $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de L et les produits omis sont égale a zéro.

Démonstration : D'après le Théorème 2.14.1, on peut construire une base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de L tel que $e_1 \in L - L^2$ et

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-1 \\ [e_n, e_1] = 0 \end{cases}$$

D'après $[e_1, e_1] = e_2 \Rightarrow e_2 \in I$ et $I \subseteq Ann_d(L)$ sa implique $e_2 \in Ann_d(L)$.

Enfin, comme $Ann_d(L)$ est un idéal de L, on aura $e_3 \in Ann_d(L)$ et ainsi de suit on a $e_3, e_3, ..., e_n \in Ann_d(L)$. Donc $[e_i, e_j] = 0$ avec $1 \le i \le n$, $2 \le j \le n$

2.15 Algèbres De Leibniz filiforme

L'étude des algèbres de Leibniz filiforme est beaucoup plus compliquée de celle du nul filiforme.

Définition 2.15.1. ***(Algèbres De Leibniz filiforme)*** *Une algèbre de Leibniz L de dimension n est dite filiforme si $dim(L^i) = n - i$, ou $2 \le i \le n$.*

Théorème 2.15.1. *Soit L une algèbre de Leibniz nilpotente de dimension n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$C(L) = (n-1, 1)$.*
2. *$dim(L^i) = n - i$, $2 \le i \le n$.*
3. *l'indice de nilpotence de L est $n-1$, $(nil(L) = n-1)$.*

DÉMONSTRATION : Cette démonstration est évident.

2.16 Algèbres de Leibniz Simple et Semi-simple

2.16.1 Radical et nil radical d'une algèbre de Leibniz

Toute algèbre de Leibniz a trois idéaux $\{0\}$, I et L.

Lemme 2.16.1. *Toute algèbre de Leibniz de dimension fini a seulement un seul idéal résoluble maximal.*

DÉMONSTRATION : La somme des idéaux résolubles est résoluble, donc on considère cette somme comme l'idéal résoluble maximal.

Définition 2.16.1. ***(Radical d'une algèbre de Leibniz)*** *Soit L une algèbre de Leibniz de dimension fini. L'idéal résoluble maximal est appelé radical de L $(rad(L))$.*

Lemme 2.16.2. *Toute algèbre de Leibniz de dimension fini a un seul idéal nilpotent maximal.*

DÉMONSTRATION : similaire comme la démonstration du Lemme 2.16.1

Définition 2.16.2. ***(Nilradical d'une algèbre de Leibniz)*** *Soit L une algèbre de Leibniz de dimension fini. L'idéal nilpotent maximal est appelé nilradical de L* $(nilrad(L))$.

Remarque 2.16.1 *C'est claire que,*

1. *L est résoluble* $\Leftrightarrow radL = L$
2. *L est nilpotent* $\Leftrightarrow nilradL = L$
3. $nilrad(L) \subset rad(L)$

Définition 2.16.3. ***(Algèbre de Leibniz simple)*** *Une algèbre de Leibniz L est appelée* $simple$ *si ses idéaux sont que* $\{0\}, I, L$ *et* $L^2 \neq I$.

Cette définition approuve avec celle du algèbre simple de Lie, ou $I = \{0\}$.

Définition 2.16.4. ***(Algèbre de Leibniz semi-simple)*** *Une algèbre de Leibniz est dite semi-simple si son radical résoluble est égale a* I.

Chapitre 2

Bibliographie

[1] A. Bloh : *Sur une généralisation du concept d'algèbre de Lie* (en Russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965), 471-473 ; traduit en Anglais en mathématiques Soviétiques. Dokl. **6** (1965), 1450-1452.

[2] A. Bloh : *Cartan-Eilenberg théorie d'homologie pour une classe généralisée d'algèbres de Lie* (en Russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **175** (1967), 266-268 ; traduit en Anglais en mathématiques Soviétiques. Dokl. 8 (1967), 824-826.

[3] A. Bloh : *Une certaine généralisation du concept d'algèbre de Lie* (en Russe), Moskov. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap., No. **375** (1971), 9-20.

[4] J.-L. Loday : *Une version non commutative des algèbres de Lie : les algébres de Leibniz* , Enseign. Math. (2) **39** (1993), no. 3-4, 269-293.

[5] J.-L. Loday et T. Pirashvili : *Algèbres enveloppantes universelles des algèbres de Leibniz et (co) homologie*, Math. Ann. **296** (1993), no. 1, 139-158.

[6] C. Cuvier : *Algèbres de Leibniz : définitions, propriétés*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 1, 1-45.

[7] R. D. Schafer : *An introduction to nonassociative algebras*, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, vol. **22**, Academic Press, Inc., New York, 1966.

[8] Nil Mansuroglu, and Mücahit Özkaya : *A note on the structure constants of Leibniz algebras* AIP Conference Proceedings 2086, 030024 (2019)