



Université Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi Bordj Bou
Arréridj
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département des mathématiques



Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Systèmes dynamiques

Sur la résolution de l'équation des milieux poreux fractionnaire

Présenté par :
BRAHIMI Amira

Sous la direction de :
Mme. HAMANI FATIMA

Soutenu publiquement le 21 juin 2023 devant le jury composé de :

M. ADDOUN ISMAIL	MCA. Université de BBA	Président
M. SALHI TAYEB	MCA. Université de BBA	Examinateur

Année universitaire
2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ

عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

[التوبة: 105]

ويقول العماد الاصفهاني:

(إني رأيت أنه لا يكتب إنسان كتابًا في يومه إلا قال في غده: لو غيّر هذا
لكان أحسن، ولو زيد كذا لكان يُستحسن، ولو قُدّم هذا لكان أفضل،
ولو ترك هذا لكان أجمل. وهذا من أعظم العبر، وهو دليل على
استيلاء النقص على جملة البشر)

TABLE DES MATIÈRES

Listes des Notations	IV
Introduction	1
1 Quelques notions de base préliminaires	3
1.1 Solution de type auto-similaire	3
1.2 Eléments de calcul fractionnaire	10
1.2.1 Fonctions spéciales	10
1.2.2 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$	11
1.2.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	12
1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	13
1.2.5 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	16
2 Transformation de l'équation des milieux poreux fractionnaire à une équation intégral-différentielle ordinaire non linéaire	19
2.1 L'opérateur d'Erdélyi-Kober	19
2.1.1 Quelques cas particuliers	20
2.1.2 L'approximation par l'opérateur d'Erdélyi-Kober	21
2.1.3 Exemples	22
2.2 Modélisation de l'équation des milieux poreux fractionnaire	25
2.3 Transformation de l'équation des MPF à une équation intégral-différentielle ordinaire	28
3 Discussions et solutions approchées	31
3.1 Résolution de l'équation des MPF pour $m \geq 1$ (le cas non linéaire)	31
3.1.1 Relation entre l'équation des MPF et la série de Taylor	32
3.1.2 Solutions approchées pour l'équation des MPF dans le cas non linéaire	33
3.2 Résolution de l'équation des MPF pour $m = 0$ (le cas linéaire)	39
3.2.1 Comparaison numérique	41
Conclusion	42
Bibliographie	43

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie mon dieu qui ma donné la santé et la puissance pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier avec plus grande gratitude ma promotrice : **Mme. Fatima HAMANI** pour la confiance qu'elle ma témoignée en me proposant ce sujet, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Mon remerciement s'adresse à : **Mme. Rebiha BENTERKI** pour son aide pratique et son soutien moral et ses encouragements.

Je remercie également : **M. Nazih-eddine Belkacem** qui m'a beaucoup aidé au cours de mon travail.

Je remercie aussi tous les membres du jury pour l'honneur qu'il m'ont fait, en acceptant de juger mon travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner a remercie tous mes professeurs pour leur patience et leur engagements tout au long les années universitaires.

MERCI

DÉDICACES

Avec les sentiments d'amour et de gratitude je dédie ce travail :

A mon très cher Père **Lemnaouer**, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé.

A ma chère Mère **Soria**, pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices.

A mes chères sœurs **Rania** et **Wafa**, leurs filles : *Sirine, Rama, Kawthar.*

Je voudrais dédie ce mémoire à mes petites sœurs, tous mes amis, tous ceux qui m'aiment et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

*Je dédie ce travail a tous les membres de la famille **BRAHIMI**.*

AMIRA

LISTES DES NOTATIONS

- EDO : équation différentielle ordinaire.
- EDP : équation aux dérivées partielles.
- \mathbb{N} : ensemble des nombres entiers naturels.
- \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.
- $L^1(\Omega)$: espace vectoriel des fonctions définie sur Ω , tel-que $\int_{\Omega} |f(x)| dx < +\infty$.
- $C(\Omega)$: espace des fonctions continues sur Ω .
- $C^n(\Omega)$: espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.
- $AC(\Omega)$: espace des fonctions absolument continues sur Ω .
- $AC^n(\Omega)$: espace des fonctions dérivables à l'ordre $n - 1$ et elle que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.
- $\Gamma(\cdot)$: la fonction Gamma.
- $B(\cdot, \cdot)$: la fonction Bêta.
- $D^\alpha f$: dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}^c D^\alpha f$: dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
- $I_a^{\eta, \alpha}$: l'opérateur de différentiation fractionnaire d'Erdélyi-Kober.
- MP : l'équation des milieux poreux.
- MPF : l'équation des milieux poreux fractionnaire.

INTRODUCTION

La plupart des problèmes scientifiques et les phénomènes physiques sont décrits par des équations ou des formules linéaires ou non linéaires qui sont difficiles à cause de plusieurs raisons.

Les équations liées à la mécanique des fluides sont étudiées par plusieurs mathématiciens, parmi ces équations on peut citer l'équation des milieux poreux.

L'équation des milieux poreux est une équation mathématique qui décrit le flux de fluides à travers un milieu poreux. L'idée de cette équation été développée à partir les études de la diffusion par Darcy en 1856.

La diffusion est l'un des processus naturels les plus courants et les plus fondamentaux. De nos jours, la diffusion est très bien comprise et peut être décrite mathématiquement par une équation parabolique (linéaire ou non linéaire). Cette équation est très polyvalente et permet d'unifier des phénomènes relativement divers sous une seule classe d'équations. Malgré des recherches très vigoureuses menées tout au long du siècle dernier (et aujourd'hui), certains phénomènes de transport ne peuvent toujours pas être décrits avec précision par la diffusion classique [6].

Ces nouveaux phénomènes de transport sont caractérisés par un caractère non-Fickien d'une mise à l'échelle intrinsèque de l'espace-temps. Dans la diffusion classique, les solutions auto similaires sont obtenues en trouvant une fonction dépendant de $x/t^{\frac{1}{2}}$. Comme l'ont montré de nombreuses expériences, cette échelle ne décrit pas le processus de manière appropriée. Nous devrions plutôt rechercher des solutions qui sont des fonctions de $x/t^{\frac{\alpha}{2}}$ pour un certain $\alpha \in (0, 2)$. La diffusion devient alors anormale et la description mathématique classique n'est pas appropriée, d'où la nécessité d'adopter d'autres approches. Une description assez réussie de la diffusion anormale peut être faite en utilisant le calcul fractionnaire. Selon ce modèle, l'équation aux dérivées partielles est remplacée par sa version fractionnaire. Lorsque nous remplaçons

l'opérateur différentiel ordinaire par la dérivée fractionnaire, nous obtenons une mise à l'échelle spatiotemporelle correcte, mais au prix d'une grande complexité de l'équation résultante. Parmi les équations difficiles à résoudre qui nécessite une transformation fractionnaire : l'équation des milieux poreux.

A la base l'étude des équations des milieux poreux remonte à plusieurs chercheurs du 20^{ème} siècle (XXe siècle) parmi lesquels J.Bear, R.W.Philips, J.H.Cushman et G.de Marsily. Plus tard les mathématiciens se sont intéressés à développer l'équation des milieux poreux à une équation fractionnaire et l'étudier pour trouver des solutions approchées pour elle, et cela dans la dernière décennie du 20^{ème} siècle.

La résolution de l'équation des milieux poreux fractionnaire est un problème mathématique complexe qui implique la résolution d'équations différentielles avec des dérivées fractionnaires. Il a des nombreuses applications dans le monde réel dans des plusieurs domaines tel-que la dynamique des fluides, la géophysique et la génie-chimique. Plusieurs méthodes numériques sont été développées pour résoudre cette équation, notamment les méthodes de différences finies, les méthodes d'éléments finis [5] et les méthodes spectrales [4].

Dans ce mémoire on va essayer de chercher des solutions approchées de type auto-similaire pour l'équation des milieux poreux fractionnaire, ces solutions sont obtenues par l'approximation basée sur l'opérateur d'Erdélyi-Kober [13, 14].

Ce mémoire est organisé en trois chapitre.

Dans le premier chapitre nous présentons les solutions de type auto-similaires pour une EDP, nous donnons également la condition de similarité d'une équation. La résolution de cette équation nous obligeons de définir quelques notions de calcul fractionnaire qui aider dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre on va transformer l'équation des milieux poreux à une équation intégro-différentielle pour faciliter sa résolution. Pour cette modélisation nous utilisons l'approximation d'Erdélyi-Kober et avant le faire c'est nécessaire de parler sur l'origine de l'équation des milieux poreux c'est-à-dire nous parlons ici sur la diffusion anormale.

Dans le dernier chapitre le travail essentiellement traite le cas non linéaire et linéaire de l'équation des milieux poreux fractionnaire pour trouver les solutions approchées pour cette équation.

CHAPITRE 1

QUELQUES NOTIONS DE BASE PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre on va présenter tout d'abord les notions des solutions de type auto-similaire qui sont très importantes dans les chapitres qui suit, et l'appliquer sur des EDP's vérifiant certaines conditions de similarité. La fin de ce chapitre sera consacrée sur les calculs fractionnaires au sens de Reiman Liouville (intégrale, dérivée), Caputo (dérivée) et ces propriétés.

1.1 Solution de type auto-similaire

Définition 1.1. (Equation aux dérivées partielles) :

Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction u est une relation entre u , les variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(u, x_1, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, \dots) = 0.$$

Définition 1.2. (Equation différentielle ordinaire) :

Une EDO c'est une équation définie en termes d'une variable $t \in I$, I intervalle réel, une fonction inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et ses dérivées de y par rapport à t .

En formule :

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots) = 0.$$

Une fonction y qui vérifie $F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots) = 0$ s'appelle solution de l'EDO. Une EDO est d'ordre k si elle contient les dérivées de y jusqu'à l'ordre k .

Dans ce qui suit on va présenter la notion de solution auto-similaire et l'appliquer sur des exemples.

On appelle solution auto-similaire une fonction qui est invariante par un changement d'échelle en temps. Ce type des fonctions est très important en physique car elles modélisent des phénomènes qui sont indépendants de l'échelle de mesure.

La méthode de recherche de solution auto-similaire consiste à imposer une certaine forme à la solution recherchée et de ce fait à transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire.

Définition 1.3. : [16] Une solution auto-similaire est une fonction de deux variables écrite sous la forme :

$$u(x, t) = t^\alpha \Phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad (1.1)$$

où les exposants de t , sont des constantes réelles appelées paramètres de la solution et prennent des valeurs particulières déterminées, caractérisant la solution d'une EDP donnée, Φ est une fonction d'une seule variable appelée "profil" qui est la solution d'une équation différentielle ordinaire résultant de l'EDP après l'insertion de u .

Remarque 1.1.1. :

Il existe aussi une forme générale des solutions auto-similaires dont la forme :

$$u(x, t) = \Phi(t)u\left(\frac{x}{\psi(t)}\right), \quad (1.2)$$

où $\Phi(t)$ et $\psi(t)$ sont choisies pour des raisons convenables dans le problème spécifique.

Equation admettant une solution auto-similaire

Une condition pour qu'une équation aux dérivées partielles admette une solution auto-similaire est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1. [16] Soit $p(x, t, u, u_x, \dots) = 0$ une EDP, alors p admet une solution auto-similaire si et seulement si elle est invariante sous l'action de dilatation : c'est-à-dire si l'on remplace u par $a^\alpha u$, x par $a^\beta x$ et t par $a^\gamma t$ on a :

$$p(a^\beta x, a^\gamma t, a^\alpha u, u_x, \dots) = 0.$$

Où à la règle de dérivation :

La dérivation pour t : $\frac{\partial(a^\alpha u)}{\partial(a^\gamma t)} = a^{(\alpha-\gamma)} \frac{\partial u}{\partial t}$.

La dérivation pour x : $\frac{\partial(a^\alpha u)}{\partial(a^\beta x)} = a^{(\alpha-\beta)} \frac{\partial u}{\partial x}$.

L'équation est invariante si :

$$p(x, t, u, u_x, \dots) = 0 \Rightarrow p(a^\beta x, a^\gamma t, a^\alpha u, \dots) = 0. \quad (1.3)$$

Exemple 1.1.1.

Soit l'équation de Burgers :

$$u_t + u.u_x = u.u_{xx}. \quad (1.4)$$

Pour déterminer que cette équation est invariante par dilatation, remplaçons u , x et t par $a^\alpha u$, $a^\beta x$, $a^\gamma t$ on a :

$$\frac{\partial(a^\alpha u)}{\partial(a^\gamma t)} = a^{(\alpha-\gamma)} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial(a^\alpha u)}{\partial(a^\beta x)} = a^{(\alpha-\beta)} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial^2(a^\alpha u)}{\partial(a^\beta x)^2} = a^{(\alpha-2\beta)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

L'équation(1.4) devient :

$$a^{(\alpha-\gamma)} \frac{\partial u}{\partial t} + a^\alpha u a^{(\alpha-\beta)} \frac{\partial u}{\partial x} = u a^{(\alpha-2\beta)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.5)$$

L'équation est invariante donc :

$$a^{(\alpha-\gamma)} = a^{(2\alpha-\beta)} = a^{(\alpha-2\beta)}. \quad (1.6)$$

Ce qui entraîne $\gamma = 2\beta$ et $\alpha = -\beta$, l'équation de Burgers est invariante sous l'action de dilatation de x et t par $a^{2\beta}$ pour suite elle admet une solution auto-similaire. La recherche de la solution sous la forme $u = t^\alpha \Phi(t^\beta)$ se déduit par le changement :

$$a^\alpha u(a^\beta x, a^\gamma t) = a^\alpha u(a^\beta x, 1), \quad (1.7)$$

qui doit être égale à $u(x, t)$, on choisit telle que $a^\gamma t = 1$.

L'équation $a^\gamma t = 1$ détermine a , donc $a = t^{-\frac{1}{\gamma}}$ ainsi la solution s'écrit sous la forme :

$$u = t^{\frac{\alpha}{\beta}} \Phi(xt^{-\frac{\beta}{\gamma}}). \quad (1.8)$$

Détermination des paramètres et profil

La recherche d'une solution auto-similaire fait intervenir des équations différentielles ordinaires linéaires ou non linéaires, la résolution de ces équations est en général très difficile puisque elle dépend des paramètres et des profils qu'il faut déterminer avant de pouvoir résoudre ces équations, on a plusieurs méthodes pour la détermination de profil selon que les paramètres prennent des valeurs déterminées indépendamment du profil, les deux paramètres restent indéterminés et sont liés ou l'un des paramètres est déterminé, et le deuxième reste indéterminé.

Dans la plupart des cas, l'équation différentielle qui permet de définir le profil peut admettre plusieurs solutions mais malheureusement il n'y a pas une méthode générale pour la recherche du profil.

On va mentionner quelques méthodes pour déterminer le profil, chaque méthode représente un genre d'équation, une méthode s'adapte pour un type ne peut pas fonctionner pour d'autres types, de plus une méthode qui fonctionne sur une équation rend le calcul aussi lourds où il est difficile de donner explicitement la solution.

La première méthode est un développement limité, cette dernière permet de donner plusieurs solutions et elle est basée sur le développement limité tel que supposant que la solution soit infiniment différentiable, bornée, ainsi que ces dérivées soit : [16]

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i. \quad (1.9)$$

Le développement limité, pour l'intégration d'une EDO suppose que la solution est infiniment différentiable et bornée.

Même, si la solution admet un développement limité, une question se pose, qu'elle est la fonction qui admet ce développement (c'est à dire la détermination explicite de la solution).

La deuxième méthode est "la diminution de l'ordre de l'équation" une méthode de diminution du profil a été utilisée par L.I., Sedov (voir [17]), qui a utilisé cette méthode pour résoudre l'équation de la chaleur, sous des conditions physiques (la quantité de la chaleur est invariante).

Cette méthode a les inconvénients suivants :

- Il est parfois difficile de déterminer la classe de la solution.
- La même remarque pour les conditions sur la solution.

La troisième est une méthode dont le principe est "la dérivée de la solution (profil) est une

fonction profil" i.e.,

$$\Phi' = xf(\Phi). \quad (1.10)$$

Sous cette condition, une équation qui a pour inconnue Φ , devient une équation d'inconnue f , alors que x jouera le rôle de paramètre. On peut utiliser aussi la transformation de Hopf-Cole, cette dernière donne plusieurs solutions, en fonction de la condition initiale.

Propriétés d'une solution auto-similaire

On a vu que la condition pour qu'une équation aux dérivées partielles admette une solution auto-similaire est qu'elle soit invariante sous l'action de dilatation, on est de même pour la solution.

Exemple 1.1.2.

Dans cet exemple nous prenons l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2},$$

on va chercher la condition de similarité :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^{\lambda-\gamma} \frac{\partial v}{\partial t},$$

et :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^{\lambda-2s} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

cela implique que :

$$a^{\lambda-\gamma} \frac{\partial v}{\partial t} = a^{\lambda-2s} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

alors :

$$a^{\lambda-\gamma} = a^{\lambda-2s},$$

donc

$$\lambda - \gamma = \lambda - 2s,$$

implique que le résultat suivant est la condition de similarité :

$$\gamma = 2s.$$

Soit $v(x, t) = t^{-\alpha} \varphi(xt^{-\beta})$ la solution auto-similaire de l'équation de la chaleur alors :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = t^{-\alpha-1} (-\alpha \varphi(\xi) - \beta \xi \varphi'(\xi)),$$

tel-que : $\xi = xt^{-\beta}$,

et :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = t^{-\alpha-2\beta} \varphi''(\xi),$$

donc :

$$(-\alpha\varphi(\xi) - \beta\xi\varphi'(\xi)) = t^{-2\beta+1}\varphi''(\xi), \quad (1.11)$$

on dérive formellement par rapport à t :

$$0 = [-2\beta + 1]t^{-2\beta}(\varphi''),$$

implique que :

$$1 - 2\beta = 0,$$

alors :

$$\beta = \frac{1}{2},$$

si on remplace le résultat ci dessus dans l'équation (1.11) on obtient :

$$-\varphi'' + \alpha\varphi + \frac{1}{2}\xi\varphi' = 0,$$

si $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ alors l'équation devient :

$$-\varphi'' = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\xi\varphi',$$

donc :

$$\frac{1}{2}(\xi\varphi)' = -\varphi'',$$

on intègre les deux cotés par rapport à ξ on obtient :

$$\frac{1}{2}\xi\varphi = -\varphi',$$

donc :

$$\frac{1}{2}\xi = -\frac{\varphi'}{\varphi},$$

implique que :

$$-\frac{1}{4}\xi^2 + c = \ln\varphi,$$

alors :

$$\varphi(\xi) = Ke^{-\frac{1}{4}\xi^2},$$

donc la solution $v(x, t)$ s'écrit comme suit :

$$v(x, t) = K t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Où K est une constant arbitraire.

Si $K = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, la solution $v(x, t)$ est dite solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

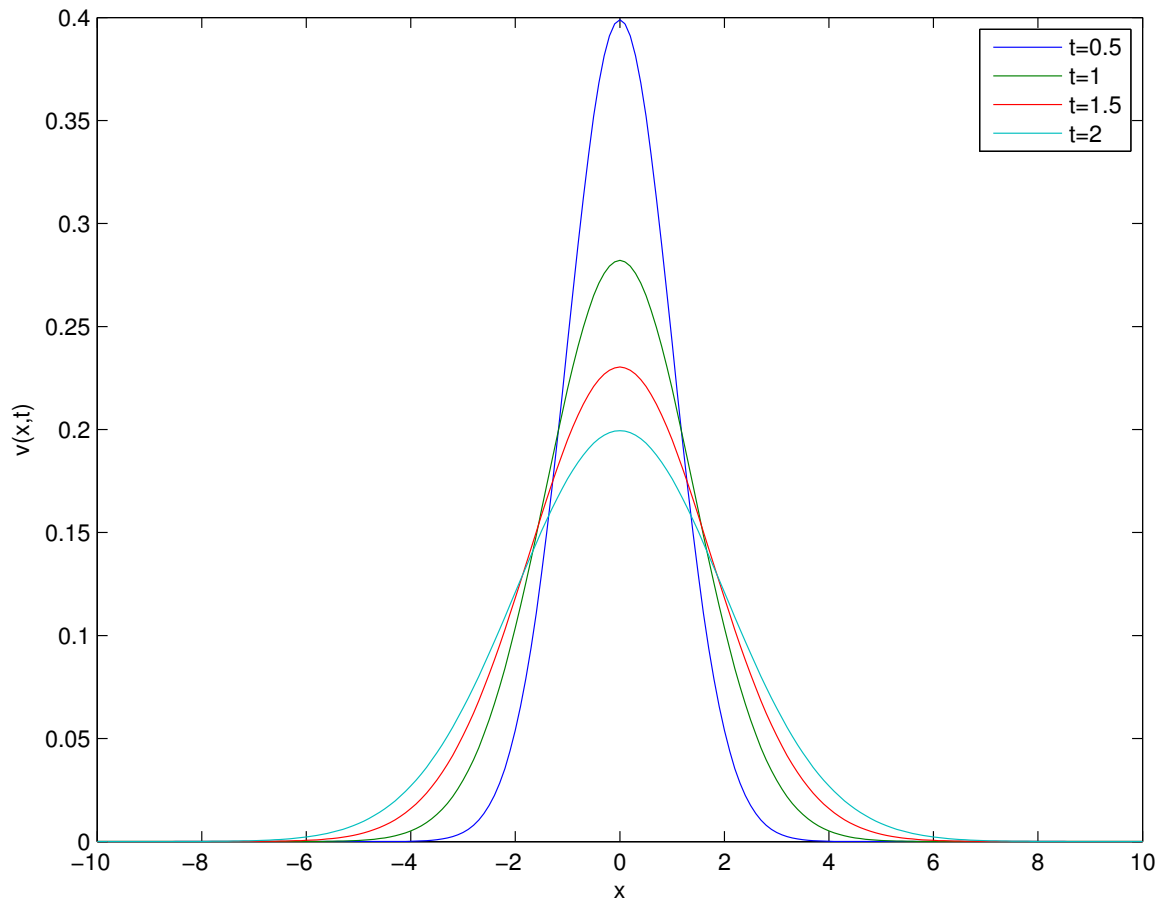


FIGURE 1.1 – Solution fondamentale pour l'équation de la chaleur.

1.2 Eléments de calcul fractionnaire

1.2.1 Fonctions spéciales

Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$.

Définition 1.4. [10] Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$.

La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.12)$$

Exemple 1.2.1.

On a :

$$1. \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} = 1.$$

$$2. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt,$$

on utilise le changement de variable $t = \tau^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt, \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau, \quad (\text{d'après L'intégrale de Gauss}) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Quelques Propriétés de base de la fonction Gamma :

L'une des propriétés de base de la fonction gamma est qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$1. \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0)$$

$$2. \Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$3. \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fonction Bêta

Dans de nombreux cas il est nécessaire d'employer la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison des valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.5. [10] La fonction Bêta est une type d'intégrale d'Euler définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad (p, q \in \mathbb{C}) \quad (Re(p) > 0, Re(q) > 0). \quad (1.13)$$

Proposition 1.2.

Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante :

1.

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (1.14)$$

et on a :

2.

$$B(p, q) = B(q, p),$$

1.2.2 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Définition 1.6. [10] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$

Notons par $I_a^1 f$ la primitive qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b] : (I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(t) &= \int_a^t I_a^1 f(u) du, \\ &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du, \\ &= \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) f(\tau) d\tau, \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la $n^{\text{ième}}$ primitive de la fonction f sous la forme :

$$\left(I_a^{(n)} f \right) (t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{(n-1)} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.15)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$.

1.2.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.7. [10] Supposons que $\alpha > 0$ et $a < t$, $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche de la fonction $f(t)$ pour un ordre non entier α est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \quad I_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)} f(\tau) d\tau, \quad (1.16)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.12).

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f , par :

$$\forall t \in [a, b], \quad I_{b^-}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{(\alpha-1)} f(\tau) d\tau, \quad (1.17)$$

Remarque 1.2.1.

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

Théorème 1.3. [10] Pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :

$$I_{a^+}^\alpha [I_{a^+}^\beta f(t)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(t), \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0, \quad (1.18)$$

presque pour tout $t \in [a, b]$. Si de plus $f \in C([a, b])$, alors cette identité est vraie $\forall t \in [a, b]$.

Proposition 1.4.

Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a :

1.

$$\left(I_{a^+}^\alpha (t - a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (t - a)^{\alpha+\beta-1}. \quad (1.19)$$

2.

$$\left(I_{b^-}^\alpha (b - t)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (b - t)^{\alpha+\beta-1}. \quad (1.20)$$

Exemple 1.2.2.

L'intégrale de $f(t) = (t - a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$, alors on a :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau. \quad (1.21)$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = a + s(t - a),$$

où : $s = 0$ quand $\tau = a$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = tds$, alors (1.21) devient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} s^\beta (t-a)^{\beta+1} ds, \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds, \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.13) puis la relation (1.14), on arrive à :

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1), \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ est donnée par :

$$I^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \quad (1.22)$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a :

$$I^1 (t-a)^\beta = \frac{1}{\beta+1} (t-a)^{\beta+1}.$$

l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$$I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha.$$

En particulier, si $a = 0$,

$$I^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha.$$

1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α .

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} (I_a^1)$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre α , $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} (I_a^{1-\alpha}).$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \left(I_a^{n-\alpha} \right).$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.8. [10] Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ notée $D_{a+}^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad D_{a+}^\alpha f(t) &= D^n I_{a+}^{n-\alpha} f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.23)$$

où : $n = [\alpha] + 1$.

en particulier, si $\alpha = n - 1 \in \mathbb{N}^*$, $a = 0$, alors :

$$D_0^{n-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) d\tau = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) = f^{(n-1)}(t).$$

Ainsi la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Si de plus $0 \leq \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où :

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.9. la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de la fonction f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \quad D_{b-}^\alpha f(t) = (-1)^n D^n (I_{b-}^{n-\alpha} f)(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.24)$$

Exemple 1.2.3.

1/ La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

$$D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} (t-a)^\beta.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, d'après (1.24), et la relation (1.16) on a :

$$D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha+\beta}. \quad (1.25)$$

En tenant compte de :

$$\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (1.26)$$

On substitue le résultat (1.26), dans la formule (1.25), pour obtenir :

$$D^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ est donnée par :

$$D^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (1.27)$$

On pose : $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}(t-a), \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a). \end{aligned}$$

2/ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(t) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. \quad \alpha > 0$$

Proposition 1.5.

pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$, on a :

$$1. \left(D_a^\alpha(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

$$2. \left(D_b^\alpha(b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

Proposition 1.6.

pour $n - 1 < \alpha < n$, $m - 1 < \beta < m$ on a :

1. Soit $\alpha > \beta > 0$ alors pour $f \in L^1([a, b])$, l'égalité :

$$D^\alpha(I^\beta f(t)) = f(t),$$

est vraie pour tout $t \in [a, b]$.

2. Soit $\alpha > \beta > 0$, $f \in L^1([a, b])$, la relation :

$$D^\beta(I^\alpha f(t)) = I^{\alpha-\beta} f(t),$$

est vrai presque partout sur $t \in [a, b]$.

3. Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, si les dérivées fractionnaires $D^\alpha f$ et $D^{k+\alpha} f$ existent, alors :

$$D^k(D^\alpha f(t)) = D^{k+\alpha} f(t).$$

4. Si $f(t) \in C^n([a, b])$, alors :

$$I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k.$$

1.2.5 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette section nous présentons la définition et quelques propriétés de la dérivation au sens de Caputo.

Définition 1.10. [10] La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D_a^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha > 0$, sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right), \quad (1.28)$$

où :

$$n = [\alpha] + 1, \quad \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}, \quad n = \alpha \quad \text{et } \alpha \in \mathbb{N}. \quad (1.29)$$

$$\text{si } \alpha = 0 \quad \text{alors : } {}^c D^0 f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (1.28) prend la forme :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha (f(t) - f(a))$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.28) est définie pour les fonctions f pour lesquelles la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe, en particulier elle est définie pour les fonctions $f \in AC^n([a, b])$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.7. [10] Soit $\alpha \geq 0$ et soit n donné par (1.29). Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D_a^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a, b]$.

a) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c D_a^\alpha f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} ({}^c D_a^\alpha f)(t) &= I_a^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.30)$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} ({}^c D_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \\ &= I_a^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

b) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = f^{(n)}(t).$$

Exemple 1.2.4.

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^c D^\alpha C = 0. \quad (1.32)$$

2. La dérivée fractionnaire de la fonction $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Caputo est donnée par :

$${}^c D^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}.$$

3. la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$.

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha (e^{\lambda t}) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} (e^{\lambda \tau}) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\lambda^n e^{\lambda \tau}) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \tau^k}{k!} d\tau, \\
 &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_a^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} \tau^k d\tau.
 \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable : $\tau = yt$, $d\tau = tdy$.

où : $y = \frac{a}{t}$ quand $\tau = a$ et $y = 1$ quand $\tau = t$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\alpha (e^{\lambda t}) &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{\frac{a}{t}}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{k+1-1} d\tau, \text{ (si } a=0), \\
 &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} B(n-\alpha, k+1).
 \end{aligned}$$

La relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

La relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

Théorème 1.8. [10] Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et soit f une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^c D_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent alors :

$$({}^c D_a^\alpha) f(t) = D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \quad (1.33)$$

En particulier, $0 < \alpha < 1$ on a :

$$({}^c D_a^\alpha) f(t) = D_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(-\alpha+1)} (t-a)^{-\alpha}.$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$({}^c D_a^\alpha) f(t) = D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right].$$

Remarque 1.2.2.

Si $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, la dérivée au sens de Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, C'est-à-dire :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t)$$

CHAPITRE 2

TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION DES MILIEUX POREUX FRACTIONNAIRE À UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE NON LINÉAIRE

Dans ce chapitre on va étudier l'équation des milieux poreux et on va travailler pour la transformer en une équation intégrale-différentielle, en utilisant l'opérateur d'Erdélyi-Kober.

2.1 L'opérateur d'Erdélyi-Kober

Dans cette partie on s'intéresse à l'opérateur d'Erdélyi-Kober, qui est un opérateur d'intégration fractionnaire introduit par Arthur-Erdélyi et Hermann-Kober (1940).

Définition 2.1. [7] La définition la plus célèbre d'une intégrale d'ordre fractionnaire se fait par une transformation intermédiaire de l'opérateur de Reiman-Liouville donnée par :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, & Re(\alpha) > 0. \\ &= \frac{d^n}{dt^n} I_a^{\alpha+n} f(t). & -n < Re(\alpha) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Un opérateur d'intégration fractionnaire généralisant (2.1) a été introduit par Erdélyi-Kober :

$$\begin{aligned} I_a^{\eta,\alpha} f(t) &= \frac{t^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\eta f(\tau) d\tau, & Re(\alpha) > 0. \\ &= t^{-\eta-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} t^{\eta+\alpha} I_a^{\eta,\alpha+n} f(t), & -n < Re(\alpha) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.1.

Nous considérons l'opérateur d'Erdelyi-Kober $I_a^{\eta,\alpha}$ avec une limite d'intégration non dégressive $a > 0$.

$$\begin{aligned} I_a^{\eta,\alpha} f(t) &= \frac{t^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\eta f(\tau) d\tau, & Re(\alpha) > 0. \\ &= t^{-\eta-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} t^{\eta+\alpha+n} I_a^{\eta,\alpha+n} f(t), & -n < Re(\alpha) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

et la composition de ces opérateurs avec des limites inférieures d'intégration différentes a et b , $0 < a < b$.

$$I_b^{\gamma,\beta} I_a^{\eta,\alpha} f(t).$$

2.1.1 Quelques cas particuliers

1^{er} cas : $Re(\alpha) > 0$. Il est facile de voir que l'opérateur d'Erdélyi-Kober $I_a^{\eta,\alpha}$ peut être exprimé par l'opérateur de Reimann-Liouville (2.1).

$$I_a^{\eta,\alpha} f(t) = t^{-\alpha-\eta} I_a^\alpha t^\eta f(t). \quad (2.4)$$

2^{ème} cas : $I_a^{\eta,\alpha}$ pour $Re(\alpha) \leq 0$. Soit $n < Re(\alpha) \leq 0$ et la fonction f est n fois différentiable sur l'intervalle $[a, a+r]$, $r > 0$ on note le développement de Taylor de $f(t)$ au voisinage du point a .

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j + \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad a \leq t < a+r, \quad (2.5)$$

depuis (2.3) et (2.5) pour $-n < Re(\alpha) \leq 0$ on a :

$$I_a^{\eta,\alpha} f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} I_a^{\eta,\alpha} (t-a)^j + \frac{t^{-\eta-\alpha}}{(n-1)! \Gamma(\alpha+n)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t x^\eta (t-x)^{\alpha+n-1} \int_a^x (x-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau dx.$$

3^{ème} cas : $I_b^{\gamma,\beta} I_a^{\eta,\alpha}$ pour $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$. On peut établir la formule suivante pour la composition des opérateurs de Reimann-Liouville avec différentes limites inférieures d'intégration.

$$I_b^\beta I_a^\alpha f(t) = \frac{(t-b)^\beta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k (\beta)_k}{(\beta+1)_k k!} (t-b)^k \int_a^b (t-x)^{\alpha-k-1} f(x) dx + I_b^{\alpha+\beta} f(t)$$

$$Re(\alpha) > 0,$$

on considère la composition des opérateurs pour $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $0 < a \leq b$.

Nous avons :

$$I_b^{\gamma,\beta} I_a^{\eta,\alpha} f(t) = \frac{t^{-\gamma-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_b^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{\gamma-\eta-\alpha} \int_a^\tau (\tau-x)^{\alpha-1} x^\eta f(x) dx d\tau.$$

Particulièrement si $a = b > 0$ nous avons :

$$I_a^{\gamma,\beta} I_a^{\eta,\alpha} f(t) = t^{\eta-\gamma-\beta} I_a^{\alpha+\beta, -\beta-\gamma, -\beta, \eta} f(t).$$

4^{ème} cas : $I_b^{\gamma,\beta} I_a^{\eta,\alpha}$ pour $Re(\alpha) \leq 0 < Re(\beta)$. On considère maintenant la composition des opérateurs $I_b^{\gamma,\beta}$ et $I_a^{\eta,\alpha}$ pour $Re(\alpha) \leq 0 < Re(\beta)$.

Soit $n > -Re(\alpha)$ et f est n fois différentiable.

On a :

$$I_b^{\gamma,\beta} I_a^{\eta,\alpha} f(t) = \frac{a^\eta t^{-\gamma-\beta}}{\Gamma(\alpha+j+1)} \int_b^t \tau^{\gamma-\eta-\alpha} (t-\tau)^{\beta-1} (\tau-a)^{\alpha+j} F_1(-\eta, j+1, \alpha+j+1, 1-\frac{\tau}{a}) dt \\ + I_b^{\gamma,\beta} I_a^{\alpha+n, -n, \eta} f^{(n)}(t).$$

2.1.2 L'approximation par l'opérateur d'Erdélyi-Kober

Dans ce qui suit nous allons utiliser le théorème suivant pour approximer l'opérateur d'intégration fractionnaire d'Erdélyi-Kober.

Théorème 2.1. [13] Pour toute fonction analytique f et tous réels a, b, c avec : $a > 1, b > 0$ et $c > 0$ on a :

$$I_c^{a,b} f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k f^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!}. \quad (2.6)$$

Où

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{\Gamma(a + \frac{j}{c} + 1)}{\Gamma(a + b + \frac{j}{c} + 1)}. \quad (2.7)$$

De plus la relation asymptotique suivante est valable pour $k \rightarrow \infty$:

$$\lambda_k \sim (-1)^k \frac{c}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b-1}{n} (-1)^n \Gamma(c(a+n+1)) \left(\frac{1}{k}\right)^{c(a+n+1)}. \quad (2.8)$$

Preuve

voir [13]

Proposition 2.2.

Soit U une fonction C^N dont la dérivation est uniformément bornée. alors nous avons l'estimation suivante :

$$\left| I_c^{a,b} U(\eta) - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k U^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!} \right| \leq C \frac{|\eta|^N}{N^{c(a+1)} N!}.$$

Où λ_k est comme dans (2.7) et C dépendent de U , β , γ and δ .

Tout d'abord, marquons les notices suivantes qui suggèrent que notre approximation devrait être précise :

1. Lorsque $b \rightarrow 0$, seulement λ_0 reste dans (2.7). Par conséquent, nous attendons l'approximation de $I_c^{a,b}$ avec les premiers termes de (2.6) sera plus précise pour b proche de 0.
2. On peut le voir dans le théorème précédent, par le comportement asymptotique $\lambda_k \sim C_{a,b,c} K^{-c(a+1)}$ la convergence de la série (2.6) est très rapide, ceci nous permettons de penser que la majorité des informations sur f est contenues dans les premiers termes de cette série.

Remarque 2.1.2.

A partir de la preuve du théorème et sous les hypothèses $a > -1$, $b > 0$ et $c > 0$ les intégrales soient convergentes.

La formule (2.7) est significative pour les paramètres pour les quelles la fonction gamma est définie.

Donc dans ce qui suit on va utiliser ces valeurs généralisées de λ_k .

2.1.3 Exemples

On va prendre :

$$a = 0, \quad b = 0.2, \quad c = 1,$$

et on a :

$$I_c^{a,b} f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k f^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!},$$

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{\Gamma(a + \frac{j}{c} + 1)}{\Gamma(a + b + \frac{j}{c} + 1)}.$$

Exemple 2.1.1.

$$f(x) = \log(1 + x).$$

1. Approximation de f par un terme :

$$I_c^{a,b} \log(1 + \eta) = f_0(x) = \lambda_0 \log^{(0)}(1 + \eta) \frac{\eta^{(0)}}{0!},$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \sum_{j=0}^{k=0} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1.2)}, \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1.2)}, \end{aligned}$$

alors :

$$I_c^{a,b} \log(1 + \eta) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1.2)} \log(1 + \eta).$$

2. Approximation de f par 2 termes :

$$I_c^{a,b} \log(1 + \eta) = f_1(x) = \lambda_0 f^{(0)}(\eta) \frac{\eta^{(0)}}{0!} + \lambda_1 f^{(1)}(\eta) \frac{\eta}{1!},$$

$$\lambda_0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1.2)},$$

$$\lambda_1 = \sum_{j=0}^{k=1} -\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1.2)},$$

donc :

$$I_c^{a,b} \log(1 + \eta) = \lambda_0 \log(1 + \eta) + \lambda_1 \frac{1}{(1 + \eta) \ln(10)} \eta.$$

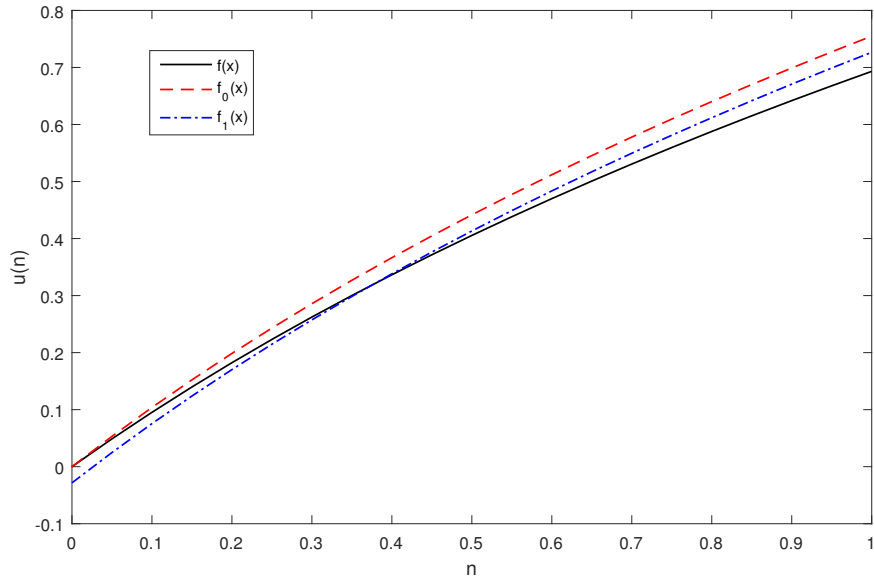


FIGURE 2.1 – L'approximation de $I_c^{a,b}$ pour $f(x) = \log(1+x)$.

Exemple 2.1.2.

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

1. Approximation de f par 1 terme :

$$I_c^{a,b} \sin(\pi\eta) = \lambda_0 \sin^{(0)}(\pi\eta) \frac{\eta^{(0)}}{0!},$$

$$\lambda_0 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.1)},$$

alors :

$$I_c^{a,b} \sin(\pi\eta) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.1)} \sin(\pi\eta).$$

2. Approximation de f par 2 termes :

$$I_c^{a,b} \sin(\pi\eta) = \lambda_0 f^{(0)}(\eta) \frac{\eta^{(0)}}{0!} + \lambda_1 f^{(1)}(\eta) \frac{\eta}{1!},$$

$$\lambda_0 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.1)},$$

$$\lambda_1 = \sum_{j=0}^{k=1} -\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1.2)},$$

donc :

$$I_c^{a,b} \sin(\pi\eta) = \lambda_0 \sin(\pi\eta) + \lambda_1 [\pi \cos(\pi\eta)]\eta.$$

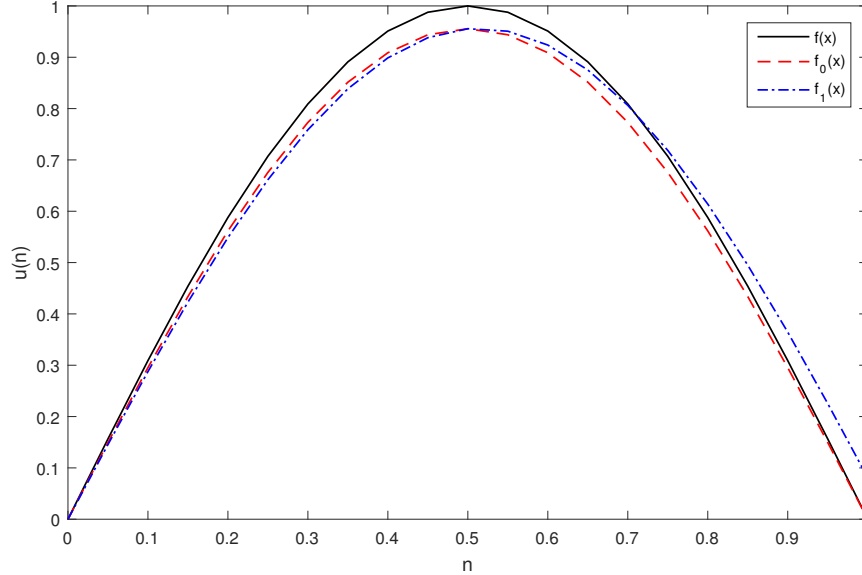


FIGURE 2.2 – L'approximation de $I_c^{a,b}$ pour $f(x) = \sin(\pi x)$.

2.2 Modélisation de l'équation des milieux poreux fractionnaire

Cette section est consacrée pour décrire quelques concepts de base liés à l'origine de l'équation des milieux poreux.

Avant de toucher le concept de l'équation des milieux poreux, nous devons parler de la diffusion qui est l'un des processus naturels les plus courants et les plus fondamentaux. De nos jours, la diffusion est très bien comprise et peut être décrite mathématiquement par une équation parabolique (linéaire ou non linéaire). Cette équation est très polyvalente et permet d'unifier des phénomènes relativement divers sous une seule classe d'équations.

Malgré des recherches très vigoureuses menées tout au long du dernier siècle, certains phénomènes de transport ne peuvent toujours pas être décrits avec précision par la diffusion classique [9].

La diffusion anormale

La diffusion anormale est connue depuis 1926. Dans la théorie du transport, elle a été étudiée depuis les années 1960. En particulier, son étude théorique a été initiée par Scher et Montroll dans leur description du transport dispersif dans les semi-conducteurs amorphes. L'approche de la diffusion anormale par une marche aléatoire en temps continu généralise le mouvement Brownien et a fourni des explications pour beaucoup de grandeurs physiques et de phénomènes dans de nombreuses réalisations expérimentales. Une importante contribution dans ce cadre est due à Weiss et Shlesinger. La description des marches aléatoires, des généralisations de l'équation de la diffusion ont été développées sur la base de modèles du transport anormal [15]. Actuellement, beaucoup de systèmes montrent des comportements anormaux. Parmi ces systèmes les milieux poreux (nous pensons surtout à des milieux poreux naturels).

Définition 2.2. la diffusion anormale est l'utilisation d'équations différentielles fractionnaires. De plus, elle permet d'inclure plus ou moins facilement des conditions aux limites et des forces extérieures. Le modèle le plus simple utilisé pour la dispersion provient des lois expérimentales de Fick et de la conservation de la masse. Le modèle de l'équation de diffusion non linéaire unidimensionnelle donné par : [13]

$$u_t(x, t) = (D(u)u_x(x, t))_x.$$

Où $D(u)$ est le coefficient décrivant la force de diffusion du milieu.

Ici, $u = u(x, t)$ représente la concentration de la substance au point x à l'instant t et les indices dénotent la différenciation par rapport aux variables appropriées.

Selon ce modèle, l'équation différentielle partielle est remplacée par sa version fractionnaire. Nous notons que dans la littérature, les solutions des équations non linéaires ont généralement été obtenues numériquement sans aucune forme analytique simple qui puisse être facilement utilisée. Lorsque nous remplaçons l'opérateur différentiel ordinaire par la dérivée fractionnaire, nous obtenons une mise à l'échelle spatiotemporelle correcte, mais au prix d'une grande complexité de l'équation résultante.

Les méthodes de calcul fractionnaire sont utilisées avec succès dans la modélisation mathématique et les sciences physiques. En outre, elles introduisent un certain nombre de sujets intéressants qui sont étudiés par les théoriciens travaillant dans l'analyse, les équations intégrales et la théorie des fonctions spéciales. L'équation de diffusion fractionnaire a été principalement étudiée dans son cas le plus simple linéaire [2].

Dans ce cas, la forme exacte de la solution (en termes de fonction de Wright) peut être obtenue par la méthode de Fourier-Laplace. Dans le cas non linéaire [3], la plupart des solutions numériques ou semi-analytiques (méthode de décomposition d'Adomian, analyse d'homotopie) sont réalisables.

Alors, nous étudions l'équation différentielle partielle fractionnaire non linéaire suivante qui modélise la diffusion anormale :

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = (D(u(x, t))u_x(x, t))_x, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.9)$$

on utilise la dérivée fractionnaire de Reimann-Liouville ∂_t^α , avec les conditions initiales aux limites :

$$u(0, t) = 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

Ce phénomène est connu sous le nom de diffusion anormale et peut être modélisée avec succès par le calcul fractionnaire appliqué à la dérivée temporelle, si on prend

$$D(u) = D_0 u^m \text{ et } m \geq 0,$$

on trouve :

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = (D_0 u^m(x, t)u_x(x, t))_x, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.10)$$

l'équation (2.10) c'est l'équation des milieux poreux dans un cas subdiffusif. Transposons l'équation (2.10) sous une forme non dimensionnelle en prenant :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{T}, \quad u^* = \frac{u}{C}, \quad T = \left(\frac{L^2}{D_0 C^m} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

où L est l'échelle de longueur typique de notre problème, C est une valeur typique de la concentration et par l'utilisation de la dérivée de Reimann-Liouville avec les conditions initiales aux limites

$$u(0, t) = C, \quad u(x, 0) = 0.$$

L'équation (2.10) devient :

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = (u^m(x, t)u_x(x, t))_x, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.11)$$

avec :

$$u(0, t) = 1, \quad u(x, 0) = 0.$$

2.3 Transformation de l'équation des MPF à une équation intégré-différentielle ordinaire

Ainsi on va convertir l'équation des milieux poreux à une équation intégré-différentielle ordinaire.

On a l'équation des milieux poreux fractionnaire (2.11) donnée par :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[u^m(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right],$$

cette équation est invariante sous l'action de dilatation de x et t donc, elle admet une solution auto-similaire sous la forme :

$$u(x, t) = t^\mu \phi \left(\frac{x}{t^\lambda} \right). \quad (2.12)$$

Considérons les dérivées partielles de (2.12) par rapport à (x, t, x^2) , on prend $:\xi = \left(\frac{x}{t^\lambda} \right)$ donc :

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = t^{\mu-\lambda} \phi'(\xi).$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^{\mu-2\lambda} \phi''(\xi).$
3. $\frac{\partial u^m}{\partial x} = m t^{\mu m - \lambda} \phi' \phi^{m-1}.$
4. $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(I_t^{1-\alpha} \left(t^\mu \phi \left(\frac{x}{t^\lambda} \right) \right) \right).$

Par l'utilisation de la dérivée de Reimann-Liouville on trouve :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-z)^{-\alpha} z^\mu \phi \left(\frac{x}{z^\lambda} \right) dz,$$

donc :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t t^{-\alpha} \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{-\alpha} z^\mu \phi \left(\frac{x}{z^\lambda} \right) dz, \quad (2.13)$$

maintenant on pose les changements des variables comme suit :

$$s = \frac{z}{t} \implies z = ts \implies dz = t ds,$$

si : $z = 0 \implies s = 0$,

et si : $z = t \implies s = 1$.

Donc l'équation (2.13) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 t^{-\alpha+1} (1-s)^{-\alpha} t^\mu s^\mu \phi\left(\frac{t^\lambda x}{t^\lambda z^\lambda}\right) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 t^{\mu-\alpha+1} (1-s)^{-\alpha} s^\mu \phi(\xi s^{-\lambda}) ds, \end{aligned}$$

on utilise la formule de l'intégrale d'Erdélyi-Kober, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{\mu-\alpha+1} I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi) \right], \\ &= (\mu - \alpha + 1) t^{\mu-\alpha} I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{d}{dz} I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi) t^{\mu-\alpha+1}, \\ &= (\mu - \alpha + 1) t^{\mu-\alpha} I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi) + (-\lambda t^{-\lambda-1} x) \frac{d}{dz} I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi), \\ &= (\mu - \alpha + 1) t^{\mu-\alpha} I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi) + (-\lambda) \xi t^{\mu-\alpha} I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi), \end{aligned}$$

alors :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t} = t^{\mu-\alpha} \left[\mu - \alpha + 1 - \lambda \xi \frac{d}{dz} \right] I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi). \quad (2.14)$$

Par la substitution des dérivées partielles calculées dans (2.11) on obtient :

$$t^{\mu-\alpha} \left[\mu - \alpha + 1 - \lambda \xi \frac{d}{dz} \right] I_{\frac{-1}{\lambda}}^{0,1-\alpha+\mu} \phi(\xi) = t^{\mu(m+1)-2\lambda} \phi^m(\xi) \phi''(\xi) + m t^{\mu(m+1)-2\lambda} (\phi'(\xi))^2 \phi^{m-1}(\xi),$$

après la dérivation par rapport à t on a :

$$\implies \mu - \alpha = \mu m + \mu - 2\lambda$$

$$\implies \mu m = 2\lambda - \alpha$$

d'après le premier condition initiale $u(0, t) = 1 \implies \phi(0) = 1$ et $\mu = 0$ donc :

$$2\lambda - \alpha = 0 \implies \lambda = \frac{\alpha}{2}$$

Donc la solution auto-similaire pour l'équation des milieux poreux fractionnaire prend la forme :

$$u(x, t) = \phi\left(\frac{x}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\right), \quad \alpha > 1,$$

et l'équation intégré-différentielle résultante après la dérivation est :

$$\left[(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{2} \xi \frac{d}{dz} \right] I_{\frac{\alpha}{2}}^{0,1-\alpha} \phi(\xi) = \frac{d}{dz} \left[\phi^m(\xi) \frac{d}{dz} \phi(\xi) \right], \quad (2.15)$$

avec les nouvelles conditions initiales suivantes :

$$\phi(0) = 1, \quad \phi(\infty) = 0. \quad (2.16)$$

CHAPITRE 3

DISCUSSIONS ET SOLUTIONS APPROCHÉES

Dans ce chapitre nous cherchons des solutions approchées pour le problème que nous avons obtenu à la fin du deuxième chapitre dans le cas linéaire ($m = 0$) et non linéaire ($m \geq 1$). Notez que la solution exacte de notre équation est présente dans le cas linéaire contrairement au cas non linéaire, ces solutions peuvent être trouvées.

3.1 Résolution de l'équation des MPF pour $m \geq 1$ (le cas non linéaire)

En suit en va étudier le cas non linéaire de l'équation des MPF (2.15) avec $m \geq 1$ essayons de trouver des solutions approchées .

Ce problème est le plus intéressant d'un point de vue applicatif. En effet, la solution obtenue à partir des MPF a une vitesse de propagation constante sur la surface de mouillage. La solution exacte de ce problème ne peut pas être extraite même pour le cas classique $\alpha = 1$. Nombreux auteurs ont proposés des techniques pour traiter ce problème [1].

Après avoir appliqué notre approximation de l'opérateur fractionnaire, nous suivons le raisonnement proposée dans [11] et aussi les résultats obtenus dans [13, 14]. Comme nous allons le voir, la solution obtenue aura un support compact c'est-à-dire :

$$U(\eta) = 0 \text{ pour } \eta \geq \eta^* \text{ avec certain } \eta^*.$$

Le point η^* doit être déterminer, cette point est appelé : "front de mouillage".Il caractérise

la vitesse et la position du front de mouillage, qui est la frontière entre la zone où le liquide mouille la surface et la zone où il ne le fait pas.

3.1.1 Relation entre l'équation des MPF et la série de Taylor

Dans ce qui suit nous allons transformer l'équation des MPF pour obtenir un problème initiale et le résoudre en trouvant les coefficients de la série de Taylor et en utilisant l'approximation de l'opérateur d'Erdélyi-Kober (2.6).

Remarque 3.1.1.

Les problèmes de perte de précision pour les grands η ne seront pas présents dans cette cas non linéaire.

On a :

$$\begin{aligned} I_c^{a,b} f(\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k f^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!}, \\ &= \lambda_0 U + \lambda_1 \eta U' + \dots, \end{aligned}$$

et on a l'équation intégral-différentielle des milieux poreux fractionnaire :

$$\frac{d}{d\eta} \left[U^m(\eta) \frac{d}{d\eta} U(\eta) \right] = \left[(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{2} \eta \frac{d}{d\eta} \right] I_{\frac{2}{\alpha}}^{0,1-\alpha} U(\eta),$$

par la dérivation par rapport a η on trouve :

$$\begin{aligned} (U^m(\eta)U'(\eta))' &= \left[(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{2} \eta \frac{d}{d\eta} \right] (\lambda_0 U + \lambda_1 \eta U'), \\ &= (1 - \alpha)\lambda_0 U - \frac{\alpha}{2} \eta \lambda_0 U' + (1 - \alpha)\lambda_1 \eta U' - \frac{\alpha}{2} \eta \frac{d}{d\eta} (\lambda_1 \eta U'), \\ &= (1 - \alpha)\lambda_0 U - \frac{\alpha}{2} \eta \lambda_0 U' + (1 - \alpha)\lambda_1 \eta U' - \frac{\alpha}{2} \eta \lambda_1 U' - \frac{\alpha}{2} \eta^2 \lambda_1 U'', \end{aligned}$$

donc :

$$(U^m(\eta)U'(\eta))' = (1 - \alpha)\lambda_0 U + \left[(1 - \frac{3\alpha}{2})\lambda_1 - \frac{\alpha}{2}\lambda_0 \right] \eta U' - \frac{\alpha}{2} \eta^2 \lambda_1 U''. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1.2.

Nous notons que le fait de retenir des dérivées supérieurs à la deuxième dérivée nécessiterait des conditions supplémentaires pour $U'(0)$, de plus les conditions $U(0) = 1, U(\infty) = 0$. Nous aurions besoin de $U^k(0)$ pour $k \geq 2$ qui est obtenus par la résolution d'une forme approximative de (3.1) avec le terme λ_0 seulement.

Car, si en utilise l'approximation et en fixant $\eta = 0$ nous donneraient autre conditions initiales sous la forme des dérivées. D'autre part les fonctions gamma qui apparaissent dans les

coefficients λ_k deviennent non bornées pour leurs arguments approchant des valeurs entières non positives (parce-que $|\Gamma(z)|$ est bornée dans la bande $1 \leq \text{Re}(z) \leq 2$), par conséquent si on effectuer des calculs numériques avec λ_k pour $k > 0$ pourrait produire des erreurs.

Dans ce cas la construction d'une approximation avec un grand nombre de dérivées introduire des grands erreurs numériques. Apartir de ça nous pourrions déterminer une approximation de la dérivée première $U'(0)$.

Comme nous l'avons déjà noté le fait de ne retenir que le terme λ_0 dans (2.6) contribuer pour trouver un ordre supérieur de l'intégrale.

3.1.2 Solutions approchées pour l'équation des MPF dans le cas non linéaire

Nous procédons à l'analyse avec le terme λ_0 seulement. Donc l'équation (3.1) devient :

$$(U^m(\eta)U'(\eta))' = (1 - \alpha)\lambda_0 U - \frac{\alpha}{2}\lambda_0 \eta U', \quad (3.2)$$

et on a :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{\Gamma\left(a + \frac{j}{c} + 1\right)}{\Gamma\left(a + b + \frac{j}{c} + 1\right)}. \\ \lambda_0 &= \binom{0}{0} \frac{\Gamma\left(0 + \frac{0}{\frac{-2}{\alpha}} + 1\right)}{\Gamma\left(0 + (1 - \alpha) + \frac{0}{\frac{-2}{\alpha}} + 1\right)}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 + 1 - \alpha)}. \end{aligned}$$

Comme on a parmi les propriétés de la fonction gamma $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ avec $x > 0$ alors :

$$\lambda_0 = \frac{1}{(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha)},$$

en substituant λ_0 dans (3.2) on trouve :

$$(U^m(\eta)U'(\eta))' = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)}U - \frac{\alpha}{2\Gamma(2 - \alpha)}\eta U'. \quad (3.3)$$

Ainsi on prend le premier terme de λ_k et on suppose $U(\eta)$ une solution compact écrite sous la forme :

$$U(\eta) = (m(\eta^*)^2 y(z))^{\frac{1}{m}}, \quad (3.4)$$

où $\eta \geq \eta^*$ tel que $z = 1 - \frac{\eta}{\eta^*}$ donc $\eta = 1 - z$, on prend :

$$\begin{aligned} U(\eta) &= y^{\frac{1}{m}}, \\ U'(\eta) &= \frac{1}{m} y', \\ U^m(\eta) &= y, \end{aligned}$$

par substitution (3.3) devient :

$$\begin{aligned} y' \frac{1}{m} y' + yy'' &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} y - \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{m} \eta y', \\ \frac{1}{m} y'^2 + yy'' &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} y - \frac{1}{m} \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} (1-z) y'. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Remarquez aussi que de (3.4) et les condition $U(0) = 1$, $\eta = 0$, nous connaissons immédiatement la position du mouillage, tel-que $z = 1$, donc :

$$\begin{aligned} U(0) &= 1, \\ (m(\eta^*)^2 y(1))^{\frac{1}{m}} &= 1, \\ m(\eta^*)^2 y(1) &= 1, \\ (\eta^*)^2 &= \frac{1}{my(1)}, \\ \eta^* &= \frac{1}{\sqrt{my(1)}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Par l'utilisation de la série de Taylor :

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!},$$

avec le condition $y(0) = 0$ tel que $\eta = \eta^*$ on trouve :

$$a_0 = 0,$$

et on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}y''(z) &= \frac{1}{m} \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} y'(z), \\ y'(z) &= \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)},\end{aligned}$$

et $y'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots$, alors on a le condition $y'(0) = a_1$ donc :

$$a_1 = \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}.$$

Ainsi on utilise la formule de Leibniz : $(fg)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$, tel-que :

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \\ B &= \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m} y^{(k+1)}(z) y^{(n-k+1)}(z) + y^{(k)}(z) y^{(n-k+1)}(z) \right) = \\ Ay^{(n)}(z) + \frac{B}{m} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^{(n-k+1)}(z) \frac{d^k}{dz^k} (1-z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{m} (k+1)!(n-k+1)! a_{k+1} a_{n-k+1} + k!(n-k+2)! a_k a_{n-k+2} \right) = \\ An!a_n + \frac{B}{m} \left(\binom{n}{0} y^{(n+1)}(0)(1-z) + \binom{n}{1} y^{(n)}(1) + \dots \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{m} (k+1)(n-k+1) a_{k+1} a_{n-k+1} + (n-k+1)(n-k+2) a_k a_{n-k+2} \right) = \\ An!a_n + \frac{B}{m} \left((n+1)! a_{n+1} - nn! a_n \right),\end{aligned}$$

on divise sur $n!$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{m} (k+1)(n-k+1) a_{k+1} a_{n-k+1} + (n-k+1)(n-k+2) a_k a_{n-k+2} \right) = \\ Aa_n + \frac{B}{m} \left((n+1) a_{n+1} + n a_n \right),\end{aligned}$$

par simplification on se tire les termes de la somme pour $k = 0$ et $k = 1$ on obtient :

$$a_{n+1} = \frac{1}{Bn(n+1)} \left[\left(A - \frac{Bn}{m} - \frac{2n}{m}a_2 \right) a_n - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{m} \frac{(k+1)(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)} a_{k+1} a_{n-k+1} \right) \right], \quad n \geq 1. \quad (3.7)$$

Donc il est facile de calculer autre coefficients a_n par exemple :

$$\begin{aligned} a_{1+1} &= \frac{1}{B(1+1)} \left[\left(A - \frac{B}{m} - \frac{2}{m}a_2 \right) a_1 \right] - \frac{1}{m} \cdot 3 \cdot 0 \cdot \sum_{k=2}^n, \\ a_2 &= \frac{1}{2B} \left[\frac{Am - B}{m} - \frac{2}{m}a_2 \right] B, \\ a_2 &= \frac{1}{2} \frac{Am - B}{m} - \frac{1}{2} \frac{2}{m}a_2, \\ a_2 + \frac{1}{m}a_2 &= \frac{Am - B}{2m}, \\ a_2 &= \frac{Am - B}{2m} \frac{m}{m+1}, \\ a_2 &= \frac{Am - B}{2(m+1)}, \end{aligned}$$

donc :

$$a_2 = \frac{\frac{m}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}}{2(1+m)}.$$

et :

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{(A+B)m(B-Am)}{6B(1+m)^2(1+2m)}, \\ a_3 &= \frac{m \left(\frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} - \frac{m}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \left(\frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right)}{6(1+m)^2(1+2m)}. \end{aligned}$$

Comme on a l'approximation de (3.6) :

$$\eta_i^* = \frac{1}{\sqrt{m(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}}. \quad (3.8)$$

Si on substituer les η_i^* dans (3.4) on conclure :

1. : $\eta_1^* = \frac{1}{\sqrt{ma_1}}$, alors :

$$U_1(\eta) = \left(m \frac{1}{ma_1} a_1 z \right)^{\frac{1}{m}},$$

$$U_1(\eta) = (z)^{\frac{1}{m}},$$

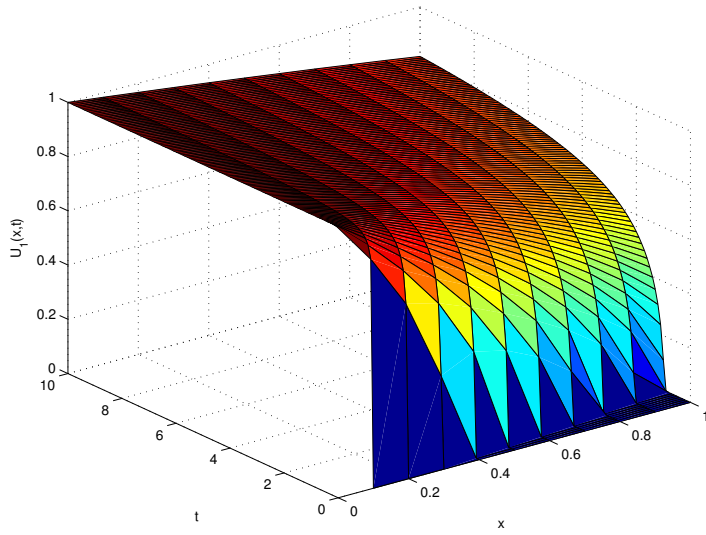
$$U_1(\eta) = \left(1 - \frac{\eta}{\eta^*} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

2. :

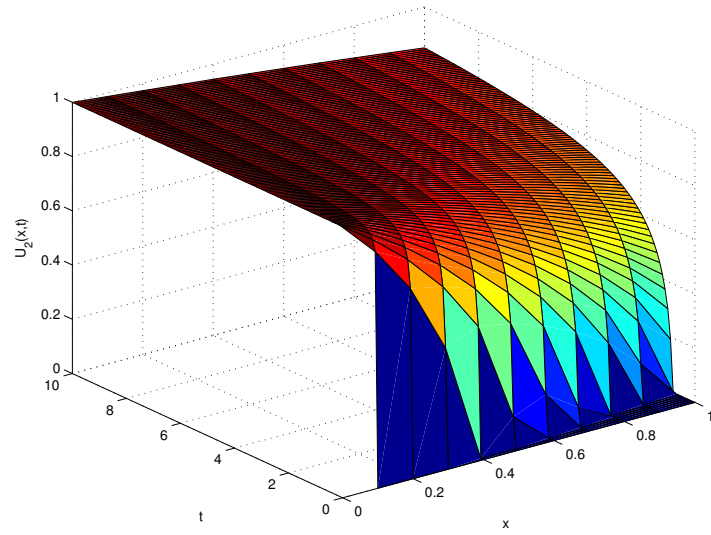
$$U_2(\eta) = \left(\left(1 - \frac{\eta}{\eta_2^*} \right) (1 - ma_2 \eta_2^* \eta) \right)^{\frac{1}{m}}.$$

3. :

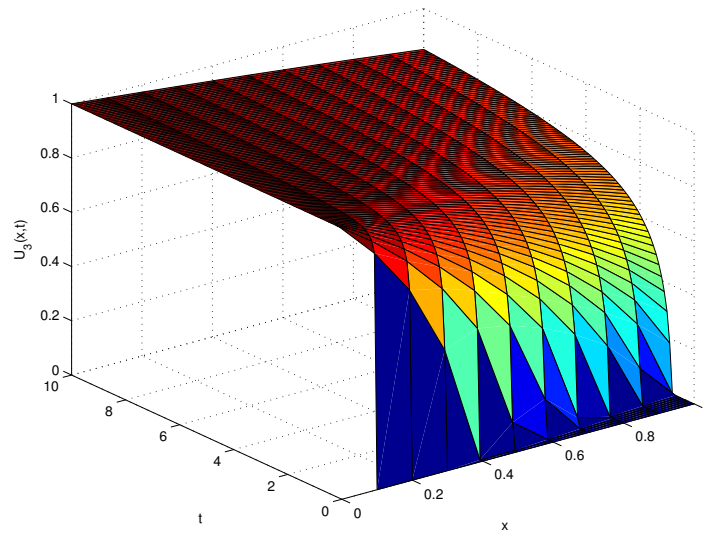
$$U_3(\eta) = \left(\left(1 - \frac{\eta}{\eta_2^*} \right) (1 - m(a_2 + a_3)\eta_3^* \eta + ma_3 \eta^2) \right)^{\frac{1}{m}}.$$



(a) La solution approchée U_1 .



(b) La solution approchée U_2 .



(c) La solution approchée U_3 .

FIGURE 3.1 – Les solutions approchées de l'équation des MPF.

3.2 Résolution de l'équation des MPF pour $m = 0$ (le cas linéaire)

Dans ce qui suit on va faire une approximation par (2.6) avec $m = 0$ pour trouver une solution à l'équation des MPF (2.15).

Tous d'abord, nous analysons :

$$U'' = \left[(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{2} \eta \frac{d}{d\eta} \right] I_{-\frac{\alpha}{2}}^{0,1-\alpha} U, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.9)$$

où le premier chiffre indique la différenciation par rapport à η avec les conditions initiales et limites sont celles de (2.16).

La solution exacte de ce problème peut être écrite en termes de fonction de Wright [8].

C'est-à-dire :

$$U(\eta) = \phi \left(-\frac{\alpha}{2}, 1, \eta \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1 - \frac{k\alpha}{2})} \frac{\eta^k}{k!}. \quad (3.10)$$

Lorsque $\alpha \rightarrow 1$, l'équation (3.10) devient la fonction d'erreur complémentaire "erfc" qui est une solution à la version classique de (3.9).

Reformulons (2.7) en termes de α on trouve :

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{\Gamma(1 - \frac{j}{2}\alpha)}{\Gamma(2 - (1 + \frac{j}{2})\alpha)},$$

Pour voir comment fonctionne notre approximation : on remplace l'opérateur fractionnaire à droite de (3.9) $\rightarrow I_{-\frac{\alpha}{2}}^{0,1-\alpha} U$ par le premier terme de (2.6) $\rightarrow \lambda_0(\eta)U_0$, c'est-à-dire résolvons l'équation suivante :

$$U_0'' = (1 - \alpha)\lambda_0 U_0 - \frac{\alpha}{2} \lambda_0 \eta U_0'. \quad (3.11)$$

On a :

$$\lambda_0 = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)},$$

dans le cas de $a = 0$, $b = 1 - \alpha$ et $c = \frac{-2}{\alpha}$.

Par substitution on trouve :

$$U_0 = e^{-z^2} y, \quad (3.12)$$

qui transforme (3.11) à une équation différentiel de Hermite :

$$y'' - 2zy' + \delta y = 0,$$

c'est-à-dire :

$$U_0'' + 2\frac{\alpha}{2}\lambda_0\eta U_0' - (1 - \alpha)\lambda_0 U_0 = 0,$$

tel-que :

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\Gamma(2 - \alpha)}}\eta,$$

et

$$\delta = \frac{(1 - \alpha)}{\Gamma(2 - \alpha)},$$

Donc :

$$y'' - 2zy' + 2\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)y = 0,$$

qui, soumise aux conditions suivants : $u(0, t) = 1, u(x, 0) = 0$ (plus de détails dans [12]) a une solution :

$$y(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\sqrt{\pi}2^{1-\frac{2}{\alpha}}}H_{1-\frac{2}{\alpha}}(z),$$

où $H_{1-\frac{2}{\alpha}}$ est la fonction d'Hermite d'ordre $1 - \frac{2}{\alpha}$. Enfin, en revenant aux d'origine (3.12), nous obtenons (3.13) :

$$U_0(\eta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\sqrt{\pi}2^{1-\frac{2}{\alpha}}}e^{-\frac{\alpha}{4\Gamma(2-\alpha)}\eta^2}H_{1-\frac{2}{\alpha}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}}\eta\right). \quad (3.13)$$

Observons que lorsque $\alpha \rightarrow 1$, la fonction U_0 se réduit à :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}e^{-\frac{\eta^2}{4}}}H_{-1}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}e^{-\frac{\eta^2}{4}}}erfc(\eta/2).$$

Nous voulons comparer les solutions de (3.9) et (3.11).

3.2.1 Comparaison numérique

TABLE 3.1 – Une comparaison numériques entre la solution exacte et la solution approchée du l'équation des milieux poreux fractionnaire pour ($m = 0$) $\alpha = 1$ et les valeurs $t = 0.1$, $t = 0.2$, $t = 0.3$, $t = 0.4$, $t = 0.5$.

t	valeur de (x)	solution approchée	solution exacte	erreurs
0.1	0	1.1284	1.0000	1.284×10^{-1}
	0.1	0.9058	0.8875	1.83×10^{-2}
	0.2	0.6685	0.7773	1.088×10^{-1}
	0.3	0.4526	0.6714	2.188×10^{-1}
	0.4	0.2807	0.5716	2.909×10^{-1}
	0.5	0.1592	0.4795	3.203×10^{-1}
0.2	0	1.1284	1.0000	1.284×10^{-1}
	0.1	0.9744	0.8875	8.68×10^{-2}
	0.2	0.8070	0.7773	2.97×10^{-2}
	0.3	0.6405	0.6714	3.08×10^{-2}
	0.4	0.4869	0.5716	8.47×10^{-2}
	0.5	0.3543	0.4795	1.252×10^{-1}
0.3	0	1.1284	1.0000	1.284×10^{-1}
	0.1	1.0041	0.8875	1.165×10^{-1}
	0.2	0.8690	0.7773	9.17×10^{-2}
	0.3	0.7313	0.6714	5.99×10^{-2}
	0.4	0.5980	0.5716	2.64×10^{-2}
	0.5	0.4751	0.4795	4.4×10^{-3}
0.4	0	1.1284	1.0000	1.284×10^{-1}
	0.1	1.0215	0.8875	1.340×10^{-1}
	0.2	0.9058	0.7773	1.285×10^{-1}
	0.3	0.7865	0.6714	1.151×10^{-1}
	0.4	0.6685	0.5716	9.69×10^{-2}
	0.5	0.5561	0.4795	7.66×10^{-2}
0.5	0	1.1284	1.0000	1.284×10^{-1}
	0.1	1.0333	0.8875	1.458×10^{-1}
	0.2	0.9307	0.7773	1.534×10^{-1}
	0.3	0.8243	0.6714	1.530×10^{-1}
	0.4	0.7178	0.5716	1.462×10^{-1}
	0.5	0.6145	0.4795	1.350×10^{-1}

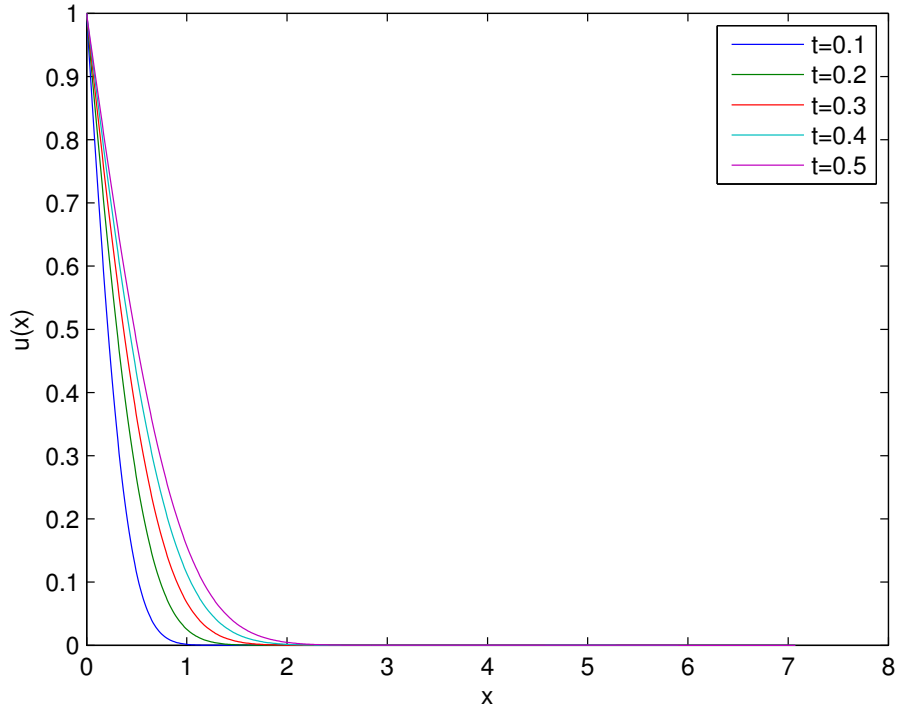


FIGURE 3.2 – Solution exacte de l'équation des MPF pour $t = 0.1, t = 0.2, t = 0.3, t = 0.4, t = 0.5$.

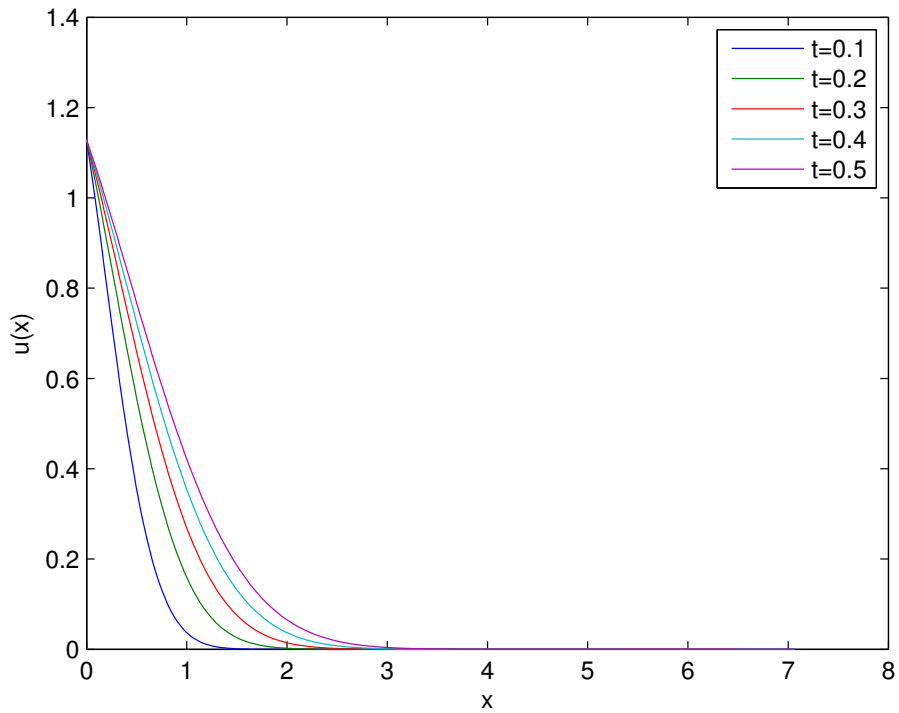


FIGURE 3.3 – Solution approchée de l'équation des MPF pour $t = 0.1, t = 0.2, t = 0.3, t = 0.4, t = 0.5$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons présenté une étude intéressante concernant l'équation des milieux poreux fractionnaire, nous étudions premièrement l'équation admettant une solution de type auto-similaire.

On a démontré que la résolution de l'équation des milieux poreux fractionnaire nécessite une transformation de cette équation en une équation intégral-différentielle, puis on a étudié l'approximation de l'équation des MPF par l'opérateur d'Erdélyi-Kober. Avant ça nous notons la modélisation de l'équation des milieux poreux et son origine (la diffusion anormale).

Enfin, on a présenté une discussion sur l'existence des solutions pour l'équation des milieux poreux fractionnaire. Nous résolvons cette dernière dans les deux cas : cas linéaire $m = 0$ où l'équation admet une solution exacte, et le cas non linéaire $m \geq 1$ où l'équation a des solutions approchées.

On a donné une comparaison numérique entre la solution exacte et la solution approchées de l'équation des milieux poreux fractionnaire pour différentes valeurs de t .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Anderson and M. Lisak. Approximate solutions of some nonlinear diffusion equations. *Physical Review A*, 22(6) :2761, 1980.
- [2] C. Atkinson and A. Osseiran. Rational solutions for the time-fractional diffusion equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71(1) :92–106, 2011.
- [3] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and J. J. Trujillo. *Fractional calculus : models and numerical methods*, volume 3. World Scientific, 2012.
- [4] B. Bijeljic, A. Raeini, P. Mostaghimi, and M. J. Blunt. Predictions of non-fickian solute transport in different classes of porous media using direct simulation on pore-scale images. *Physical Review E*, 87(1) :013011, 2013.
- [5] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses Université Laval, 1981.
- [6] W. Feller. Diffusion processes in one dimension. *Transactions of the American Mathematical Society*, 77(1) :1–31, 1954.
- [7] L. Galué, S. Kalla, and V. K. Tuan. Composition of erdélyi-kober fractional operators. *Integral Transforms and Special Functions*, 9(3) :185–196, 2000.
- [8] R. Gorenflo, Y. Luchko, and F. Mainardi. : Analytical properties and applications of the wright function. *fract. calc. appl. anal.* 2 (4), 383-414. 1999.
- [9] C. Hall. Anomalous diffusion in unsaturated flow : fact or fiction ? *Cement and Concrete Research*, 37(3) :378–385, 2007.
- [10] A. Kilbas. *Theory and applications of fractional differential equations*, elsevier, 204, 2006.
- [11] J. R. King. Approximate solutions to a nonlinear diffusion equation. *Journal of engineering mathematics*, 22(1) :53–72, 1988.

- [12] N. Lebedev. Special functions and their applications. dover pub. *Inc., Mineola, New York*, 1972.
- [13] Ł. Płociniczak. Approximation of the erdélyi-kober operator with application to the time-fractional porous medium equation. *SIAM journal on applied mathematics*, 74(4) :1219–1237, 2014.
- [14] Ł. Płociniczak. Analytical studies of a time-fractional porous medium equation. derivation, approximation and applications. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 24(1-3) :169–183, 2015.
- [15] L. F. Richardson. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 110(756) :709–737, 1926.
- [16] G. B. Scaling. self-similarity, and intermediate asymptotics, cambridge texts in applied mathematics. 14, 1996.
- [17] L. I. Sedov. *Similarity and dimensional methods in mechanics*. CRC press, 1993.

ملخص

في هذه المذكرة نحن مهتمون بمعادلة المواد المسامية الكسرية.

$$\partial^\alpha t u(x, t) = (u^m(x, t)u_x(x, t))_x, \quad 0 < \alpha < 1.$$

حيث نقدم بعض الخصائص المثيرة للاهتمام التي تحدد الرابط بين هذه المعادلة وبعض الوظائف الخاصة الأخرى. نتحدث أيضا عن التشابه الذاتي لمعادلة المواد المسامية. نحن مهتمون أيضا بعامل إيرديلي-كوبر ونثبت نتائج تقريبيه لمعادلتنا. وأخيرا، بحثنا عن بعض الحلول التقريبية لمعادلة المواد المسامية الكسرية.

الكلمات المفتاحية: معادلة المواد الكسرية، التشابه الذاتي، عامل إيرديلي-كوبر، التقريب.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'équation des milieux poreux fractionnaire.

$$\partial^\alpha t u(x, t) = (u^m(x, t)u_x(x, t))_x, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Nous présentons certaines propriétés intéressantes qui définissent le lien de cette équation avec d'autres fonctions spéciales, nous parlons aussi de l'auto-similarité de l'équation des milieux poreux. Puis, nous nous intéressons à l'opérateur d'Erdélyi-Kober en présentant certaines de ses propriétés et en démontrant les résultats de l'approximation de notre équation par cet opérateur. Enfin, nous avons cherché quelques solutions approchées pour l'équation des milieux poreux fractionnaire.

Mots-Clés : Equation des milieux poreux fractionnaire, auto-similarité, opérateur d'Erdélyi-Kober, Approximation.

Abstract

This research focuses on the fractional porous media equation.

$$\partial^\alpha t u(x, t) = (u^m(x, t)u_x(x, t))_x, \quad 0 < \alpha < 1.$$

We present some interesting properties that define the link of this equation with other special functions. We also talk about the self-similarity of the porous media equation. We are interested in the Erdélyi-Kober operator by presenting some of its properties and demonstrating the results of approximating our equation with this operator. Finally, we sought some approximate solutions for the fractional porous media equation.

Keywords: Fractional porous media equation, self-similarity, Erdélyi-Kober operator, approximation.

تم بحمد الله وتوفيقه

﴿ الحمد لله الذي له ما في السماوات وما في الأرض وله الحمد في الآخرة وهو الحكيم الخبير ﴾

صدق الله العظيم

[سبأ: 1]

"الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات"