

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université de Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi - Bordj Bou Arreridj

Faculté des Sciences et de la technologie

Département de Génie mécanique

Mémoire

Présenté pour obtenir

LE DIPLOME DE MASTER

FILIERE : Génie mécanique

Spécialité : énergétique

Par

➤ **Addala Mohammed abdessamed**

Intitulé

***EFFET D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR LA CONVECTION
NATURELLE DANS UNE ENCEINTE POREUSE SATURÉE PAR UN
FLUIDE PARAMAGNÉTIQUE***

Soutenu le : 18 / 12 / 2025

Devant le Jury composé de :

Nom & Prénom	Grade	Qualité	Etablissement
M. T. Tayebi	Pr.	Président	Université Mohamed El bachir El Ibrahimi B.B.A
M. S. Hamimid	Pr.	Encadreur	Université Mohamed El bachir El Ibrahimi B.B.A
M. L. Saidani	MCB	Examineur	Université Mohamed El bachir El Ibrahimi B.B.A

Année Universitaire 2024/2025

Remerciements

Louange à ALLAH pour m'avoir donné la force et la persévérance nécessaires à la réalisation de ce travail, et paix sur notre prophète Mohammed et ses compagnons.

Je remercie sincèrement mon directeur de mémoire, Dr. HAMIMID

Saber, pour son soutien constant, ses conseils précieux et son dévouement, qui ont été essentiels tout au long de cette recherche.

J'exprime également ma gratitude au comité de soutenance, pour leurs remarques et suggestions enrichissantes.

Je remercie le recteur de l'université Mr. Boukaroura ali pour le soutien et les facilités offertes tout au long de cette période, ainsi que tous les professeurs et le personnel administratif, pour leur accompagnement durant mon parcours académique.

Enfin, j'adresse ma profonde reconnaissance à ma famille, en particulier à mes parents, pour leur soutien inconditionnel et leur encouragement constant, qui ont été une source de motivation et de force tout au long de ce travail.

ADDALA Mohammed abdessamed

Dédicace

À mes très chers parents,

À mes frères (Mabrouk, Takieddine, Moncef)

À mes deux sœurs

À ma grand-mère et toute ma famille.

Je tiens à vous Didier ces quelques mots pour vous exprimer ma gratitude et ma reconnaissance pour tout le soutien que vous m'avez apporté tous au long de mes études.

Je suis fier de partager ce moment de réussite avec vous. Ce succès c'est le nôtre. Merci de m'avoir soutenu, Encourager et accompagner tout au long de ce parcours.

Je vous dédie cette réussite, et je veux remercier pour tout ce qui vous avez fait pour moi. Vous serez toujours une source d'inspiration.

Avec toute mon affection

ADDALA Mohammed abdessamed

Sommaire

<i>Remerciements</i>	2
<i>Dédicace</i>	3
Liste des figures	6
Liste des tableaux	7
Nomenclature :	9
Résumé :	11
Introduction générale :	14
Chapitre 1 : Revue bibliographique	1
1.1 Introduction :	1
1.2 Etude Bibliographique :	1
1.2a Convection naturelle :	1
1.2.c Effet du champ magnétique sur la convection naturelle :	5
1.2.d substances magnétique.....	Erreur ! Signet non défini.
Chapitre 02 : Formulation mathématique	2
2.1 Introduction :	2
2.2 Définition du problème (géométrie physique) :	2
2.3 Hypothèses simplificatrices :	3
2.4 Modèles d'écoulement en milieu poreux :	3
2.4a La loi de Darcy :	3
2.4.b Formulation de Brinkman :	4
2.5 Extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy	4
2.6 La susceptibilité magnétique :	7
2.7 Forces magnétiques :	8
2.8 Équations de conservation et adimensionnement :	9
2.9 Conditions initiales et limites :	10
Chapitre 03 : Résolution numérique	13
3.1 Introduction :	13
3.2 Volumes finis :	13
3.2a Principe.....	13
3.2b Maillage décalé :	15
3.3 Discretisation des équations de conservation :	17
3.3.a Terme convectif :	19

3.3.b Terme diffusif :	19
3.3.c Terme source :	20
3.3.d Équation de continuité :	21
3.3.e . Schémas numériques	21
3.4 Méthode et algorithme de calcul :	23
3.4a Couplage vitesse-Pression (Algorithme SIMPLER)	23
3.4b Algorithme SIMPLER :	23
3.4c Algorithme de THOMAS (TDMA) :	29
CHAPITRE 4 : Résultats et interprétation	31
4.1 Introduction :	31
4.2 Validation numérique :	31
4.3 Effet du nombre de Darcy :	33
4.3a Analyse des lignes de courant :	35
4.3b Analyse des isothermes :	35
4.3c La distribution du Nusselt local Nu_f :	36
4.4 Effet du nombre magnétique :	37
4.4a Analyse des lignes de courant :	39
4.4b Analyse des isothermes :	39
4.4c La distribution du Nusselt local Nu_f :	40
Conclusion général :	42
Liste des références :	43

Liste des figures

Figure (1) : Représentation graphique du modèle physique et du système d'axes	09
Figure (2) : Volume de contrôle dans le cas de 2D	19
Figure (3) : Maillage de la formulation vitesse-pressure : (a) maillage	20
Figure (4) : Volumes de contrôle pour les scalaires et les vitesses	21
Figure (5) : volume de contrôle pour la composante u et ces voisines	22
Figure (6) : volume de contrôle pour la composante v et ces voisines	22
Figure (7) : interpolation pour le gradient de ϕ	25
Figure (8) : diffusivité pour un matériau composite	26
Figure (9) : La résolution numérique du système linéaire obtenu est résolue par la méthode TDMA	34
Figure (10) : lignes de courant (a) et isothermes (b), pour $Ra = 10^6$, $Pr = 0.7$, haut (présent travail) et bas ([48])	
Figure (11) : lignes de courant (a) et isothermes (b), pour $Ra = 10^4$, $Pr = 1$, $Da = 10^{-2}$, $\mathcal{E} = 0.6$, haut (présent travail) et bas ([49])	
Figure(12) : lignes de courant et isothermes pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\gamma_m = 0$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes	37
Figure(13) : distribution du nombre de Nusselt sur la paroi chaude pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\gamma_m = 0$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de Darcy	37
Figure(14) : distribution du nombre de Nusselt moyen (Nu_{avg}) sur la paroi froide pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\gamma_m = 0$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de Darcy.	
Figure(15) : lignes de courant et isothermes pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-4}$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de γ_m	39
Figure(16) : distribution du nombre de Nusselt sur la paroi chaude pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-4}$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de γ_m	39
Figure(17) : distribution du nombre de Nusselt moyen (Nu_{avg}) sur la paroi froide pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-4}$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de γ_m	

Liste des tableaux

Tableau (1) : Expressions de ρ , Γ et S , pour les équations de conservation	24
Tableau (2) : Expression des coefficients convectif	25
Tableau(3) : Expressions des coefficients diffusifs	26
Tableau (4) : Expressions de la fonction $A(P)$ pour les différents schémas	29

Nomenclature :

Δp (Pa·m ⁻¹)	Le gradient de pression appliqué
F (N)	La résultante des forces extérieures
Ra	Numéro de Rayleigh
Nu	Numéro de Nusselt
Pr	Numéro de prandlt
U_{in} (V)	La tension induite
H (A·m ⁻¹)	L'intensité du champ magnétique imposé
M (A·m ⁻¹)	L'aimantation
C (K)	Constante de Curie
$\vec{F}_{kelvin}$ (N·m ⁻³)	Force de Kelvin
b (T)	L'induction magnétique
P_0 (Pa)	La pression statique.
C_p (J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹)	Capacité calorifique massique à pression constante du fluide.
F_i (kg·m ⁻² ·s ⁻¹)	Flux de masse convectif
P_e	Le nombre de péclet
P^* (Pa)	Estimation du champ de pression
E, W, N, S	Nœuds des volumes de contrôle adjacents est, ouest, nord, sud respectivement.
e, w, n, s	Faces du volume de contrôle est, ouest, nord, sud respectivement
F_e, F_w, F_n, F_s (kg·s ⁻¹ ou kg·m ⁻² ·s ⁻¹)	Flux convectifs aux interfaces e, w, n, s de l'équation de transport discrétisée
De, Dw, Dn, Ds (kg·s ⁻¹ ou W·m ⁻²)	Flux diffusifs aux interfaces e, w, n, s de l'équation de transport discrétisé

$A(P)$	Fonction d'un schéma numérique.
t (s)	Temps
T (K)	Température.
T_0 (K)	La température de référence.
T_c (K)	La température de la paroi chaude.
T_f (K)	La température de la paroi froide.
U (m·s ⁻¹)	Composante de la vitesse suivant x.
V (m·s ⁻¹)	Composante de la vitesse suivant y.
S_ϕ	Le terme source
$\bar{S}_\phi$	La valeur moyenne de S_ϕ
e	Le flux à l'interface

Symboles grecs :

α (m ² ·s ⁻¹)	La diffusivité thermique.
ρ (kg·m ⁻³)	La masse volumique
χ_m	La constante de proportionnalité
Ω_{cv} (m ³)	Le volume du contrôle

Résumé :

L'objectif de ce travail était d'étudier la simulation numérique du transfert thermique naturel bidimensionnel dans un espace poreux saturé de fluide paramagnétique sous l'effet d'un champ magnétique externe. Les équations régissant l'écoulement magnétohydrodynamique, à savoir les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie, ont été résolues à l'aide de la méthode des volumes finis en s'appuyant sur l'algorithme SIMPLER pour relier la vitesse à la pression. L'effet de l'intensité et de la direction du champ magnétique sur les propriétés de l'écoulement et le transfert de chaleur à l'intérieur de l'espace a également été analysé.

Abstract:

The objective of this work was to study the numerical simulation of two-dimensional natural convection within a porous space saturated with a paramagnetic fluid under the influence of an external magnetic field. The governing equations of magnetohydrodynamic flow, represented by the Navier-Stokes equations and the energy equation, were solved using the finite volume method based on the SIMPLER algorithm to relate velocity to pressure. The effect of both the intensity and direction of the magnetic field on the flow characteristics and heat transfer within the space was also analyzed.

ملخص:

هدف هذا العمل إلى دراسة المحاكاة العددية للحمل الحراري الطبيعي ثنائي الأبعاد داخل حيز مسامي مشبع بسائل بارامغناطيسي تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي. تم حل المعادلات الحاكمة للجريان المغناطو هيدرو ديناميكي، والمتمثلة لربط السرعة في معادلات نافير-ستوكس ومعادلة الطاقة، باستخدام طريقة الحجوم المحدودة بالاعتماد على خوارزمية بالضغط. كما تم تحليل تأثير كل من شدة المجال المغناطيسي واتجاهه على خصائص الجريان وانتقال الحرارة داخل الحيز...

Introduction générale

Introduction générale :

La convection naturelle constitue un mode essentiel de transfert de chaleur résultant du mouvement spontané des particules d'un fluide entre des zones de températures différentes, entraînant un mélange vigoureux et un échange continu d'énergie et de quantité de mouvement. Ce phénomène joue un rôle fondamental dans de nombreux systèmes d'ingénierie tels que l'isolation thermique, les échangeurs de chaleur, le refroidissement des dispositifs électroniques, les machines électriques, la géophysique, les réacteurs nucléaires et les technologies solaires. Au vu de son importance, il fait l'objet d'un intérêt constant dans la littérature scientifique, notamment à travers l'analyse des processus gouvernés par la deuxième loi de la thermodynamique. La convection naturelle en milieu poreux, en particulier, est largement rencontrée dans la nature et dans les applications industrielles ; elle est généralement modélisée à l'aide du modèle de Darcy et de l'approximation de Boussinesq, qui permettent de décrire efficacement les mécanismes d'écoulement et de transfert thermique dans ces milieux complexes.

La maîtrise du transfert thermique par convection dans les tuyaux, conduits et cavités est fortement affectée par la présence d'un champ magnétique. En effet, l'intensification de ce champ entraîne une réduction du transfert de chaleur, pouvant aller jusqu'à freiner presque totalement ce dernier lorsque le champ magnétique devient suffisamment élevé. Par ailleurs, l'impact du champ magnétique varie selon son orientation : un champ appliqué verticalement n'influence pas le transfert thermique de la même manière qu'un champ appliqué horizontalement.

Ce travail est constitué de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, la présentation théorique et les revues bibliographiques concernant le transfert thermique par convection naturelle et la convection thermomagnétique.

Le second chapitre est consacré à la description de la géométrie physique, à l'établissement du modèle mathématique, à la présentation des conditions aux limites, ainsi qu'à la formulation adimensionnelle des équations de conservation.

Dans Le troisième chapitre, nous décrivons le code numérique utilisé dans cette étude, basée sur la méthode des volumes finies.

Le quatrième chapitre présente les résultats numériques obtenus dans cette étude, accompagnés de leurs analyses et interprétations.

Le travail se conclut par une conclusion générale mettant en relief les principaux résultats obtenus.

Chapitre I

Chapitre 1 : Revue bibliographique

1.1 Introduction :

Ce chapitre retrace l'histoire et présente certaines études bibliographiques concernant la convection naturelle, ainsi que l'impact du champ magnétique sur la convection naturelle. Nous abordons également l'histoire des substances magnétiques : ferromagnétisme, diamagnétisme et paramagnétisme.

1.2 Etude Bibliographique :

1.2a Convection naturelle :

Le phénomène de transfert de chaleur par convection naturelle joue un rôle important, dans la nature et dans les systèmes artificiels. Dans la convection naturelle, le mouvement du fluide est le résultat de la force de flottabilité. Pour une cavité, le nombre de Rayleigh est généralement le plus utilisé.

La géométrie et l'orientation influencent la diversité de la convection naturelle dans une cavité. Un grand nombre d'enquêtes ont été réalisées, tant théoriquement qu'expérimentalement, sur une vaste étendue de nombres de Rayleigh. La convection naturelle dans une cavité verticale remplie d'air, dont les parois sont réchauffées et refroidies tandis que les murs horizontaux sont adiabatiques, a suscité beaucoup d'intérêt. En effet, de nombreuses applications industrielles se basent sur ce principe en tant que prototype. [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Auparavant, la convection naturelle dans des cavités rectangulaires, avec ou sans obstacles, a été étudiée par des chercheurs ayant analysé numériquement la convection libre de nanofluides ou de fluides purs à l'intérieur d'une cavité carrée contenant un réchauffeur triangulaire décentré et centré, selon la méthode du réseau de Boltzmann. Leurs recherches ont révélé qu'à un Rayleigh élevé, une influence significative sur le transfert thermique est observée lorsque le bloc triangulaire est positionné verticalement. Cependant, à de faibles valeurs de Rayleigh, c'est la position décentrée du bloc qui a un plus grand impact sur le transfert de chaleur. [7, 8, 9]

Baghsaz et al [10] ont étudié la convection naturelle du transfert thermique dans une cavité poreuse remplie de nanofluide, en intégrant l'analyse de la génération d'entropie. Leurs résultats montrent que l'augmentation de la porosité et du nombre de Rayleigh (Ra) intensifie à la fois le transfert de chaleur par convection naturelle et les irréversibilités du processus.

Dans leur étude numérique basée sur la méthode des volumes finis, **Oztop et Abu-Nada** [11] ont examiné la convection naturelle dans une cavité rectangulaire nanofluide, avec parois verticales froides, chauffage local sur une paroi verticale et parois horizontales isolées.

Zhan et al. [12] ont mené une étude expérimentale sur la convection naturelle dans une cavité fermée. Ils ont montré que l'augmentation de l'écart entre les sources thermiques entraîne une évolution non monotone du transfert de chaleur : celui-ci s'améliore d'abord, puis diminue au-delà d'une certaine distance. Par ailleurs, leurs résultats indiquent que le transfert thermique peut être renforcé en augmentant la différence de température entre les sources chaudes et les dissipateurs.

Aminossadati et Ghasemi [13] ont étudié numériquement la convection naturelle d'un nanofluide dans une cavité carrée, en considérant des conditions aux limites thermiques sur les parois et un réchauffeur à flux thermique constant situé sur la paroi horizontale inférieure. Ils ont analysé l'influence du nombre de Rayleigh (Ra), de la fraction volumique des nanoparticules, ainsi que de la taille et de la position du réchauffeur, en plus de l'effet du type de nanofluide sur l'écoulement et le transfert de chaleur.

1.2b La convection naturelle dans milieu poreux :

Krishna et al. [14] ont réalisé une étude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée contenant un milieu poreux anisotrope, en tenant compte de la dissipation visqueuse (chauffage hydrodynamique) et des effets thermiques associés. Leurs résultats montrent que l'anisotropie du matériau poreux influence fortement la structure de l'écoulement ainsi que les performances de transfert de chaleur.

Une étude numérique a été menée par **Nawaf et al** [15] sur la convection naturelle en régime transitoire dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux. Le modèle de Darcy a été utilisé, avec l'hypothèse d'un fluide obéissant à l'approximation de Boussinesq. La paroi

gauche de la cavité, chauffée, voit sa température osciller autour d'une valeur moyenne, tandis que la paroi droite est maintenue à une température constante. Les parois horizontales sont considérées comme adiabatiques. Les chercheurs ont analysé l'évolution temporelle des champs d'écoulement (lignes de courant), des distributions de température (isothermes) et du nombre de Nusselt. Il a été observé que lorsque l'amplitude et la fréquence des oscillations de température de la paroi chaude sont élevées, le nombre de Nusselt devient négatif durant une partie du cycle, pour un nombre de Rayleigh égal à 10 000. Cette inversion est due au fait que le transfert thermique n'a pas suffisamment de temps pour s'effectuer efficacement de la paroi chaude vers la paroi froide. La valeur maximale du nombre moyen de Nusselt a été obtenue pour une fréquence adimensionnelle de 450, dans l'intervalle étudié allant de 1 à 2000, toujours pour un nombre de Rayleigh de 10 000.

Barletta et al [16] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée verticale remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide. Ils ont utilisé le logiciel Femlab 3.1i (c COMSOL, Inc.). La cavité est chauffée par une paroi interne concentrique circulaire soumise à un flux de chaleur uniforme. Les parois de la cavité sont isothermes et l'écoulement est supposé être à deux dimensions, stationnaire et laminaire. Ils ont négligé l'effet de la dissipation visqueuse et aucune production d'énergie interne n'est considérée. Le milieu poreux satisfait à la loi de Darcy et la validité de l'approximation de Boussinesq est réalisée. Ils ont trouvé que la fonction de courant et la température dépendent du nombre de Rayleigh modifié Ra^* ; qui est le produit du nombre de Rayleigh Ra et du nombre de Darcy Da . Ils ont évalué les

valeurs moyennes du nombre de Nusselt et de l'énergie cinétique. Ils ont fait des essais pour vérifier que la solution est indépendante du maillage et que Femlab produit généralement des résultats précis à quatre chiffres pour toutes les quantités testées.

Bouhade [17] a fait une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une enceinte bidimensionnelle à fond non uniforme (sinusoïdal) chauffée par une température constante et uniforme T_p , les parois verticales sont adiabatiques et la paroi supérieure est maintenue à une température constante T_a . Les paramètres dont dépend la structure de la convection naturelle sont : le nombre de Rayleigh qui varie entre 10000 et 5.100000 , le rapport d'aspect de la cavité $As=8$, le facteur de forme A (entre 0.10 et 0.20) et le nombre de Prandtl (celui de l'eau). Il a discrétisé les équations gouvernant l'écoulement et le transfert thermique dans la cavité en utilisant une méthode implicite aux différences finies et la

méthode des volumes de contrôle. Il a réalisé l'adéquation entre les champs des vitesses et de pression à l'aide de l'algorithme SIMPLE. L'influence des paramètres caractéristiques de la topographie de la surface d'échange (fond sinusoïdal), notamment de l'amplitude d'ondulation b et le facteur de forme de la cavité A , sur le transfert de chaleur et sur la structure de l'écoulement, sont mises en évidence la variation du nombre de Rayleigh a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulements et plusieurs bifurcations entre ces écoulements. Il a trouvé que les nombres de Nusselt locaux passent par des maximums aux sommets et aux creux et par des minimums entre eux.

Selon **Nabavizadeh et al.** [18], dans une cavité carrée avec un cylindre sinusoïdal, l'amplitude (nombre d'ondulations) et l'orientation du cylindre modifient significativement le transfert de chaleur, ainsi que les champs de température et de vitesse.

Bahloul [19] a fait une étude analytique et numérique de la convection naturelle d'un fluide dans une cavité poreuse verticale. Une différence de température uniforme est appliquée à travers les parois verticales tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Les paramètres dont dépend la structure de l'écoulement sont le nombre de Rayleigh Ra , qui varie entre 10 et 10000 et le facteur de forme de la cavité A qui varie entre 1 et 20. Pour un grand nombre de Rayleigh, et sur la base des résultats numériques il a obtenu un modèle approximatif du régime de couche limite. Pour un chauffage élevé, il a donné un modèle simplifié pour le paramètre de stratification $\gamma = 1.22A - 0.47Ra^{0.46}$. Il a montré aussi que le coefficient de stratification thermique dépend essentiellement du rapport de forme de l'enceinte A , et devient presque indépendant du nombre de Rayleigh, Ra , dans le régime de la couche limite, $\tau = (3/2)$

A. Il a utilisé la théorie de la stabilité linéaire du flux parallèle pour obtenir le nombre de Rayleigh critique pour une cavité longue ($A \gg 1$). Il a constaté que l'écoulement est stable, indépendant du coefficient de stratification τ .

Une étude a été réalisée par **Baytas** [20] sur la génération d'entropie dans une cavité inclinée et saturée d'un milieu poreux, soumise à un transfert thermique par convection naturelle en régime laminaire. L'analyse s'appuie sur la résolution numérique des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, en adoptant la loi de Darcy ainsi que l'approximation de Boussinesq pour un fluide incompressible. Les conditions aux limites imposées à la cavité comprennent deux parois opposées maintenues à des températures constantes mais différentes, tandis que les deux autres parois sont

thermiquement isolées. Les principaux paramètres étudiés sont l'angle d'inclinaison de la cavité et le nombre de Darcy-Rayleigh. Les résultats numériques obtenus ont été comparés avec ceux issus de travaux antérieurs, montrant une excellente concordance, ce qui valide la fiabilité du code de simulation utilisé. L'étude a également démontré que la cartographie de l'entropie locale est pertinente et peut fournir des indications précieuses pour déterminer un angle d'inclinaison optimal.

Une étude numérique a été réalisée par **Kalla et al** [21] sur la convection naturelle dans une couche poreuse allongée horizontalement. L'ensemble des parois de la cavité rectangulaire est soumis à des flux de chaleur uniformes, avec un apport thermique sur une face et un refroidissement sur la face opposée. Le problème a été traité en s'appuyant sur le modèle de Darcy. Les chercheurs ont montré qu'en supposant un écoulement parallèle, il était possible d'obtenir une solution analytique permettant de décrire les champs de la fonction de courant et de température au centre de la cavité. L'étude a également révélé l'existence de solutions multiples, dont certaines sont instables. Pour résoudre les équations complètes du problème, une méthode numérique basée sur les différences finies a été utilisée. Les effets de divers paramètres ont été examinés, en particulier l'influence du nombre de Rayleigh (Ra) et d'une constante α représentant le rapport entre les flux de chaleur horizontaux et verticaux.

1.2.c Effet du champ magnétique sur la convection naturelle :

Le couplage de la convection naturelle avec des phénomènes d'origine magnétique était d'un grand intérêt dans les domaines scientifiques et industriels. Avec l'application d'un champ magnétique externe, il est possible d'agir sur les écoulements sans aucun contact physique et ainsi contrôler les transferts thermique et massique.

Venkatachalappa et al. [22] ont rapporté l'effet d'un champ magnétique axial ou radial sur la convection naturelle à double diffusion dans un cylindre vertical creux. D'après leurs constatations, le champ magnétique supprime la convection double diffuse uniquement pour les faibles rapports de flottabilité. Toutefois, pour obtenir un rapport de flottabilité supérieur, le champ magnétique est utile pour supprimer le courant de convection thermique.

Dans leurs travaux, **Aminossadatiet al.** [23], sur la convection naturelle MHD dans une cavité carrée avec un aileron mince, ils ont prouvé que la position de l'aileron affecte plus significativement la paroi chaude que la paroi froide à des valeurs élevées du nombre de Rayleigh, où le transfert de chaleur est principalement dû à la convection.

Sivasankaran et Ho [24] ont étudié numériquement l'influence des propriétés thermiques sur la convection naturelle de l'eau dans une cavité en présence d'un champ magnétique. Leurs résultats indiquent que le transfert de chaleur diminue lorsque l'intensité du champ magnétique augmente, et qu'il dépend également de l'orientation du champ magnétique externe.

Le flux de convection instationnaire, laminaire et mixte en présence de génération ou d'absorption de chaleur interne avec un champ magnétique dans une enceinte à couvercle chauffé de manière isotherme est étudié par **chamkha** [25]. Il a montré que le champ magnétique affecte fortement la manière d'écoulement et le transfert de chaleur

Ghasemi et al. [26] ont analysé la convection naturelle dans une cavité contenant un nanofluide eau-Al₂O₃ soumise à un champ magnétique. Leurs résultats indiquent qu'une hausse du nombre de Hartmann (Ha) atténue le mouvement convectif et conduit à une baisse du transfert de chaleur.

Al-Rashed et al. [27] Ont examiné l'impact du champ magnétique partiel actif sur la convection naturelle dans une cavité tridimensionnelle cubique remplie de nanofluides à base de nanotubes de carbone.

Purusothaman et al. [28] ont réalisé une étude numérique en trois dimensions sur la convection naturelle dans une cavité à travers une plaque thermiquement active, sous l'influence d'un champ magnétique, et ont déterminé que les effets magnétiques répriment considérablement le transfert de chaleur dans les directions x et y.

L'effet du champ magnétique sur la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire a été analysé numériquement par **Rudraiah et al** [29]. Ils ont observé que le transfert de chaleur est réduit en présence d'un champ magnétique.

Qi et al. [30] ont mené une étude sur la convection naturelle dans une cavité avec chauffage partiel par le bas, soumise à un champ magnétique non uniforme. Ils ont mis en évidence que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique exerce un effet de freinage sur le mouvement du fluide, entraînant ainsi une baisse progressive de la vitesse d'écoulement.

Dans les travaux de **Kolsi et al.** [31], l'impact d'un champ magnétique externe sur la convection naturelle dans des métaux liquides contenue dans une cavité cubique a été

examiné. Ils ont remarqué que l'entropie produite est distribuée sur l'ensemble de la cavité lorsqu'un champ magnétique est appliqué.

Mahmoudi et al. [32] ont étudié numériquement la convection naturelle en régime MHD ainsi que la génération d'entropie dans une cavité remplie de nanofluide, soumise à un champ magnétique. Ils ont montré que l'augmentation du nombre de Hartmann (Ha) réduit le transfert de chaleur, tandis qu'une hausse du nombre de Rayleigh (Ra) l'intensifie, traduisant un effet opposé de ces deux paramètres sur les performances thermiques. Le flux de convection naturelle stable et laminaire dans l'existence d'un champ magnétique est examiné par **Ece et Buyuk** [33], Ils ont découvert que ce champ supprimait le flux convectif et que sa direction influençait également le modèle de flux

La convection naturelle d'un fluide électroconducteur (ou substance ferromagnétique) contenu dans une cavité fermée représente un sujet adéquat de recherche scientifique [34], à cause de sa présence dans diverses procédés industriels, tels que la géophysique, les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires, les collecteurs de l'énergie solaire et spécialement lors du processus de croissance cristalline.

D'autre part, l'étude de la convection des fluides non électroconducteurs tels que les substances paramagnétiques ou diamagnétiques dues à la force de magnétisation semble avoir commencé depuis le rapport de Braithwaite et al. en 1991[35] sur la mesure expérimentale des taux d'échanges thermiques de la solution de nitrate de gadolinium pour la configuration de la convection naturelle de type Rayleigh-Bénard dans l'espace de l'alésage d'un aimant supraconducteur.

La force motrice ou le terme moteur de cette convection est la force de magnétisation (ou aimantation ou magnétique) [36], qui est proportionnelle au gradient du carré du champ magnétique. Cette force est devenue largement applicable avec le développement des aimants supraconducteurs. La motivation est le vaste potentiel d'application telle que de l'accélération gravitationnelle ou l'amélioration quasi gravitationnelle dans l'espace de l'alésage d'un aimant supraconducteur, à micro-échelle d'effets magnétiques dans les processus au niveau atomique.

Un champ de force magnétique permet également de contrôler, voire de supprimer la convection naturelle dans des fluides non ou faiblement conducteurs comme l'eau par exemple avec la possibilité d'étendre ceci à des oxydes inorganiques, des solvants organiques, ou des solutions aqueuses super-saturées en protéines [37]. Ce contrôle de la convection par

un champ de forces magnétiques permet par exemple d'augmenter le taux d'oxygène dissous dans de l'eau, sans même envisager des systèmes de ventilation dans lesquels le vent est généré par un champ de forces magnétiques, ce qui supprime toute partie mécanique mobile [38].

Bednarz et al [39] ont quant à eux étudié numériquement et expérimentalement la convection magnétique d'un fluide paramagnétique dans une cavité différentiellement chauffée par les parois latérales. L'influence d'un champ magnétique transversal d'intensité 10 T sur le mode convectif du fluide paramagnétique et le transfert de chaleur a été particulièrement analysée.

Chapitre II

Chapitre 02 : Formulation mathématique

2.1 Introduction :

Dans cette partie, nous exposons la géométrie physique analysée ainsi que le modèle mathématique associé, qui est basé sur les lois de conservation de masse, de mouvement en deux dimensions et d'énergie. Cette section aborde également la discussion sur les conditions aux limites et la formulation adimensionnelle des équations.

2.2 Définition du problème (géométrie physique) :

La configuration géométrique bidimensionnelle de notre écoulement est montrée dans la figure 2.1. Nous considérons le cas d'une cavité carrée contenant un milieu poreux saturé par un fluide newtonien. Les axes de coordonnées x et y sont respectivement orientés suivant les directions horizontale et verticale. Les parois verticales de la cavité sont soumises à des températures différentes chaude et froide créant ainsi un gradient thermique permettant la naissance des mouvements convectifs tandis que les parois horizontales sont supposées comme adiabatiques et imperméables. Un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B}$ est appliqué parallèlement à la gravité g .

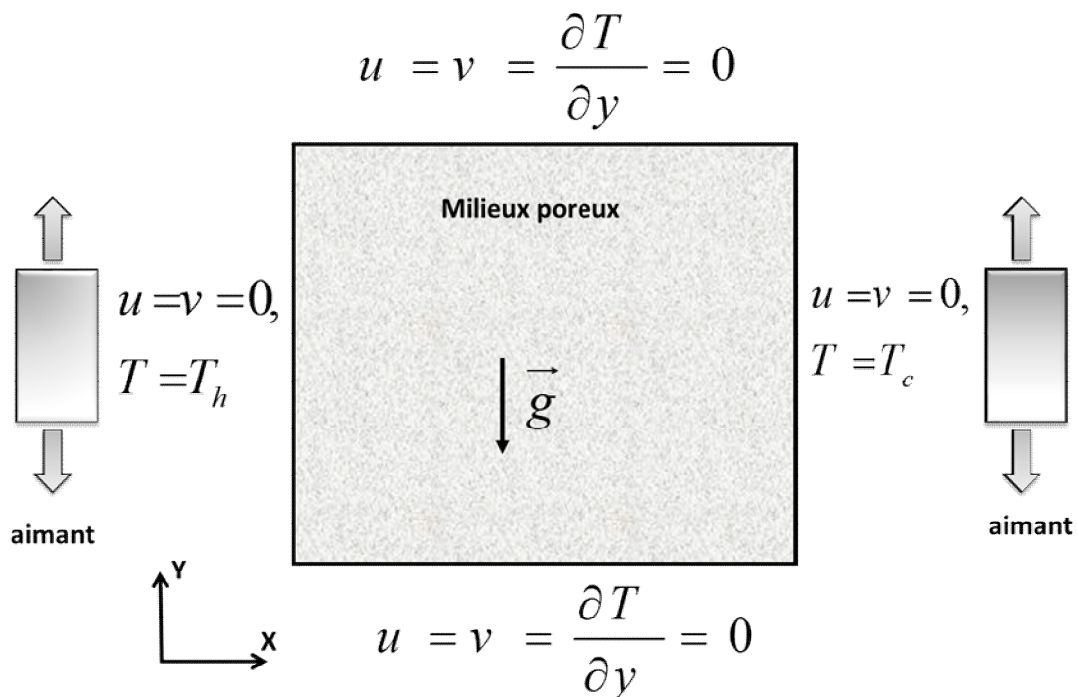


Figure (1) : Représentation graphique du modèle physique et du système d'axes

2.3 Hypothèses simplificatrices :

Afin de simplifier la formulation du modèle mathématique, nous allons considérer les approximations suivantes qui sont souvent utilisés dans l'étude de la convection naturelle :

- La matrice poreuse est isotrope, perméable et homogène.
- Le fluide étudié est considéré comme newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est laminaire.
- Il n'y a pas de source de chaleur, ni de réaction chimique.
- Les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence. To et No représentent 0 respectivement les valeurs moyennes de la température et de la concentration.
- La densité du fluide, quant à elle, suit **l'hypothèse de Boussinesq**

$$\rho(T) = \rho_0[1 - \beta_T (T - T_0)] \quad (1)$$

Avec :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

2.4 Modèles d'écoulement en milieu poreux :

2.4a La loi de Darcy :

La loi de Darcy, formulée en 1856 sur la base d'expérimentations, décrit le comportement des fluides homogènes dans les matériaux poreux. Cette loi, formulée sur la base de flux unidirectionnels à travers des colonnes de sable, a démontré la relation proportionnelle entre le gradient de pression appliqué et l'écoulement d'eau à travers la colonne de sable. Depuis lors, la loi de Darcy est la base des sciences hydrogéologiques, même pour les écoulements multidirectionnels. Elle est écrite :

$$\vec{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \vec{V} \quad (2)$$

Avec :

$\vec{\nabla}p$: Le gradient de pression appliqué

μ : La viscosité dynamique du fluide

K : La perméabilité du milieu poreux

$\vec{V}$: La vitesse de filtration

La loi de Darcy, encore largement utilisée, s'est avérée insuffisante. Parmi ses insuffisances réside dans le fait qu'elle ne peut pas traduire l'influence de la nature du fluide sur l'écoulement notamment près des parois. En effet, avec ce modèle, la condition de non glissement aux parois est retenue quelque soit le fluide considéré. Cette équation ne tient pas compte non plus d'éventuels effets inertiels.

2.4.b Formulation de Brinkman :

Brinkman (1947) a élargi la loi de Darcy pour y incorporer un terme qui correspond au terme de diffusion visqueuse dans la loi de Stokes, lors du calcul de la force visqueuse appliquée par un fluide sur des particules sphériques constituant un milieu poreux :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_{eff}\vec{\nabla}^2V \quad (3)$$

On désigne souvent cette loi empirique sous l'appellation de formulation de Darcy-Brinkman. Dans l'équation, le premier terme à droite est désigné comme le terme de Darcy, tandis que le second est nommé le terme de Brinkman. Brinkman explique cette loi empirique en soulignant que, pour les valeurs basses de la perméabilité K , l'équation se réduit à celle de Darcy, tandis que lorsque la perméabilité approche l'infini, on obtient l'équation de Stokes. Le défi de ce modèle est d'évaluer la viscosité équivalente μ_{eff}

2.5 Extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy

$$\underbrace{\rho \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left[\frac{\vec{V}}{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla} \right] \frac{\vec{V}}{\varepsilon} \right]}_1 = \underbrace{-\frac{\mu}{K}\vec{V}}_2 + \underbrace{\rho \vec{g}}_3 - \underbrace{\vec{\nabla}P}_4 + \underbrace{\tilde{\mu} \Delta \vec{V}}_5 - \underbrace{\frac{Cf}{\sqrt{K}} \rho |\vec{V}| \vec{V}}_6 \quad (4)$$

Brinkman a inclus un terme dans l'équation de Darcy pour considérer les effets liés à la viscosité, tandis que Forchheimer a incorporé un terme pour prendre en compte les effets d'inertie lors des écoulements à grande vitesse (nombre de Reynolds élevé). Afin de prendre en compte les effets simultanés des parois et de l'inertie, nous avons intégré deux éléments à la loi de Darcy pour étendre son champ d'application. Par analogie avec l'équation de Navier-Stokes, l'extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy dans le régime non-stationnaire se présente sous la forme suivante :

- 1) Forces inertielles macroscopiques.
- 2) Terme de Darcy.
- 3) Forces de volume.
- 4) Gradient de pression.
- 5) Terme visqueux de Brinkman.
- 6) Terme Forchheimer (forces inertielles microscopiques).

En outre, le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé dans l'équation du moment.

Sous l'hypothèse de Boussinesq :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{eff}}{\rho \varepsilon} \nabla^2 u - D_x \quad (6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{eff}}{\rho \varepsilon} \nabla^2 v + \beta_t (T - T_0) g - D_y \quad (7)$$

$$(\rho C_p)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = k_{eff} (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad (8)$$

$$(\rho C_p)_{eff} = \varepsilon \cdot (\rho C_p)_f + (1 - \varepsilon) (\rho C_p)_s \quad (9)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (10)$$

Où D_x (D_y), représente la force de traînée du milieu poreux par unité de volume dans la direction x (ou y).

En ce qui concerne la traînée exercée par la matrice solide par unité de volume, on peut l'exprimer sous la forme :

$$D = AV + BV^2 \quad (11)$$

Pour un flux unidimensionnel de vitesse V , l'expression de traînée mentionnée ci-dessus est soutenue par diverses corrélations à lit tassé et à lit fluidisé, y compris la corrélation fréquemment employée d'Ergun.

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, il est possible de démontrer que la contribution à la traînée de la matrice solide dans l'axe x (ou y) se présente sous cette forme :

$$D_x = Au + B(u^2 + v^2)^{1/2}u$$

$$D_y = Av + B(u^2 + v^2)^{1/2}v$$

En procédant à la résolution, nous obtenons l'expression de la force de traînée vectorielle selon la direction y .

Dans cette étude, nous adoptons la corrélation d'Ergun, caractérisée par les constantes empiriques A et B , formulée comme suit :

$$A = 150 \frac{(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^3} \frac{\mu_f}{D_p^2}$$

$$B = 1.75 \frac{(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^3} \frac{\rho_f}{D_p}$$

Il est important de souligner que, selon les plages de porosité du lit, différentes corrélations peuvent être appliquées afin de représenter de manière adéquate le comportement d'écoulement non darcien dans le milieu poreux dans le cadre d'une modélisation générale.

Par ailleurs, l'expression précédente de la traînée exercée par la matrice solide peut également être reformulée en fonction de la perméabilité moyenne K , en introduisant la définition suivante :

$$K = \frac{\varepsilon^3 D_p^2}{150(1 - \varepsilon)^2} \quad (12)$$

À présent, le terme associé au glissement au sein de la matrice solide peut être formulé de la manière suivante :

$$D_x = \frac{\mu_f u}{K} + \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\rho_f}{\sqrt{K}} \frac{|\vec{V}|}{\varepsilon^{3/2}} u$$

$$D_y = \frac{\mu_f v}{K} + \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\rho_f}{\sqrt{K}} \frac{|\bar{V}|}{\varepsilon^{3/2}} v$$

2.6 La susceptibilité magnétique :

Les matériaux magnétiques sont des substances qui ont la capacité de s'aimanter lorsqu'elles sont exposées à un champ magnétique, ce qui implique qu'elles peuvent produire leur propre champ magnétique. Selon leurs propriétés magnétiques, on les répartit en trois grandes classes : les diamagnétiques, les paramagnétiques et les ferromagnétiques. La manière dont un matériau répond à un champ magnétique externe est décrite par l'aimantation, symbolisée par M . Elle est définie par la formule suivante :

$$M = \chi_m H \quad (13)$$

H étant l'intensité du champ magnétique imposé.

La constante de proportionnalité χ_m est un nombre sans dimension appelé "susceptibilité magnétique spécifique" du matériau. Les substances paramagnétiques acquièrent une faible aimantation dirigée dans le sens du champ H ($\chi_m > 0$). Les substances diamagnétiques acquièrent une très faible aimantation dirigée en sens inverse de H ($\chi_m < 0$). Les matériaux ferromagnétiques sont des substances jouissant de propriétés magnétiques particulières. On peut rapporter les susceptibilités magnétiques à l'unité de masse. On a la relation :

$$\chi = \chi_m / \rho \quad (14)$$

La susceptibilité paramagnétique est inversement proportionnelle à la température absolue. On appelle constante de **CURIE** la constante de proportionnalité C relative à une mole de matière

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (15)$$

Cette loi dite loi de **Curie**, est suivie rigoureusement par l'oxygène gazeux, les sels minéraux en solution et certains solides. Ce sont des corps paramagnétiques parfaits.

2.7 Forces magnétiques :

Un corps diamagnétique ou paramagnétique ne subit ni force ni couple d'un champ magnétique uniforme, car le moment magnétique demeure toujours en phase avec le champ magnétique. Concernant les substances ferromagnétiques, qu'il y ait un champ magnétique appliqué uniforme ou pas, leurs caractéristiques ferromagnétiques impliquent que la substance est exposée à une force dépendant du gradient d'un champ nécessairement présent en raison de la création d'un champ magnétique induit non uniforme.

Pour des particules chargées q d'une substance électro conducteur se déplaçant dans une région de l'espace à la vitesse $\vec{V}$ où règne un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{b}$; la particule est alors soumise à une force électromagnétique (ou force de **Lorentz**) telle que [40,41] :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{b}) \quad (16)$$

Cette force à deux composantes :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} : \text{Force électrostatique.}$$

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{b} = q\vec{E}_m : \text{Force magnétique.}$$

Que ce soit pour le diamagnétisme ou le paramagnétisme, l'expression de la force magnétique appliquée aux matériaux linéaires paramagnétiques et diamagnétiques s'exprime sous la forme dite force de Kelvin :

$$\vec{F}_{kelvin} = \frac{\chi_m(T)}{2\mu_m} \nabla b^2 = \frac{\rho\chi(T)}{2\mu_m} \nabla b^2 \quad (17)$$

Où b est l'induction magnétique (T) de la distribution de champ en absence de substance magnétique.

Dans le système de coordonnées cartésiennes bidimensionnel, cette force est donnée par :

$$\vec{F}_{kelvin} = \frac{\chi_m(T)}{2\mu_m} \nabla b^2 = \frac{\rho\chi(T)}{2\mu_m} \left(\frac{\partial b^2}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial b^2}{\partial y} \vec{e}_y \right) \quad (18)$$

Nous présumons plus particulièrement que la cavité est exposée à un gradient vertical de champ magnétique extérieur excitant, donné par [42]

$$b(x) = b_0 e^{-\lambda(x-x_m)^2}$$

$$b(y) = b_0 e^{-\lambda(y-y_m)^2} \quad (19)$$

Avec :

$\lambda = -4Ln \cdot 10^{-2}$, Et x_m , y_m correspondent à la coordonnée ou l'axe où le champ atteint son maximum.

2.8 Équations de conservation et adimensionnement :

Les propriétés effectives du milieu poreux (notées avec l'indice eff) dépendent généralement de manière complexe de la porosité, de la tortuosité de la matrice solide, ainsi que de la vitesse locale du fluide. Toutefois, dans les simulations qui suivent, l'étude ne s'intéressant pas spécifiquement à l'influence de ces facteurs, les propriétés du fluide sont directement utilisées, par souci de simplification.

Les équations de conservation sont dans ce cas :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{eff}}{\rho \varepsilon} \nabla^2 u - \frac{\mu_{eff}}{\rho k} u - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{|\vec{V}|}{\varepsilon^{3/2}} u \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{eff}}{\rho \varepsilon} \nabla^2 v + \beta(T - T_0)g - \frac{\mu_{eff}}{\rho k} v - \\ & \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{|\vec{V}|}{\varepsilon^{3/2}} v - \frac{\beta \rho_0 \chi_0 (T - T_0)}{\mu_m} \nabla b^2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$(\rho C_p)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = k_{eff} (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad (23)$$

$$(\rho C_p)_{eff} = \varepsilon \cdot (\rho C_p)_f + (1 - \varepsilon) (\rho C_p)_s \quad (24)$$

Compte tenu de la description précédente, et en utilisant le changement de variables suivant :

$$\tau = \frac{t}{H^2 / \alpha_{eff}}$$

$$X = \frac{x}{H} \quad Y = \frac{y}{H}$$

$$U = \frac{uH}{\alpha_{eff}} \quad V = \frac{vH}{\alpha_{eff}}$$

$$P = \frac{\varepsilon^2 p H^2}{\rho \alpha_{eff}^2} \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}$$

$$\chi^* = \chi / \chi_0$$

$$\mu_m^* = \mu_m / \mu_{m0}$$

$$B = \frac{b}{b_0}$$

Les équations régissant l'écoulement transitoire bidimensionnel de convection naturelle dans une cavité poreuse, dérivées des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, s'expriment comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (25)$$

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \varepsilon \nabla^2 U - \frac{\text{Pr}}{Da} \varepsilon^2 U - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{Da}} |\sqrt{U^2 + V^2}| U \quad (26)$$

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \varepsilon \nabla^2 V + Ra \text{Pr} \varepsilon^2 \theta - \frac{\text{Pr}}{Da} \varepsilon^2 V \quad (27)$$

$$-\frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{Da}} |\sqrt{U^2 + V^2}| V + \gamma_m Ra \text{Pr} \theta \frac{\partial B^2}{\partial Y} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (29)$$

Avec :

$$\gamma_m = \frac{\chi_0 B_0^2}{\mu_m g H}, \quad Ra = g \beta \Delta T H^3 / (v \alpha), \quad \text{Pr} = \nu / \alpha \quad (29)$$

2.9 Conditions initiales et limites :

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_i \quad \text{Pour } \tau = 0$$

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_C = -0.5 \quad \text{Pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ at } X = 0$$

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_H = 0.5 \quad \text{Pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ at } X = 1$$

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{Pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ at } Y = 0$$

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{Pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ at } Y = 1$$

Quant au nombre de Nusselt adimensionnel à la paroi froide, il s'écrit sous la forme :

$$Nu(Y) = \left. \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} \right|_{X=1} \quad (31)$$

Pour l'expression du nombre de Nusselt moyenné sur la même paroi, elle est donnée par :

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu(Y) dY \quad (32)$$

2.10 Expression de la fonction de courant :

Le champ de vecteurs vitesse d'un écoulement plan dérive d'une quantité scalaire, la fonction de courant $\Psi(x, y)$.

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}$$

Alors la fonction de courant est donnée par l'expression :

$$\psi = \int_0^H u(x, y) dy - \int_0^L v(x, y) dx \quad (33)$$

Après introduction des grandeurs adimensionnelles, on aboutit à :

$$\Psi = \int_0^1 U(X, Y) dY - \int_0^1 V(X, Y) dX \quad (34)$$

Chapitre III

Chapitre 03 : Résolution numérique

3.1 Introduction :

Les équations relatives à un problème de mécanique des fluides sont des équations différentielles non linéaires, elliptiques et couplées aux dérivées partielles. Du fait de leur complexité, une résolution analytique n'est pas possible.

On dispose de diverses techniques numériques pour résoudre ce genre d'équations, les plus populaires d'entre elles sont :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des volumes finis

Pour résoudre ces équations on utilise la méthode des volumes finis à cause de sa fiabilité et sa caractère conservatif et sans doute parce qu'elle est la plus employée actuellement, elle offre, en particulier :

- Les équations aux différences traduisent la conservation de bilan de quantité de mouvement et d'énergie. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume de contrôle typique fini est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique
- Sa maniabilité, sa robustesse numérique et son formalisme très proche de la réalité physique (conservation des bilans d'énergie et de quantité de mouvement).

3.2 Volumes finis :

3.2a Principe

Les formulations conservatrices des équations aux dérivées partielles présentent l'avantage de pouvoir être réécrites en termes d'intégrales grâce au théorème de la divergence. La loi de conservation est le fondement de la méthode des volumes finis. Il précise que le changement d'une propriété est lié au flux net qui passe à travers la frontière S délimitant le volume Ω . L'approche des volumes de contrôle est donc une technique de discrétisation destinée à

résoudre les équations exprimées en forme conservatrice. Son principe est très simple, initialement développé dans le cas des écoulements compressibles par Godunov [43] et Glimm [44], puis répandu dans la communauté scientifique des mécaniciens par Patankar & Spalding [45] dans les années 70 et est discuté en détail par Patankar [46] en 1980. Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation à résoudre sur chacun des volumes de contrôle.

Comme il est montré dans la figure 1, le domaine est discrétisé à l'aide d'une grille dimensionnelle (uniforme ou non) dans les deux directions et orienté positivement vers la droite (Est) et vers le haut (Nord) respectivement. Pour écrire le schéma de discrétisation en un point P, on choisit une nomenclature adaptée au principe de la méthode de volumes finis pour le stockage des variables dans notre maillage et tout cela dans le but de rendre les choses plus faciles dans la suite de la discrétisation. On considère, donc, l'élément P comme indiqué sur la figure 2, et on note que les indices majuscules (E, W, N, S) caractérisent les variables ayant trait aux centroides voisins de P, et les minuscules (e, w, n, s) sont ceux qui nous ramènent aux faces de l'élément.

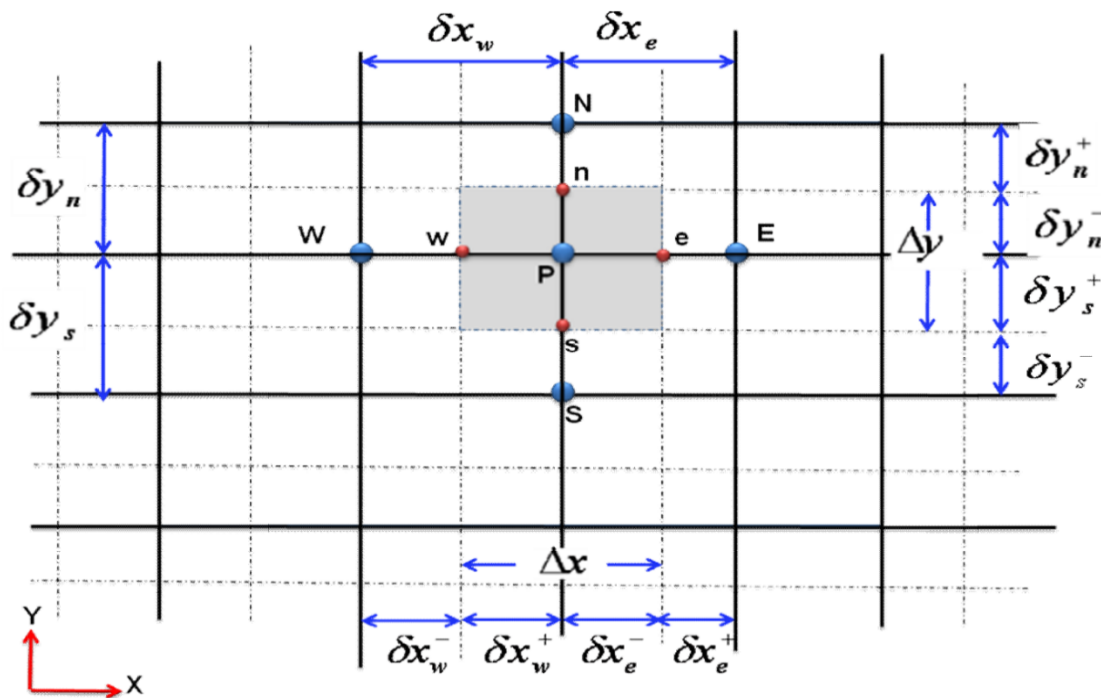


Figure1 : Volume de contrôle dans le cas de 2D.

3.2b Maillage décalé :

La discrétisation d'une équation de transport diffusion sur un volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes (u_e, u_w, v_n, v_s). Il est donc intéressant de calculer ces vitesses directement sur les interfaces (sans avoir à effectuer d'interpolations).

D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes à cause de la répartition de pression ou de vitesse en « damier » (un champ de pression oscillatoire dans un maillage collocatif, (figure 2a) est vu comme un champ uniforme). Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées « staggered grid » (figure 2b).

Cependant, des méthodes récentes ont été proposées sur des maillages collocatifs par Rhie& Chow qui éliminent les problèmes d'oscillations néfastes au moyen d'interpolation appropriée.

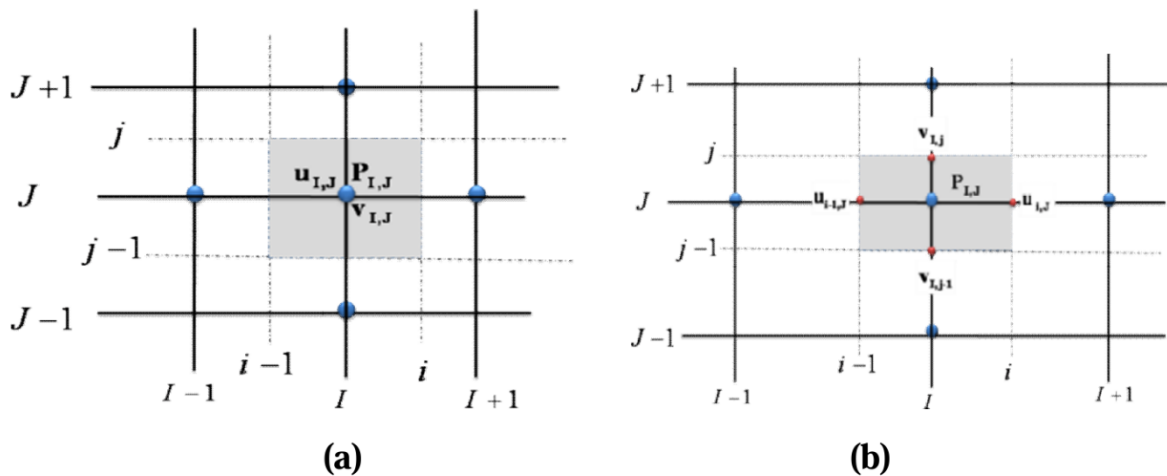


Figure 2 : Maillage de la formulation vitesse-pression :
(a) maillage collocatif (b) maillage décalé.

On décompose le maillage principal (figure 1) en trois maillages secondaires. Un maillage principal est construit pour calculer la pression, la température, la densité (P, ϕ, ρ) et pour l'équation de conservation de masse (au centre de chaque volume de contrôle). Deux maillages décalés vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisés pour le calcul des vitesses (u, v) dans les deux directions (sur les faces du volume de contrôle), c'est-à-dire que les inconnues du problème ne sont pas toutes calculées sur le même maillage de calcul. On peut employer pour des variables différentes des maillages différents, des volumes de contrôle

différents, des points de stockage différents. L'arrangement relatif aux différentes variables est schématisé sur la (figure 3).

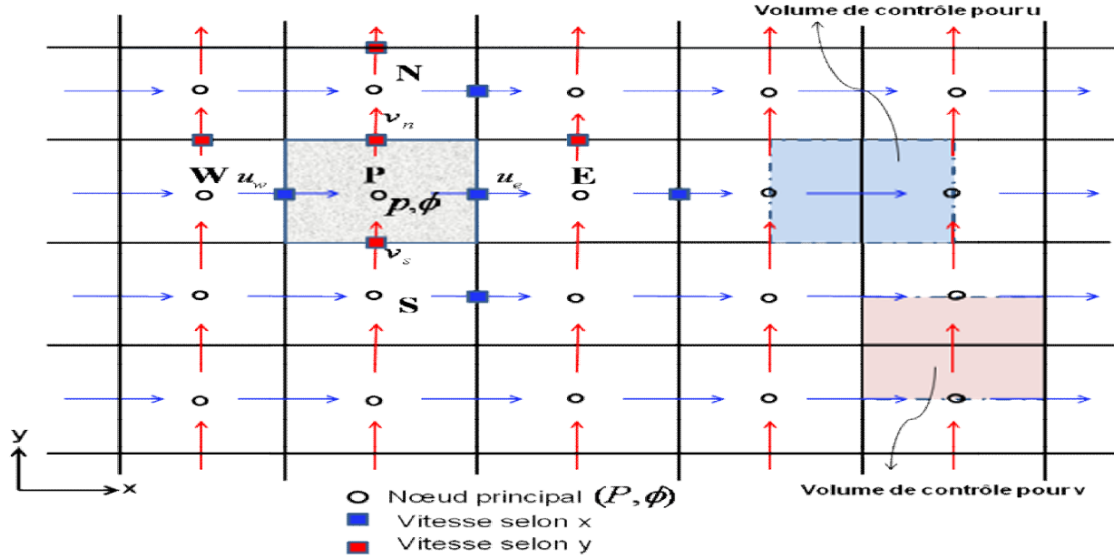


Figure3 : Volumes de contrôle pour les scalaires et les vitesses.

Finalement, on décompose le maillage principal (fig. 3) en trois maillages secondaires, un pour les quantités scalaires (P, ϕ) et pour l'équation de conservation de masse et deux autres pour les deux composantes de la vitesse (u, v).

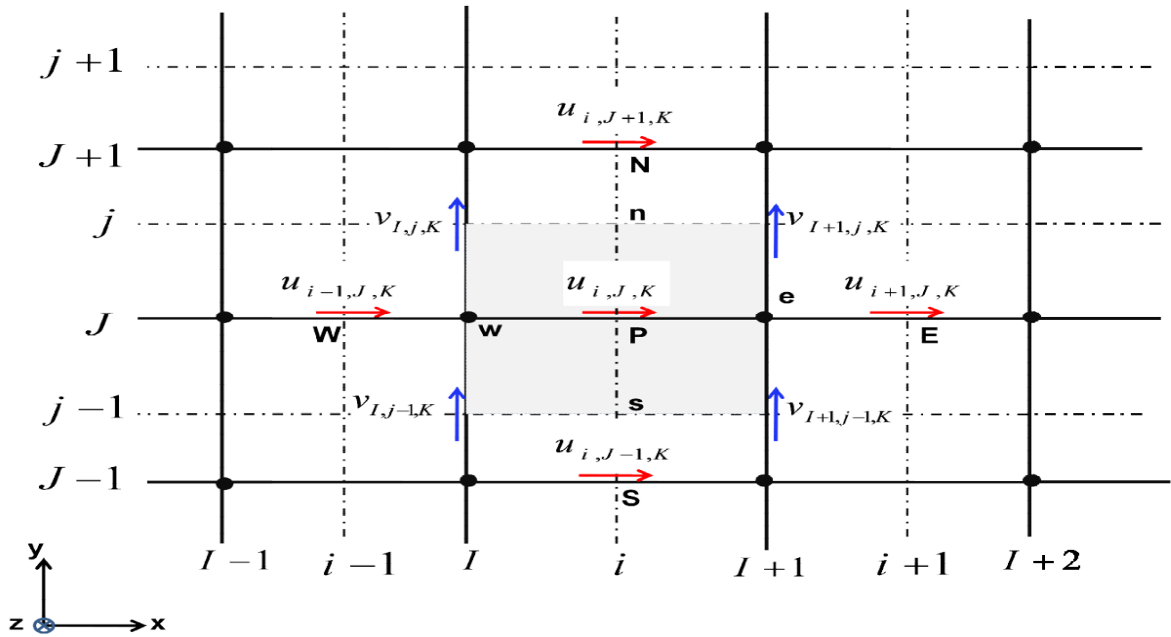
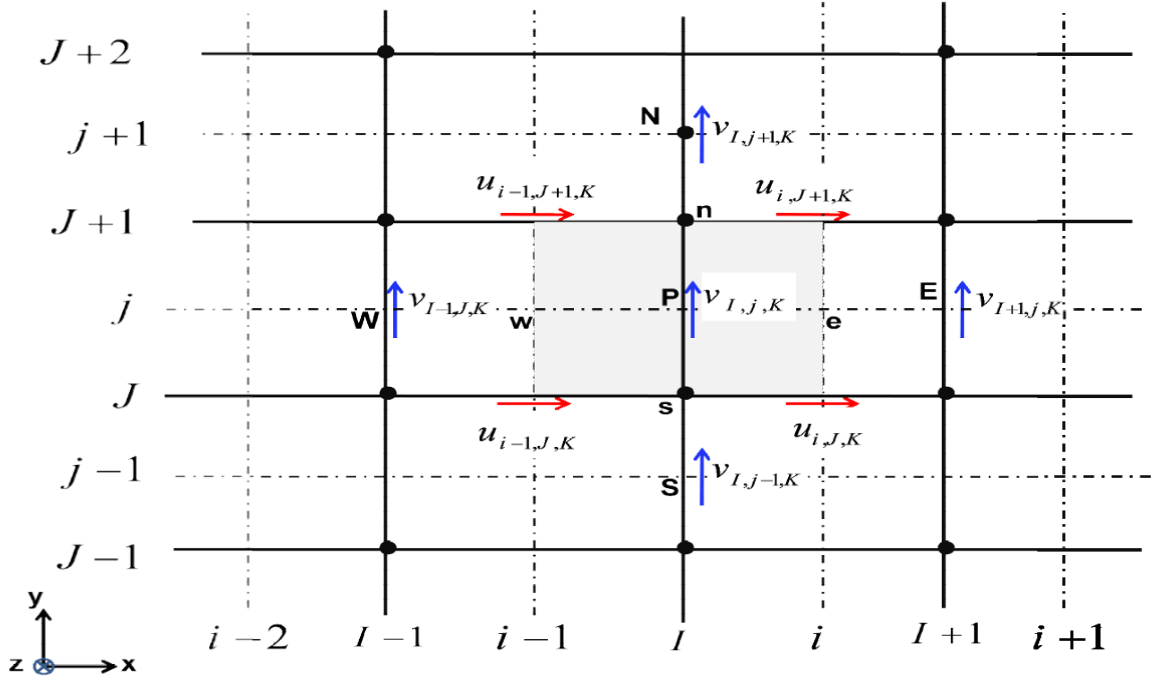


Figure 4 : volume de contrôle pour la composante u et ces voisines.**Figure 5** : volume de contrôle pour la composante v et ces voisines.

Le maillage décalé a été proposé par Harlow et Welch [47] en 1965 pour la méthode MAC (Marker And Cell) qui était destinée à la simulation numérique de l'écoulement à surface libre. Ce maillage est très ramassé au sens où les vitesses discrètes sont disposées de manière rapprochée autour des nœuds de pression. Il donne lieu à des approximations compactes qui font intervenir des points très voisins. Le maillage décalé jouit de propriétés de convergence spatiale qui en font un maître choix.

3.3 Discretisation des équations de conservation :

Afin de faciliter la présentation, les équations de conservation énoncées au chapitre 2 sont reformulées mathématiquement en équations de transport pour des fonctions scalaires, se présentant sous la forme générale d'une équation de convection-diffusion pour ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla(\rho\vec{V}\phi) = \nabla(\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (31)$$

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)$: représente l'accumulation de ϕ dans le temps

$\nabla(\rho\vec{V}\phi)$: représente le transport de ϕ par convection.

$\nabla(\Gamma\nabla\phi)$: correspond au transport de ϕ par diffusion

S_ϕ : la production locale de ϕ

Tableau (1) : Expressions de ϕ , Γ et S , pour les équations de conservation.

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	$\text{Pr}\varepsilon$	$-\frac{\text{Pr}}{Da}\varepsilon^2U - \frac{1.75}{\sqrt{150}}\frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{Da}}\left \sqrt{U^2 + V^2}\right U$
Quantité de mouvement suivant Y	V	$\text{Pr}\varepsilon$	$+Ra\text{Pr}\varepsilon^2\theta - \frac{\text{Pr}}{Da}\varepsilon^2V$ $-\frac{1.75}{\sqrt{150}}\frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{Da}}\left \sqrt{U^2 + V^2}\right V$ $+ \gamma_m Ra\text{Pr}\theta \frac{\partial B^2}{\partial Y}$
Energie	θ	1	0

L'équation différentielle instationnaire sous la forme générale (5) est intégrée dans le temps sur le volume de contrôle Ω_{CV} entourant le nœud courant P , on obtient :

$$\int_{\Omega_{CV}} \text{div}(\rho\phi\vec{u})d\Omega - \int_{\Omega_{CV}} \text{div}(\Gamma\text{grad}\phi)d\Omega = \int_{\Omega_C} S_\phi d\Omega \quad (32)$$

Grace au théorème de la divergence de Gauss, on obtient

$$\int_{A_{CV}} (\rho\phi\vec{u})d\vec{A} - \int_{A_{CV}} (\Gamma\text{grad}\phi)d\vec{A} = \int_{\Omega_{CV}} S_\phi d\Omega \quad (33)$$

Où A est la surface qui limite le volume de contrôle Ω_{CV}

3.3.a Terme convectif :

$$I_2 = \int_{A_{cv}} (\rho \phi \vec{u}) d\vec{A}_n = \int_{A_{cv}} (\rho \phi \vec{u}) (d\vec{A}_e - d\vec{A}_w + d\vec{A}_s - d\vec{A}_n) \quad (34)$$

$$= \{(\rho \phi u A)_e - (\rho \phi u A)_w + (\rho \phi v A)_n - (\rho \phi v A)_s\}$$

On définit la variable $Fi = (\rho v A)$, qui représente le flux de masse convectif traversé par la surface (i), $i = (e, w, n, s)$.

Tableau (2) : Expression des coefficients convectif

Face	e	w	n	s
Flux de masse convectif	$F_e = \rho_e u_e A_e$	$F_w = \rho_w u_w A_w$	$F_n = \rho_n v_n A_n$	$F_s = \rho_s v_s A_s$

Il vient que :

$$I_2 = \{F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s\} \quad (35)$$

3.3.b Terme diffusif :

Le gradient de ϕ aux interfaces est finalement calculé en supposant que ϕ varie linéairement entre chaque point du maillage (figure 8). On obtient ainsi :

$$I_3 = \int_{A_{cr}} (\Gamma \text{grad} \phi) d\vec{A} = \left\{ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_s \right\}$$

$$I_3 = \left(\left(\Gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta y)_n} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta y)_s} A \right)_s \right) \quad (36)$$

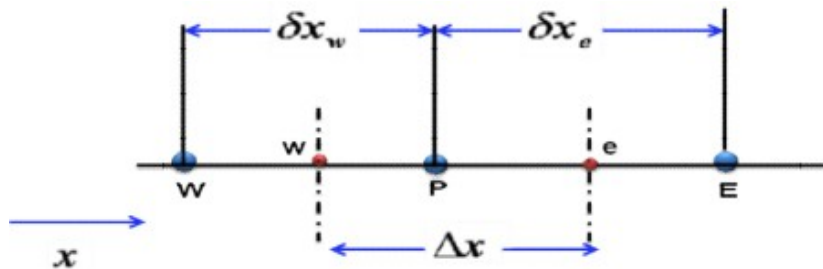


Figure 6 : interpolation pour le gradient de ϕ

$D_i = \frac{\Gamma_i A_i}{\delta x_i}$ représente le coefficient diffusif, $i=(e,w,n,s)$

Tableau(3) : Expressions des coefficients diffusifs

Face	E	w	n	s
Conductance de diffusion	$D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}$	$D_w = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}$	$D_n = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n}$	$D_s = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s}$

Calcul de la conductance Γ :

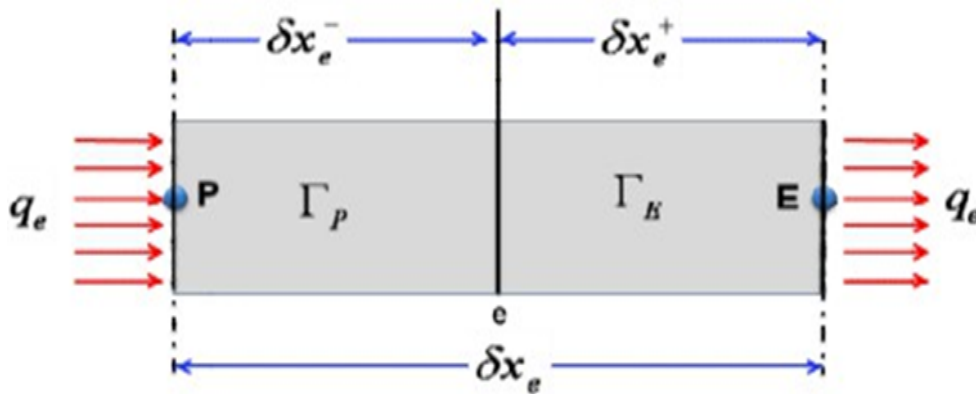


Figure 7 : diffusivité pour un matériau composite

On définit les paramètres : $f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e}$ et $1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e}$, l'expression de la conductivité thermique a l'interface du volume de contrôle :

$$\Gamma_e = \frac{1}{\frac{1-f_e}{\Gamma_P} + \frac{f_e}{\Gamma_E}} = \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{f_e \Gamma_P + (1-f_e) \Gamma_E} \quad (37)$$

3.3.c Terme source :

L'intégration de ce terme est donnée par :

$$I_4 = \int_{\Omega_\sigma} S_\phi d\Omega = \bar{S} \Delta\Omega \quad (38)$$

$\bar{S}$: La valeur moyenne de S sur le volume considéré

Souvent le terme source $S\phi$ dépend de la variable ϕ . Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_p . La méthode de Pantakar est recommandée dans la linéarisation du terme source ; elle consiste à écrire :

$$\bar{S} = S_c + S_P \phi_P \quad (39)$$

Où S_C représente la partie constante de S^- (qui ne dépend pas de ϕ_P), alors que S_P est le coefficient de ϕ_P (S_P ne représente pas S^- évalué au point P).

L'utilisation des expressions de I_1 , I_2 , I_3 et I_4 permet d'écrire l'équation (7) sous forme discrétisée :

$$\{F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s\} - (D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S)) = (S_c + S_P \phi_P) \Delta \Omega \quad (40)$$

3.3.d Équation de continuité :

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on doit aussi résoudre l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (41)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle Ω_{CV} conduit à :

$$\int_t \left(\int_{\Omega_{CV}} \rho d\Omega \right) dt + \int_{dt} \left(\int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) d\Omega \right) dt + \int_t \left(\int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) d\Omega \right) dt = 0 \quad (42)$$

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + (\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho v A)_n - (\rho v A)_s = 0 \quad (43)$$

Ce qui donne :

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n \quad (44)$$

Effectuons l'opération $[(49) - (\phi_P \times (53))]$, on obtient :

$$\left\{ \rho_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_P \Delta \Omega \right\} \phi_P + \{F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s\} - (D_e \phi_E - D_e \phi_P - D_w \phi_P + D_w \phi_W + D_n \phi_N - D_n \phi_P - D_s \phi_P + D_s \phi_S) = S_C \Delta \Omega + \rho_P^0 \phi_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (45)$$

3.3.e . Schémas numériques

Dans l'équation, l'inconnue ϕ n'est pas encore exprimée sur son domaine de définition (dans les termes convectifs), les nœuds de discrétisation. L'interpolation assurant cette opération

dépendra du choix du schéma de discrétisation spatiale. Il existe plusieurs schémas donnant la valeur de ϕ sur son domaine (tel que : CDS, upwind, exponentiel, hybride, puissance).

Si on pose qui désigne le nombre de Péclet de maille, l'équation de conservation une fois discrétisée implicitement en temps, est de la forme :

$$a_P^{n+1} \phi_P^{n+1} = a_E^{n+1} \phi_E^{n+1} + a_W^{n+1} \phi_W^{n+1} + a_N^{n+1} \phi_N^{n+1} + a_S^{n+1} \phi_S^{n+1} + b \quad (46)$$

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0]$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0]$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0]$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

$$b = S_C \Delta \Omega + a_P^0 \phi_P^0$$

L'expression entre crochets représente le maximum entre les quantités et $(|P|)$ est une fonction caractéristique du schéma choisi (Tableau (4))

Tableau (4) : Expressions de la fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas

Schama	$A(P)$
CDS	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Exponntiel	$ P /(\exp(P) - 1)$
Hybride	$[0, 1 - 0.5 P]$
Power Law	$[0, (1 - 0.1 P)^5]$

3.4 Méthode et algorithme de calcul :

3.4a Couplage vitesse-Pression (Algorithme SIMPLER)

Introduction :

La difficulté principale pour la résolution mathématique des équations de la MDF provient du rôle particulier d'une des variables principales, la pression, les équations de quantité de mouvement sont couplées par la pression, qui agit par les composantes de son gradient. La solution du problème de mécanique des fluides est un champ de vitesse et de pression respectant les équations de quantité de mouvement et la continuité. L'équation de continuité se présente donc comme une contrainte à vérifier par le champ de pression. Le problème du couplage se manifeste par l'apparition des variables vitesse et pression dans les deux équations de quantité de mouvement.

Le gradient de pression qui apparaît comme terme source dans ces équations joue le rôle du moteur de l'écoulement. Malheureusement, on ne dispose d'aucune équation de transport pour cette troisième variable qu'est la pression. En d'autres termes, si le gradient de pression est connu à priori on peut calculer le champ vitesse qui dans ce cas vérifie bien l'équation de continuité. Malheureusement, la pression est toujours une inconnue à déterminer aussi bien que la vitesse

Cette particularité des équations rend nécessaire l'utilisation d'un algorithme de couplage pression-vitesse.

3.4b Algorithme SIMPLER :

L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Linked Revised) de Patankar a été utilisé dans ce travail pour la résolution des équations régissant l'écoulement. Il présente une extension de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked). Le choix de développer SIMPLER provient des difficultés que présente SIMPLE. Ce dernier est basé sur l'approximation de l'omission des termes qui présentent l'influence des vitesses des voisins, ce qui risque d'exagérer la pression, et ensuite il y aura tendance vers la divergence sans l'utilisation des relaxations appropriées. A partir de cette difficulté l'algorithme SIMPLER est basé sur le fait que l'équation de correction de pression est employée seule pour corriger la vitesse et une autre procédure est utilisée pour obtenir le champ de pression.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées sont écrites sous la forme suivante, en considérant une estimation du champ de vitesse.

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_u \quad (47)$$

$$a_{nv} V_n = \sum a_{nv} V_{nt} + (p_P - p_N) A_n + b_v \quad (48)$$

Les équations peuvent s'écrire :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} + d_e (P_P - P_E) \quad (49)$$

$$V_n = \frac{\sum a_{ns} V_{ns} + b_v}{a_n} + d_n (P_P - P_N) \quad (50)$$

Avec:

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}, d_n = \frac{A_n}{a_n}$$

Au moment de l'initialisation du champ de vitesse, la pression n'étant pas encore connue, le terme associé à la pression est alors négligé. À la place, on introduit les pseudo-vitesses définies de la manière suivante :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} \quad (51)$$

$$\hat{V}_n = \frac{\sum a_{ns} V_{ns} + b_v}{a_n} \quad (52)$$

Ainsi les équations de quantité de mouvement s'écrivent :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E) \quad (53)$$

$$V_n = \hat{V}_n + d_n (P_P - P_N) \quad (54)$$

En substituant les relations données par les équations (62) et (63) dans la forme discrétisée de l'équation de conservation de la masse (56), on parvient directement à une formulation de l'équation en pression :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b$$

Avec:

$$a_E = (\rho A d)_e; a_W = (\rho A d)_w$$

$$\begin{aligned}
a_N &= (\rho A d)_n; a_S = (\rho A d)_s \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \\
b &= (\hat{\rho} \hat{u} A)_w - (\hat{\rho} \hat{u} A)_e + (\hat{\rho} \hat{v} A)_s - (\hat{\rho} \hat{v} A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Supposons une approximation du champ de pression notée

En utilisant ce champ de pression estimé, on résout les équations de la quantité de mouvement afin de déterminer les composantes de vitesse intermédiaires

$$\begin{aligned}
a_e u_e^* &= \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_p^* - P_E^*) A_e + b_v \\
a_n v_n^* &= \sum a_{nv} v_{nt}^* + (P_p^* - P_N^*) A_n + b_v
\end{aligned} \tag{55}$$

Ou:

$$\begin{aligned}
u_e^* &= \hat{u}_e + d_e (P_p^* - P_E^*) \\
\psi_n^* &= \hat{\gamma}_n + d_n (P_p^* - P_N^*)
\end{aligned} \tag{56}$$

Le champ de vitesse ainsi déterminé est introduit dans l'équation de continuité afin d'obtenir les équations de correction de la pression $P'P'P'$, à l'image de la méthode SIMPLE. L'expression de cette correction présente la même forme que celle de l'équation de pression. En conservant la relation de correction de la vitesse propre à l'algorithme SIMPLE, on écrit alors :

$$\begin{aligned}
u_e &= u_e^* + d_e (P'_p - P'_E) \\
V_n &= v_n^* + d_n (P'_p - P'_N)
\end{aligned} \tag{57}$$

Donc on trouve :

$$\begin{aligned}
a_P P'_p &= a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \\
a_E &= (\rho A d)_e; a_W = (\rho A d)_w \\
a_N &= (\rho A d)_n; a_S = (\rho A d)_s \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \\
b &= (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho V^* A)_s - (\rho V^* A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}
\end{aligned}$$

On en déduit la vitesse mais on ne corrige pas la pression. Cette démarche représente l'algorithme SIMPLE Révisé (SIMPLER).

Lorsque la convergence est atteinte, les valeurs de b s'annulent dans tous les volumes de contrôle.

Le fait que le terme source b soit nul partout est une preuve que nous avons obtenu le champ de pression correct, et que la solution actuelle de p' n'est pas demandée durant l'itération finale. Ainsi le terme source b est employé comme un indicateur utile pour la convergence de la solution du problème.

Les étapes à suivre dans l'algorithme de SIMPLER sont résumées comme suit :

- a) Choisir un champ de vitesse (initialisé par des valeurs : u^*, v^*)
- b) Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et déduire les "pseudo vitesse w (60,61)

$$\begin{aligned}\hat{u}_e &= \frac{\sum a_{ks} u_{kt}^* + b_v}{a_e} \\ \hat{V}_n &= \frac{\sum a_{nt} v_{nb}^* + b_v}{a_n}\end{aligned}\quad (58)$$

- c) Évaluer le terme source de la masse

$$b = (\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e + (\rho \hat{V} A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (59)$$

Et résoudre l'équation de pression (64)

$$a_P P_F = a_E P_E + a_{WF} P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (60)$$

- d) Utiliser le champ de pression ($P^* = P$) pour résoudre les équations de quantité de mouvement u^*, v^* (69,70), (ne pas corriger la pression).

$$\begin{aligned}a_e u_e^* &= \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_p^* - P_E^*) A_e + b_u \\ a_n v_n^* &= \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_p^* - P_N^*) A_n + b_v\end{aligned}\quad (61)$$

- e) Calculer le terme source de la masse b , (68)

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (62)$$

De l'équation (68) et résoudre les équations (64) de correction de pression (comme dans SIMPLE).

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (63)$$

- f) Corriger le champ de vitesse via l'équation (73 et 74), mais ne pas corriger la pression.

$$\begin{aligned}u_e &= u_e^* + d_e(P'_P - P'_E) \\ V_n &= V_n^* + d_n(P'_P - P'_N)\end{aligned}\tag{64}$$

g) Résoudre les autres équations de transport ϕ (énergie, masse...).

h) Retourner à l'étape -b- avec les nouveaux champs de (vitesse, température, pression).

Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

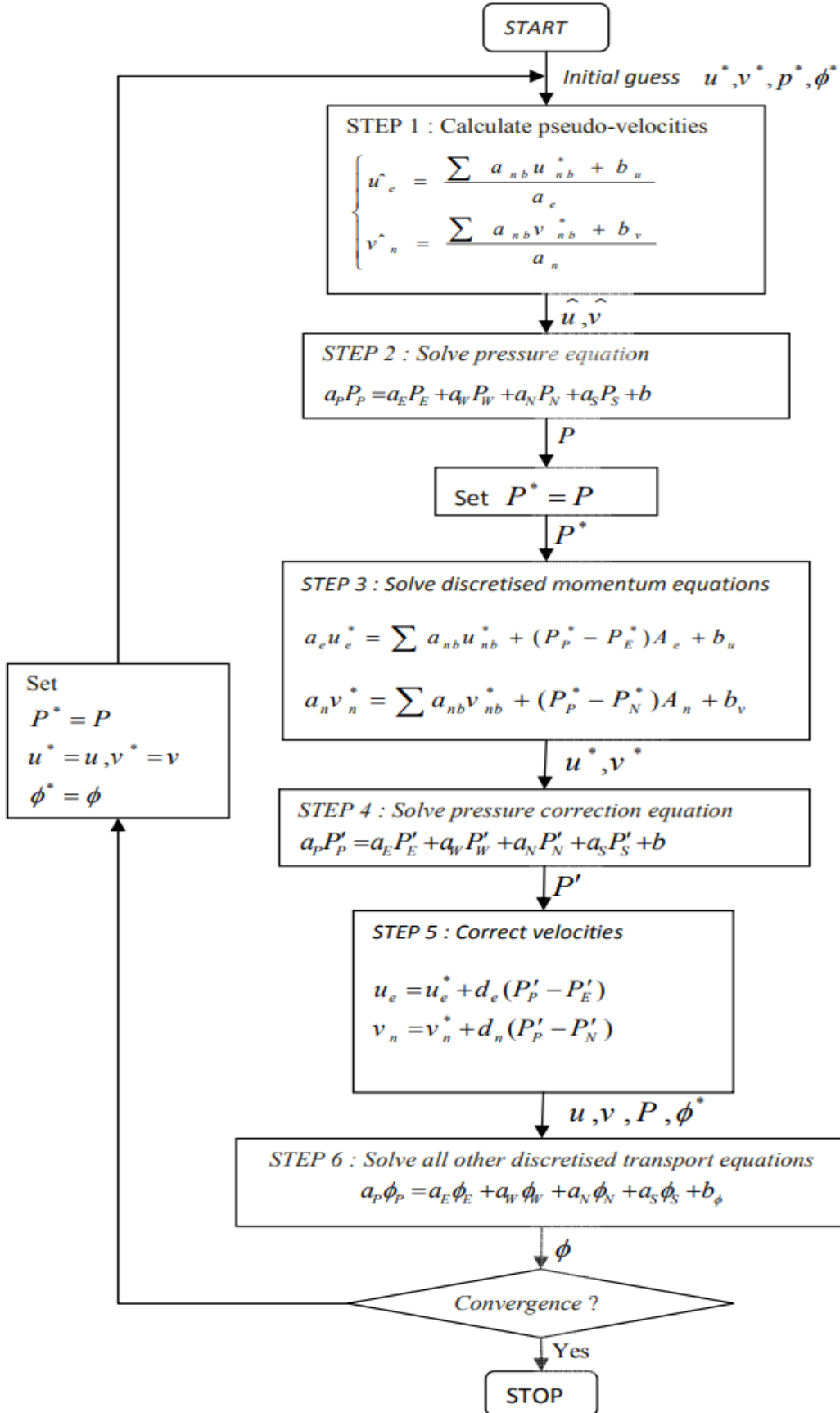


Figure 8 : La résolution numérique du système linéaire obtenu est résolue par la méthode TDMA

3.4c Algorithme de THOMAS (TDMA) :

C'est un algorithme développé par Thomas en 1949, c'est une méthode directe pour la situation unidimensionnelle (1D), mais peut être utilisée d'une manière itérative ligne par ligne (line by line) pour la résolution des problèmes bidimensionnel (2D).

La discrétisation par volumes finis donne un système tridiagonal pour le cas 1D, un système penta-diagonal pour le cas 2D et un système septa-diagonal pour le cas 3D. D'autres schémas de discrétisation donnent plusieurs diagonal, par exemple le schéma QUICK donne sept diagonal dans le cas 2D. Dans ce cas on pose deux diagonal dans le terme source.

Chapitre IV

CHAPITRE 4 : Résultats et interprétation

4.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons et commentons les résultats issus de l'étude numérique portant sur l'influence simultanée de la perméabilité du milieu poreux et de l'application d'un champ magnétique sur la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un fluide paramagnétique. Les simulations ont été effectuées pour un nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ (air), un nombre de Rayleigh élevé $Ra = 10^6$, caractéristique d'un régime fortement convectif, et une porosité $\varepsilon = 0.4$.

L'analyse s'intéresse d'abord à l'impact du nombre de Darcy (Da), indicateur direct de la perméabilité du milieu poreux, puis à l'effet du nombre magnétique γ_m , qui traduit l'intensité du champ magnétique appliqué. L'étude des champs d'écoulement, des isothermes et du Nusselt local permet ainsi de mettre en lumière les mécanismes physiques qui gouvernent le comportement thermo-convectif du système soumis à un champ magnétique.

On prend $Pr = 0.71$ pour l'air et on fixe le nombre de Rayleigh Ra à $Ra = 10^6$ et la porosité à $\varepsilon = 0.4$, et on discute l'effet des nombres de Darcy Da et le nombre magnétique γ_m .

4.2 Validation numérique :

La validation du code numérique porte sur un écoulement de convection naturelle dans une cavité de section carrée et différentiellement chauffée.

Les calculs ont été réalisés dans deux cas; le premier est le cas de la convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée [48], de rapport de forme modéré, $A=1$, pour un nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ et pour une valeur du nombre de Rayleigh $Ra = 10^6$. Le deuxième cas est pour une cavité carrée poreuse différentiellement chauffée [49] pour des valeurs des nombres de Rayleigh et Prandtl, $Ra = 10^4$, $Pr = 1$, et pour une valeur du nombre de Darcy, $Da = 10^{-2}$ et une valeur de la porosité $\varepsilon = 0.6$

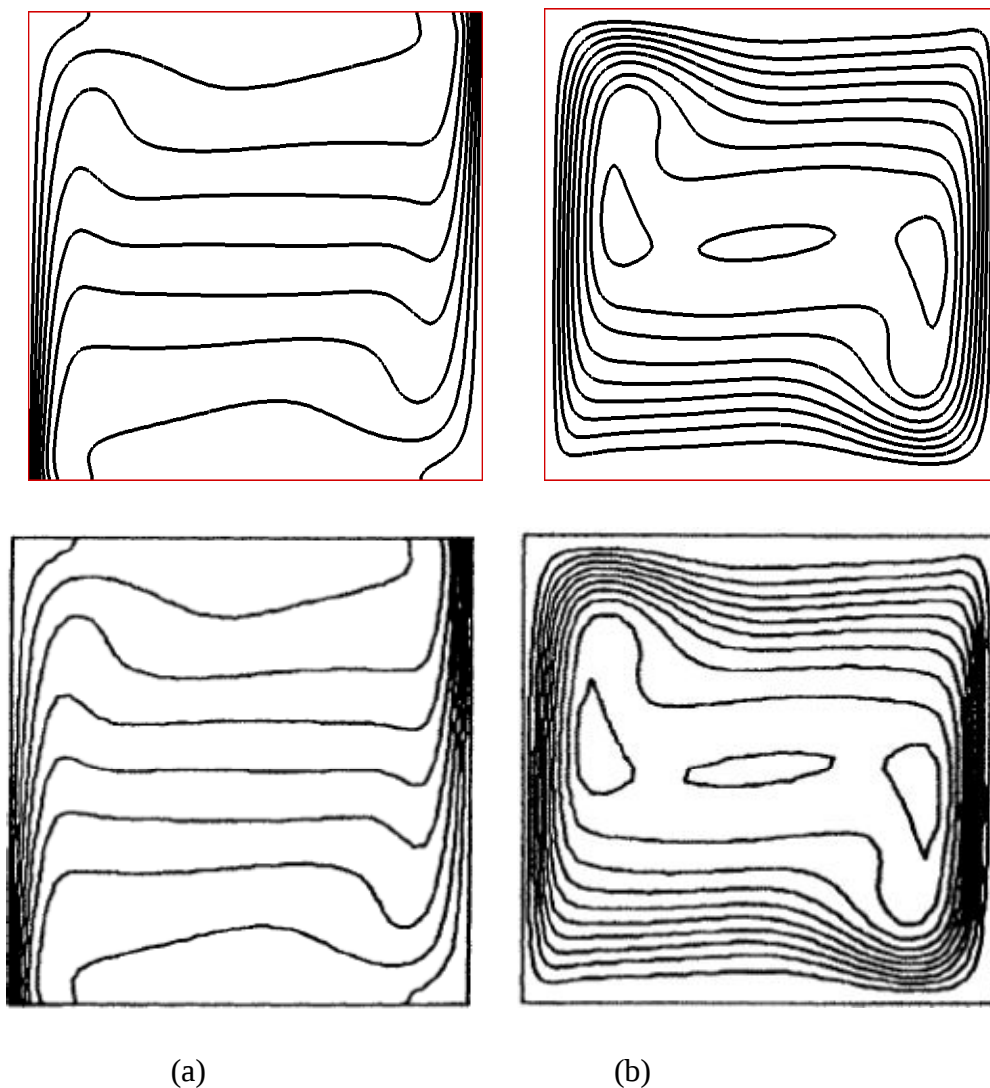


Figure (1) : lignes de courant (a) et isothermes (b), pour $Ra = 10^6$, $Pr = 0.7$, haut (présent travail) et bas ([48])

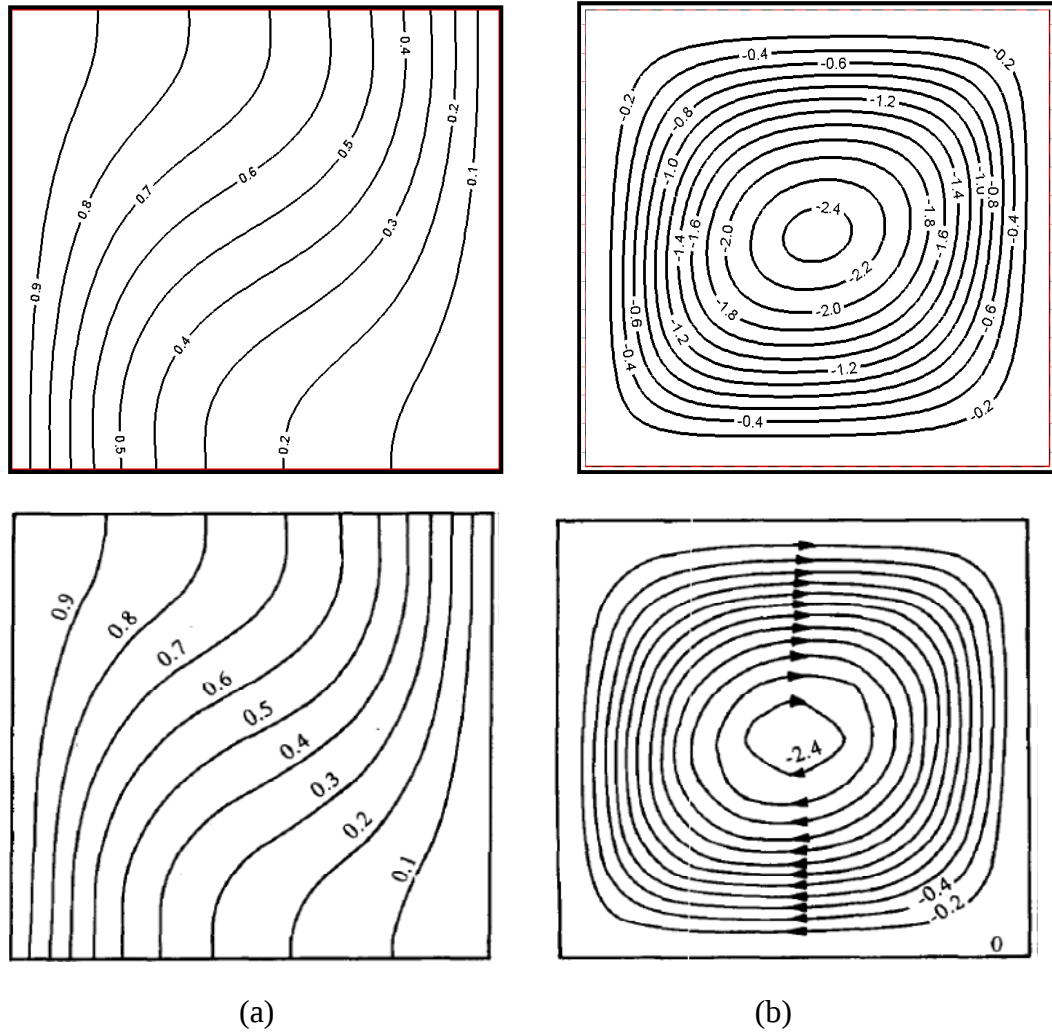


Figure (2) : lignes de courant (a) et isothermes (b), pour $Ra = 10^4$, $Pr = 1$, $Da = 10^{-2}$, $\varepsilon = 0.6$, haut (présent travail) et bas ([49])

La comparaison se fait par la présentation des lignes de courant et isothermes de nos résultats obtenus par notre code de calcul comparés avec ceux obtenus par [48] et [49] pour les deux cas test (Figure 1,2).

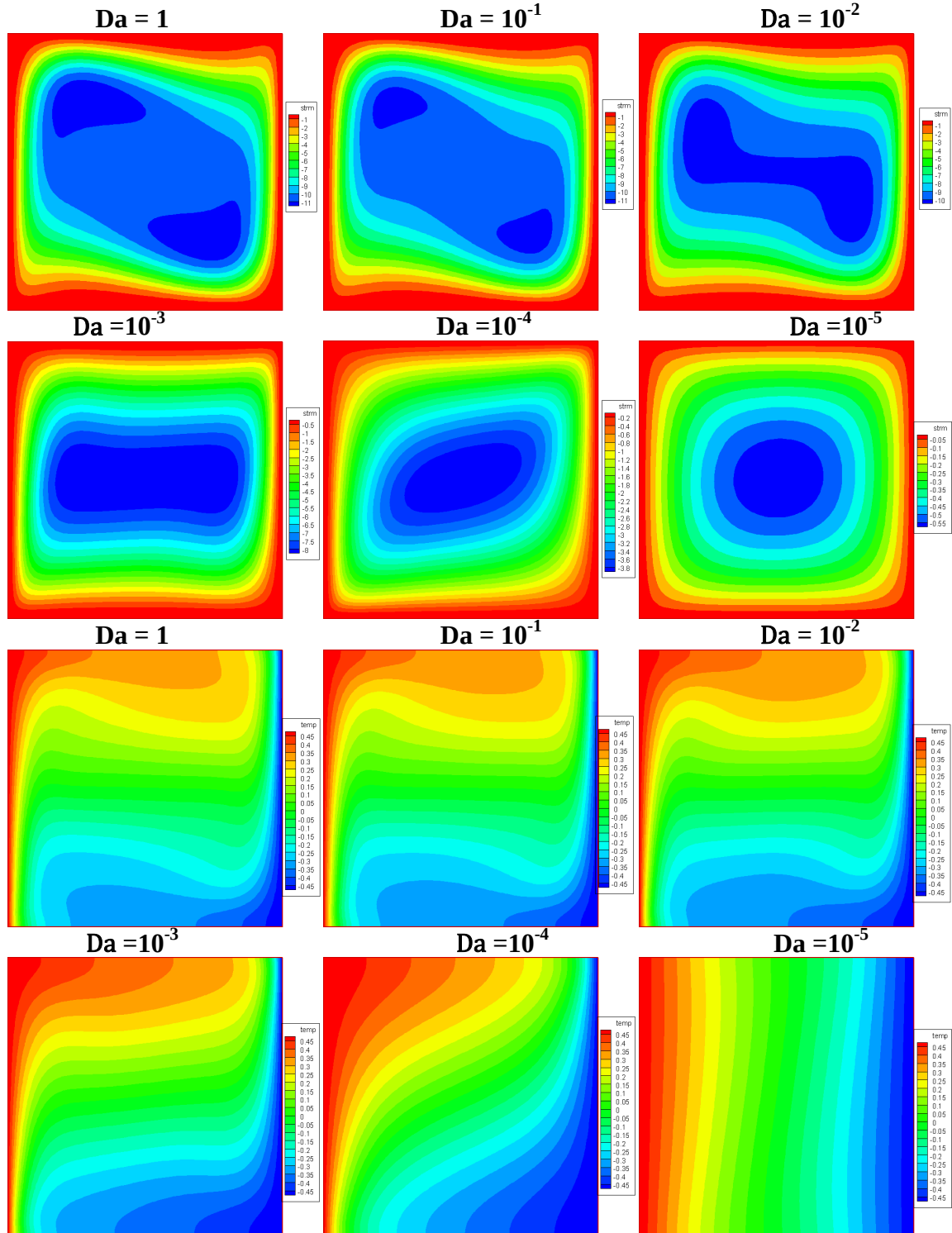
Les résultats numériques de ces auteurs constituent un excellent test pour la validation de notre modèle numérique. Il ressort une très bonne concordance de nos résultats avec ceux de la littérature.

4.3 Effet du nombre de Darcy :

Le nombre de Darcy représente la facilité ou la difficulté qu'a le fluide à se déplacer à travers le milieu poreux. Les valeurs élevées de Da traduisent un milieu très perméable favorisant le mouvement convectif, tandis que les faibles valeurs correspondent à un milieu plus dense, limitant fortement la circulation du fluide. Les résultats obtenus permettent ainsi de

comprendre comment la perméabilité influence à la fois la nature de l'écoulement et le transfert thermique associé.

On fixe $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\gamma_m = 0$ et $\mathcal{E} = 0.4$ et varie le nombre de Darcy $Da = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$



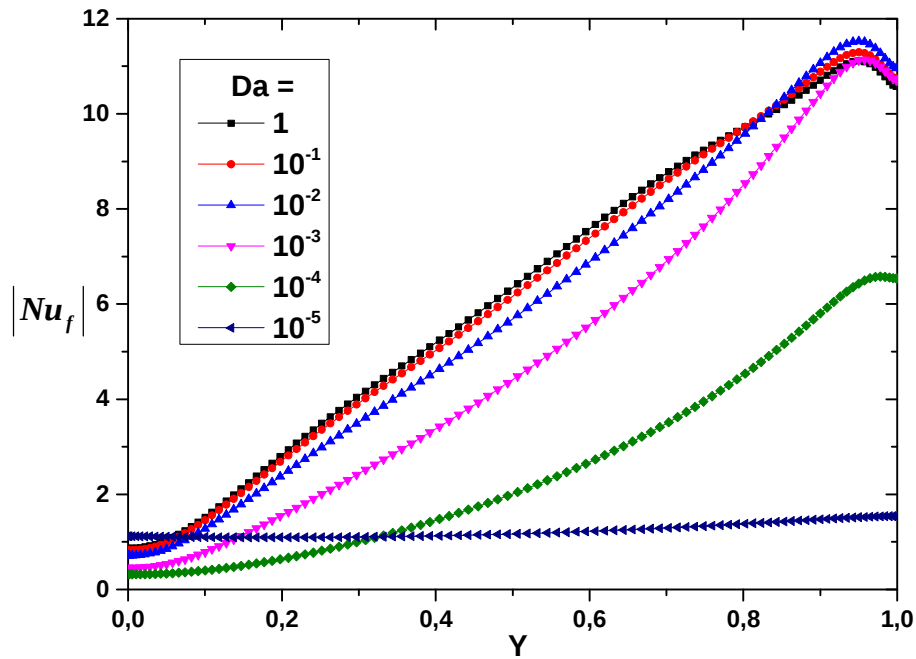
Figure(3) : lignes de courant et isothermes pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\gamma_m = 0$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de Darcy

4.3a Analyse des lignes de courant :

Pour $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,4$ et $\gamma_m = 0$, les lignes de courant illustrent clairement le rôle "régulateur" du nombre de Darcy Da , c'est-à-dire de la perméabilité du milieu poreux : **lorsque Da est élevé** ($Da = 1$ puis 10^{-1}), le milieu laisse circuler le fluide plus librement et la convection naturelle s'exprime pleinement, avec une grande cellule de recirculation bien installée et une fonction de courant de forte amplitude, signe d'un écoulement énergétique qui brasse efficacement la cavité ; **à mesure que Da diminue** ($10^{-2} - 10^{-3}$), cette recirculation reste présente mais perd progressivement en intensité, comme si le milieu "serrait" l'écoulement et réduisait sa capacité à se développer ; enfin, **pour des valeurs faibles** ($10^{-4} - 10^{-5}$), la résistance offerte par la matrice poreuse devient dominante, l'amplitude de la fonction de courant chute fortement et les structures convectives s'atténuent jusqu'à devenir très faibles et plus régulières, traduisant une convection quasi inhibée et une cavité qui tend vers un comportement où le transport thermique se rapproche davantage d'un régime conductif.

4.3b Analyse des isothermes :

Pour $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,4$ et $\gamma_m = 0$, l'évolution des isothermes avec le nombre de Darcy Da met en évidence, de manière très lisible, la capacité du milieu poreux à "laisser respirer" ou au contraire à "étouffer" la convection : **lorsque Da est élevé** ($Da = 1$ puis 10^{-1}), la perméabilité est importante et le mouvement du fluide par convection naturelle peut se développer, ce qui se traduit par des isothermes nettement déformées et incurvées, signe d'un transport advectif efficace et d'un mélange thermique plus marqué dans la cavité ; **en diminuant Da** ($10^{-2} - 10^{-3}$), cette déformation devient moins prononcée, indiquant que l'écoulement perd progressivement sa capacité à entraîner la chaleur et que le champ thermique commence à se stabiliser ; enfin, **pour des valeurs faibles** ($Da = 10^{-4} - 10^{-5}$), les isothermes tendent vers des bandes presque parallèles entre les parois chaude et froide, ce qui correspond à une situation où la convection est fortement inhibée par la résistance du milieu poreux et où le transfert thermique se rapproche d'un comportement principalement conductif, plus régulier et moins dépendant de la circulation interne.



Figure(4) : distribution du nombre de Nusselt sur la paroi froide pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\gamma_m = 0$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de Darcy.

4.3c La distribution du Nusselt local Nu_f :

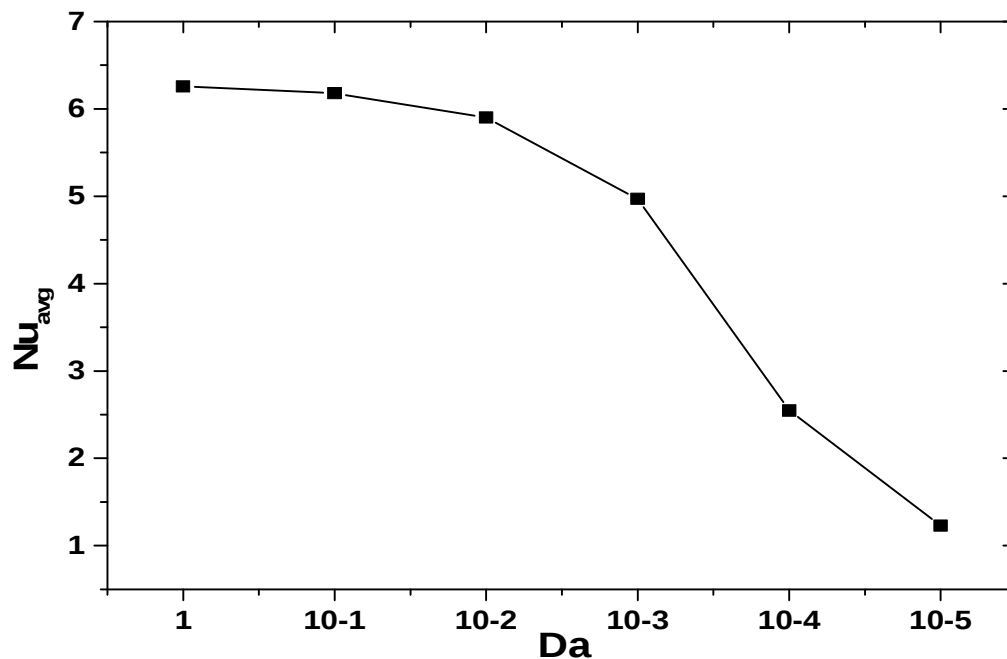
Pour $Pr = 0,71$, $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,4$ et $\gamma_m = 0$, la distribution du Nusselt local $Nu_f(Y)$ sur la paroi froide traduit de façon très parlante l'influence de la perméabilité, donc du nombre de Darcy Da : **pour des valeurs élevées** ($Da = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$), Nu_f croît fortement le long de la hauteur et atteint ses plus grandes valeurs près de la partie supérieure, ce qui signifie que la paroi froide "travaille" de plus en plus en montant, car la convection devient plus efficace et renouvelle davantage le fluide au contact de la paroi (couche limite thermique plus fine, gradient de température plus élevé) ; **à mesure que Da diminue** (10^{-3} puis 10^{-4}), l'ensemble des courbes s'abaisse et la croissance avec Y devient moins marquée, comme si le milieu poreux commençait à "retenir" l'écoulement et à réduire sa capacité à transporter la chaleur ; enfin, **pour une faible valeur** ($Da = 10^{-5}$), Nu_f reste très faible et presque uniforme sur toute la paroi, signe d'une convection largement inhibée et d'un transfert qui se rapproche d'un régime essentiellement conductif, où l'échange est plus faible et beaucoup moins sensible à la position verticale.

Le fluide chauffé le long de la paroi chaude devient moins dense et monte, arrivé en haut, il est dévié horizontalement vers la paroi froide, donc, le fluide se refroidit le long de la paroi froide et descend. Il revient ensuite vers la paroi chaude par le bas (cellule de recirculation).

Puisque le nombre de Nusselt local est proportionnel au gradient de température normal à la paroi, c.-à-d., plus le gradient thermique est fort, plus le transfert de chaleur est intense, alors, le fluide qui arrive en haut de la paroi froide vient directement de la paroi chaude. Il est donc le plus chaud possible au contact de la paroi froide et animé d'une vitesse plus élevée. Cela entraîne une couche limite thermique très mince.

En descendant le long de la paroi froide, le fluide se refroidit progressivement: la différence de température fluide-paroi diminue, la couche limite thermique s'épaissit et le gradient thermique diminue, donc, le Nusselt local décroît vers le bas.

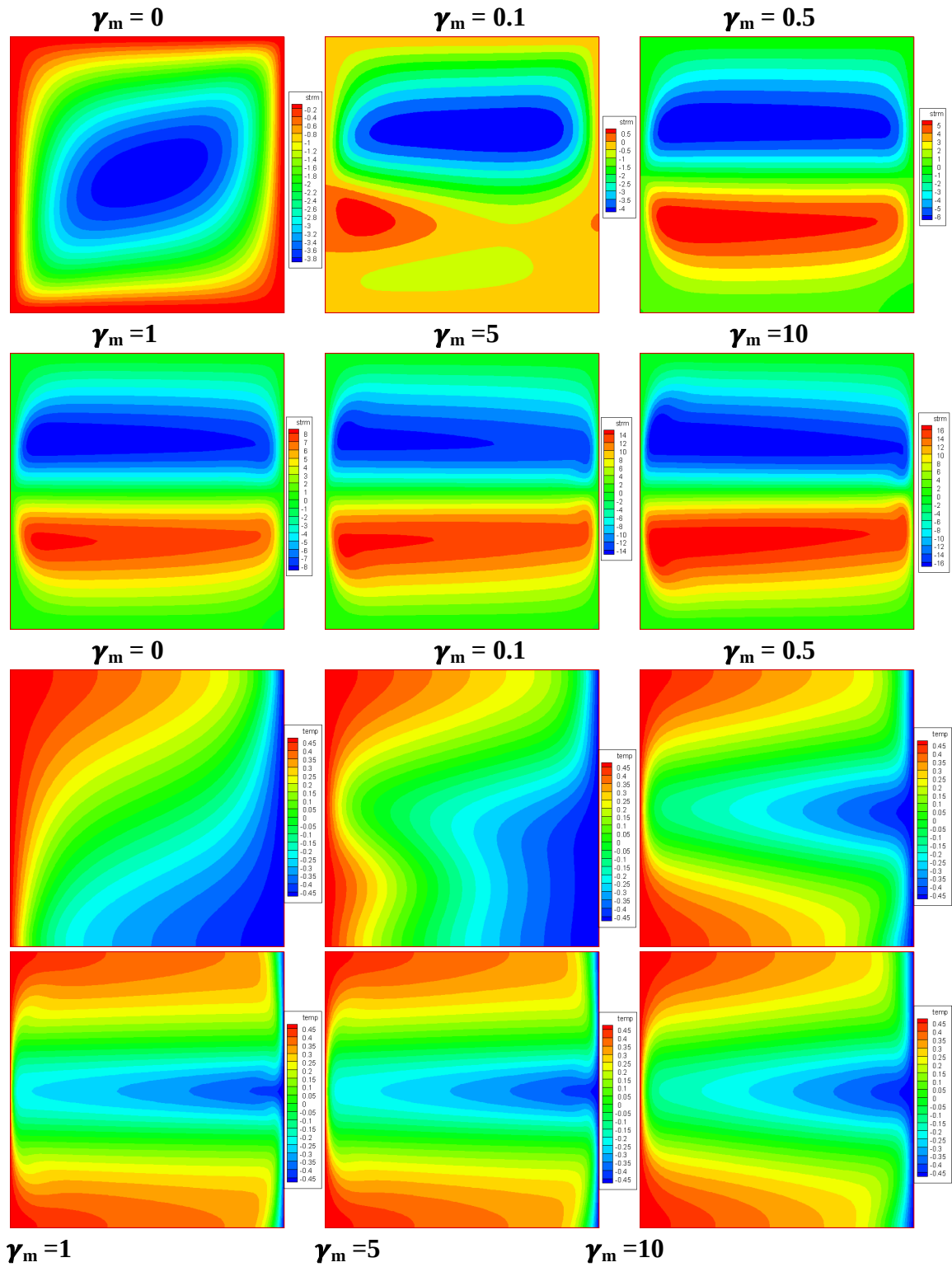
Comme le montre la figure 5, Le nombre de Nusselt moyen diminue en augmentant les valeurs du nombre de Darcy, indiquant une résistance forte de l'écoulement dans la couche poreuse et la conduction domine sur la convection.



Figure(5) : distribution du nombre de Nusselt moyen (Nu_{avg}) sur la paroi froide pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\gamma_m = 0$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de Darcy.

4.4 Effet du nombre magnétique :

Dans cette section, le choix d'une perméabilité faible ($Da = 10^{-4}$) vise à mettre en évidence l'influence directe du champ magnétique sur un système déjà peu perméable. Le fluide paramagnétique réagit au champ appliqué par des forces magnétiques susceptibles de modifier l'écoulement et, par conséquent, le transfert thermique. On fixe : $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\mathcal{E} = 0.4$, $Da = 10^{-4}$ et on varie $\gamma_m = 0, 0.1, 0.5, 1, 5, 10$



Figure(6) : lignes de courant et isothermes pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-4}$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de γ_m .

4.4a Analyse des lignes de courant :

Faibles valeurs de γ_m (0 à 1) :

Pour $\gamma_m=0$ l'écoulement conserve un comportement classique de convection naturelle : une cellule principale unique occupe la cavité et assure une recirculation globale. Lorsque γ_m devient légèrement non nul ($\gamma_m = 0,1$), la structure commence à se transformer : l'écoulement ne se contente plus de tourner en un seul bloc, mais tend à se scinder. Pour γ_m intermédiaire (0,5 à 1), cette évolution se confirme avec l'apparition d'un régime bicellulaire, composé de deux rouleaux contrarotatifs, l'un dans la moitié supérieure et l'autre dans la moitié inférieure. La zone proche de la mi-hauteur joue alors le rôle d'une frontière dynamique, où la circulation est plus faible.

Fortes valeurs de γ_m (5 à 10) :

Lorsque γ_m devient élevé, le régime bicellulaire s'impose nettement. Les deux cellules deviennent plus robustes et mieux structurées, occupant chacune une demi-cavité de manière plus homogène. On observe une recirculation plus énergique et mieux organisée comme si l'écoulement « trouvait sa forme » : deux mouvements opposés, stables, séparés par une zone centrale qui persiste comme ligne de séparation. Autrement dit aux fortes valeurs de γ_m , l'effet principal n'est plus transition de mode (déjà accomplie), mais le renforcement et la stabilisation des deux rouleaux convectifs.

4.4b Analyse des isothermes :

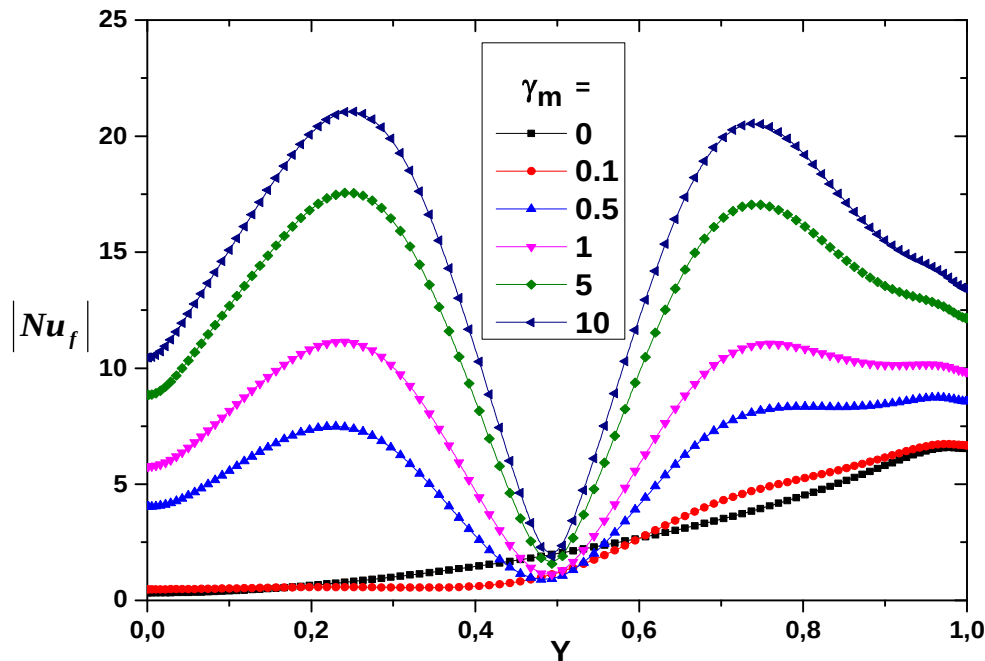
Faibles valeurs de γ_m (0 à 0,1) :

Lorsque γ_m est faible les isothermes apparaissent fortement incurvées et asymétriques. Le champ thermique reste proche d'un comportement convectif naturel "classique" : la chaleur injectée par la paroi chaude se propage dans le fluide en étant entraînée par la circulation, ce qui tord les isothermes et empêche la formation de couches bien nettes. Autrement dit, la température dans la cavité garde une certaine "souplesse" : elle se réarrange au gré de l'écoulement, sans stratification marquée.

Fortes valeurs de γ_m (5 à 10) :

À l'inverse, lorsque γ_m devient élevé, les isothermes tendent à devenir quasi horizontales sur une grande partie du domaine. Cette évolution traduit une stratification thermique plus

prononcée : la cavité se comporte progressivement comme si elle "rangeait" la température en couches superposées. Les gradients thermiques les plus importants se concentrent alors davantage près des parois et aux zones de transition entre ces couches, ce qui est cohérent avec convection plus structurée

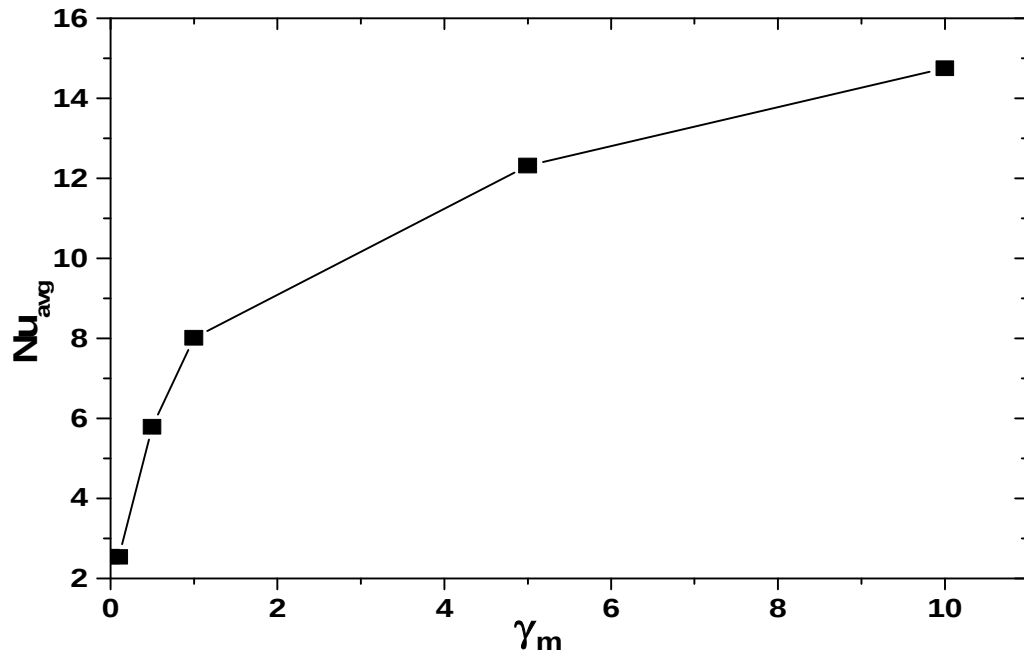


Figure(7) : distribution du nombre de Nusselt sur la paroi froide pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-4}$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de γ_m .

4.4c La distribution du Nusselt local Nu_f :

Pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$, $\mathcal{E} = 0.4$ et $Da = 10^{-4}$, la distribution du Nusselt local $Nu_f(Y)$ sur la paroi froide montre une différence nette entre faibles et fortes valeurs de γ_m : **pour γ_m faible** ($0 - 0.1$), Nu_f reste globalement modéré et varie de manière progressive le long de la hauteur, traduisant un échange thermique relativement régulier où l'intensification se fait surtout vers le haut sous l'effet de la convection naturelle classique ; en revanche, **pour γ_m élevé** (5-10), le profil devient fortement non uniforme et adopte une forme bimodale avec deux maxima marqués (environ aux quarts de la hauteur) et un minimum prononcé vers la mi-hauteur, ce qui indique que la convection se réorganise et que certaines zones de la paroi sont "plus actives" en échange thermique, tandis que la zone centrale correspond à une région de séparation/stagnation où le renouvellement du fluide est moins efficace.

Le transfert thermique moyen le long de la paroi indiquant une augmentation remarquable lorsque on augmentant le nombre magnétique, indiquant une dominance des forces de volume d'origine magnétique sur les forces thermogravitaires (Figure 8).



Figure(8) : distribution du nombre de Nusselt moyen (Nu_{avg}) sur la paroi froide pour $Pr=0.71$, $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-4}$, $\mathcal{E} = 0.4$ et pour différentes valeurs de γ_m .

Conclusion général :

En résumé, ce mémoire s'organise autour d'une analyse complète - bibliographique, théorique, numérique et interprétative - de la convection naturelle dans une cavité carrée poreuse saturée par un fluide paramagnétique sous l'action d'un champ magnétique externe, Après avoir situé le problème dans l'état de l'art (convection en cavité, milieux poreux et influence magnétique) le travail établit la modélisation (hypothèses, adimensionnement, conditions aux limites) et intègre les effets du milieu poreux et des forces magnétiques

La résolution est conduite par la méthode des volumes finis avec un couplage vitesse-pression de type SIMPLER

Les résultats montrent que le nombre de Darcy commande l'intensité convective : une perméabilité élevée renforce la recirculation, accentue la déformation des isothermes et augmente globalement le transfert de chaleur, tandis qu'une faible perméabilité inhibe l'écoulement et conduit à un régime proche de la conduction avec un Nusselt plus faible et plus uniforme

Par ailleurs, à perméabilité fixée ($Da = 10^{-4}$), l'augmentation du nombre magnétique γ_m réorganise la topologie de l'écoulement (transition vers un régime bicellulaire plus structuré) et modifie la distribution locale des échanges thermiques, pouvant générer un profil de Nusselt plus non uniforme (de type bimodal)

Ainsi, la perméabilité apparaît comme le paramètre déterminant du "niveau" de convection, tandis que le champ magnétique constitue un levier pertinent de contrôle de l'organisation de l'écoulement et de la répartition spatiale du transfert thermique

Liste des références :

- [1] X. Shi et J. M. Khodadadi, « Laminar natural convection heat transfer in a differentially heated square cavity due to a thin fin on the hot wall », *Journal of Heat Transfer*, vol. 125, no 4, pp. 624-634, 2003
- [2] M. Hortmann, M. Peric et G. Scheuerer, « Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 11, no 2, pp. 189-207, 1990
- [3] A. Nag, A. Sarkar et V. M. K. Sastri, « Natural convection in a differentially heated square cavity with a horizontal partition plate on the hot wall », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, nos 1-2, pp. 143-156, 1993
- [4] V. Mariani, R. Belo et I. Moura, « Numerical studies of natural convection in a square cavity », *Thermal Engineering*, vol. 5, pp. 68-72, 2006.
- [5] M. V. Joshi, U. N. Gaitonde et S. K. Mitra, « Analytical study of natural convection in a cavity with volumetric heat generation », *Journal of Heat Transfer*, vol. 128, no 2, pp. 176-182, 2006
- [6] E. Bilgen, « Natural convection in cavities with a thin fin on the hot wall », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 48, no 17, pp. 3493-3505, 2005,
- [7] J. Guet, M. Reggio et P. Vasseur, « Natural convection of nanofluids in a square enclosure with a protruding heater », *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 2012, art. 167296, 2012
- [8] Z. Boulaia et R. Sehaqui, « Numerical simulation of natural convection of nanofluid in a square cavity including a square heater », *International Journal of Science and Research*, vol. 4, no 12, pp.
- [9] L. Kolsi, K. Kalidasan, A. Alghamdi, M. N. Borjini et P. R. Kanna, « Natural convection and entropy generation on a cubical cavity with twin adiabatic blocks and filled by aluminium oxide-water nanofluid », *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 70, no 3, pp. 242-259, 2016
- [10] S. Baghsaz, S. Rezanejad et M. Moghimi, « Numerical investigation of transient natural convection and entropy generation analysis in a porous cavity filled with

- nanofluid considering nanoparticles sedimentation », *Journal of Molecular Liquids*, vol. 279, pp. 327-341, 2019
- [11] H. F. Oztop et E. Abu-Nada, « Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids », *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 29, no 5, pp. 1326-1336, 2008
- [12] N. Zhan, L. Ding, Y. Cheng, J. Wang et Y. Xu, « Experimental study on natural convective heat transfer in a closed cavity », *Thermal Science and Engineering Progress*, vol. 9, pp. 132-141, 2019
- [13] S. M. Aminossadati et B. Ghasemi, « Natural convection cooling of a localised heat source at the bottom of a nanofluid-filled enclosure », *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 28, no 5, pp. 630-640, 2009
- [14] M. Kaviany, *Principles of Heat Transfer in Porous Media*, 2e éd., Springer, 1995
- [15] S. A. Nabavizadeh et al., « Natural convection in a square cavity containing a sinusoidal cylinder », *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 51, pp. 112-120, 2012
- [16] A. C. Baytas, « Entropy generation for natural convection in an inclined porous cavity », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 43, no 12, pp. 2089-2099, 2000
- [17] L. Kalla, M. Mamou, P. Vasseur et L. Robillard, « Multiple steady states for natural convection in a shallow porous cavity subject to uniform heat fluxes », *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 26, no 6, pp. 761-770, 1999
- [18] S. Ergun, « Fluid flow through packed columns », *Chemical Engineering Progress*, vol. 48, pp. 89-94, 1952.
- [19] A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow Through Porous Media*, 3rd ed., University of Toronto Press, 1974.
- [20] A. Delache, « Étude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux : comparaison avec l'expérience », Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille (Lille 1), Lille, France, 2005.

- [21] D. J. Krishna, T. Basak et S. K. Das, « Natural convection in a heat generating hydrodynamically and thermally anisotropic non-Darcy porous medium », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 51, nos 19-20, pp. 4691-4703, 2008.
- [22] D. Y. M. Venkatachalappa et M. Sankar, « Effect of magnetic field on the heat and mass transfer in a vertical annulus », *International Journal of Engineering Science*, vol. 49, pp. 262-278, 2011
- [23] S. Aminossadati, B. Ghasemi et A. Kargar, « Computational analysis of magnetohydrodynamic natural convection in a square cavity with a thin fin », *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 46, pp. 154-163, 2014
- [24] S. Sivasankaran et C.-J. Ho, « Effect of temperature dependent properties on MHD convection of water near its density maximum in a square cavity », *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 47, pp. 1184-1194, 2008
- [25] A. J. Chamkha, « Hydromagnetic combined convection flow in a vertical lid-driven cavity with internal heat generation or absorption », *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 41, no 5, pp. 529-546, 2002
- [26] B. Ghasemi, S. Aminossadati et V. Raisi, « Magnetic field effect on natural convection in a nanofluid-filled square enclosure », *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 50, pp. 1748-1756, 2011
- [27] A. A. A. Al-Rashed et al., « 3D magneto-convective heat transfer in CNT nanofluid filled cavity under partially active magnetic field », *Physica E*, vol. 99, pp. 294-303, 2018
- [28] A. Purusothaman, H. F. Oztop, N. Nithiyadevi et H. N. Abu Hamdeh, « 3D natural convection in a cubical cavity with a thermally active heater under the presence of an external magnetic field », *Computers & Fluids*, vol. 128, pp. 30-40, 2016
- [29] R. M. Rudraiah, R. M. Barron, M. Venkatachalappa et C. K. Subbaraya, « Effect of a magnetic field on free convection in a rectangular enclosure », *International Journal of Engineering Science*, vol. 33, no 8, pp. 1075-1084, 1995
- [30] J. Qi, N. I. Wakayama et Y. Yabe, « Attenuation of natural convection by magnetic force in electro-nonconducting fluids », *Journal of Crystal Growth*, vol. 204, pp. 408-412, 1999

- [31] L. Kolsi, A. Abidi, M. N. Borjini et H. B. Aissia, « The effect of an external magnetic field on the entropy generation in three-dimensional natural convection », *Thermal Science*, vol. 14, pp. 341-352, 2010,
- [32] A. Mahmoudi, I. Mejri, M. A. Abbasi et A. Omri, « Numerical study of natural convection in a nanofluid-filled cavity under the effect of a magnetic field (MHD) », *Journal of Molecular Liquids*, vol. 198, pp. 63-77, 2014
- [33] C. M. Ece et E. Büyük, « Natural-convection flow under a magnetic field in an inclined rectangular enclosure heated and cooled on adjacent walls », *Fluid Dynamics Research*, vol. 38, no 8, pp. 564-590, 2006
- [34] R. Taton (dir.), *Histoire générale des sciences*, Tome III, vol. 1 : La science contemporaine - Le XIXe siècle. Paris : Presses Universitaires de France, 1961, p. 224.
- [35] *Journal de Physique et le Radium*, 1925, p. 27.
- [36] R. Taton (dir.), *Histoire générale des sciences*, Tome III, vol. 2. Paris : Presses Universitaires de France, 1964, p. 243.
- [37] *Radium*, 1911, p. 126.
- [38] *Journal de Physique et le Radium*, 1925, p. 27.
- [39] R. Taton (dir.), *Histoire générale des sciences*, Tome III, vol. 2. Paris : Presses Universitaires de France, 1965, p. 195.
- [40] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, 1961.
- [41] H. Ozoe, *Magnetic Convection*, Imperial College Press, London, 2005.
- [42] S. Tonino, H. Sadat et L. Gbahoue, « Convection thermomagnétique dans une cavité différentiellement chauffée », *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 32, pp. 923-930, 2005.
- [43] S. K. Godunov, « A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics », *Matematicheskii Sbornik*, vol. 47, pp. 357-393, 1959.
- [44] J. Glimm, « Solution in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 18, pp. 697-715, 1965.

- [45] S. V. Patankar et D. B. Spalding, *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers*, 2e éd., Intertext, London, 1970.
- [46] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, D.C., 1980.
- [47] F. H. Harlow et J. E. Welch, « Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface », *Physics of Fluids*, vol. 8, pp. 2182-2189, 1965.
- [48] G. De Vahl Davis, « Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, pp. 249-264, 1983.
- [49] P. Nithiarasu, K. N. Seetharamu et T. Sundararajan, « Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40, no 16, pp. 3955-3967, 1997.