*REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE*
*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHESCIENTIFIQUE*
*UNIVERSITE MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI - BBA*

**FACULTE DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES**
**DEPARTEMENT DE L'électromécanique**
**N° :**

**DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIE**
**FILIERE :Electromécanique**
**OPTION : Electromécanique**

**Mémoire présenté pour l'obtention**

**Du diplôme de Master Académique**

**Par :**

BOUCHERIT Mouhamed
BOUDRAA Wissam

**Intitulé**

# Comparaison des approches analytiques et des volumes finis pour la prédiction de la densité des pertes d'énergie dans les matériaux magnétiques

**Soutenu devant le jury composé de :**

| | | |
|---|---|---|
| **Pr. KESSAL** Abdelhalim | Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi - BBA | Président |
| **Dr. BELGASMI** Ibtissem | Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi - BBA | Rapporteure |
| **Dr. HAMMOUCHE** Ali | Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi - BBA | Co-rapporteur |
| **Pr. HAMIMID** Mourad | Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi - BBA | Examinateur |

**Année universitaire : 2024/ 2025**

# Remerciements

*Je remercie avant tout الله Tout-Puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'Il nous a accordées tout au long de ces années d'études, et qui nous ont permis d'atteindre cet objectif.*

"الحمد والشكر لله"

*Au terme de ce travail, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.*

*Nous remercions tout d'abord nos encadrants, Dr. BELGASMI Ibtissem et Dr. HAMMOUCHE Ali pour leur disponibilité, leurs conseils éclairés et leur accompagnement constant tout au long de ce projet. Leur expertise et leur exigence scientifique ont été une source précieuse d'apprentissage et d'enrichissement.*

*Nous tenons également à remercier l'ensemble des enseignants du département d'électromécanique pour la qualité de l'enseignement dispensé au cours de notre formation.*

*Nos sincères remerciements vont aussi à nos familles, pour leur soutien moral, leur patience et leurs encouragements inconditionnels durant toutes ces années d'études.*

*Enfin, nous adressons une pensée reconnaissante à nos amis et camarades de promotion pour les échanges constructifs, l'entraide et les bons moments partagés.*

*Merci à tous et à toutes*

# Dédicaces de Mohamed

*À mes chers parents, pour leur amour inconditionnel, leurs sacrifices silencieux, et leur soutien indéfectible tout au long de mon parcours.*

*À mes frères et sœurs, pour leur présence rassurante et leurs encouragements constants.*

*À mes enseignants et encadrants, pour leur patience, leurs conseils précieux et leur dévouement à transmettre le savoir.*

*À mes amis fidèles, pour les moments partagés, les mots de réconfort et l'entraide sincère.*

*Je vous dédie ce travail, modeste fruit d'efforts, avec tout mon respect et ma gratitude*

*Mohamed Boucherit*

# Dédicaces de Wissam

*Je dédie ce mémoire, avec toute ma gratitude et mon affection :*

***À mes parents et particulièrement ma mère,*** *pour leur affection inconditionnelle, leurs sacrifices et leur soutien de chaque instant. Vous êtes et resterez ma plus grande force.*

***À mon mari****, pour son amour, sa patience, son soutien infaillible et sa confiance indéfectible en moi, et sa famille bien sûr pour leur accueil chaleureux, leur bienveillance*

***À mon frère et ma sœur.***

***À mes professeurs****, pour leur accompagnement, leur rigueur et la richesse de leur enseignement qui ont largement contribué à ma formation.*

***À mes amis****, pour leur aide précieuse, leur écoute et leur présence tout au long de ce parcours.*

*À chacun de vous, je dis merci, du fond du cœur.*

*Boudraa Wissam*

# *Résumé*

Ce mémoire vise à étudier le comportement hystérétique des matériaux ferromagnétiques et à comprendre les mécanismes physiques sous-jacents, tels que le déplacement et la réorientation des parois de domaines magnétiques. Il aborde les notions fondamentales comme le moment magnétique, les champ H et B, ainsi que les différentes classes de matériaux magnétiques. Les propriétés des boucles d'hystérésis et les pertes associées (hystérésis et courants de Foucault) sont analysées. Trois modèles sont comparés : le modèle phénoménologique de Preisach, le modèle physique de Jiles-Atherton et le modèle énergétique basé sur la minimisation de l'énergie. L'objectif est de mieux modéliser les phénomènes magnétiques pour optimiser les dispositifs.

**Mots clés** : *Magnétisme, matériaux ferromagnétique, cycle d'hystérésis, model de Preisach, model Jiles-Atherton, model énergétique, domaines magnétiques, pertes magnétique, équations de maxwell, modélisation du comportement magnétique.*

# ملخص

تهدف هذه المذكرة الى دراسة السلوك الهستيري للمواد المغناطسية الحديدية وفهم الاليات الفيزيائية المسؤولة عنه ، مثل حركة وتغير اتجاه جدران المجالات المغناطسية ، تم تحليل مفاهيم اساسية كالعزم المغناطيسي و الحقول والانواع المختلفة للمواد المغناطسية كما تناولت المذكرة خصائص الحلقات الهستيرية ومصادر الخسائر المرتبطة بها ( خسائر الهيستريسيس خسائر التيارات الدوامية ) ، ثم تم عرض ثلاثة نماذج رئيسية لمحاكاة الظاهرة نموذج بريساخ ، نموذج جايلز والنموذج الطاقوي المبني على مبدا الطاقة الدنيا ، تم توضيح مزايا وقيود كل نموذج من حيث الدقة القدرة التنبؤية وقابلية التضمين في الحسابات العددية ،تعتمد هذه الدراسة على ربط النظرية و التطبيق بهدف تحسين تصميم واستخدام المواد المغناطسية في الانظمة الكهرومغناطسية ،

**الكلمات المفتاحية:** مغنطة ، المواد المغناطسية الحديدية ، الحلقات الهيسترية ، نموذج بريساخ ، نموذج جايلز ، النموذج الطاقوي ،المجالات المغناطسية ،الخسائر المغناطسية ، معادلات ماكسويل ، نمذجة السلوك المغناطيسي.

# Abstract

This thesis aims to study the hysteretic behavior of ferromagnetic materials and understand the underlying physical mechanisms, such as domain wall movement and reorientation. It explores key magnetic concepts including the magnetic moment, fields H and B, and the classification of magnetic materials. The hysteresis loop characteristics and associated losses (hysteresis and eddy current losses) are also

addressed. The work presents and compares three major models: the phenomenological Preisach model, the physical Jiles-Atherton model, and the energy-based model relying on energy minimization. The overall goal is to enhance magnetic modeling for improved design and control of electromagnetic devices

**Keywords**: *Ferromagnetic materials, hysteresis loops, Preisach model, Jiles-Atherton, model Energy-based model, magnetic domains, magnetic losses, maxwell's equations, magnetic behavior modeling*

## *Table des matières*


Résumé ..... 5
Introduction Générale ..... - 1 -
1. Physique du magnétisme ..... - 4 -
Introduction ..... - 4 -
1.1. Notion de magnétisme ..... - 4 -
1.1.1. Origine du Magnétisme ..... - 4 -
1.1.1.1. Moment magnétique Orbital : ..... - 5 -
1.1.1.2. Moment magnétique de Spin : ..... - 5 -
1.1.1.3. Le moment magnétique total : ..... - 5 -
1.2. Grandeurs magnétiques : ..... - 6 -
1.3. Classification des matériaux du point de vue magnétique : ..... - 7 -
1.3.1. Les matériaux diamagnétiques : ..... - 7 -
1.3.2. Les matériaux paramagnétiques : ..... - 8 -
1.3.3. Les matériaux ferromagnétiques : ..... - 8 -
1.4. La Structure en domaines des matériaux ferromagnétiques : ..... - 10 -
1.4.1. Les domaines de Weiss : ..... - 10 -
1.4.1.1. L'énergie d'échange : ..... - 11 -
1.4.1.2. L'énergie dipolaire (énergie magnétostatique) : ..... - 11 -
1.4.1.3. L'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline : ..... - 12 -
1.4.1.4. L'énergie de Zeeman : ..... - 12 -
1.4.1.5. L'énergie magnéto élastique : ..... - 13 -
1.4.2. Les parois de domaines : ..... - 13 -
1.4.2.1. Caractéristiques des parois : ..... - 14 -
1.5. Mécanisme d'aimantation et cycle d'hystérésis : ..... - 14 -
1.5.1. Processus de première aimantation : ..... - 14 -
1.5.2. Le cycle d'hystérésis : ..... - 15 -
1.5.2.1. Définition : ..... - 15 -
1.5.2.2. Types de cycle d'hystérésis : ..... - 16 -
1.6. Classification des matériaux ferromagnétiques : ..... - 16 -
1.6.1. Matériaux doux : ..... - 16 -
1.6.2. Matériaux durs : ..... - 17 -
1.7. Origins physiques des pertes : ..... - 17 -
1.7.1. Les pertes par courant de Foucault : ..... - 18 -

1.7.2. Pertes par hystérésis statique et dynamique ..... - 18 -
1.8. Méthodes de caractérisation des matériaux ferromagnétiques : ..... - 19 -
1.8.1. Mesures magnétiques : ..... - 19 -
1.8.1.1. Techniques de mesure magnétique normalisées ..... - 19 -
A. Cadre d'Epstein ..... - 20 -
B. Circuit torique ..... - 20 -
C. Cadre à bande unique (SST) ..... - 21 -
Conclusion ..... - 22 -
2. Modélisation du comportement hystérétique des matériaux magnétiques ..... - 24 -
Introduction ..... - 24 -
2.1. Le développement des modèles de l'hystérésis : ..... - 24 -
2.2. Présentation des modèles hystérésis : ..... - 25 -
2.2.1. Le modèle de Preisach : ..... - 26 -
2.2.1.1. Interprétation géométrique du modèle ..... - 27 -
2.2.1.2. Représentation équivalente : ..... - 28 -
2.2.1.3. Propriétés du modèle : ..... - 29 -
2.2.1.4. Détermination de la fonction de distribution ρ (α, β) : ..... - 29 -
2.2.1.5. Avantages : ..... - 30 -
2.2.1.6. Inconvénient : ..... - 30 -
2.2.2. Le modèle de Jiles-Atherton : ..... - 30 -
2.2.2.1. Définition : ..... - 30 -
2.2.2.2. L'aimantation anhystérétique : ..... - 30 -
2.2.2.3. L'aimantation : ..... - 31 -
2.2.2.4. Identification des paramètres : ..... - 32 -
2.2.3. Modèle énergétique : ..... - 33 -
2.2.3.2. La densité totale d'énergie ..... - 33 -
2.2.3.3. Modèle énergétique statique ..... - 34 -
3.1.1. Effet des paramètres ..... - 35 -
Conclusion ..... - 37 -
3. Modélisation numérique de l'électromagnétisme ..... - 40 -
Introduction ..... - 40 -
3.2. Modélisation et formalisation électromagnétique ..... - 40 -
3.2.1. Equations de Maxwell ..... - 41 -
3.2.2. Loi de Faraday ..... - 41 -
3.2.3. Théorème d'Ampère ..... - 42 -
3.2.4. Théorème de Gausse ..... - 43 -
3.2.5. Loi de conservation du champ d'induction magnétique ..... - 44 -

3.2.6. Lois constitutives du milieu ..... - 45 -
3.2.7. Induction et champ électrique ..... - 45 -
3.2.8. Induction et champ magnétiques ..... - 46 -
3.3. Les conditions aux limites ..... - 46 -
3.4.1. Le modèle électrostatique ..... - 47 -
3.4.2. Le modèle électrocinétique ..... - 48 -
3.4.3. Le modèle magnétostatique ..... - 48 -
3.4.3.1. Le modèle magnétostatique scalaire (Approche Coulombienne) ..... - 48 -
3.4.3.2. Le modèle magnétostatique vectoriel (Approche Ampérienne) ..... - 49 -
3.4.4. Le modèle magnétodynamique ..... - 49 -
3.4.4.1. Formulation magnétodynamique T- ϕ ..... - 50 -
3.4.4.2. Formulation magnétodynamique A-V ..... - 50 -
3.5. Outils numériques ..... - 51 -
3.5.1. Méthode des Différences Finies (M.D.F) [12] ..... - 51 -
3.5.2. Méthode des Eléments Finis (M.E.F) [12] ..... - 52 -
3.5.3. La Méthode Des Volumes Finis ..... - 53 -
3.5.3.1. Discrétisation MVF avec un maillage rectangulaire ..... - 54 -
3.5.4. Validation De La Méthode Des Volumes Finis ..... - 55 -
3.6. Méthodes analytiques (SEMI ANALYTIQUE) ..... - 56 -
3.6.1. Méthodologie appliquée : ..... - 57 -
3.6.1.1. Une technique de sous-domaine 2D pour le champ magnétique ..... - 57 -
3.6.1.2 Discrétisation du problème en sous-domaines ..... - 58 -
3.6.1.3. Équations aux dérivées partielles gouvernantes en coordonnées cartésiennes - 58 -
3.6.1.4 Conditions aux limites ..... - 59 -
3.6.1.5. Résolution d'un système linéaire ..... - 60 -
A. Solution générale en coordonnées cartésiennes ..... - 61 -
B. Solution générale ..... - 62 -
Conclusion ..... - 63 -
4. Application et validation ..... - 65 -
Introduction ..... - 65 -
4.1 Organigramme de traitement du problème ..... - 65 -
4.1.1. Introduction des données ..... - 66 -
4.1.2. Processus de calcul ..... - 66 -
4.1.3. Visualisation des résultats ..... - 67 -
4.3. Résultats de simulation ..... - 70 -
4.3.1. Comportement linéaire ..... - 70 -
4.3.2. Comportement non linéaire ..... - 73 -

4.4. Cycle d'hystérésis.....- 77 -
Conclusion.....- 80 -
Conclusion Générale.....- 82 -
Références.....- 83 -
ANNEXES.....- 87 -
ANNEXE 1.....- 88 -
ANNEXE 2.....- 88 -

## *Table des figures*

**Figure 1-1** : Moments magnétiques atomiques orbital et de spin. - 5 -
**Figure 1-2 :** Evolution de l'aimantation (M) en fonction du champ magnétique appliqué (H) pour un matériau diamagnétique et évolution de la susceptibilité (χ) en fonction de la température (T). - 8 -
**Figure 1-3** : Evolution de l'aimantation (M) en fonction du champ magnétique appliqué (H) pour un matériau paramagnétique et évolution de la susceptibilité (χ) en fonction de la température (T). - 8 -
**Figure 1-4 :** Classification magnétique des matériaux. - 10 -
**Figure 1-5** : Comportement des domaines : (a) en l'absence d'un champ magnétique extérieur, (b) en présence d'un champ magnétique extérieur - 10 -
**Figure 1-6** : Présentation des types de parois. - 13 -
**Figure 1-7** : Présentation d'une paroi de Bloch à 180°. - 13 -
**Figure 1-8** : courbe de première aimantation (OA) d'un matériau ferromagnétique et cycle d'hystérésis (ABCDEFA) de ce matériau. - 14 -
**Figure 1-9** : Cycle d'hystérésis pour les matériaux ferromagnétiques doux. - 17 -
**Figure 1-10** : Cycle d'hystérésis pour les matériaux ferromagnétiques durs - 17 -
**Figure 1-11** : Courants de Foucault dans un noyau magnétique. - 18 -
**Figure 1-12** : Courants induits microscopiques lors du déplacement de la paroi de Bloch. - 19 -
**Figure 1-13** : Schéma du circuit magnétique [Ab]. - 20 -
**Figure 1-14** : circuit magnétique quelconque et circuit torique ouvert [Laure Arbenz]. - 21 -
**Figure 1-15** : Schéma de principe du SST et de la mesure sur tore [Laure Arbenz]. - 21 -
**Figure 2-1:** illustration du cycle élémentaire (a) et du triangle de Preisach - 27 -
**Figure 2-2:** Définition du cycle élémentaire et du plan de Preisach en fonction de $Hc$ et $Hi$. - 28 -
**Figure 2-3:** Saut brusque de parois sous l'action d'un champ extérieur. - 31 -
**Figure 2-4:** Déformation réversible d'une paroi sous champ extérieur. - 32 -
**Figure 2-5 :** Effets des paramètres sur le cycle d'hystérésis produit par le **ME**. - 37 -
**Figure 3-1**: Schématisation d'un problème magnétodynamique - 50 -
**Figure 3-2** : Exemple de maillage pour le cas unidimensionnel - 52 -
**Figure 3-3** : Un domaine d'étude discrétisé en Elément finis - 53 -
**Figure 3-4** : maillage du domaine d'étude - 53 -
**Figure 3-5**: maillage d'un domaine avec une description d'un volume fini. - 54 -
**Figure 3-6:** comparaison entre la méthode analytique et la méthode numérique - 56 -
**Figure 3-7 :** Cadre d'Epstein. - 57 -
**Figure 3-8** : Sous-domaines de cadre Epstein - 59 -
**Figure 3-9 :** Conditions aux limites à l'interface de deux surfaces - 60 -
**Figure 4-1** : Géométrie de dispositif étudié. - 69 -
**Figure 4-2** : Représentation de ¼ de géométrie étudiée. - 70 -
**Figure 4-3:** Illustration du maillage sur tous les domaines. - 70 -
**Figure 4-4** : (**a)** Distribution de potentiel vecteur magnétique dans le dispositif complet par PDETOOL**. (b)** Répartition de l'induction magnétique ***B*** dans le dispositif complet par PDETOOL. - 71 -
**Figure 4-5** : (**a).** Distribution de $A$ obtenue par FVM**. (b).** Distribution de $A$ obtenue par PDETOOL. - 72 -
**Figure 4-6: a.** Répartition de ***B*** obtenu par PDETOOL**. b.** Répartition de ***B*** obtenu par FVM. - 73 -

**Figure 4-7: (a) :** Distribution de A dans les premiers instants. **(b) :** Distribution de A dans l'instant 5ms. **(c) :** Distribution de A dans l'instant 15ms. ..... - 74 -
**Figure 4-8: (*a*)** Axe de visualisons de A **(b)** Evolution de A dans les axes '***x***' et '***y***' ..... - 75 -
**Figure 4-9 : (a) :** Distribution de A dans l'instant 5ms. **(b) :** Distribution de A dans l'instant 15ms. ..... - 76 -
**Figure 4-10** : Evolution de ***B*** dans les axes '***x***' et '***y***' ..... - 76 -
**Figure 4-11.** Les endroits choisis au milieu matériel et les cycles d'hyéstérisis associés. . - 77 -
**Figure 4-12** : Induction magnétique et champ magnétique dans les endroits choisis..... - 78 -
**Figure 4-13** : Cycles d'hyéstérisis avec une densité $J=1.10^6 A/m^2$ **et** $J=3.10^6 A/m^2$..... - 78 -
**Figure 4-14** : **C**hamp magnétique avec une densité $J=1.10^6 A/m^2$ **et** $J=3.10^6 A/m^2$. ..... - 79 -
**Figure 4-15 :** Induction magnétique avec une densité $J=1.10^6 A/m^2$ **et** $J=3.10^6 A/m^2$..... - 79 -
**Figure 4-16** : Perméabilité absolue avec une densité $J=1.10^6 A/m^2$ **et** $J=3.10^6 A/m^2$. ..... - 80 -

## *Liste des tableaux*

**Tableau 1-1** : Caractéristiques des différents types de matériaux. ..... - 9 -
**Tableau 1-2** : Les méthodes de caractérisation des matériaux ferromagnétiques ..... - 22 -
**Tableau 2-1** : Bref historique sur le développement des modèles d'hystérésis**.** ..... - 25 -
**Tableau 2-2** : Propriétés physique des paramètres du modèle de Jiles-Atherton..... - 33 -
**Tableau 2-3** : la signification physique des paramètres..... - 35 -
**Tableau 4-1** : Tableau des paramètres du modèle. ..... - 69 -

# Introduction Générale

# *Introduction Générale*

Dans un contexte mondial caractérisé par une évolution technologique fulgurante, les matériaux magnétiques s'imposent comme des éléments fondamentaux dans de nombreux domaines industriels et systèmes électrotechniques avancés. Qu'il s'agisse de moteurs électriques à haute performance, de transformateurs, de dispositifs de stockage d'énergie ou de systèmes de communication modernes, le comportement magnétique de ces matériaux conditionne directement l'efficacité énergétique et la fiabilité de ces équipements. Parmi les phénomènes magnétiques les plus déterminants, l'**hystérésis magnétique** occupe une place centrale, traduisant la réponse non linéaire, dissipative et dynamique des matériaux ferromagnétiques soumis à des champs variables dans le temps.

Cette recherche s'inscrit dans une démarche scientifique rigoureuse visant à explorer, modéliser et simuler le comportement hystérétique de ces matériaux, en s'appuyant sur les fondements de la physique du magnétisme, des modèles mathématiques avancés, et des techniques de simulation numérique de haute précision. L'étude mobilise les **équations de Maxwell** comme cadre théorique global décrivant les interactions électromagnétiques, tout en intégrant des modèles d'hystérésis reconnus, notamment le **modèle énergétique**, reconnu pour sa capacité à représenter fidèlement les comportements non linéaires et dynamiques liés aux cycles de magnétisation.

Le contenu de cette étude s'articule autour de trois axes majeurs et complémentaires :

1. **Les fondements physiques du magnétisme** : ce premier axe explore l'origine microscopique du magnétisme, à travers l'analyse des moments magnétiques atomiques, des interactions d'échange responsables de l'alignement collectif dans les matériaux ferromagnétiques, ainsi que la classification détaillée des matériaux magnétiques (diamagnétiques, paramagnétiques, ferromagnétiques, ferrimagnétiques). Il met également en lumière les mécanismes d'aimantation, les pertes énergétiques associées aux cycles d'hystérésis, et les implications pratiques sur les performances des dispositifs.
2. **La modélisation mathématique de l'hystérésis** : cette partie présente une étude comparative des principaux modèles d'hystérésis tels que les modèles de **Preisach**, **Jiles-Atherton** et surtout le **modèle énergétique**, qui est privilégié dans ce travail pour sa capacité à intégrer les effets de saturation, de coercitivité et de rémanence à travers une formulation basée sur les bilans énergétiques. Le modèle énergétique offre une représentation cohérente de la dissipation d'énergie magnétique, tout en étant compatible avec les méthodes numériques de résolution.
3. **La simulation numérique et validation expérimentale** : enfin, la dernière partie du travail est consacrée à l'implémentation numérique du modèle

énergétique à l'aide de la **méthode des volumes finis (FVM)**, dans le but de simuler la distribution spatiale des champs magnétiques au sein d'un dispositif de mesure de type **cadre d'Epstein**. Les résultats obtenus sont comparés à des données expérimentales ainsi qu'aux simulations issues du logiciel **FEMM** (Finite Element Method Magnetics), dans le but de valider la robustesse du modèle proposé et son applicabilité dans des cas réels.

Ce travail ambitionne donc de construire un **cadre méthodologique intégré** reliant la théorie magnétique, la modélisation mathématique et la simulation numérique, afin d'apporter une contribution concrète à l'optimisation des matériaux magnétiques pour les systèmes électriques de nouvelle génération. Il s'inscrit également dans une dynamique plus large de transition énergétique, en proposant des outils adaptés à la conception de dispositifs plus performants, particulièrement dans les domaines des énergies renouvelables et des réseaux électriques intelligents.

# Chapitre 01 :

# Physique du magnétisme

# 1. Physique du magnétisme

***Introduction***

Les matériaux magnétiques jouent un rôle fondamental dans la conception des dispositifs électromagnétiques modernes, en particulier dans les applications liées au génie électrique, à l'électrotechnique et aux systèmes de conversion d'énergie. La compréhension fine de leurs propriétés magnétiques — telles que la perméabilité, l'aimantation, la structure en domaines ou les pertes énergétiques — est indispensable pour leur modélisation et leur exploitation.

Ce premier chapitre introduit les notions physiques de base du magnétisme, en présentant les grandeurs magnétiques fondamentales, la classification des matériaux selon leur comportement magnétique, ainsi que les mécanismes d'aimantation. Il se conclut par une présentation des principales méthodes de caractérisation des matériaux ferromagnétiques.

## *1.1. Notion de magnétisme[1]*

Le **magnétisme** est l'une des forces fondamentales de la nature et fait partie du domaine plus large de l'**électromagnétisme**. Ce phénomène est lié à l'interaction des charges électriques en mouvement, telles que les électrons, avec les champs magnétiques qu'elles génèrent.

Le magnétisme est responsable de nombreux phénomènes observables dans la nature et joue un rôle central dans une grande variété d'applications technologiques, notamment dans les secteurs industriels, la physique, l'électronique et les télécommunications. Il est étroitement lié à l'électricité, car ces deux phénomènes font partie d'une même théorie unifiée : le champ **électromagnétique.**

### 1.1.1. Origine du Magnétisme

Le magnétisme provient des mouvements des charges électriques. Lorsqu'un électron se déplace autour du noyau de l'atome (mouvement orbital) ou effectue une rotation sur lui-même (spin), il génère un champ magnétique. Ces courants microscopiques créent des moments magnétiques qui, lorsqu'ils sont organisés de manière spécifique dans un matériau, forment des champs magnétiques macroscopiques. Par exemple, dans les matériaux ferromagnétiques comme le fer, les spins des électrons sont généralement alignés, créant ainsi un champ magnétique global.

Une des caractéristiques majeures du magnétisme est le **moment magnétique**, une grandeur vectorielle qui décrit l'intensité du champ magnétique généré par des particules ou des plus tard, qui a formulé les équations de Maxwell[2], régissant les phénomènes électromagnétiques et liant le magnétisme à l'électricité.

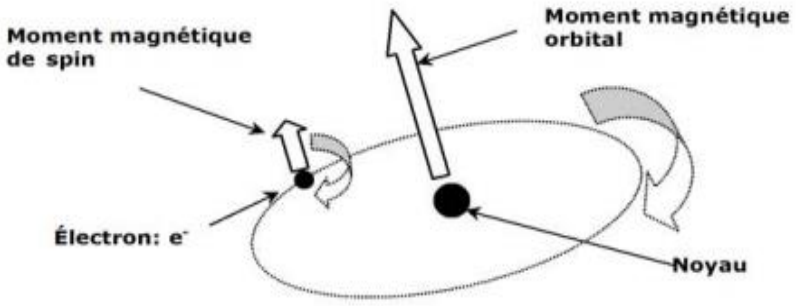



**Figure 1-1** : Moments magnétiques atomiques orbital et de spin.

*1.1.1.1. Moment magnétique Orbital :*

L'électron, portant une charge (e), effectue un mouvement orbital circulaire à une fréquence de (n) rotations par seconde. Ce mouvement peut alors être assimilé à un courant électrique (i). Ce courant, circulant dans une boucle dont la trajectoire coïncide avec l'orbite de l'électron (voir Figure 1.1), celui qui donne un « **moment magnétique orbital** » noté : $\overrightarrow{M_0}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M_0}} = \pi r\ 2\ i\ \vec{n} \qquad (1\text{-}1)$$

Où :

r : est le rayon de l'orbite.

$\vec{n}$ : est la normale orientée à la surface de la spire.

*1.1.1.2. Moment magnétique de Spin :*

En plus de son mouvement autour du noyau, l'électron tourne aussi sur lui-même, ce qu'on appelle le spin (voir figure 1.1). Ce mouvement génère un « **moment magnétique de spin** », qui est une propriété typiquement quantique.

$$\overrightarrow{M_S} = \frac{e.h}{2.m.\pi} \qquad (1\text{-}2)$$

Où :

e : la charge de l'électron.

h : Constant de de Planck normalisée (6,62607015. $10^{-34}$ J.s)

m : la masse de l'électron (9.1094· $10^{-31}$kg).

*1.1.1.3. Le moment magnétique total :*

Le moment magnétique total de l'atome est la somme des moments orbitaux et des moments de spin de ses électrons périphériques.

$$\overrightarrow{M_T} = \overrightarrow{M_o} + \overrightarrow{M_s} \qquad (1\text{-}3)$$

### *1.2. Grandeurs magnétiques :[3]*

Dans l'étude des phénomènes magnétiques, la théorie magnétique utilise principalement deux grandeurs fondamentales pour caractériser le champ magnétique : il s'agit du **champ magnétique[4]** noté **H**, et de **l'induction magnétique[5]** notée **B**. Ces deux grandeurs permettent de décrire, chacune à leur manière, l'intensité et l'effet du champ magnétique dans un milieu donné.

Lorsqu'on considère le cas du vide, la relation entre **H** et **B** devient particulièrement simple, car elle est linéaire et proportionnelle. Cette relation est exprimée par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{B} = \mu \cdot \boldsymbol{H} \qquad (1\text{-}4)$$

Où :

$\mu_0$ : est la perméabilité magnétique du vide, une constante physique fondamentale.

Lorsque le champ magnétique traverse un matériau, la relation entre l'induction magnétique **B** et le champ magnétique **H** devient plus complexe que dans le vide. En effet, le comportement magnétique du matériau influence directement cette relation. Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, on peut toujours exprimer une relation linéaire entre **B** et **H**, mais cette fois-ci une nouvelle grandeur vectorielle, appelée **aimantation magnétique** (**M**), est introduite pour décrire la réponse du matériau au champ électromagnétique, donné par :

$$\boldsymbol{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v} \qquad (1\text{-}5)$$

Où :

$\partial\mathcal{M}$ : est la somme des moments magnétiques atomiques.

$\partial$v : l'élément de volume considéré.

Ainsi, l'aimantation M est introduite dans l'équation qui lie les grandeurs **B** et **H** de la manière suivante :

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \qquad (1\text{-}6)$$

**La perméabilité magnétique :[6]**

Par définition, la perméabilité magnétique **μ** est égale pour les matériaux isotropes, au quotient **B** / **H**. C'est un critère de qualité pour les substances qui s'aimantent facilement. La perméabilité relative μr est plus utilisée

$$\boldsymbol{\mu_r} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu_0}} \qquad (1\text{-}7)$$

Où :

$\boldsymbol{\mu_0}$ : est la perméabilité du vide.

Dans un milieu magnétique, le champ magnétique **B**, l'excitation magnétique **H** et l'aimantation **M**, sont liés par l'une des équations de Maxwell (dans le système des unités internationales Eqt (6))

Dans certains matériaux, la relation entre **H** et **M** est linéaire, $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, ce qui permet d'écrire en utilisant

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1+\chi)\, \mathbf{H} = \mu_0\, \mu_r \mathbf{H} = \mu\, \mathbf{H}$$

$\chi$ est la susceptibilité magnétique du matériau. Le comportement de l'aimantation dépend alors de la nature des matériaux, par exemple les matériaux paramagnétiques ($\mu_r \geq 1$), les matériaux diamagnétiques ($\mu_r \leq 1$). Pour les matériaux ferromagnétiques et ferrimagnétiques, il en va tout à fait différemment. La relation entre le champ magnétique et l'aimantation devient non linéaire et ($\mu_r >>> 1$ pour les matériaux ferromagnétiques).

### *1.3.Classification des matériaux du point de vue magnétique :*

En considérant que l'électron se comporte comme un dipôle et qu'il possède donc un moment magnétique intrinsèque, toutes les substances aimantées peuvent être considérées comme des dipôles magnétiques.

À partir de leur comportement magnétique, une classification des matériaux peut être réalisée en se basant sur la susceptibilité. Ils sont regroupés en trois grandes catégories des matériaux et sont décrits en dessous.

#### *1.3.1. Les matériaux diamagnétiques :*

Les matériaux diamagnétiques n'ont pas de moment magnétique permanent, car les électrons de leurs atomes se regroupent par paires, annulant leurs moments magnétiques.

Ces matériaux ne se magnétisent qu'en présence d'un champ magnétique extérieur, induisant un moment magnétique opposé au champ, ce qui entraîne leur répulsion par les aimants. Leur susceptibilité magnétique est négative et faible, généralement autour de ($-10^{-6}$).

Des exemples incluent le bismuth, certains métaux comme l'Or et le cuivre, ainsi que des substances organiques comme le benzène.

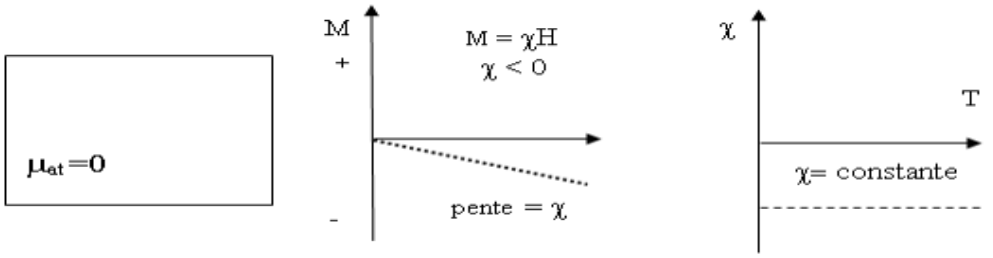



**Figure 1-2 :** Evolution de l'aimantation (M) en fonction du champ magnétique appliqué (H) pour un matériau diamagnétique et évolution de la susceptibilité (χ) en fonction de la température (T).

### *1.3.2. Les matériaux paramagnétiques :*

Les matériaux paramagnétiques ne possèdent pas d'aimantation spontanée mais, sous un champ magnétique extérieur, ils acquièrent une aimantation dirigée dans le même sens que ce champ appliqué. Cela peut être expliqué par le fait qu'en l'absence d'un champ magnétique extérieur, les moments magnétiques atomiques d'un matériau paramagnétique sont dans un état désordonné donnant une aimantation macroscopique nul.

Lorsqu'un champ est appliqué les moments s'alignent avec la direction de champ appliqué. La susceptibilité magnétique, en cas de paramagnétisme, est positive, en général.

Assez faible et dépendante de la température (χ=c/T, C'est la constante de Curie).

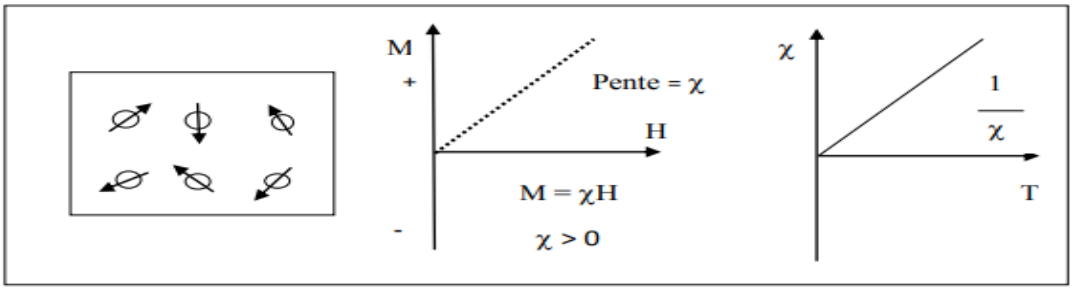



**Figure 1-3** : Evolution de l'aimantation (M) en fonction du champ magnétique appliqué (H) pour un matériau paramagnétique et évolution de la susceptibilité (χ) en fonction de la température (T).

### *1.3.3. Les matériaux ferromagnétiques :*

Les substances ferromagnétiques sont celles capables de développer une aimantation significative, bien plus intense que celle des matériaux diamagnétiques ou paramagnétiques. Parmi les principales substances ferromagnétiques, on trouve le fer, le nickel, le cobalt, le gadolinium, ainsi que leurs alliages et certains composés.

Ces matériaux présentent une aimantation élevée, mais contrairement aux autres substances, celle-ci n'est pas strictement proportionnelle au champ magnétique

appliqué. L'aimantation augmente et atteint une limite de saturation lorsque l'intensité du champ **H** devient suffisante.

De plus, l'aimantation d'un matériau ferromagnétique ne dépend pas uniquement du champ magnétique extérieur, mais aussi de son historique, notamment des traitements magnétiques, thermiques et mécaniques qu'il a subis.

Nous examinerons en détail cette catégorie dans les sections suivantes. Pour compléter la classification, il reste à mentionner deux autres types de matériaux : les matériaux antiferromagnétiques et les ferrimagnétiques.

Les matériaux antiferromagnétiques présentent un comportement macroscopique similaire à celui des matériaux paramagnétiques, bien qu'ils ne réagissent pas de la même manière aux variations de température. Quant aux matériaux ferrimagnétiques, leur comportement macroscopique est similaire à celui des matériaux ferromagnétiques.

On rassemble dans le tableau (1.1) ci-dessus, les principales caractéristiques des différents types de matériaux :

**Tableau 1-1** : Caractéristiques des différents types de matériaux.

| Type | Susceptibilité, $\chi$ | $\chi$ en fonction de la température | Exemples |
|---|---|---|---|
| **Diamagnétique** | $\sim -10^{-6}$ | Indépendant | Cu, Ag, Au |
| **Paramagnétique** | $\sim +10^{-3}$ | $\chi = C/T$ (Loi du Curie).<br>$\chi = C/(T-T_C)$ (Loi du Curie-Weiss). | Na, Al |
| **Ferromagnétique** | Très grand et positif | $\chi \to \infty$ | Fe, Co, Ni |

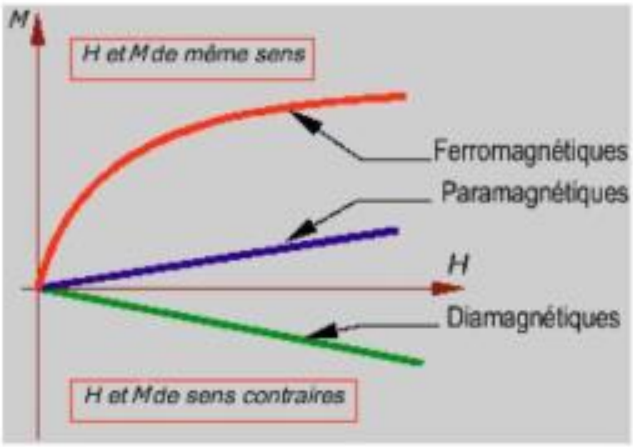



**Figure 1-4 :** Classification magnétique des matériaux.

## *1.4. La Structure en domaines des matériaux ferromagnétiques :*

### 1.4.1. Les domaines de Weiss :

En 1907, Pierre Weiss [7]introduit le concept de **domaines magnétiques**, également appelés **« domaines de Weiss »**, pour expliquer l'existence d'un moment magnétique global mesurable même en absence de champ magnétique extérieur. Selon cette hypothèse, un matériau ferromagnétique est divisé en régions appelées *domaines*, chacune étant aimantée à saturation, mais orientée différemment de ses voisines, de façon à annuler le champ magnétique macroscopique.

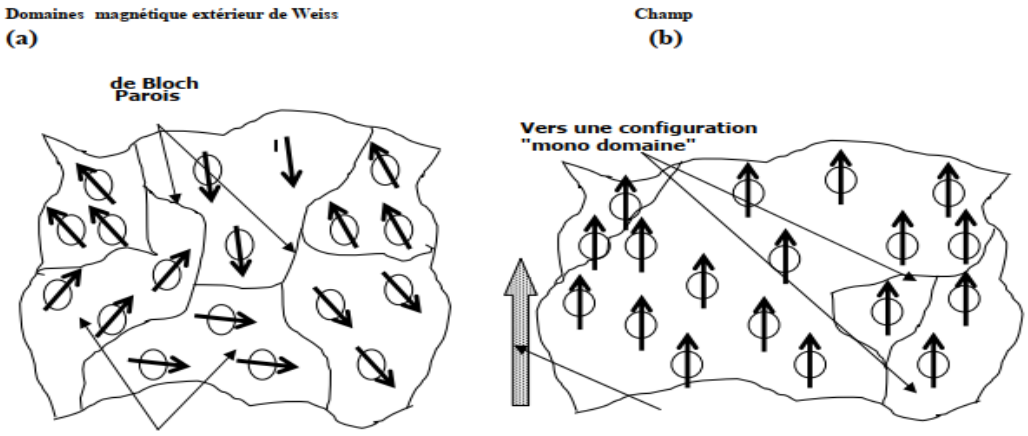



**Figure 1-5** : Comportement des domaines : (a) en l'absence d'un champ magnétique extérieur, (b) en présence d'un champ magnétique extérieur

La première mise en évidence de ces domaines fut indirecte, notamment à travers l'effet **Barkhausen[8]** observé en 1919 [], qui révéla la discontinuité de l'aimantation lors de l'application d'un champ externe. Ce n'est qu'en 1931 que des observations directes ont été réalisées grâce à la méthode de décoration par poudre magnétique, développée par **Bitter**, suivie par les travaux de **Harnos** et **Thiessen**. Plus tard, en

1935, **Landau[9]** et **Lifshitz** proposèrent un cadre théorique rigoureux des domaines, jetant ainsi les bases de la **théorie moderne du magnétisme.**

Du point de vue thermodynamique, l'arrangement des atomes dans un matériau obéit au principe fondamental selon lequel **« *tout système physique tend vers un état d'énergie minimale* ».** Ainsi, dans un cristal ferromagnétique, la formation des domaines est une réponse naturelle à la nécessité de minimiser les différentes énergies intervenant dans le système.

Les énergies sont les suivantes :

*1.4.1.1. L'énergie d'échange :[10]*

L'énergie d'échange est une énergie d'origine microscopique qui découle de la mise en commun partielle des trajectoires des électrons périphériques entre deux atomes voisins. Elle traduit l'interaction quantique entre spins électroniques et joue un rôle fondamental dans l'apparition de l'ordre magnétique. Sa valeur correspond à l'énergie nécessaire pour perturber cet état coopératif. Cette énergie favorise l'alignement parallèle des moments magnétiques des atomes adjacents, contribuant ainsi à la formation de domaines magnétiques cohérents à l'échelle microscopique.

L'expression globale de l'énergie d'échange par unité de volume est alors :

$$E_{ech} = -\frac{\mu_0}{2} \sum n_{ij}\, m_i\, m_j \qquad (1\text{-}8)$$

Avec :

$m_i\, m_j$ : Les moments magnétiques des atomes voisins.

$n_{ij}$ : Coefficient qui détermine la tendance d'orientation des moments magnétiques. Si $n_{ij}$ est positif, les moments s'alignent parallèlement ; s'il est négatif, ils s'alignent antiparallèlement.

*1.4.1.2. L'énergie dipolaire (énergie magnétostatique) :*

L'énergie dipolaire résulte des interactions à longue portée entre les moments magnétiques au sein d'un matériau. Contrairement à l'énergie d'échange, qui agit localement pour aligner les moments magnétiques des atomes voisins, l'énergie dipolaire cherche à réduire l'aimantation globale du matériau en favorisant des configurations dans lesquelles les champs produits par les moments magnétiques se compensent partiellement.

Chaque moment magnétique agit comme une petite source de champ magnétique (un dipôle), capable d'influencer les autres moments présents dans son voisinage élargi. Cette interaction se traduit par une énergie potentielle défavorable

lorsque les moments sont fortement alignés sur de longues distances, car elle génère un champ externe élevé.

Il s'écrit :

$$H_d = -\mathrm{N} \cdot \mathrm{M} \qquad (1\text{-}9)$$

Avec :

**N** : est le tenseur des coefficients démagnétisant sans dimensions.

*1.4.1.3. L'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline :*

Les moments magnétiques des matériaux interagissent avec leur environnement atomique par le couplage spin-orbite, ce qui dépend des symétries du cristal. Certaines directions cristallographiques sont plus favorables à l'alignement magnétique, créant des directions de facile aimantation. L'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline quantifie l'effort nécessaire pour orienter l'aimantation dans une direction différente de celle privilégiée. Pour des matériaux comme le fer (système cubique centré), l'énergie d'anisotropie dépend de la structure cristalline et de la distance entre atomes, rendant certaines directions plus énergétiquement favorables pour l'alignement des moments magnétiques.

Cette énergie prend la forme :

$$\mathbf{E_{mc}} = \iiint (\boldsymbol{K_1}\ (\boldsymbol{m_x^2\, m_y^2} + \boldsymbol{m_y^2\, m_z^2} + \boldsymbol{m_z^2\, m_z^2}) + \boldsymbol{K_2}\ \boldsymbol{m_x^2\, m_y^2\, m_z^2})\boldsymbol{dV} \qquad (1\text{-}10)$$

*1.4.1.4. L'énergie de Zeeman :[11]*

C'est l'interaction entre un moment magnétique (comme celui d'un atome ou d'un électron) et un champ magnétique externe appliqué, elle s'exprime comme :

$$\mathbf{E_z} = -\boldsymbol{\mu_0}\, \mathbf{M} \cdot \mathbf{H_{ext}} \qquad (1\text{-}11)$$

Où :

$\boldsymbol{\mu_0}$ : Perméabilité du vide.

**M** : vecteur d'aimantation.

$\mathbf{H_{ext}}$: Champ magnétique externe.

*1.4.1.5. L'énergie magnéto élastique :*

L'énergie d'échange provient du partage d'un ou plusieurs électrons entre deux atomes voisins, ce qui entraîne l'alignement de leurs moments magnétiques microscopiques. Dans une tôle ferromagnétique, en raison de la structure cristalline des atomes, la distance entre chaque atome est uniforme, ce qui favorise le partage d'électrons entre les atomes les plus proches. Seule une contrainte mécanique peut modifier l'espace séparant deux atomes, influençant ainsi le partage des électrons.

La variation de distance entre les atomes affecte l'état énergétique et l'anisotropie. L'énergie magnéto élastique représente l'énergie mécanique nécessaire pour modifier ces échanges d'électrons dans le matériau**.**

### *1.4.2. Les parois de domaines :*

Les régions magnétiques au sein d'un matériau sont délimitées par des frontières appelées parois. La zone de transition entre ces régions peut être modélisée par une paroi de Bloch.

Ces parois définissent une région magnétique caractérisée par un changement d'orientation de l'aimantation. On distingue principalement deux types de parois :

- ***Les parois à 180° : qui séparent deux domaines de Weiss avec une différence d'angle d'aimantation de 180°.***
- ***Les parois à 90° : qui séparent deux domaines où cet angle est de 90°.***

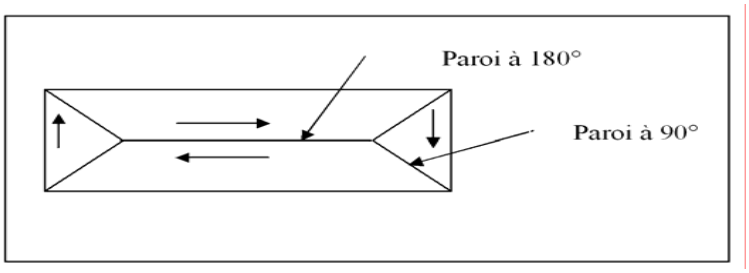



**Figure 1-6** : Présentation des types de parois.

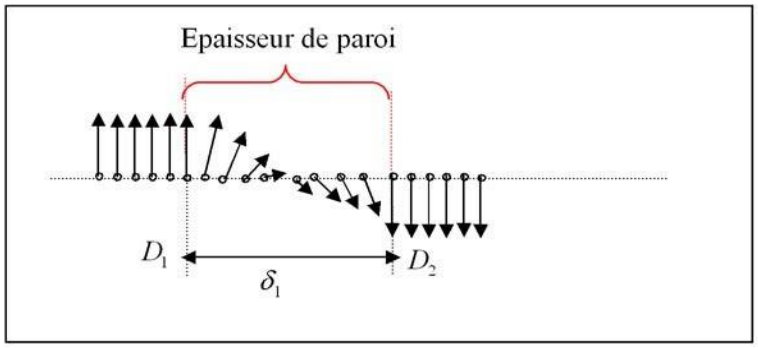



**Figure 1-7** : Présentation d'une paroi de Bloch à 180°.

*1.4.2.1. Caractéristiques des parois :*

Si **a** est la distance inter atomique, et **n** le nombre de moments magnétiques dans la paroi d'épaisseur **δ**.

- ***Energie de paroi :***

$$W_{ech} = \frac{1}{2} E . m_i{}^2 \frac{\pi^2}{n} \qquad (1\text{-}12)$$

- ***Epaisseur de paroi :***

$$\delta = n \cdot a \qquad (1\text{-}13)$$

## *1.5. Mécanisme d'aimantation et cycle d'hystérésis :*

Sous l'effet d'un champ magnétique, les domaines d'un matériau ferromagnétique s'alignent progressivement avec le champ. À saturation, un seul domaine reste orienté dans sa direction. La forme des courbes ***B(H)*** ou ***M(H)*** dépend de la mobilité des parois de Bloch et des caractéristiques du champ appliqué.

### *1.5.1. Processus de première aimantation :*

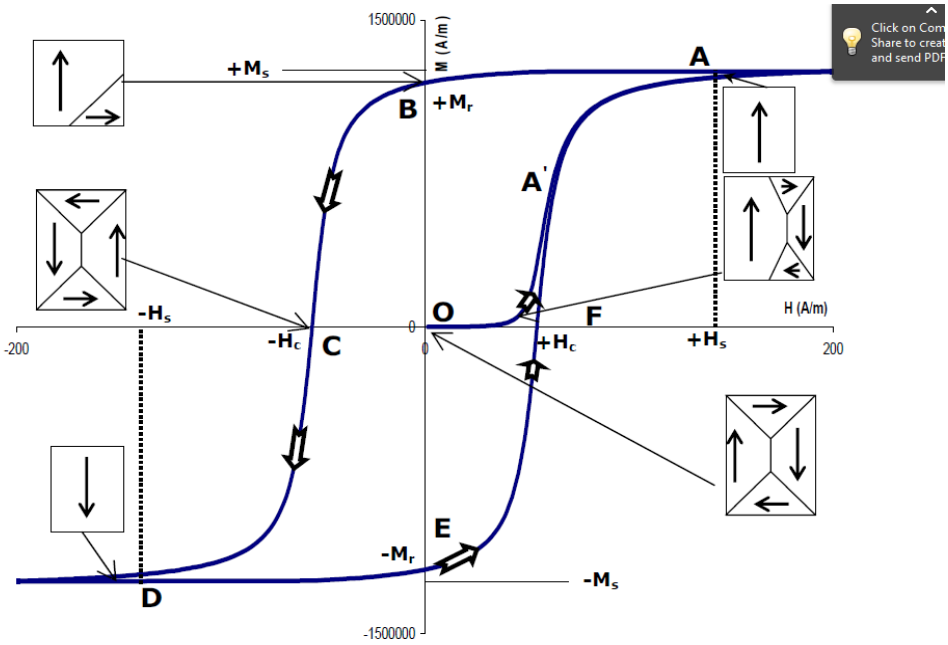



**Figure 1-8** : courbe de première aimantation (OA) d'un matériau ferromagnétique et cycle d'hystérésis (ABCDEFA) de ce matériau.

On considère un échantillon de matériau ferromagnétique initialement désaimanté. Ce matériau contient des défauts au sein de son réseau cristallin, (par exemple : des dislocations, des inclusions, joints de grains…etc.

Lors de l'aimantation de l'échantillon, trois processus différents peuvent se succéder en fonction de la valeur de l'excitation extérieure imposée.

- ***Pour de faibles valeurs de l'excitation :***

  Les domaines dont l'aimantation est orientée dans une direction proche de celle du champ appliqué tendent à s'étendre aux dépens des autres. Ce phénomène résulte du déplacement des parois de domaine, qui se poursuit jusqu'à ce qu'elles rencontrent des défauts du matériau ou qu'elles se déforment. Si les parois sont déjà fixées sur ces défauts, le processus reste réversible et n'entraîne pas de pertes magnétiques. La portion de la courbe représentant ce comportement est appelée **zone de Rayleigh**, située entre les points O et A (segment HM' de la figure Fig.I.8).

- ***Pour des valeurs intermédiaires de l'excitation :***

  Les parois de domaine continuent de se déplacer afin d'agrandir les régions dont l'aimantation est alignée avec le champ magnétique appliqué. Ce processus se prolonge jusqu'à ce que le matériau soit entièrement dominé par un seul domaine, celui dont l'orientation est la plus proche de celle du champ (portion située entre les points A' et A sur la figure Fig.I.8). À ce stade, la disparition ou la formation de parois devient nécessaire, ce qui implique un coût énergétique important et un caractère irréversible du phénomène.
  Lorsque les parois se libèrent des obstacles internes (défauts), cela provoque des changements soudains du flux magnétique appelés **sauts de Barkhausen**. Ces variations brusques induisent des courants de Foucault localisés, qui dissipent de l'énergie sous forme de chaleur.

- ***Pour des excitations élevées :***

  Le mécanisme final mis en jeu est la rotation des moments magnétiques, un phénomène réversible. Une fois que l'échantillon devient mono domaine, l'aimantation continue d'augmenter par la rotation progressive des moments vers la direction du champ appliqué, jusqu'à atteindre l'aimantation à saturation, valeur maximale propre au matériau. Cette propriété dépend notamment de la température.

À ce niveau, nous avons décrit entièrement la première aimantation (partie **OA** de la figure Fig.I.8). Le cycle ou le diagramme ainsi obtenu est appelé **cycle d'hystérésis** ou **courbe d'aimantation.** Ce dernier dépend de la mobilité des parois de Bloch qui sont fonctions des énergies déjà définies et du champ appliqué.

### *1.5.2. Le cycle d'hystérésis :[12]*

#### *1.5.2.1.Définition :*

C'est la courbe de réponse des matériaux qui représente le retard de la variation de L'aimantation magnétique par rapport au champ appliqué.

La forme du cycle d'hystérésis dépend de plusieurs facteurs : la nature du matériau, la manière dont l'aimantation se fait, la géométrie de l'échantillon, mais

aussi les conditions de fonctionnement (comme la fréquence ou le flux magnétique). On distingue :

- **L'hystérésis statique** : observée à très basse fréquence (quasiment en régime lent). Elle dépend surtout de la qualité du matériau et de son historique magnétique.
- **L'hystérésis dynamique** : visible à haute fréquence, elle résulte de phénomènes comme la diffusion et la vitesse de déplacement des domaines magnétiques. Elle est responsable de pertes énergétiques supplémentaires appelées **pertes dynamiques**.

*1.5.2.2.Types de cycle d'hystérésis :*

On distingue principalement deux types :

- **Le cycle majeur** correspond à une variation complète du champ magnétique, allant de la saturation maximale dans un sens à la saturation maximale dans le sens opposé.
  Il représente l'ensemble des états possibles (**H, M**) que peut prendre le matériau. Ce cycle montre que le comportement magnétique d'un matériau dépend non seulement de la valeur actuelle du champ H, mais aussi de son historique (c'est-à-dire, ce qu'il a subi avant).
- **Le cycle mineur**, quant à lui, est obtenu lorsque le champ appliqué reste inférieur au champ de saturation. Il peut inclure un ou plusieurs petits sauts d'aimantation, liés :

  -Soit à un repositionnement des parois magnétiques,

  -Soit à leur déplacement entre des zones de piégeage.

Les cycles mineurs sont utiles pour étudier localement le comportement magnétique d'une petite partie du matériau sans impliquer toute sa complexité.

### *1.6. Classification des matériaux ferromagnétiques :[10]*

L'observation du cycle d'hystérésis permet de regrouper les matériaux ferromagnétiques en deux catégories :

#### *1.6.1. Matériaux doux :*

Leurs critères sont :

-Haute perméabilité.

- Très grande pureté, peu de défauts, peu de tensions internes.

- Energie d'anisotropie aussi faible que possible.

Grâce à leur faible champ coercitif, ces matériaux présentent de faibles pertes par hystérésis, ce qui les rend idéaux pour les noyaux de transformateurs, les machines électriques et les têtes de lecture magnétiques. C'est le cas notamment des alliages

fer-silicium à faible teneur en silicium, des permalloys (*fer-nicke*l) et des certaines ferrites.

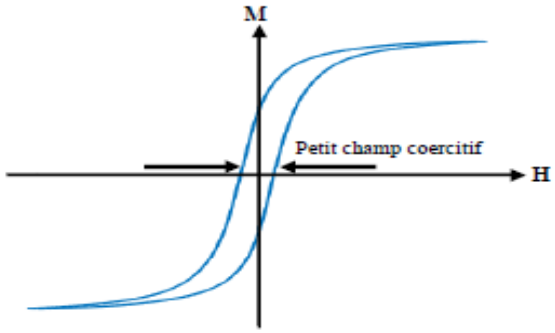



**Figure 1-9** : Cycle d'hystérésis pour les matériaux ferromagnétiques doux.

### *1.6.2. Matériaux durs :*

Sont caractérisés par :

- Présence d'un fort champ coercitif.

- Grande énergie d'anisotropie magnéto-cristalline.

- Forme allongée des particules magnétiques pour profiter d'une anisotropie de forme.

Ce type de matériaux se retrouve dans les aimants permanents ainsi que dans les supports des dispositifs d'enregistrement magnétique. Parmi ceux présentant ces propriétés, on peut citer les alnicos, issus d'alliages ternaires à base de fer et d'aluminium (Fe-Al), ainsi que la ferrite de baryum.

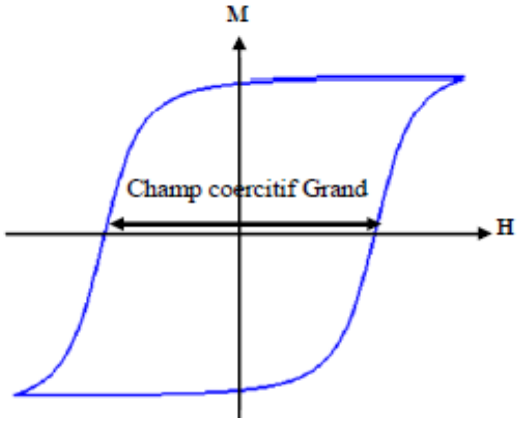



**Figure 1-10** : Cycle d'hystérésis pour les matériaux ferromagnétiques durs

### *1.7.Origins physiques des pertes :*

Lorsqu'un système à base de matériaux magnétiques soumis à un champ d'excitation variable, il est le siège d'une dissipation des pertes appelées pertes magnétiques ou pertes fer.

Dans la littérature, nous rencontrons les pertes magnétiques en deux types : Les pertes par hystérésis (déplacement de parois) et les pertes par courant de Foucault.

### *1.7.1. Les pertes par courant de Foucault [13] :*

En régime dynamique, en plus des pertes qui trouvent leurs origines dans le processus statique et les courants induits microscopiques, il existe aussi des courants macroscopiques qui se développent dans l'ensemble du system et directement liés à la conductivité du matériau considéré. En régime d'induction variable, le matériau magnétique est le siège de courants induits qui circulent autour des lignes de flux magnétique. La circulation de ces courants qui se fait selon des sections droites dans le noyau (~~Figure II 3~~) s'oppose à la pénétration du flux et génère des pertes appelées pertes par courants de Foucault.

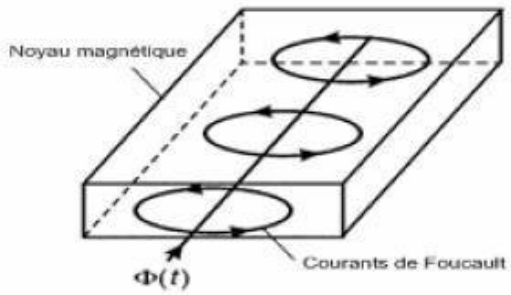



**Figure 1-11** : Courants de Foucault dans un noyau magnétique.

### *1.7.2. Pertes par hystérésis statique et dynamique [14]*

Les pertes par hystérésis, qu'elles soient statiques ou dynamiques, sont liées à la génération de courants induits microscopiques lors des variations de l'aimantation, causées par le mouvement des parois de Bloch. En régime statique, ces pertes proviennent des déplacements discontinus des parois, qui sautent brusquement d'un site d'ancrage à un autre (pertes par hystérésis statique). En régime dynamique, lorsque la fréquence augmente, les déplacements deviennent plus continus, entraînant des pertes supplémentaires appelées pertes par excès. Ces mouvements entraînent des variations de flux magnétique à l'intérieur des domaines, générant ainsi des courants induits locaux au niveau des parois.

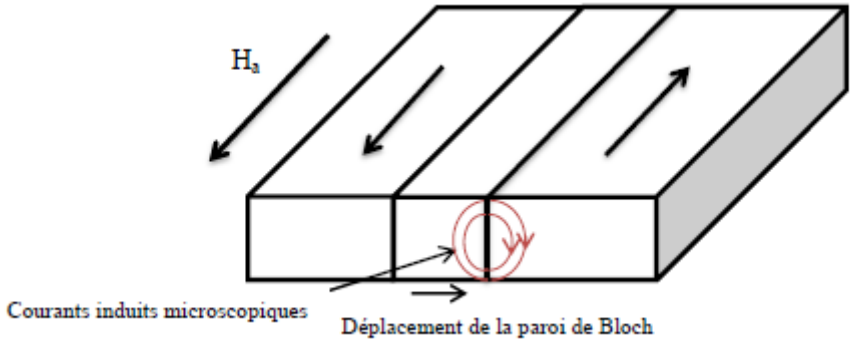



**Figure 1-12** : Courants induits microscopiques lors du déplacement de la paroi de Bloch.

Pour un cycle complet, le travail effectué par l'environnement extérieur pour parcourir un cycle au sein du matériau, vaut par unité de volume ($J/m^3$) :

$$\boldsymbol{W_{hys} = \oint H.dB} \qquad (1\text{-}14)$$

Les différentes pertes, qu'elles soient dues à l'hystérésis ou aux courants de Foucault, se traduisent à l'échelle macroscopique par la surface du cycle d'hystérésis. L'énergie dissipée est proportionnelle à cette surface, laquelle croît avec l'augmentation de la fréquence.

## *1.8. Méthodes de caractérisation des matériaux ferromagnétiques :*

Les méthodes de caractérisation des matériaux ferromagnétiques combinent des analyses magnétiques, structurales et thermiques pour évaluer leurs propriétés intrinsèques. Voici les principales approches :

### *1.8.1. Mesures magnétiques :*

La caractérisation des matériaux ferromagnétiques est essentielle pour comprendre leur comportement sous excitation magnétique. Elle permet de déterminer des grandeurs fondamentales telles que l'induction de saturation $B_s$, la coercivité Hc, la perméabilité, l'induction rémanente $B_r$, l'effet de la fréquence [IBT], ainsi que les pertes énergétiques. Ces mesures sont cruciales pour le dimensionnement des machines électriques, transformateurs, capteurs, etc.

Le choix de la méthode dépend du type de matériau (FeSi, FeNi, rubans amorphes…), de sa forme (tôle, ruban, poudre…), et des conditions de mesure (statique, dynamique, fréquence, température, etc.).

*1.8.1.1.Techniques de mesure magnétique normalisées*

### *A. Cadre d'Epstein [15]*

Le cadre d'Epstein est la méthode la plus répandue et normalisée (IEC 60404-2) pour tester les tôles magnétiques laminées. Il s'agit d'un circuit magnétique formé par quatre bobines disposées en carré, contenant des bandes de matériau testées.

- **Avantages** :
  - Circuit magnétique homogène (constitué uniquement de l'échantillon),
  - Très bonne reproductibilité,
  - Méthode normalisée dans l'industrie.
- **Inconvénients** :
  - Assemblage aux coins source d'erreurs (≈ 1%),
  - Nécessite plusieurs bandes bien préparées,

[I.E. Commission, "Magnetic materials-part 2 methods of measurement of the magnetic properties of electrical steel sheet and strip by means of an Epstein farme, IEC Stand., p60042,1996]

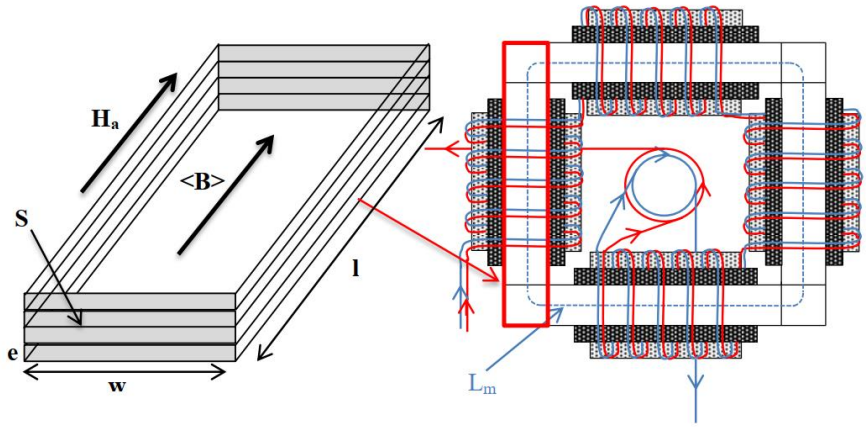



**Figure 1-13** : Schéma du circuit magnétique [Ab].

### *B. Circuit torique*

Le circuit torique (norme IEC 60404-4 et -6) est constitué d'un anneau magnétique enroulé d'un enroulement primaire et secondaire. Il est très adapté aux matériaux homogènes (FeNi, FeCo, rubans).

- **Avantages** :
  - Uniformité du champ H,
  - Aucune discontinuité géométrique,
  - Convient pour mesures précises (pertes, perméabilité…).
- **Inconvénients** :
  - Difficile à réaliser pour les matériaux rigides,
  - Enroulement parfois complexe (risque de cisaillement).

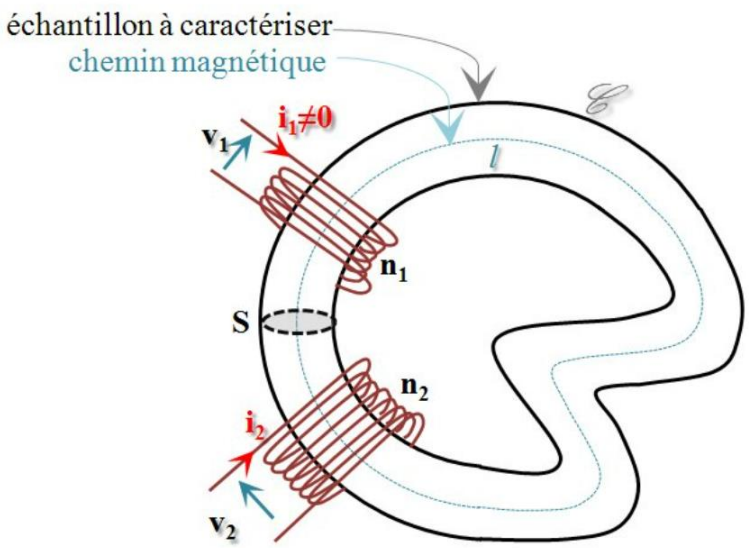



**Figure 1-14** : circuit magnétique quelconque et circuit torique ouvert [Laure Arbenz]

### *C. Cadre à bande unique (SST)*

Le SST (Single Sheet Tester) est une alternative au cadre Epstein, conforme à **IEC 60404-3**. Il utilise une seule bande de matériau insérée entre deux culasses formant un circuit magnétique.

- **Avantages** :
  - Un seul échantillon suffit,
  - Installation rapide,
  - Adapté aux tests industriels en série.
- **Inconvénients** :
  - Présence d'entrefer et hétérogénéité du circuit (culasses ≠ matériau),
  - Sensibilité à la géométrie et au positionnement,
  - Plus difficile à étalonner avec précision.

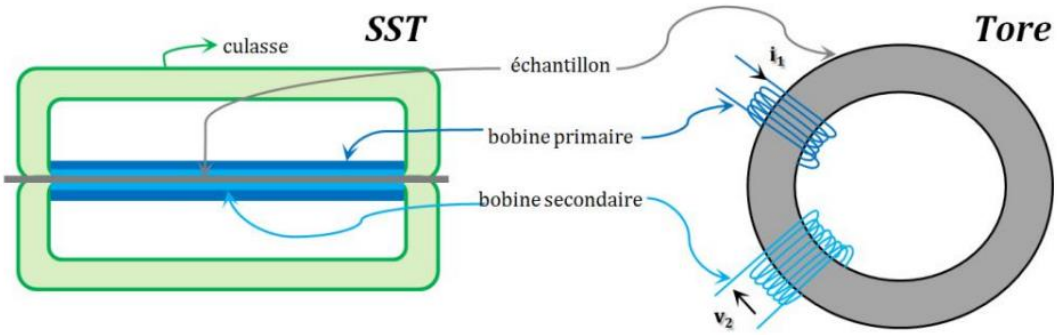



**Figure 1-15** : Schéma de principe du SST et de la mesure sur tore [Laure Arbenz]

**Tableau 1-2** : Les méthodes de caractérisation des matériaux ferromagnétiques

| Critère | Cadre d'Epstein | Circuit torique | Single Sheet Tester (SST) |
|---|---|---|---|
| **Norme** | IEC 60404-2, AFNOR NF EN 60404-2 | IEC 60404-4 (massif), IEC 60404-6 (feuilleté) | IEC 60404-3 |
| **Type d'échantillon** | Tôles empilées, 700 spires, bandes longues 280–320 mm | Rubans, poudres, tôles enroulées en anneau | Tôle unique de 500 mm entre deux culasses |
| **Homogénéité du champ magnétique** | Bonne sauf aux coins (zone d'assemblage) | Excellente (champ circulaire) | Moyenne (due aux culasses en matériau différent) |
| **Reproductibilité** | Très bonne si étalonné et recuit correct | Très bonne | Moyenne à bonne (sensibilité au positionnement) |
| **Préparation de l'échantillon** | Plusieurs bandes + recuit de détente obligatoire | Découpe circulaire + enroulement précis | Aucun traitement nécessaire, sauf surface plane |
| **Complexité d'utilisation** | Moyenne (normée, mais nécessite attention) | Élevée (enroulement délicat) | Simple et rapide (test industriel courant) |
| **Applications typiques** | Mesures normalisées pour Fe-Si, industrie | Recherche, matériaux avancés (FeNi, FeCo) | Contrôle qualité, production industrielle |
| **Avantages principaux** | Méthode de référence; cadre normalisé; homogénéité | Uniformité géométrique et magnétique; idéal pour rubans | Nécessite un seul échantillon; mise en œuvre facile |
| **Inconvénients** | Coins inhomogènes; recuit indispensable | Enroulement délicat; difficile avec tôles épaisses | Inhomogénéité magnétique due aux culasses |
| **Mesures possibles** | Boucle B(H), pertes, $B_s$, Hc | Idem + meilleure homogénéité H | Boucle B(H), mais sensible aux erreurs géométriques |

## *Conclusion*

Dans ce chapitre, nous avons abordé les notions fondamentales du magnétisme, les principales catégories de matériaux magnétiques, et plus particulièrement les matériaux ferromagnétiques largement utilisés en génie électrique. Cette étude a permis de mettre en évidence les propriétés essentielles que doivent présenter ces matériaux. Nous avons rappelé les concepts clés ainsi que les grandeurs physiques associées, en décrivant le mécanisme d'aimantation propre aux matériaux ferromagnétiques. Ces phénomènes ont été interprétés à travers la théorie de P. Weiss, selon laquelle un matériau ferromagnétique est constitué de domaines magnétiques élémentaires. Cette théorie permet de comprendre le processus d'aimantation et la dissipation d'énergie qui l'accompagne**.**

Le prochain chapitre, sera entièrement consacré à l'étude du phénomène de l'hystérésis magnétique à l'aide des modèles : Preisach, Jiles-Atherton et énergétique.

# Chapitre 02 :

# Modélisation du comportement hystérétique des matériaux magnétiques

# 2. Modélisation du comportement hystérétique des matériaux magnétiques

### *Introduction*

L'hystérésis magnétique est un phénomène physique fondamental observé dans les matériaux ferromagnétiques, et qui se manifeste par une dépendance du vecteur d'induction magnétique au champ magnétique, non seulement à sa valeur instantanée, mais aussi à son historique. Ce comportement non linéaire et à mémoire représente un enjeu crucial dans la modélisation et la simulation des systèmes électromagnétiques, tels que les transformateurs, les moteurs, les capteurs ou encore les dispositifs de stockage magnétique. L'étude du comportement hystérétique permet non seulement de mieux comprendre les mécanismes internes liés à la microstructure des matériaux, mais aussi d'améliorer la conception et la commande de systèmes électromécaniques. Toutefois, la complexité intrinsèque du phénomène, qui implique des effets irréversibles, des pertes énergétiques et des boucles fermées variables selon l'excitation, rend sa modélisation difficile et sujette à plusieurs approches théoriques.

Au cours des dernières décennies, plusieurs modèles ont été proposés pour représenter l'hystérésis magnétique de manière précise et adaptée à différentes applications. Parmi ceux-ci, des modèles analytiques peuvent représenter le cycle d'hystérésis. En revanche, vue la complexité du phénomène d'aimantation, plusieurs chercheurs ont essayé d'introduire divers modèles s'appuient sur des bases mathématiques et physiques pour but d'approcher le comportement magnétique en régimes dynamiques distinguent : le modèle de Jiles-Atherton (1984) [16], qui repose sur une base physique liée au comportement des domaines magnétiques ; le modèle de Preisach (1935), basé sur une description phénoménologique en termes d'hystérons ; et enfin, les modèles énergétiques de Hans Hauser (1994), qui s'appuient sur des principes thermodynamiques et variationnels.

Le but de ce chapitre est de présenter les différents modèles d'hystérésis des matériaux ferromagnétiques, en rappelant leurs avantages et leurs inconvénients. Nous concentrerons notre étude sur un modèle très apprécié. C'est donc le modèle énergétique.

### *2.1. Le développement des modèles de l'hystérésis :*

Les modèles décrivant l'hystérésis magnétique ont profondément évolué depuis les travaux fondateurs de James Alfred Ewing (1855-1935) [17], qui envisageait les dipôles magnétiques comme des moments libres de s'orienter sous l'effet des champs

externes et des interactions entre voisins, offrant ainsi une première explication qualitative et quantitative du phénomène d'hystérésis.

Par la suite, la description statistique des propriétés matérielles s'est imposée, notamment grâce aux avancées de la théorie quantique de Niels Bohr[18], qui a permis de mieux comprendre la microstructure des matériaux magnétiques et la dynamique des spins. L'étude des domaines magnétiques a ainsi conduit à des applications innovantes, telles que les bulles magnétiques et les films minces, essentielles dans les technologies de l'information. La recherche moderne s'est enrichie de modèles mathématiques et physiques sophistiqués, notamment à travers les travaux de P. Duhem, L.O. Chua, Y. Saito et M.L. Hodgdon[19], ainsi que le modèle statistique de Preisach, qui a connu un essor grâce aux contributions de nombreux chercheurs. Les modèles vectoriels, comme celui de Stoner-Wohlfarth[20], ont permis de mieux prendre en compte les propriétés directionnelles de l'aimantation.

Aujourd'hui, la recherche sur les matériaux magnétiques s'étend à des domaines variés, comme la biologie et les supraconducteurs, et vise à développer de nouveaux aimants permanents et alliages à large hystérésis. Les progrès en microscopie et en simulation numérique (méthodes des éléments finis, différences finies, etc.) permettent une modélisation précise des phénomènes non linéaires et de l'hystérésis, favorisant l'optimisation des matériaux magnétiques et leur intégration dans des applications industrielles, notamment dans les noyaux laminés anisotropes et les dispositifs à flux rotatif.

### *2.2. Présentation des modèles hystérésis :*

Dans la littérature, de nombreux modèles d'hystérésis ont été développés. Au fil du temps, ces modèles ont fait l'objet de diverses améliorations et adaptations afin d'en accroître les performances. Le choix d'un modèle approprié repose principalement sur sa précision, sa rapidité de calcul ainsi que sur la simplicité des données expérimentales nécessaires à l'identification de ses paramètres. Le tableau (2.1) présente une synthèse comparative des principales caractéristiques des modèles statiques et dynamiques, ainsi que leur capacité à être intégrés dans des codes de calcul.

**Tableau 2-1** : Bref historique sur le développement des modèles d'hystérésis**.**

| Année | Modèle |
|---|---|
| **1887** | Modèle de Rayleigh |
| **1897** | Modèle Duhem, Modèle de Frolich |
| **1916** | Modèle de P.Weiss et Freudenreich |
| **1927** | Modèle d'Ising : décrit le phénomène ferromagnétique à l'échelle microscopique, il Ne prend pas en compte l'effet de la température. |
| **1935- 1988** | Modèle Preisach-Mayergoyz basé sur le changement de commutateurs élémentaires. |
| **1947** | Modèle de (Stoner-Wohlfarth) utilisé dans la description des aimants permanents, et dans le domaine de l'enregistrement magnétique |
| **1970** | Modèle Chua et Stromsmoe |

| | |
|---|---|
| **1971** | Modèle Bouc présente une forme fonctionnelle pour donner une description mathématique de l'hystérésis, |
| **1977** | Modèle O'kelly basé sur une fonction exponentielle |
| **1978** | Modèle Newbury présente un modèle d'hystérésis avec la forme carrée |
| **1985** | Modèle Seigneur représente l'hystérésis, avec l'utilisation de série de Fourier |
| **1986** | Modèle Jiles et Atherton présentent un modèle dérivé des propriétés physiques, basé sur la théorie de Langevin et de Weiss. |
| **1988** | Modèle Hodgdon, Modèle Green et Gross présentent un modèle de l'hystérésis avec l'étude des harmoniques |
| **1993** | Modèle de Bobbio, est un modèle basé sur une analogie mécanique. |
| **1994** | Modèle énergétique de Hans Hauser basé sur la minimisation d'énergie |
| **1998** | Modèle de Raulet-Masson basé sur l'introduction d'un coefficient comportemental du matériau indépendant de la géométrie et de l'excitation. |
| **2000** | Kedous-Chevalier (Modèle "LS", 2000) |
| **2001** | Jiles-Szczyglowski |
| **2002** | Modèle chimique, basé sur L'approche thermodynamique. |

Parmi les nombreux modèles développés pour représenter le comportement hystérétique des matériaux ferromagnétiques, trois approches se distinguent particulièrement par leur fréquence d'utilisation et leur pertinence dans les recherches récentes : le modèle de Preisach, le modèle de Jiles-Atherton et le modèle énergétique (notamment celui proposé par Hans Hauser[21]).

Ces modèles sont largement employés pour prédire les pertes hystérétiques dans divers dispositifs électromagnétiques tels que les transformateurs, les machines électriques et les inductances, en tenant compte du comportement non linéaire et dissipatif des matériaux magnétiques.

Dans les paragraphes suivants, nous présenterons une étude théorique de ces modèles dans le but de choisir celui qui sera utilisé dans notre travail de modélisation.

### *2.2.1. Le modèle de Preisach :*

Le modèle de Preisach est aujourd'hui, le plus répandu des modèles d'hystérésis. Elaboré dans les années 30, il est considéré aux débuts comme un modèle physique de1'hystérésis. A présent, il est considéré et utilisé comme un outil mathématique efficace. Ce modèle est proposé par le physicien allemand Frederick Preisach [22] en 1935 pour décrire le phénomène de dissipation d'énergie par hystérésis. Dans ce modèle, un système physique hystérétique est décrit comme un ensemble de commutateurs magnétiques bistables dont la réponse non-linéaire présente une forme rectangulaire, appelée aussi hystéron. On affecte à chacun d'eux un cycle rectangulaire défini par une fonction appelée fonction ou densité de Preisach. Ces cycles élémentaires sont caractérisés par des seuils de commutation $\boldsymbol{\alpha p}$, et $\boldsymbol{\beta p}$ qui varient d'un commutateur à l'autre, définissant les champs de saturation $\pm H_s$.

L'approche fondamentale de ce modèle consiste à représenter le matériau magnétique comme une agrégation d'un très grand nombre de particules élémentaires,

appelées hystérons, qui disposent de deux états magnétiques possibles : **M**=+1 ou **M**=-1.

À chaque hystéron est associée une boucle d'hystérésis élémentaire, de forme rectangulaire et dissymétrique par rapport à l'origine, définie par une fonction $\boldsymbol{\varphi\alpha\beta}$ =±1. Ces cycles élémentaires sont caractérisés par deux champs, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ (avec $\boldsymbol{\alpha \geq \beta}$), appelés champs de basculement ou de commutation. Ces champs déterminent les valeurs du champ magnétique H pour lesquelles une transition irréversible s'opère, passant de l'état bas (**M**=-1) à l'état haut (**M**=+1), ou vice versa. La réponse globale du matériau est obtenue en agrégeant ces hystérons, chacune pondérée par un poids spécifique.

La modélisation selon Preisach nécessite la connaissance d'une fonction de distribution qui capture la totalité du comportement du matériau, notamment la courbe de première aimantation et le cycle majeur. Une fois cette fonction déterminée, il devient possible de prévoir toute réponse magnétique du matériau en fonction de l'excitation appliquée et de l'historique magnétique qu'il a traversé.

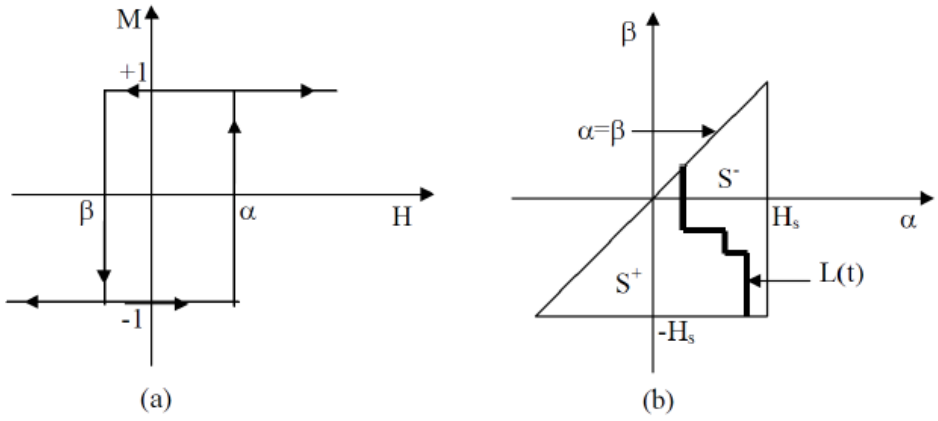



**Figure 2-1:** illustration du cycle élémentaire (a) et du triangle de Preisach

Soit $\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, cette fonction de distribution appelée aussi densité de Preisach. Elle est indépendante de l'état magnétique du matériau. L'aimantation **M(t)** résultant de l'application du champ **H** à l'instant t s'écrit dans le formalisme de Preisach :

$$\boldsymbol{M(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \rho\ (\alpha, \beta)\ \varphi\alpha\beta\ [\mathbf{H(t)}]\, d\alpha d\beta} \qquad (2\text{-}1)$$

Où :

-$\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ la densité de Preisach.

-$\boldsymbol{\varphi\alpha\beta}$ **[H(t)]** représente l'opérateur associé à l'hystéron élémentaire, $\boldsymbol{\varphi\alpha\beta}$ **[H(t)]**= ±1.

*2.2.1.1.Interprétation géométrique du modèle*

La densité de Priesach $\boldsymbol{\rho(\alpha, \beta)}$ caractérise le matériau. Nous avons vu qu'elle n'est pas définie que pour $\boldsymbol{\alpha \geq \beta}$. De plus, pour une certaine valeur du champ$\boldsymbol{H_s}$, le

matériau est saturé et tous les opérateurs du modèle ont la même aimantation (+1 ou 1 suivant le signe de $\boldsymbol{H_s}$).

Ainsi, la densité de Preisach présente les propriétés suivantes :

Elle est définie dans le domaine : $\boldsymbol{S}=\{\ \boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\beta}\ ; \boldsymbol{\beta} \geq -H_s,\ \boldsymbol{\alpha} \leq -H_s\}$. Le cycle majeur étant symétrique, la densité est symétrique par rapport à la droite $\alpha = \beta$. Le cycle majeur étant fermé, la densité est bornée. Le domaine $\boldsymbol{S}$ représente un triangle dans le plan cartésien $(\alpha o \beta)$ appelé plan de Preisach.

$\boldsymbol{S}$ est subdivisé en deux parties dont la forme dépend du temps :

- S+(t) contient tous les opérateurs $\hat{y}_{\alpha\beta}$ dans l'état +1.
- S- (t) contient tous les opérateurs $\hat{y}_{\alpha\beta}$ dans l'état -1.

La relation peut alors s'écrire :

$$\boldsymbol{M(t)} = \iint_{S^+(t)} \boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\ \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta} - \iint_{S^-(t)} \boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\ \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta} \quad (2\text{-}2)$$

Il apparaît clairement que l'aimantation M(t) dépend uniquement de la répartition du Domaine S, et plus précisément de la frontière **L(t),** séparant les domaines **S+(t)** et **S-(t).** Cette frontière contient l'histoire du matériau et évolue avec les variations de champ.

*2.2.1.2. Représentation équivalente :*

La densité de Preisach peut être exprimée de manière équivalente en fonction des variables α et β, ou bien à partir des grandeurs $H_C$ et $H_i$. En effet, les éléments constitutifs du modèle sont généralement assimilés à des particules magnétiques parfaites à mono-domaine, chacune étant caractérisée par un champ coercitif $H_C$ et soumise à un champ d'interaction $H_i$. Ce champ d'interaction s'oppose au champ de dissymétrie du cycle élémentaire rectangulaire propre à chaque particule. Les grandeurs$H_C$ et $H_i$.sont définies par le système et illustrées dans la figure (2.2).

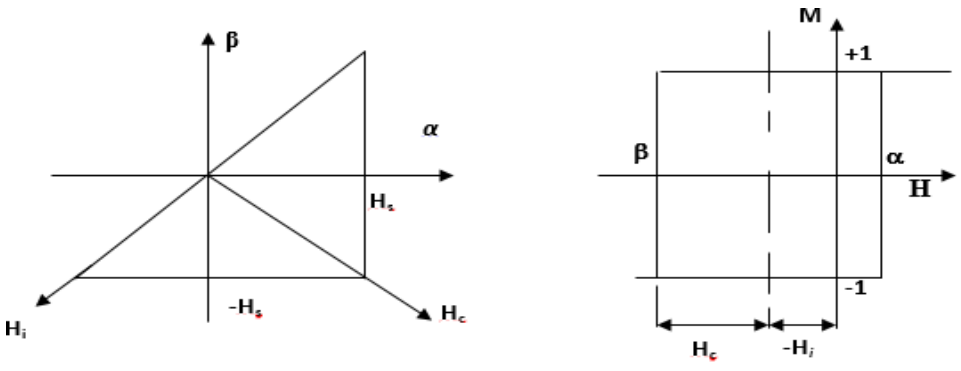



**Figure 2-2:** Définition du cycle élémentaire et du plan de Preisach en fonction de $H_c$ et $H_i$

$$\begin{cases} H_c = \frac{\alpha-\beta}{2} \\ H_i = \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases} \quad 2\text{-}3)$$

*2.2.1.3. Propriétés du modèle :*

- ***Symétrie :***

Les cycles d'hystérésis sont symétriques, pour valider cette propriété, on choisit

$$\rho\ (\alpha, \beta) = \rho\ (-\alpha, -\beta) \qquad (2\text{-}4)$$

- ***Désaimantation :***

Si à l'état saturé on applique une excitation alternative dont l'amplitude décroît Progressivement vers zéro, le modèle tend vers la configuration d'un état désaimanté.

- ***Propriété d'effacement :***

Le modèle scalaire de Preisach permet de calculer l'aimantation qui est une fonction scalaire dépendant des valeurs extrémales du champ excitateur appliqué. Les effets de valeurs extrémales antérieures peuvent être effacées par l'action de nouvelles valeurs extrémales supérieures. Cette propriété est appelée propriété d'effacement de l'histoire.

- ***Congruence des cycles mineurs :***

Si on considère le modèle par rapport à deux excitations différentes dans un premier temps puis qui tendent à osciller entre deux même valeurs H1 et H2, alors, les oscillations amènent le modèle à décrire des cycles mineurs fermés et congruents. Le cycle mineur de l'une et l'autre des excitations se déduisent par translation.

***2.2.1.4.Détermination de la fonction de distribution ρ (α, β) :***

La modélisation complète selon le schéma de Preisach nécessite en premier lieu la détermination de la fonction de distribution ρ(α, β). Pour l'obtenir à partir de données expérimentales, deux approches principales peuvent être envisagées :

- *Les méthodes numériques, qui reposent soit sur l'analyse de la courbe de première aimantation et de la branche descendante du cycle d'hystérésis principal (méthode de Biorci-Pescetti), soit sur l'exploitation des courbes de renversement du premier ordre (méthode de Mayergoyz), soit sur une discrétisation préalable de la fonction de distribution (Méthode des cycles centrés), ou avec la Méthode d'Everett.*
- *Les méthodes analytiques (Lorentz, Lorentz modifier, Gauss, Cauchy, ...) qui approximent directement sur la fonction de distribution, et qui s'appuient par exemple sur le cycle majeur.*

#### *2.2.1.5.Avantages :*

- *Le plus complet sur les plans mathématique et phénoménologique.*
- *Etudie le phénomène de saturation et la représentation des cycles d'hystérésis mineur et majeur.*
- *Le plus utilisé dans la modélisation des matériaux magnétiques.*

#### *2.2.1.6.Inconvénient :*

- *Le problème principal du modèle de Preisach réside dans la détermination de la fonction de distribution.*

### *2.2.2. Le modèle de Jiles-Atherton :*

Le modèle de Jiles-Atherton [16]propose une explication du phénomène d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques en se basant sur une approche physique. Il s'appuie principalement sur des principes énergétiques liés aux déplacements des parois de domaine à l'intérieur du matériau. Ce modèle est applicable aussi bien dans des conditions statiques que dynamiques.

#### *2.2.2.1. Définition :*

Le modèle de Jiles-Atherton (J-A) constitue un outil physique largement employé afin de modéliser les propriétés magnétiques des matériaux ferromagnétiques. Il intègre le phénomène d'hystérésis magnétique, qui traduit la dépendance de l'aimantation du matériau vis-à-vis de l'évolution du champ magnétique appliqué au cours du temps. Grâce à un ensemble d'équations mathématiques, ce modèle décrit de façon détaillée cette relation non linéaire et permet d'anticiper le comportement magnétique dans différentes configurations. Il représente ainsi un moyen efficace pour simuler et analyser la réponse magnétique de divers matériaux.

#### *2.2.2.2. L'aimantation anhystérétique :*

D'après la théorie de Langevin, on définit l'aimantation an hystérétique dans les matériaux ferromagnétiques par la relation suivante :

$$M_{an} = M_{sat}\left(\coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \left(\frac{a}{H_e}\right)\right) \qquad (2\text{-}5)$$

Avec :

$$H_e = H + \alpha M \qquad (2\text{-}6)$$

Où :

- $M_{sat}$ : est l'aimantation à saturation.
- $a$ : est un paramètre qui caractérise la pente de l'aimantation anhystérétique.
- $H$ : est le champ appliqué.
- $H_e$: est le champ effectif.
- α est le paramètre de couplage inter-domaines.

*2.2.2.3. L'aimantation :*

Pour modéliser précisément le processus d'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques, Jiles et Atherton ont divisé la magnétisation M en deux parties : une composante irréversible, appelée $M_{irr}$, et une composante réversible, nommée $M_{rev}$.

$$\boldsymbol{M}=M_{irr}+M_{rev} \qquad (2\text{-}7)$$

- ***Composante irréversible de l'aimantation :***

Tout d'abord, en considérant les parois de Bloch comme planes et rigides (voir figure 2.3), leur déplacement est soumis à un processus d'accrochage et de décrochage sur les sites d'ancrage. La quantité d'énergie dissipée lors de ce processus est ensuite calculée en supposant une densité uniforme de sites d'ancrage de même type.

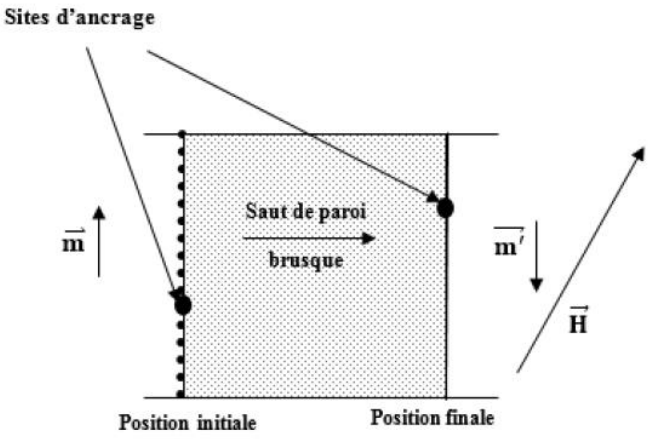



**Figure 2-3:** Saut brusque de parois sous l'action d'un champ extérieur.

L'expression de l'énergie magnétisante est déduite de la différence entre l'énergie correspondant au comportement anhystérétique et les pertes liées à l'ancrage des parois. Ainsi, après certains développements algébriques, la susceptibilité différentielle associée au processus irréversible d'aimantation peut être exprimée de la manière suivante :

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e}=\left(\frac{M_{an}-M_{irr}}{k\delta}\right) \qquad (2\text{-}8)$$

Où :

$k$ La constante est liée à la densité d'énergie moyenne d'ancrage des parois.

Le paramètre $\delta$ prend la valeur +1 quand $\frac{dH}{dt} > 0$ et la valeur -1 quand $\frac{dH}{dt} < 0$.

- ***Processus d'aimantation réversible :***

À présent, nous supposons que les parois peuvent se déformer au niveau des sites d'ancrage sous l'effet du champ appliqué (figure 2.4), ce qui introduit une nouvelle contribution au processus d'aimantation. Cette déformation des parois est ainsi liée au caractère réversible de l'aimantation.

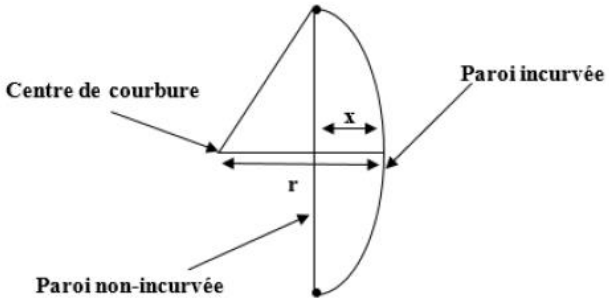



**Figure 2-4:** Déformation réversible d'une paroi sous champ extérieur.

Après quelques considérations énergétiques sur la déformation d'une paroi et pour. Les petits déplacements, Jiles et Atherton montrent que l'aimantation réversible est proportionnelle à la différence$M_{an} - M_{irr}$ .

$$M_{\boldsymbol{rev}} = \boldsymbol{c}(M_{an} - M_{irr}) \qquad (2\text{-}9)$$

Où $\boldsymbol{c}$ est un coefficient de réversibilité tel que $\in[0, 1]$.

- ***Aimantation totale :***

L'aimantation totale est la somme des composantes réversibles et irréversibles, alors elle est sous la forme :

$$M = (1 - c)M_{irr} + \boldsymbol{c}\, M_{an} \qquad (2\text{-}10)$$

Donc la formulation différentielle de l'aimantation est la suivante :

$$\frac{dM}{dH} = c\frac{dM_{an}}{dH} + (1 - c)\frac{(M_{an} - M_{irr})}{k\delta - \alpha(M_{an} - M_{irr})} \qquad (2\text{-}11)$$

*2.2.2.4. Identification des paramètres :*

Le modèle est entièrement défini par cinq paramètres, se sont :

**Tableau 2-2** : Propriétés physique des paramètres du modèle de Jiles-Atherton

| Paramètre | Propriétés physique |
|---|---|
| **c** | Le facteur de réversibilité caractérisant la composante réversible de l'aimantation. |
| **a** | Paramètre caractérisant la variation de Man en fonction de He |
| **k** | Coefficient d'épinglage représentant la densité des sites d'épinglage et caractérisant la largeur du cycle. |
| **α** | Le facteur de correction de Weiss représentant le couplage entre moments magnétiques. |
| $M_{sat}$ | L'aimantation spontanée à saturation du matériau |

### *2.2.3. Modèle énergétique :*

Ce modèle s'appuie sur des fondements physiques, notamment des approches énergétiques, en intégrant le comportement statistique des domaines magnétiques. Le terme « statistique » signifie ici que les aimantations des domaines sont réparties selon plusieurs directions $n_i$, influencées par des contributions anisotropes. L'idée centrale du modèle consiste à interpréter le processus d'aimantation comme un mécanisme de pilotage des domaines magnétiques, chacun possédant un moment magnétique propre. Le modèle repose sur la minimisation de la densité d'énergie totale — représentant l'état d'équilibre magnétique —, laquelle est composée de contributions réversibles et irréversibles, ainsi que des densités d'énergie associées au champ appliqué **H** et au champ de démagnétisation $H_d$.

Il est important de noter que ces différentes contributions énergétiques ne sont pas complètement indépendantes. Par exemple, le champ appliqué induit une aimantation, qui à son tour engendre une magnétostriction, provoquant ainsi des déformations internes et des contraintes mécaniques.

#### *2.2.3.2. La densité totale d'énergie*

Le modèle énergétique vise à déterminer l'état magnétique d'un matériau ferromagnétique en s'appuyant sur le principe de minimisation de la densité d'énergie totale $\boldsymbol{Wt}$ :

$$w_T = w_H + w_M \qquad (2\text{-}12)$$

Sachant que $w_H$ est l'énergie fournie.

$$w_H = -\mu_0 \vec{M}\vec{H} \qquad (2\text{-}13)$$

$w_M$: La densité d'énergies magnétisantes du matériau, donnée par

$$w_M = w_d + w_r + w_i \qquad (2\text{-}14)$$

*2.2.3.3. Modèle énergétique statique*

**- L'aimantation initiale (direct)**

Dans le cadre d'un processus d'aimantation quasi-stationnaire, l'état initial de l'aimantation peut être déterminé à partir des équations précédemment établies, en supposant que les variations temporelles du champ sont suffisamment lentes pour négliger les phénomènes dynamiques :

$$H_{hys}(B) = H_{hys} + H_r + H_{irr} \qquad (2\text{-}15)$$

L'équation se compose de trois termes :

- Le premier traduit le comportement linéaire lié à la démagnétisation (champ $\overrightarrow{H_d}$).
- Le deuxième rend compte du comportement non linéaire, incluant le champ de saturation (champ réversible$\overrightarrow{H_r}$).).
- Le troisième terme modélise les effets d'hystérésis, tels que la rémanence, la coercivité et les pertes statiques (champ irréversible $\overrightarrow{H_{irr}}$).

**-L'aimantation inverse :**

La fonction $\kappa$ κ permet de modéliser l'influence de l'état magnétique global lors des points de renversement de l'aimantation. Elle joue le rôle d'un facteur d'inversion, traduisant la sensibilité du matériau au changement de direction de vecteur aimantation. Cette fonction dépend explicitement du déplacement des parois de domaines magnétiques, quantifié par la norme $\boldsymbol{s} = |\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m0}|$, où $m$ m représente le vecteur aimantation actuel et $\boldsymbol{m0}$ son état initial.

Le paramètre $\boldsymbol{s}$ caractérise ainsi la distance parcourue par les parois jusqu'au seuil critique de renversement.

$$\boldsymbol{\kappa = 2 - \kappa_0(exp\ (-\frac{q}{\kappa_0}|m - m_0|))}$$

Avec : $\boldsymbol{\kappa_0}$ ancienne valeur de $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{m_0}$ est la première valeur de $\boldsymbol{m}$ du dernier champ réversible.

*2.2.3.4.Paramètres du modèle*

Le modèle énergétique repose sur deux paramètres physiques fondamentaux, $M_s$ et $N_e$ . À ceux-ci s'ajoutent quatre paramètres phénoménologiques $\boldsymbol{g, k, h}$ et $\boldsymbol{q}$ qui jouent le rôle de constantes d'ajustement, permettant d'assurer une bonne concordance avec les résultats expérimentaux. Ces paramètres sont associés à des caractéristiques macroscopiques de l'hystérésis, telles que :

- Le champ coercitif $H_c$.
- La susceptibilité initiale à l'état démagnétisé$\chi_i$.
- La susceptibilité différentielle à la coercivité C.

- L'aimantation rémanente $M_r$.
- L'aimantation $M_g$, correspondant à un champ magnétique arbitraire $H_g$ sur la branche ascendante de la boucle majeure,
- Et enfin, le champ magnétique $H_r$, correspondant à une aimantation égale à $M_r$sur cette même branche.

### *3.1.1. Effet des paramètres*

Dans cette section, nous procédons à une étude paramétrique visant à évaluer l'influence des différents paramètres constitutifs du modèle énergétique sur la morphologie de la boucle d'hystérésis. Cette analyse est conduite en faisant varier de manière indépendante chaque paramètre autour d'un jeu de valeurs de référence, dans le but de quantifier leur impact sur des grandeurs magnétiques fondamentales telles que la magnétisation à saturation $M_s$, l'aimantation rémanente $M_r$et le champ coercitif $H_c$. Cette approche permet de mieux cerner la sensibilité du comportement magnétique simulé aux caractéristiques intrinsèques du matériau et aux mécanismes d'aimantation sous-jacents.

Les valeurs initiales utilisées pour la simulation sont :

$N_e$=1,584×$10^{-5}$
**h**=4,939
**g**=9,516
$M_s$=1,5×$10^6$
**k**=92,129
**q**=12,405
$C_r$=0,853
et $B_{max}$=1,3 T

Le tableau (**2.3)** résume la signification physique de chacun de ces paramètres ainsi que leur effet sur la forme de la courbe d'hystérésis :

**Tableau 2-3** : la signification physique des paramètres

| Paramètre du modèle généralisé EM | Les effets des paramètres |
|---|---|
| ***Ne* : coefficient effectif de démagnétisation** | L'augmentation de ***Ne*** emmène une diminution de ***Ms*** and ***Mr*** |
| ***Ms* : magnétisation de saturation** | L'augmentation de ***Ms*** provoque une augmentation de ***Mr*** et une diminution de ***Hc*** |
| ***g* : associer à l'anisotropie** | L'augmentation de ***g*** entraine une diminution de ***Ms*** and ***Mr*** |

| | |
|---|---|
| **h : associer au champ de saturation** | L'augmentation de ***h*** emmène une diminution de ***Ms*** and ***Mr*** |
| **k : dépend de déplacement des parois [j/m3]** | L'augmentation de ***k*** provoque une diminution de légère pour ***Mr*** et importante pour ***Hc*** |
| **q : densité de centre de pinning** | L'augmentation de ***q*** induit une augmentation de ***Ms*** and ***Mr*** |
| **Cr : l'inverse de l'épaisseur des domaines, facteur dépendance de la vélocité des parois des domaines** | L'augmentation de ***Cr*** traduit une diminution de légère pour ***Ms*** |

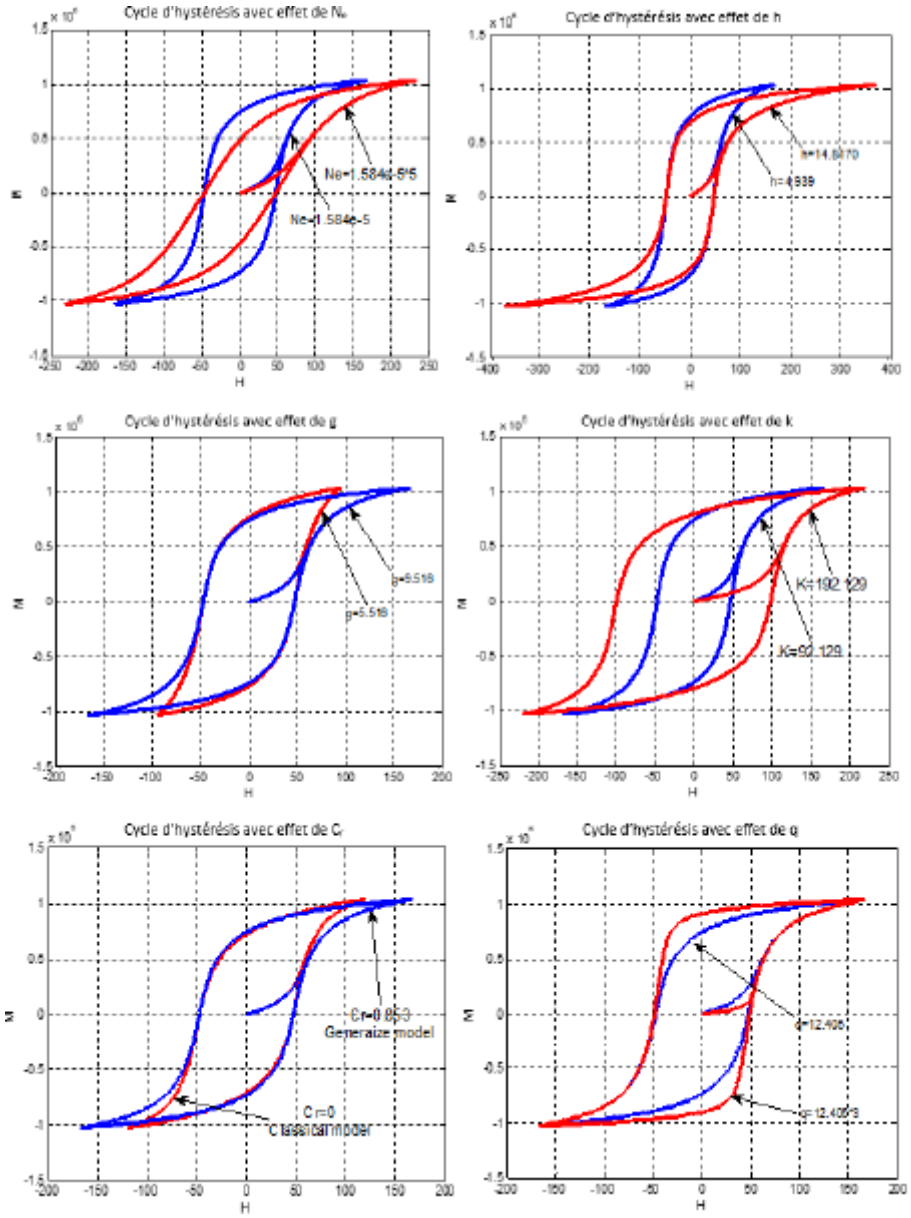



**Figure 2-5 :** Effets des paramètres sur le cycle d'hystérésis produit par le **ME**.

## *Conclusion*

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux modèles d'hystérésis utilisés dans la communauté scientifique du magnétisme. Parmi les plus notables figurent les modèles de Preisach, de Jiles-Atherton et de Hans Hauser, reconnus pour leur richesse phénoménologique et leur rigueur mathématique.

En raison de leur capacité à intégrer à la fois les aspects microscopiques et macroscopiques du phénomène magnétique, notre choix s'est porté sur le **modèle énergétique** (ME) développé par le Professeur Hans Hauser. Ce modèle se distingue

par sa simplicité, reposant entièrement sur des équations transcendantales permettant de décrire efficacement le comportement des matériaux ferromagnétiques.

Le modèle énergétique présente un fort potentiel pour diverses applications pratiques, notamment grâce à sa compatibilité avec les codes de calcul de champ, tels que ceux utilisés en **simulation par éléments finis** ou **volumes finis**.

Le chapitre suivant sera consacré à la **formulation mathématique des équations de Maxwell**, étape essentielle pour la mise en place d'un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis.

# Chapitre 03 :

# Modélisation numérique de l'électromagnétisme

# 3. Modélisation numérique de l'électromagnétisme

### *Introduction*

La conception et l'optimisation des dispositifs électromagnétiques nécessitent une bonne connaissance des phénomènes électromagnétiques. Cependant, l'étude du fonctionnement des systèmes est traitée par la mise en œuvre des équations aux dérivées partielles qui gouvernent l'ensemble du phénomène électromagnétique. Ce dernier intervenant dans l'étude d'un dispositif électromagnétique, fait appel aux équations de Maxwell associées aux relations constitutives qui définissent les propriétés macroscopiques locales assemblées les grandeurs électriques et magnétiques.

Dans ce chapitre, nous allons exposer les modèles mathématiques qui caractérisent l'évolution spatio-temporelle des comportements du champ magnétique et du champ électrique. Une telle modélisation mathématique avec des conditions aux limites donne un modèle complet régissant le fonctionnement du système, dont sa résolution par des méthodes numériques permet de fournir des résultats approximatifs locaux (champ magnétique et électrique), à partir desquelles on peut déduire des grandeurs globales (les flux, les courants). (ANALYTIQUE)

Plusieurs méthodes numériques sont exploitées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles, telles que la méthode éléments finis qu'est fréquemment utilisée [23-24]. En particulier, dans ce travail, la méthode des volumes finis est optée comme méthode de discrétisation des équations aux dérivées partielles en deux dimensions [25].

Par la suite, nous nous proposons d'intégrer cette méthode avec un modèle d'hystérésis énergétique (détaillé précédemment), alors que les résultats de la simulation et l'exploitation du modèle seront traités dans le chapitre suivant.

### *3.2. Modélisation et formalisation électromagnétique*

Dans ce titre, nous abordons les modèles mathématiques pour décrire l'évolution des systèmes électromagnétiques. Les équations de base pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques sont les équations de Maxwell. Celles-ci constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui lie entre eux les phénomènes magnétiques et électriques, et uni e tous les principes de l'électromagnétisme. L'application de ces équations aux différentes applications et leur résolution est l'enjeu principal de nombreux travaux de recherche.

Dans le cas de systèmes simples, les équations de Maxwell peuvent être résolues analytiquement. C'est le cas par exemple d'étude d'un système électromagnétique de géométrie simple dont l'hypothèse d'un comportement magnétique linéaire. En revanche dans le cas de systèmes complexes, l'utilisation de méthodes numériques comme la méthode des différences finis [26], éléments finis [27] et volume finis [28] est indispensable. Nous commençons ce titre par une

présentation des équations de Maxwell ainsi que lois constitutives du milieu magnétique. Les différentes formulations des équations de Maxwell seront ensuite détaillées.

A la fin de ce titre nous détaillions la méthode numérique utilisée dans ce travaille de thèse qui est la méthode des volumes finis MVF.

### *3.2.1. Equations de Maxwell*

C'est J. C. Maxwell (1831-1879), qui apporta à l'étude de l'électromagnétisme la Puissance d'un formalisme mathématique, précisant les notions qualitatives introduites par Faraday. Il parvint à établir le groupe d'équation qui portent son nom, et qui constituent. Toujours la base de nos connaissances théoriques de l'électromagnétisme.

Dans ces formulation J. C. Maxwell tient à décrire des relations entre les grandeurs électromagnétismes dans le cas générales et où l'espace et le temps ont une influence, dans un milieu physique quelconque, avec une densité de courant (J) variable et une distribution de charge (ρ). Ces équations sont introduites comme postulas fondamentaux de l'électromagnétisme [29].

### *3.2.2. Loi de Faraday*

La force électromotrice (e) induite dans un circuit (c) placé dans un champ électrique ( $\vec{E}$ ) est donné par l'intégrale curviligne suivant [30].

$$e = \oint_c \vec{E}.\overrightarrow{dl} \qquad (3\text{-}1)$$

Où (c) est une boucle fermée (circuit).
D'après la loi de faraday, la force électromotrice (e) induite dans un circuit fermé (c) est égale à l'opposé de la dérivée, par rapport au temps du flux magnétique à travers ce même circuit. Mathématiquement, elle est exprimée par :

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \text{Où} \qquad \Phi = f(x, y, z, t)$$

Avec :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} \qquad (3\text{-}2)$$

Où (S) est une surface s'appuyant sur le contour (C).
Il vient alors que :

$$\oint_c \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{dS} \qquad (3\text{-}3)$$

En appliquant le théorème de stockes sur le terme gauche de cette égalité, on obtient :

$$\iint (\overrightarrow{rot}\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}).\overrightarrow{dS} = 0 \qquad (3\text{-}4)$$

Cette relation étant vraie quel que soit la forme du circuit (c) et la surface (S) s'appuyant sur ce circuit. La quantité à intégrer doit être identiquement nulle ce qui s'exprime par la relation suivante :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3\text{-}5)$$

### *3.2.3. Théorème d'Ampère*

Le théorème d'ampère s'énonce ainsi : la circulation du vecteur champ magnétique ( $\vec{H}$ ) sur un contour fermé orienté (C), quelconque, est lié au courant I, en clacé par (C), par la relation suivante [30] :

$$\oint_c \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl} = I_{\text{enclacé}} = \sum_{i=1}^{n} Ii \qquad (3\text{-}6)$$

Si on désigne par $\vec{J}$ le vecteur densité du courant I, dans ce cas, la loi d'ampère prend la forme suivante :

$$\oint_c \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{J}.\overrightarrow{dS} \qquad (3\text{-}7)$$

En appliquant le théorème de stockes sur le terme gauche de cette égalité, on obtient :

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{H}\,.d\vec{S} = \iint_S \vec{J}.d\overrightarrow{S} \qquad (3\text{-}8)$$

Ainsi, par identification, on déduit que :

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{H} = \vec{J} \qquad (3\text{-}9)$$

A cette équation , doit être associe la loi d'Ohm généralisé

$$\vec{J} = \vec{J}_{ex} + \sigma\vec{E} + \sigma\,(\overrightarrow{\vartheta} \wedge B) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (3\text{-}10)$$

Où :

$\overrightarrow{\vartheta}$ : Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de ce déplacer [m/s],

σ : Conductivité électrique [S/m],

$\vec{J}$ex : Densité du courant d'excitation ou de source[A/m² ]

σ $\vec{E}$ : Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m²],

Σ ($\overrightarrow{\vartheta} \wedge \vec{B}$) : Densité des courants induits par mouvement [A/m²].

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ : Vecteur densité de courant de déplacement [A/m²].

### *3.2.4. Théorème de Gausse*

Le flux du vecteur champ électrique ( $\vec{E}$ ) sortant d'une surface fermée (S), est égale au quotient par, ε0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de cette surface (S) [30] :

$$\oiint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \qquad (3\text{-}11)$$

Si les charges libres sont reparties uniformément selon une densité volumique (ρ), la relation précédente devient :

$$\oiint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_\circ} \iiint_V \rho \, dV \qquad (3\text{-}12)$$

L'application du théorème d'Ostrogradski-Green nous permet de transformer l'intégrale. Du membre gauche, de l'équation précédente, de la manière suivante :

$$\iiint_v \mathrm{div}\, \vec{E}\ \mathrm{dV} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\ \mathrm{dV} \qquad (3\text{-}13)$$

Le volume d'intégration, de même que la surface de gausse (S) sont choisis arbitrairement. L'identité des deux intégrales portant toutes les deux sur ce même volume(V) d'intégration, implique l'identité des entités intègres, d'où :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \qquad (3\text{-}14)$$

Le vecteur intensité de polarisation $\vec{P}$ est le moment électrique d'un petit volume. Cette polarisation produit une densité fictive égale à div ($\vec{P}$ ). On aura donc :

$$div\ (\varepsilon_\circ \vec{E}) = \rho + \rho p \qquad (3\text{-}15)$$

En remplaçant l'expression de ρp dans l'équation précédente on aura :

$$div(\ \varepsilon_\circ \vec{E}) + div\ (\vec{P}) = \rho \qquad (3\text{-}16)$$

Il vient alors que :

$$div(\ \varepsilon_\circ \vec{E} + \vec{P}) = \rho \qquad (3\text{-}17)$$

Par définition, on appelle vecteur induction électrique $\vec{D}$ , le vecteur dont l'expression est donnée par la relation suivante [30][31] :

$$\vec{D} = \varepsilon_\circ \vec{E} + \vec{P} \qquad (3\text{-}18)$$

Ainsi, ce vecteur obéit à la relation locale suivante :

$$div\ \vec{D} = \rho \qquad (3\text{-}19)$$

Si le champ électrique dépendant du temps, la variation temporelle du champ induction électrique $\vec{D}$ est donc non nulle. Il vient alors que :

$$\frac{\partial(\text{div}\,\vec{D})}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (3\text{-}20)$$

Or partant de fait que la variation temps et espace sont considérées indépendantes, on Aura :

$$\text{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (3\text{-}21)$$

En tenant compte de l'équation de continuité $div(\vec{J}_C) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ,On aura :

$$div\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C\right) = 0 \qquad (3\text{-}22)$$

Le vecteur $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C\right)$ représente la densité du courant totale $\vec{J}$ .

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (3\text{-}23)$$

Tels que :

$\vec{J}_D$ : représente la densité du courant de déplacement,
$\vec{J}_C$ : représente la densité du courant de conduction.

Or partant du principe que la divergence du rotationnel de tout vecteur est identiquement nulle, il vient alors que le vecteur $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C\right)$, défini dans une certaine portion de l'espace comme un champ de rotationnel $\vec{H}$ [30]. Tel que :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{H} = \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C\right) \qquad (3\text{-}24)$$

Où

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{H} = \vec{J} \qquad (3\text{-}25)$$

Cette formule montre bien que Maxwell ait dû tenir compte des phénomènes dus à la variation temporelle du vecteur champ d'induction électrique ($\vec{D}$), par cette procédure il à modifié la loi d'ampère donné par l'équation (3.2)

### *3.2.5. Loi de conservation du champ d'induction magnétique*

D'après l'équation (3.1), nous avons :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3\text{-}26)$$

Formons la divergence de chaque, membre de cette équation, et utilisons l'identité, il vient alors :

$$-\mathrm{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mathrm{div}\overrightarrow{B})}{\partial t} = 0 \qquad (3\text{-}27)$$

L'intégration de cette relation conduit à $div\overrightarrow{B} = f(r)$. Si f(r) n'était pas identiquement nulle, cette relation implique l'existence de monopoles magnétiques. Or de tels monopoles ou charges magnétiques libres n'ont jamais été mis en évidence, nous poserons alors] :

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad (3\text{-}28)$$

### *3.2.6. Lois constitutives du milieu*

Au système d'équations de maxwell il fallait introduire des relations traduisant le comportement physique du milieu.

### *3.2.7. Induction et champ électrique*

Pour tout champ électrique, dans un milieu isotrope, de permittivitéε, nous avons [32] :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ (3-29)

Où : $\varepsilon = \varepsilon_{\circ}\varepsilon_r$

$\varepsilon_{\circ}$ : Permittivité absolue du vide [F/m]
$\varepsilon_r$ : Permittivité relative du milieu.

Cette relation décrit la relation entre le vecteur induction électrique $\vec{D}$ et le vecteur champ électrique $\vec{E}$ . Elle est linéaire si ε est constante. Dans le cas des conducteurs non polarisés, nous avons :

$$\vec{D} = \varepsilon_{\circ}\vec{E} \qquad (3\text{-}30)$$

Avec :

$$\varepsilon_{\circ} = \frac{1}{36*\pi*10^{9}}\ [\mathrm{F/m}] \qquad (3\text{-}31)$$

### *3.2.8. Induction et champ magnétiques*

$$\vec{B} = \mu \overrightarrow{H} \qquad (3\text{-}32)$$

Avec :

$\mu = \mu_{\circ} \mu_r$

Où

$\mu_{\circ}$ : Perméabilité magnétique absolue du vide, $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ [H/m],
$\mu_r$: Perméabilité relative du milieu.

Dans le cas d'un aimant permanent, nous avons :

$$\vec{B} = \mu \overrightarrow{H} + \vec{B}_{re} \qquad (3\text{-}33)$$

$\vec{B}_{re}$: Vecteur induction magnétique rémanente

### *3.3. Les conditions aux limites*

Le domaine d'étude n'étant pas in ni, il faut par conséquent poser des conditions aux Limites adéquates sur les frontières du domaine. Suivant le problème considéré, elles peuvent être liées aux composantes tangentielles de E et H ou aux composantes normales de D, J et B. On dé ni les conditions aux limites aux différentes frontières de la façon suivante :

$$B \cdot n \,|_{\text{ГВ}} = 0 \qquad (3\text{-}34)$$

$$H \wedge n \,|_{\text{ГН}} = 0 \qquad (3\text{-}35)$$

Deux autres conditions peuvent être déduites des équations (3-34) et (3-35) et appliquées également sur ces deux frontières.

$$E \wedge n \,|_{\text{ГВ}} = 0 \qquad (3\text{-}36)$$

$$J \cdot n \,|_{\text{ГН}} = 0 \qquad (3\text{-}37)$$

### *3.4. Formulation des modèles électromagnétiques*

Les équations de Maxwell avec les lois constitutives décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques. Suivant les dispositifs étudiés, certains phénomènes deviennent insignifiants, les équations se découplent alors en donnant naissance à des modèles plus simples. On peut trouver plusieurs formulations exprimant ces modèles mathématiques de l'électromagnétisme : les formulations en champs (E, H, D et B) et les formulations en potentiels (A, T, V et φ). Les formulations en champs présentent un majeur inconvénient, c'est la discontinuité de l'inconnue aux interfaces de deux milieux différents, et elles nécessitent l'utilisation des méthodes numériques spéciale. Alors que les formulations en potentiels, l'inconnue est continue entre deux milieux différents et les méthodes numériques de base sont utilisées. Parmi les modèles nés, on peut distinguer

### *3.4.1. Le modèle électrostatique*

En régime stationnaire, l'opérateur dérivé soit nul $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, et toutes les grandeurs électriques et magnétiques (E, H, q…) sont constantes. Dans ce modèle la répartition des charges électriques ne dépend pas du temps (régime stationnaire : cas de courant continue). A cet effet, le champ magnétique crée ne varie pas dans le temps $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ [38] :

Les équations de ce modèle se simplifient comme suit :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = 0 \qquad (3\text{-}38)$$

$$div\vec{D} = \rho \qquad (3\text{-}39)$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad (3\text{-}40)$$

La relation (3.38) dérive un potentiel scalaire électrique V, tel que :

$$\vec{E} = \overrightarrow{grad}\,V = -\nabla V \qquad (3\text{-}41)$$

Ce modèle se ramène alors à l'équation dit de Poisson :

$$\nabla . v + \rho / \varepsilon_{\circ} = 0 \qquad (3\text{-}42)$$

A partir de l'équation (3.40) on remarque qu'un seul inconnu scalaire, ce qui implique une unicité de solution, cependant le problème à étudier est en fonction de (V), donc une seule valeur de chaque point. Si ρ=0 (exemple dans le vide) on a ΔV = 0 c'est l'équation de Laplace.

### *3.4.2. Le modèle électrocinétique*

Ce type de modèle est utilisé lors de la répartition de courant électrique dans des conducteurs hétérogènes (connexion, jeu de barre…) soumis à des tensions continues. Ce modèle peut s'écrire en deux formulations, avec le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ reste nul. La formulation en potentiel scalaire électrique est régie par les équations suivantes :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E}=0 \qquad (3\text{-}43)$$

$$\text{div}\vec{J}=0 \qquad (3\text{-}44)$$

$$\vec{J}= \sigma \vec{E} \qquad (3\text{-}45)$$

Où $\sigma$ est la conductivité de conducteur [S/m].

$\overrightarrow{Rot}\vec{E}=0 \Leftrightarrow E= -\overrightarrow{grad}V$

$$\text{div}\vec{J} =0 \Rightarrow \sigma\text{div}(\vec{E})= -\sigma(\overrightarrow{grad}V) \qquad (3\text{-}46)$$

La résolution de ce genre d'équation est bien maitrisée ; cela est dû particulièrement à la simplicité de la détermination des conditions aux limites. La formulation en potentiel vecteur électrique est donnée par les équations suivantes :

$$\text{div}\vec{J} =0 \Rightarrow J= \overrightarrow{rot}\ \vec{T} \qquad (3\text{-}47)$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{J}=\sigma\overrightarrow{rot}\vec{E}=0 \qquad (3\text{-}48)$$

$$\frac{1}{\sigma}\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{T})=0 \qquad (3\text{-}49)$$

### *3.4.3. Le modèle magnétostatique*

#### *3.4.3.1. Le modèle magnétostatique scalaire (Approche Coulombienne)*

Dans ce modèle, on admet que les courants sont négligeables dans la pièce à étudier, et que le champ magnétique ne dépend pas du temps $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. La formulation en potentiel scalaire magnétique est gouvernée par les équations suivantes :

$\overrightarrow{Rot}\vec{H}=0$ car les courants sont nuls (3-50)

$\text{Div}\vec{B}=0$ conservation du champ (3-51)

C'est le cas des dispositifs pour lesquels les champs sont créés par des forces magnétomotrices extérieures et indépendantes du dispositif étudié, ou bien par l'effet d'aimants permanents. Dans ce cas, le champ dérive d'un potentiel magnétique scalaire Φ:

$$\vec{H}=-\overrightarrow{grad}\Phi \qquad (3\text{-}52)$$

Les équations (3.50) et (3.51) sont regroupées pour former l'équation globale suivant :

$$div(\overrightarrow{\mu grad\ \Phi}) = -\ div\vec{B} \qquad (3\text{-}53)$$

Ce modèle pose peu des problèmes, néanmoins, il est particulièrement adapté aux cas tridimensionnels.

*3.4.3.2. Le modèle magnétostatique vectoriel (Approche Ampérienne)*

Il est un peu similaire le modèle précédent, sauf qu'on suppose que, la création champ magnétique par des sources indépendantes du temps (des courants stationnaires imposés $\boldsymbol{J_S}$ ou à des aimants permanents). Donc le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$vaut nul, et les champs électrique $\boldsymbol{E}^{\rightarrow}$ et magnétique $\boldsymbol{B}^{\rightarrow}$ sont découplés. Dans le cas stationnaire non linéaire, les équations gouvernantes de ce modèle sont :

- $\boldsymbol{\overrightarrow{Rot}\vec{H}=\vec{J}}$ *Conservation du champ*
- $\boldsymbol{div\,\vec{B}=0}$
- $\boldsymbol{\vec{B}=\mu_{\circ}(\vec{H}+\vec{B}_r)}$ *loi de comportement non linéaire*

A partir de ces équations avec l'application de la jauge de Coulomb $div\ A = 0$, on peut déduire l'équation magnétostatique non linéaire.

$$\overrightarrow{Rot}(\frac{1}{\mu_{\circ}}\overrightarrow{rot}\vec{A}) = J_s + \overrightarrow{rot}\ \vec{B}_r \qquad (3\text{-}54)$$

### *3.4.4. Le modèle magnétodynamique*

Au contraire du modèle précédent le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ /n'est plus nul. C-à-d. l'évolution du champ magnétique et de la f.e.m ne sont pas stationnaires. Toutefois, les phénomènes magnétiques et électriques ne sont plus découplés, due à la présence des courants induits (courants de Foucault). Typiquement, un problème magnétodynamique est composé des parties suivantes : des inducteurs dans lesquelles circulent des courants variables, matériaux magnétiques saturables ou non-saturables, des matériaux conducteurs où peuvent circuler des courants induits, et une boîte d'air englobant [33].

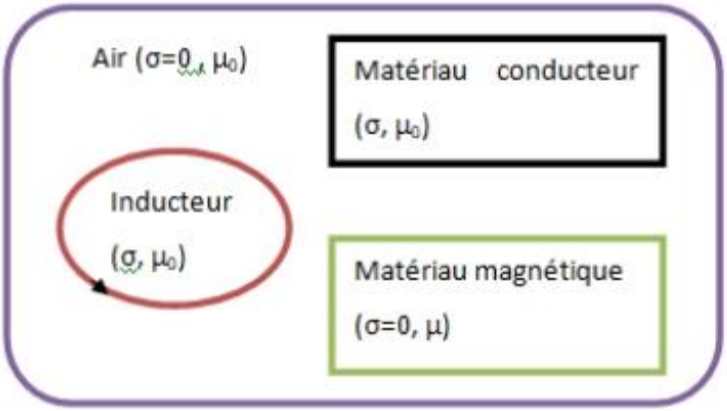



**Figure 3-1**: Schématisation d'un problème magnétodynamique.

Pour résoudre un tel problème magnétodynamique, deux formulations en potentiel peuvent être introduites, la formulation en T−ϕ dite formulation Magnétique et la formulation électriques en A-V.

### *3.4.4.1.* ***Formulation magnétodynamique T- ϕ***

Les équations liées à cette formulation sont les suivantes :

$$\vec{H}= \vec{H}_{ind}+\vec{H}_s \qquad (3\text{-}55)$$

$$\vec{H}_{ind}=\vec{T}\text{-}\overrightarrow{grad}\ \phi \qquad (3\text{-}56)$$

En régime harmonique, l'équation à résoudre est :

$$\overrightarrow{Rot}(\frac{1}{\sigma}\overrightarrow{rot}\vec{T})+J\mu\omega(\vec{T}\text{-}\overrightarrow{grad}\ \phi)=0 \qquad (3\text{-}57)$$

### *3.4.4.2.* ***Formulation magnétodynamique A-V***

Cette formulation est assez générale, elle présente plusieurs avantages du fait qu'on introduit le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ . Cependant le système d'équations s'écrit en fonction d'un seul inconnu dont il a une seule composante. A partir de l'équation de conservation du flux, on peut définir une fonction vectorielle $\vec{A}$ par :

$$\text{div}\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A} \qquad (3\text{-}58)$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}=\text{-}\overrightarrow{rot}\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{rot}(E+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})=0 \qquad (3\text{-}59)$$

Ceci implique que $(E + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$ est un champ conservatif, il dérive donc un potentiel scalaire électrique V :

$$(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow \vec{E} = -(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}V) \qquad (3\text{-}60)$$

L'expression de $\vec{E}$ dépend à la fois de $\vec{V}$ et de $\vec{A}$. À partir de les équations (3.58) et (3.60) nous aurons :

$$v_0 \nabla \wedge (\nabla \wedge A) + \sigma(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V) = J_s + \nabla \wedge M \qquad (3\text{-}61)$$

On peut considérer que le terme $\sigma(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V)$ est intégré directement dans le terme $\nabla \wedge M$, on aura donc l'équation magnétodynamique non linéaire en fonction du potentiel vecteur magnétique :

$$v_0 \nabla \wedge (\nabla \wedge A) = J_s + \nabla \wedge M \qquad (3\text{-}62)$$

### *3.5. Outils numériques*

La résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) se fait soit par des méthodes analytiques dans les cas simples, soit par des méthodes numériques telles que la méthode des différences finis (MDF), la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des volumes finis (MVF)...etc. Ces méthodes ont été améliorées par l'avènement de l'informatique moderne. L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution des EDP à la résolution d'un système d'équations algébriques dans le domaine d'étude compte tenu des conditions aux limites.

La solution obtenue permet de connaître l'inconnu dans chaque volume fini, Ainsi la distribution des grandeurs physiques dans le domaine d'étude.

Pour notre travail nous avons utilisé la MVF pour deux raisons ; la première est qu'elle est facile à concevoir contrairement à la MEF et la deuxième est qu'elle peut être appliquer à des géométries complexes contrairement à la MDF. [21]

Cette partie sera consacrée à la présentation de la méthode des volumes finis dans les cordonnées cartésienne axisymétrique.

#### *3.5.1. Méthode des Différences Finies (M.D.F) [12]*

Cette méthode est basée sur le théorème de Taylor, elle consiste à transformer l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences. La figure (3.2) représente un exemple de maillage pour le cas unidimensionnel.

**Figure 3-2** : Exemple de maillage pour le cas unidimensionnel

Le développement en série de Taylor au voisinage du nœud n°2 donnes :

$$A_1 = A_2 - \Delta X\left(\frac{dA}{dx}\right)_2 + \frac{1}{2}(\Delta X)^2\left[\left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)\right]_2 - \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}(\Delta X)^2\left[\frac{d^nA}{dx^n}\right]_2 \quad (3\text{-}63)$$

$$A_3 = A_2 + \Delta X\left(\frac{dA}{dx}\right)_2 + \frac{1}{2}(\Delta X)^2\left[\left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)\right]_2 + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}(\Delta X)^n\left[\frac{d^nA}{dx^n}\right]_2 \quad (3\text{-}64)$$

En se limitant au troisième terme, on déduit de ces équations :

$$\left(\frac{dA}{dx}\right) = \frac{A_3 - A_1}{2\,\Delta X} \quad \text{et} \quad \left[\frac{d^2A}{dx^2}\right] = \left(\frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{(\Delta X)^2}\right)$$

Pour obtenir l'équation aux différences finis on substitue les dérivées dans l'équation différentielle. La MDF est très simple mais elle est applicable seulement aux domaines à géométrie simple, aussi elle ne peut pas être précise puisqu'elle prend le développement en série de Taylor de l'inconnue jusqu'au troisième terme seulement.

### *3.5.2. Méthode des Eléments Finis (M.E.F) [34]*

La MEF est mieux adaptée aux problèmes complexes et aux matériaux non linéaires. Elle consiste à exprimer une formulation intégrale basée sur l'une des deux, soit la méthode variationnelle qui consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement, l'énergie du système étudié, soit la méthode des résidus pondérés ou méthode projective qui consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue. La méthode des éléments finis consiste à subdiviser le domaine d'étude en domaines élémentaires appelés éléments finis, comme le montre la figure (3.3) et à exprimer l'inconnue sur chaque élément par les fonctions d'interpolation simples en fonction des valeurs de l'inconnue en chacun des sommets de cet élément

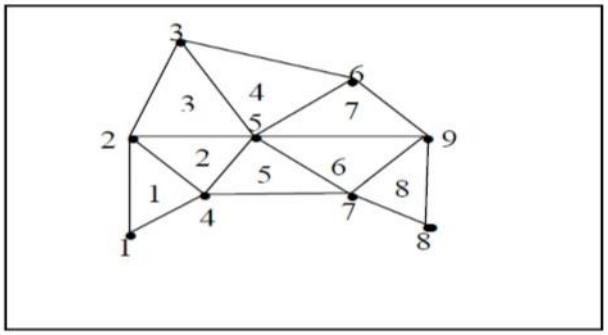



**Figure 3-3** : Un domaine d'étude discrétisé en Elément finis

### *3.5.3. La Méthode Des Volumes Finis*

La MVF est une méthode de discrétisation. Elle est utilisée, en particulier en Mécanique des fluides, où elle est apparue il y a une vingtaine d'années. Depuis la méthode de volume finis a connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique : le thermique, l'électromagnétisme etc. L'analyse mathématique de la méthode du volume finis a permis de développer récemment les principes fondamentaux qui font une méthode de discrétisation performante. L'idée de base de la formulation des volumes finis est facile à comprendre et Permet de donne l'interprétation physique des phénomènes. Le domaine de calcule est subdivisé en un nombre d'élément finis (figure 3.4). Chaque élément contient quatre nœuds pour le cas bidimensionnel axisymétrique. Un volume fini Entoure chaque nœud. L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une Fonction d'approximation (linéaire parabolique puissance exponentielle… etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude. L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnu dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales. Pour éclaircir tous ce qui est, on va donner un exemple illustratif [35][36][37]

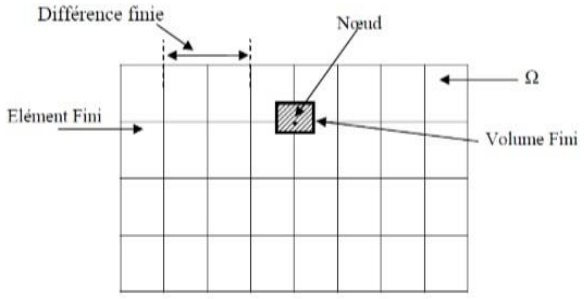



**Figure 3-4** : maillage du domaine d'étude

### *3.5.3.1.* ***Discrétisation MVF avec un maillage rectangulaire***

Ci-dessous, nous donnons l'exemple d'un maillage comprenant des volumes de contrôle rectangulaire irrégulier qu'on peut adopter pour la discrétisation de l'équation.

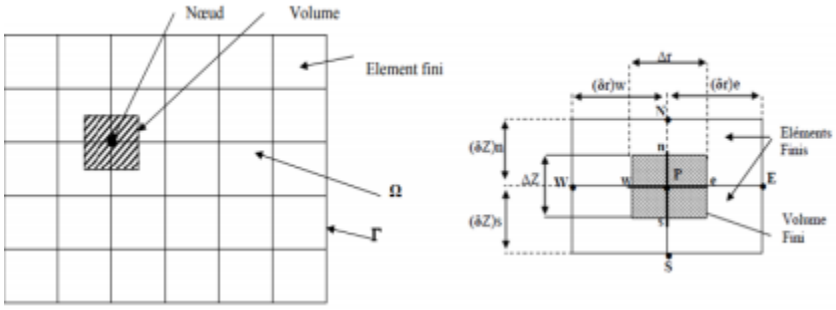



**Figure 3-5**: maillage d'un domaine avec une description d'un volume fini.

La valeur de $\vec{A}$ est nulle aux frontières, et à chaque point P placé au centre de chaque volume. (e) et (o) sont deux points sur l'axe horizontal x appelés « Est » et « Ouest ». et deux autres points voisins sur l'axe vertical y qui sont sud (s) nord (n), Δx et Δy sont les pas de maillage (figure 3.5). L'intégration de l'équation (3.65) sur le volume de contrôle autour du centre P donne :

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial^2\vec{A}}\right)dxdydt=$$

$$-\mu_\circ\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(Js+\left(\frac{\partial\vec{M}y}{\partial x}-\frac{\partial\vec{M}x}{\partial y}\right)\right)dxdydz \qquad (3\text{-}65)$$

On développe l'équation (3.66), commençant par le premier terme du membre à gauche :

$$I_1=\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}dxdydt=\frac{\partial A}{\partial x}\Big|\Delta y\Delta t=\left(\left(\frac{Ae-Ap}{\Delta x}\right)-\left(\frac{Ap-Aw}{\Delta x}\right)\right)\Delta y\Delta t \qquad (3\text{-}66)$$

Le développement du second terme du membre à gauche est donné par :

$$I_2=\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}dxdydt=\frac{\partial A}{\partial y}\Big|\Delta y\Delta t=\left(\left(\frac{An-Ap}{\Delta y}\right)-\left(\frac{Ap-As}{\Delta y}\right)\right)\Delta x\Delta t \qquad (3\text{-}67)$$

Le premier terme du membre à droite de l'équation (3.66) devient :

$$I^3=\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\mu_\circ J_{max}\cos(\omega t)\,dxdydt=\frac{\partial A}{\partial x}\Big|\Delta y\Delta t=$$

$$-\frac{\mu_\circ J_{max}\sin(\omega t)}{\omega}\Delta y\Delta t \qquad (3\text{-}68)$$

Le second terme à droite de l'équation devient sous la forme suivante :

$$I_4=-\mu_\circ\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial\vec{M}_y}{\partial x}-\frac{\partial\vec{M}_x}{\partial y}\right)dxdydt=$$

$-\mu_\circ ((M_e - M_w)\Delta y\Delta t\text{-}(M_n - M_s)\Delta x\Delta t)$ (3-69)

L'équation globale est alors donnée par :

$( [\frac{Ae-Ap}{\Delta x}] - [\frac{Ap-Aw}{\Delta x}] ) \Delta y\Delta t + ( [\frac{An-Ap}{\Delta y}] - [\frac{Ap-As}{\Delta y}] ) \Delta x\Delta t =$

$-\mu_\circ \frac{J_{max}\sin(\omega t)}{\omega}\Delta x\Delta y + [(M_e - M_w)\,\Delta y\Delta t\text{-}(M_n - M_s)\,\Delta x\Delta t] )$ (3-70)

*3.5.3.2.Détermination de l'aimantation*

Pour déterminer l'aimantation aux nœuds principaux, on suppose que la variation de l'aimantation entre deux nœuds proches est linéaire, M= aX + b, dans ce cas l'aimantation au Nœud (E) est donnée par $M_E$ = a $X_E$ + b et au nœud (W) devient

$$M_W = \text{a } X_W + \text{b} \qquad (3\text{-}71)$$

$$(M_e - M_w) = (M_E - M_W)\frac{X_e - X_w}{X_E - X_W} \qquad (3\text{-}72)$$

Donc l'équation (3.70) devient :

$( (\frac{Ae-Ap}{\Delta x}) - (\frac{Ap-Aw}{\Delta x}) ) \Delta y\Delta t + ( (\frac{An-Ap}{\Delta y}) - (\frac{Ap-As}{\Delta y}) ) \Delta x\Delta t$

$= -(\mu_\circ \frac{J_{max}\sin(\omega t)}{\omega}\Delta x\Delta y + \mu_\circ((M_E - M_W)\frac{X_e - X_w}{X_E - X_W}\,\Delta y\Delta t - (M_N - M_S)\frac{X_n - X_s}{X_N - X_S}\Delta x\Delta t))$ (3-73)

Finalement l'équation algébrique obtenue est la suivante :

$-A_P + K_E\,A_E + K_W\,A_W + K_N\,A_N + K_S\,A_S = K_J \sin(\omega t) + [(M_E - M_W) - (M_N - M_S)]$

Avec :

$K_P = (K_E + K_W + K_N + K_S)$ , $K_E = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , $K_N = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ , $K_W = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , $K_S = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ ,

$K_J = \frac{1}{w}\ \mu_\circ J_{max}\Delta x\Delta y$ , $K_M\,(\text{N,S}) = \mu_\circ \frac{X_n - X_s}{X_N - X_S}\Delta x$ ,

$K_M\,(\text{E,M}) = \mu_\circ \frac{X_e - X_w}{X_E - X_W}\Delta y$

Si la discrétisation du domaine comporte n nœuds ; alors, il est évidemment qu'un système de n équations avec n inconnues doit être construit

### *3.5.4. Validation De La Méthode Des Volumes Finis*

Une comparaison a été faite entre le résultat obtenu analytiquement et celle obtenue par la MVF montre la précision de cette méthode. La figure (3.6) montre la concordance du résultat obtenu analytiquement avec celle de la méthode des volumes finis.

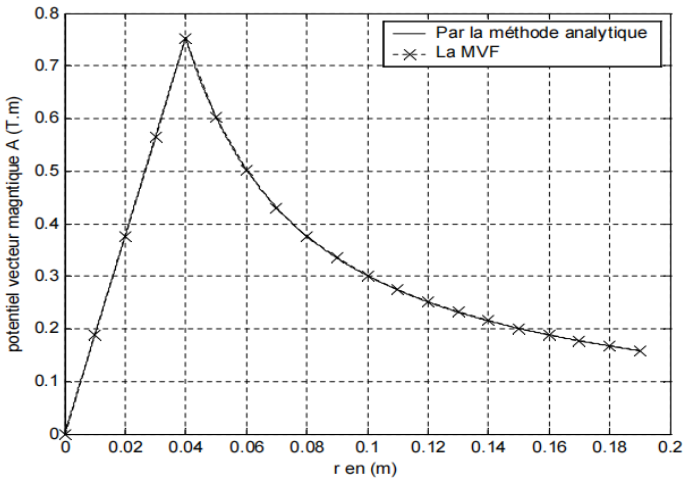



**Figure 3-6:** comparaison entre la méthode analytique et la méthode numérique

## *3.6. Méthodes analytiques (SEMI ANALYTIQUE)*

La méthode analytique est un processus qui consiste à décomposer un tout en ses parties pour en comprendre les éléments et les relations. Elle est souvent utilisée pour révéler des vérités cachées à partir de principes déjà établis. Dans le domaine du magnétisme, cette méthode peut être utilisée pour analyser les propriétés magnétiques d'un matériau en examinant ses composants au niveau microscopique. Cela inclut l'étude des atomes, des molécules et des interactions entre eux. Bien que la méthode analytique soit précieuse pour comprendre les principes fondamentaux, elle peut être limitée par la complexité des systèmes et la difficulté d'obtenir des données précises à partir d'échantillons très petits. Les hypothèses les plus significatives dans la technique des sous-domaines (c'est-à-dire basée sur la résolution formelle des équations de Maxwell appliquées dans un sous-domaine) sont définies comme suit : les parties en fer (c'est-à-dire les tôles de Fer et les bobines) sont considérées comme ayant une perméabilité infinie, c'est-à-dire que $\mu_fer \rightarrow +\infty$, ce qui permet de négliger l'effet de saturation.

Dans cette partie, les auteurs de référence [] présentent une nouvelle contribution scientifique visant à améliorer cette méthode en deux dimensions (2D) et en coordonnées cartésiennes, en mettant l'accent sur la prise en compte du fer. La connexion entre les sous-domaines est réalisée dans les deux directions (c'est-à-dire selon les bords x et y).

Par exemple, l'amélioration a été effectuée en résolvant les équations magnétodynamiques de Maxwell pour des bobines à noyau d'air ou de fer alimentées en courant continu. Pour évaluer l'efficacité de la technique proposée, les distributions de densité de flux magnétique ont été comparées à celles obtenues par l'analyse par éléments finis (AEF) en 2D. Les résultats semi-analytiques sont en assez bon accord avec ceux obtenus par AEF 2D, tant en amplitude qu'en forme d'onde.

### *3.6.1. Méthodologie appliquée :*

Les étapes pour appliquer cette méthode est :

- Résolution des équations de Maxwell magnétodynamique 2D en coordonnées cartésiennes (x, y).
- Connexion des sous-domaines réalisée dans les deux directions (bords x et y).
- Perméabilité magnétique du fer considérée comme constante, correspondant à la zone linéaire de la courbe d'aimantation initiale.

*3.6.1.1.Une technique de sous-domaine 2D pour le champ magnétique*

- ***Description du problème et des hypothèses***

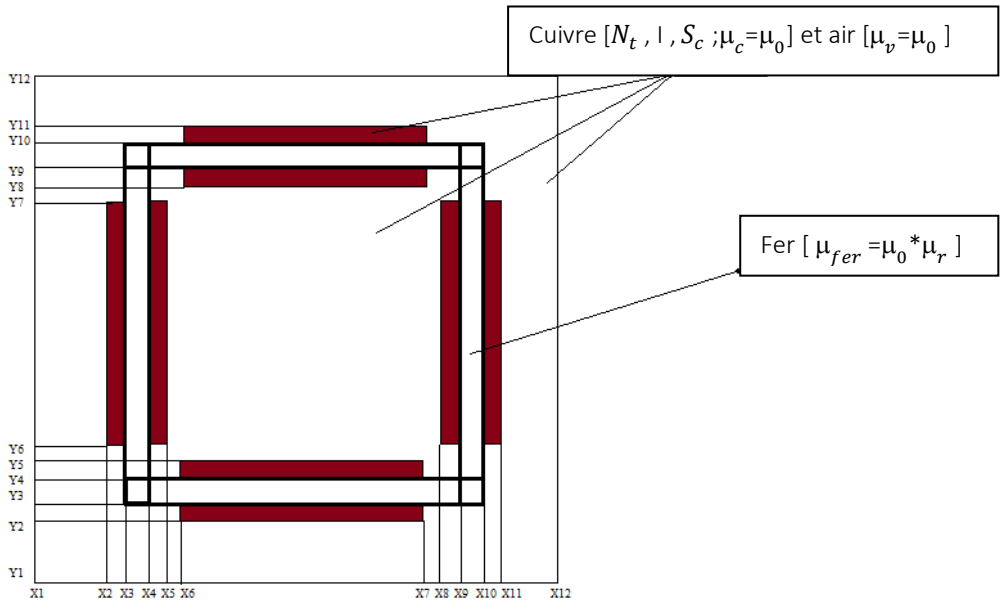



**Figure 3-7 :** Cadre d'Epstein

La distribution du champ magnétique 2D dans une bobine à noyau d'air ou de fer a été étudiée en coordonnées cartésiennes (x, y) en résolvant les équations magnétostatiques de Maxwell à l'aide d'une technique de sous-domaines. Dans cette analyse, la solution du champ magnétique repose sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Les effets d'extrémité sont négligés (c'est-à-dire que les variables magnétiques sont indépendantes de l'axe z).
- Les conductivités électriques des matériaux sont supposées nulles (les courants de Foucault induits dans le cuivre/fer sont négligés).
- Les matériaux magnétiques sont considérés comme isotropes (la perméabilité peut être considérée comme identique dans les deux directions).
- L'effet de la saturation globale est pris en compte avec une perméabilité magnétique constante correspondant à la zone linéaire de la courbe B(H) (courbe d'aimantation initiale).

*3.6.1.2. Discrétisation du problème en sous-domaines*

Comme le montre la Figure (3.7), le domaine du problème est divisé en 33 sous domaines avec μ = Cst :

- ***Région 1 {x ∈[x1, x2] ∧ y ∈[(y1, y12)]} avec μ1 = μv;***
- ***Région 2 {x ∈[x2, x12] ∧ y ∈[(y1, y2)]} avec μ2 = μv;***
- ***Région 3 {x ∈[x2, x12] ∧ y ∈[(y11, y12)]} avec μ3 = μv;***
- ***Région 4 {x ∈[x11, x12] ∧ y ∈[y2, y11]} avec μ4 = μv.***
- ***Région 5 {x ∈[x2, x3] ∧ y ∈[y2, y6]} avec μ5 = μv***
- ***Région 6 {x ∈[x2, x3] ∧ y ∈[y7, y11]} avec μ6 = μv***
- ***Région 7 {x ∈[x3, x6] ∧ y ∈[y2, y3]} avec μ7= μv***
- ***Région 8 {x ∈[x3, x6] ∧ y ∈[y10, y11]} avec μ8 = μv***
- ***Région 9 {x ∈[x7, x10] ∧ y ∈[y2, y3]} avec μ9 = μv***
- ***Région 10 {x ∈[x7, x10] ∧ y ∈[y10, y11]} avec μ10 = μv***
- ***Région 11 {x ∈[x10, x11] ∧ y ∈[y2, y6]} avec μ11 = μv***
- ***Région 12 {x ∈[x10, x11] ∧ y ∈[y7, y11]} avec μ12 = μv***
- ***Région 13 {x ∈[x3, x4] ∧ y ∈[y 3, y10]} avec μ13 = μfer***
- ***Région 14 {x ∈[x4, x10] ∧ y ∈[y 3, y4]} avec μ14 = μfer***
- ***Région15 {x ∈[x4, x10] ∧ y ∈[y 9, y10]} avec μ15 = μfer***
- ***Région 16 {x ∈[x4, x9] ∧ y ∈[y 3, y10]} avec μ16 = μfer***
- ***Région 17 {x ∈[x2, x3] ∧ y ∈[y6, y7]} avec μ17 = μc***
- ***Région 18 {x ∈[x4, x5] ∧ y ∈[y6, y7]} avec μ18= μc***
- ***Région 19 {x ∈[x6, x7] ∧ y ∈[y2, y3]} avec μ19 = μc***
- ***Région 20 {x ∈[x6, x7] ∧ y ∈[y4, y5]} avec μ20 = μc***
- ***Région 21 {x ∈[x6, x7] ∧ y ∈[y8, y9]} avec μ21= μc***
- ***Région 22 {x ∈[x6, x7] ∧ y ∈[y9, y11]} avec μ22 = μc***
- ***Région 23 {x ∈[x8, x9] ∧ y ∈[y6, y7]} avec μ23 = μc***
- ***Région 24 {x ∈[x10, x11] ∧ y ∈[y6, y7]} avec μ24 = μc***

*3.6.1.3. Équations aux dérivées partielles gouvernantes en coordonnées cartésiennes*

Conformément à ($\Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = ES$) et ($ES = -[\mu . J_Z + \mu_0 (\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y})]$ ), la distribution du potentiel vecteur magnétique 2D en coordonnées cartésiennes (x, y) est régie par :
L'équation de Laplace dans les régions j (avec j = {1, ..., 16}) :

$$\Delta A_{zj} = \frac{\partial^2 A_{zj}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{zj}}{\partial y^2} = 0 \qquad (3\text{-}74)$$

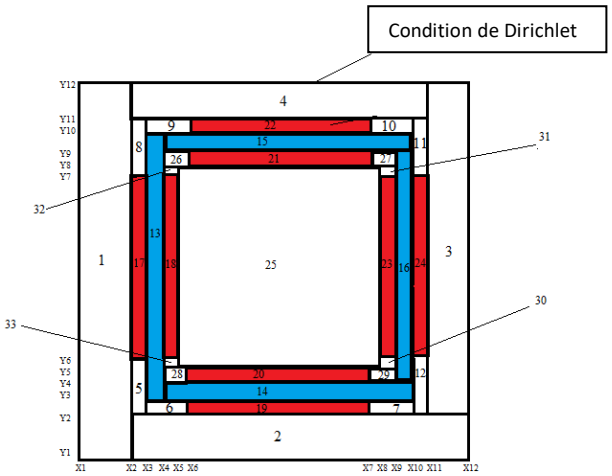



**Figure 3-8** : Sous-domaines de cadre Epstein

Et **l'équation de Poisson** dans les régions k avec k = {17, ….. 24}, c'est-à-dire

$$\Delta A_{zk}=\frac{\partial^2 A_{zk}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_{zk}}{\partial y^2}==-\mu k \cdot j_{zk}\ , \qquad (3\text{-}75)$$

Où $j_{zk}$ représente la densité de courant (due aux courants d'alimentation) qui est définie par :

$$j_{zk}=C_k \cdot\frac{N_t}{S_c}.\mathrm{I} \qquad (3\text{-}76)$$

Dans laquelle $S_c$ est la surface du conducteur, et $C_k$est le coefficient pour la direction du courant dans le conducteur (par exemple, avec $C_{17}$=1 pour le conducteur aller et $C_{17}$=−1 pour le conducteur retour). Selon la méthode de séparation des variables, il est intéressant de noter que $\boldsymbol{A_z}$· peut être décomposé en deux potentiels selon les deux directions (voir Annexe A), c'est-à-dire $\boldsymbol{A_{zx}}$ · pour les arêtes en x (**(3.77) et (3.78)**) et $\boldsymbol{A_{zy}}$· pour les arêtes en y **(3.79)**. La périodicité de $\boldsymbol{A_{zx}}$· et $\boldsymbol{A_{zy}}$· est respectivement définie par **β·h** et **λ·n**, où **h**· et **n**· représentent les ordres des harmoniques spatiaux.

$$A_z = A_{zx} + A_{zy} + A_{zP} \qquad (3\text{-}77)$$

$$A_z^x = \left|(C_O^x+D_0^x.y).(E_0^x+F_0^x.x)+\sum_{h=1}^{\infty}[C_h^x.ch(\beta_h.y)+D_h^x.sh(\beta_h.\mathrm{y})].[E_h^x.\cos(\beta_h.x)+F_h^x.\sin(\beta_h.x)]\right| \qquad (\mathrm{III}.43)$$

$$A_z^y = \left|(C_O^y+D_0^y.y).(E_0^y+F_0^y.x)+\sum_{h=1}^{\infty}[C_h^y.\cos(\lambda_h.y)+D_h^x.\sin(\lambda_h.)].[E_h^y.\mathrm{ch}(\lambda_h.x)+F_h^x.\,\mathrm{Ch}(\lambda_h.x)]\right| \qquad (3\text{-}78)$$

*3.6.1.4.Conditions aux limites*

**Rappel sur les conditions aux limites à l'interface de deux surfaces :**

En électromagnétisme, comme le montre la Figure (3.8), le champ magnétique $\vec{H}$ satisfait la condition de continuité d'Ampère.

$$\vec{n} \times (\vec{H}_{||a} - \vec{H}_{||b}) = \vec{K}$$

Où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la frontière entre deux surfaces, $\vec{H}_{||}$ la composante tangentielle de $\vec{H}$ d'un côté de l'interface, et $\vec{K}$ la densité surfacique de courant à l'interface.

À cette même surface, la condition de continuité du flux magnétique s'applique également.

$$\vec{n} \times (\vec{B}_{\perp a} - \vec{B}_{\perp b}) = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{A}_a - \vec{A}_b = 0$$

Où $\vec{B}_{\perp}$ représente la composante normale de $\vec{B}$ d'un côté de l'interface. La condition de Dirichlet sur une surface est définie par :

$$\vec{A}_a = 0 \qquad \text{Ou} \qquad \vec{A}_b = 0$$

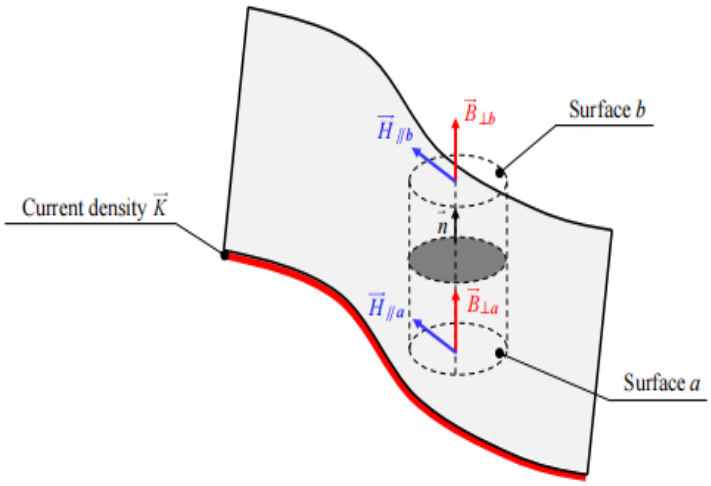



**Figure 3-9 :** Conditions aux limites à l'interface de deux surfaces

*3.6.1.5. Résolution d'un système linéaire*

Les constantes d'intégration peuvent être déterminées en résolvant le système d'équations linéaires suivant, qui peut s'écrire sous forme matricielle comme [39] :

$$[IC] = [BC] - 1 \cdot [ES]$$

### *A. Solution générale en coordonnées cartésiennes*

Équations aux Dérivées Partielles Gouvernantes (EDP). En supposant que le terme $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ est négligeable, les équations de Maxwell magnétostatiques sont représentées par l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\,(\vec{H}) = \vec{J} \ (\text{avec } \vec{J} = 0 \text{ pour le fonctionnement à vide}) \quad (3\text{-}79)$$

Et Maxwell-Thomson

$$div(\vec{B}) = 0 \ (\text{ Conservation du flux magnétique}) \quad (3\text{-}80)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,(\vec{A}) \ \ avec \ \ div(\vec{A}) = 0 \ (\text{Jauge de Coulomb}) \quad (3\text{-}81)$$

Où $\vec{A}$ , $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{J}$ représentent respectivement :

- ***Le potentiel vecteur magnétique,***
- ***L'induction magnétique (ou densité de flux magnétique),***
- ***Le champ magnétique,***
- ***et le vecteur densité de courant (dû aux courants d'alimentation).***

Les champs vectoriels $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{H}$ sont couplés par l'équation des propriétés magnétiques du matériau.

$$\overrightarrow{B} = \mu\,(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{\mathrm{M}}) \quad (3\text{-}82)$$

Où $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ est le vecteur aimantation (avec $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ =0 pour le vide/fer ou $\overrightarrow{\mathrm{M}} \neq 0$ pour les aimants selon la direction d'aimantation [40]), et $\mu$ représentent respectivement la perméabilité matériau magnétique. En utilisant les équations (3.77), (3.78), (3.79) et (3.80), les équations aux dérivées partielles (EDP) générales de la magnétostatique sont définies par [41] :

$$\overrightarrow{X_A} - v \cdot \Delta \vec{A} = \overrightarrow{J} + \overrightarrow{X_B} \quad (3\text{-}83)$$

$$\overrightarrow{X_A} = \overrightarrow{grad}\,(v) \wedge \overrightarrow{rot}\,(\vec{A}) \quad (3\text{-}84)$$

$$\overrightarrow{X_B} = \mu_0 \,.[\, \overrightarrow{grad}(v) \wedge \overrightarrow{M} + v.\,\overrightarrow{rot}\,(\vec{M})\,] \quad (3\text{-}85)$$

Où $v = 1/\mu$ représente la reluctivité magnétique absolue du matériau magnétique. En négligeant les effets de bord (c'est-à-dire en considérant que le système est infiniment long, ce qui implique que $\vec{A}$ = {0 ; 0 ; Az} : les variables magnétiques sont indépendantes de *z*), l'équation (3.83), (3.84) et (3.85) peut être exprimée en coordonnées cartésiennes (x, y) avec

$\mu$ = Cste par :

$$\Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = ES \quad (3\text{-}86)$$

$$ES=-[\mu.J_Z+\mu_0(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y})] \qquad (3\text{-}87)$$

### *B. Solution générale*

Il est intéressant de noter que $A_z$ est régie par :

- *L'équation de Poisson en présence d'une ou plusieurs sources électromagnétiques (c'est-à-dire ES ≠ 0) ;*
- *L'équation de Laplace en l'absence de sources électromagnétiques (c'est-à-dire ES = 0).*

Selon la méthode de séparation des variables, la solution générale 2D magnétodynamique de $A_z$ en coordonnées cartésiennes (x, y) peut s'écrire :

$$A_z = A_{zx} + A_{zy} + A_{zP}$$

$$A_z^x = \left|(C_O^x+D_0^x.y).(E_0^x+F_0^x.x) + \sum_{h=1}^{\infty}[C_h^x.ch(\beta_h.y) + D_h^x.sh(\beta_h.\mathrm{y})].[E_h^x.\cos(\beta_h.x) + F_h^x.\sin(\beta_h.x)]\right|$$

$$A_z^y = \left|(C_O^y+D_0^y.y).(E_0^y+F_0^y.x) + \sum_{h=1}^{\infty}[C_h^y.\cos(\lambda_h.y) + D_h^y.\sin(\lambda_h.y)].[E_h^y.\mathrm{ch}(\lambda_h.x) + F_h^y.\mathrm{ch}(\lambda_h.x)]\right|$$

Où :

$A_{zP}$ est la solution particulière de Az correspondant au terme source ES dans (3.86) et (3.87)

($C_O^x$ - $F_h^x$ et $C_O^y$ - $F_h^y$ ) sont les constantes d'intégration

$\beta_h$ et $\lambda_h$ représentent les périodes spatiales de $A_z^x$ et $A_z^y$ respectivement

h et n désignent les ordres des harmoniques spatiaux

Conformément à l'équation (3.76), les composantes du champ magnétique B ={ $\mathbf{B_x}$; $\mathbf{B_y}$;0} s'obtiennent à partir de $A_z$ par

$$\mathbf{B_x}=\frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B_y}=-\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

D'où

$$\mathbf{B_x} = \boldsymbol{B_x^x} + \mathbf{B_x^y} + \frac{\partial A_{zp}}{\partial x} \qquad (3\text{-}88)$$

$$\boldsymbol{B_x^x} = \left|\boldsymbol{D_0^x}.(\boldsymbol{E_O^x}+\boldsymbol{F_0^x}.\boldsymbol{x}) + \sum_{h=1}^{\infty}\boldsymbol{\beta_h}.[\boldsymbol{C_h^x}.\boldsymbol{sh}(\boldsymbol{\beta_h}.\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{D_h^x}.\boldsymbol{ch}(\boldsymbol{\beta_h}.\mathbf{y})].[\boldsymbol{E_h^x}.\mathbf{cos}(\boldsymbol{\beta_h}.\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F_h^x}.\mathbf{sin}(\boldsymbol{\beta_h}.\boldsymbol{x})]\right| \qquad (3\text{-}89)$$

$$\mathbf{B}_x^y = \left| D_0^y.(E_O^y + F_0^y.x) + \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h [-C_h^y.\sin(\lambda_h.y) + D_h^x.\cos(\lambda_h.y)].[E_h^y.\mathrm{ch}(\lambda_h.x) + F_h^x.\,\mathrm{ch}(\lambda_h.x)] \right| \quad (3\text{-}90)$$

Et :

$$\mathbf{B}_y = B_y^x + \mathbf{B}_y^y - \frac{\partial A_{zp}}{\partial x} \quad (3\text{-}91)$$

$$B_y^x = -\left| F_0^x.(C_O^x + D_0^x.y) + \sum_{h=1}^{\infty} \beta_h.[C_h^x.ch(\beta_h.y) + D_h^x.sh(\beta_h.\mathbf{y})].[-E_h^x.\sin(\beta_h.x) + F_h^x.\cos(\beta_h.x)] \right| \quad (3\text{-}92)$$

$$\mathbf{B}_y^y = -\left| F_0^y.(C_O^y + D_0^y.y) + \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h [C_h^y.\cos(\lambda_h.y) + D_h^x.\sin(\lambda_h.y)].[E_h^y.\mathrm{sh}(\lambda_h.x) + F_h^x.\,\mathrm{ch}(\lambda_h.x)] \right| \quad (3\text{-}93)$$

***Conclusion***

Ce chapitre a été consacré à la modélisation des phénomènes électromagnétiques régissent les matériaux magnétiques, qui s'appuie sur les équations de Maxwell. Dans ce contexte, nous avons donné un rappel sur les notions relatives à l'électromagnétisme. Cependant, différentes formulations mathématiques sous forme des EDP s'écrivent en utilisant le concept de potentiel sont présentées pour la modélisation électromagnétique. Dans notre cas, nous nous sommes intéressés de façon particulière au modèle magnétodynamique non linéaire. Afin de résoudre ces équations, un passage du domaine continu au domaine discret se fait par l'application des diverses méthodes numériques de discrétisation. Dans notre cas, on est principalement intéressé à la méthode des volumes finis (MVF) pour la transformation en un système des équations EDP à un système d'équations algébriques, lequel sera résolu par les méthodes itératives. Le chapitre suivant, sera dédié à représentation des résultats de simulation obtenus partir d'un code numérique développé et implémenté sous l'environnement MATLAB, auquel est associé un maillage localement raffiné ; régulier et irrégulier.

On choisir la méthode volumétrique plutôt que la méthode analytique par ce que la méthode des volumes finis est une approche numérique qui consiste à discrétiser le domaine d'étude en petits volumes dans lesquels les propriétés magnétiques sont supposées constantes et plus facile et pas compliqué par rapport à analytique. On résout ensuite les équations de Maxwell de manière numérique sur l'ensemble du domaine.

# Chapitre 04 :

# Application et validation

# *4. Application et validation*

***Introduction***

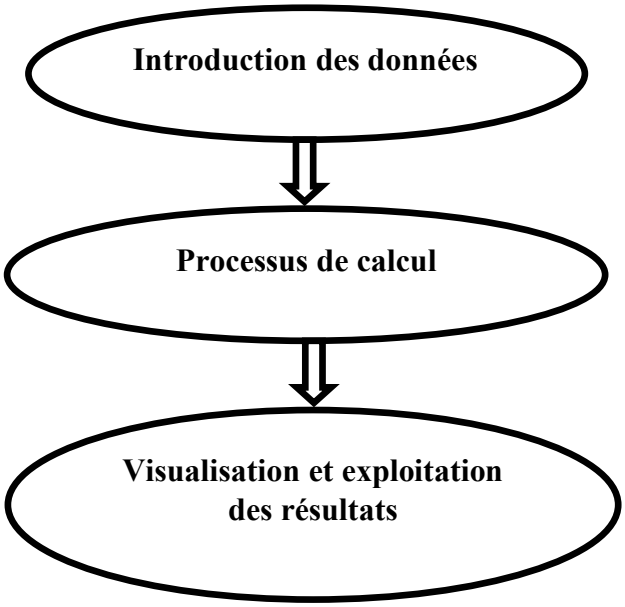
La modélisation des phénomènes magnétiques constitue un enjeu majeur dans l'optimisation des systèmes électromagnétiques, notamment dans le cadre de l'étude des machines électrique (dynamique, statique). Ce chapitre s'attache à présenter une méthodologie rigoureuse pour la modélisation et la validation d'un code de calcul par la méthode des volumes finis (MVF), couplée à un modèle énergétique.

L'approche étudiée sera premièrement validée par la méthode des éléments finis, implémentée via la plateforme de PDETOOL cet outil donne une résolution précise des équations magnétostatiques linéaire et analyse fine des distributions de champ magnétique.

Les résultats obtenus de la résolution de l'équation magnétostatique non linéaire seront représenté en deux cas, cas de comportement linéaire, ainsi que le cas de comportement non linéaire.

## *4.1.Organigramme de traitement du problème*

L'organigramme ci dessous décrit l'architecture du code de calcul dédié à la résolution de systèmes non linéaires. Le programme est modulé en différentes unités fonctionnelles, chacune assurant un rôle précis dans le processus de calcul.




**Organigramme 4-1**: Organigramme du code de calcul.

### *4.1.1. Introduction des données*

Dans ce module, on définit :

- La géométrie du dispositif (dimensions géométrique).
- Le maillage est l'élément essentiel pour la discrétisation spatiale du problème.
- Les propriétés physiques locales (perméabilité, densité de courant, fréquence…).
- Les frontières du domaine simulé, incluant les conditions aux limites qui simulent l'infini physique.

### *4.1.2. Processus de calcul*

Le modèle algébrique de l'équation obtenu dans le chapitre précédent, peut s'écrire sous une forme matricielle (format compact) est donné par $[A][x] = [B]$.

Par identification on aura : [K][A] = [F].

[K] : matrice de rigidité (matrice inclut les coefficients géométriques).

[A] : vecteur potentielle magnétique (inconnu).

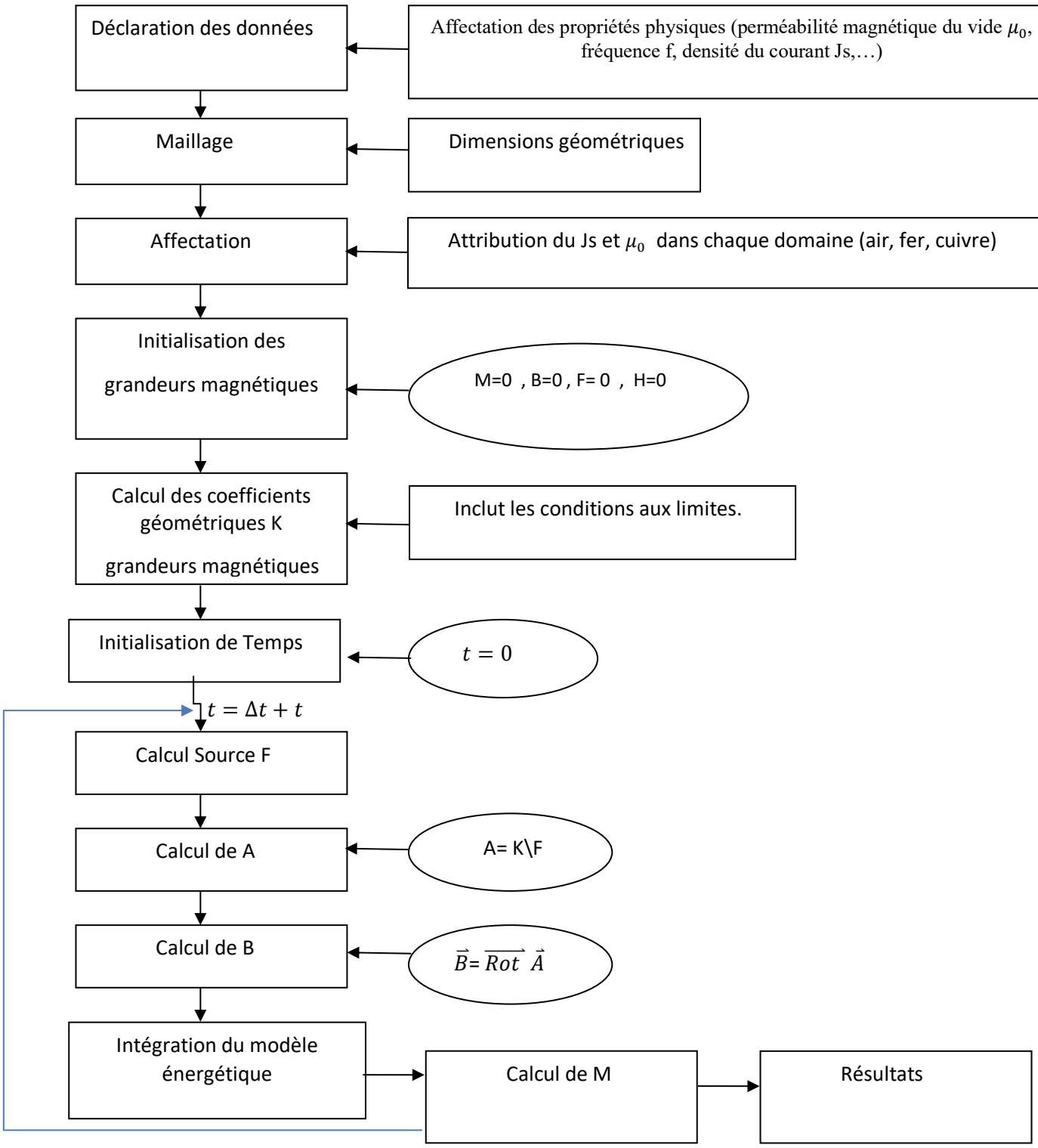
[F] : vecteur source (inclut la densité de courant, et l'aimantation).

En calculant les coordonnées des nœuds ainsi que les coefficients des matrices du système [K], à partir du maillage en volume finis et les propriétés en chaque nœud.

La méthode itérative de Gauss-Seidel a été utilisée pour résoudre le système matriciel [A] = [F][K], implémenté sous MATLAB, afin d'obtenir le vecteur potentiel magnétique $\vec{A}$. Les composantes du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ sont ensuite calculées à partir de la condition $\nabla \cdot \vec{B}=0$, puis introduites dans le modèle énergétique pour évaluer l'aimantation $\vec{M}$ et le champ magnétique $\vec{H}$. L'ensemble du processus est réitéré sur deux périodes temporelles.

### *4.1.3. Visualisation des résultats*

À cette étape, les grandeurs magnétiques (champ magnétique, densité de flux magnétique) du phénomène, ainsi que les cycles d'hystérésis au niveau de chaque nœud dans les zones ferromagnétiques, sont visualisés. L'organigramme suivant décrit les principales étapes de la méthode, allant du calcul des grandeurs physiques à la résolution de l'équation électromagnétique. Les résultats finaux incluent les distributions du champ magnétique $\vec{H}$, du vecteur potentiel magnétique $\vec{A}$ et de l'induction magnétique $\vec{B}$.




**Organigramme 4-2 :** Algorithme de résolution par FVM & ME.

## 4.2. Présentation du Problème

La figure 4.1 représente la géométrie de notre dispositif, caractérisé par des dimensions de 28 cm en longueur horizontale et 28cm en hauteur verticale. En premier lieu, il est alimenté par une densité de courant $\boldsymbol{J = 10^6}$ A/m² puis $\boldsymbol{J =}$

$\mathbf{3.10^6}$A/m² avec une fréquence de 50 Hz. Les conducteurs formant l'inducteur ont un diamètre de D=0,4cm, et l'entrefer est de E=0,003cm. Le matériau utilisé du circuit magnétique est caractérisé par un cycle d'hystérésis qui sera modélisé par le modèle énergétique, dont les paramètres sont présentés dans le tableau 4.1.

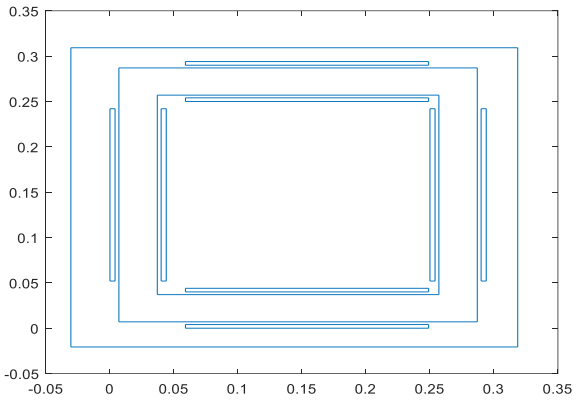



**Figure 4-1** : Géométrie de dispositif étudié.

**Tableau 4-1** : Tableau des paramètres du modèle.

| | |
|---|---|
| $M_s$ | $1.27 \cdot 10^6$ |
| $h$ | 4.93 |
| g | 9.51 |
| $k$ | 92.12 |
| $q$ | 12.40 |
| $c_r$ | 0.83 |

Compte tenu des limitations en ressources informatiques, tant au niveau de la mémoire que du temps de calcul, l'analyse a été restreinte à un quart de la géométrie du dispositif, illustrée dans la figure 4.1. La figure 4.2 présente ce quart choisi pour l'étude.

Pour garantir la précision requise, le domaine de simulation est limité à 0,25m dans les directions *Ox* et *Oy,* correspondant aux axes de symétrie du dispositif. Sur l'axe *Oy*, une condition aux limites de type Dirichlet avec potentiel vecteur nul ($\vec{A} = 0$) est

imposée, tandis que l'axe *Ox* est soumis à une condition de Neumann exprimant l'annulation de la dérivée de A par rapport à la normale du potentiel vecteur ( $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = 0$).

Aussi pour assurer une bonne étude et de précision de résultats, on discrétise le domaine d'étude en 10000pts, plus le nombre de point est grand (raffinage) plus les résultats soient précis. La figure 3.3 représente le maillage de domaine d'étude.

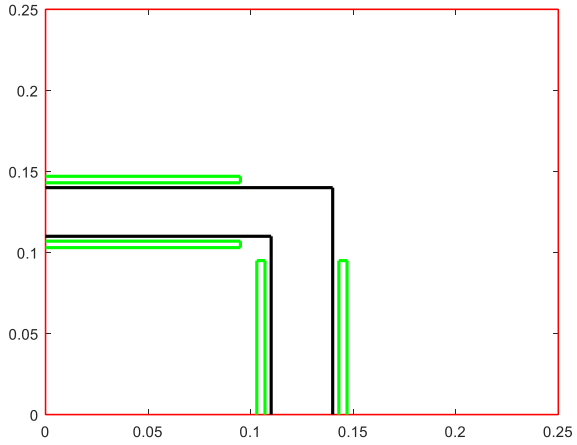



**Figure 4-2** : Représentation de ¼ de géométrie étudiée.

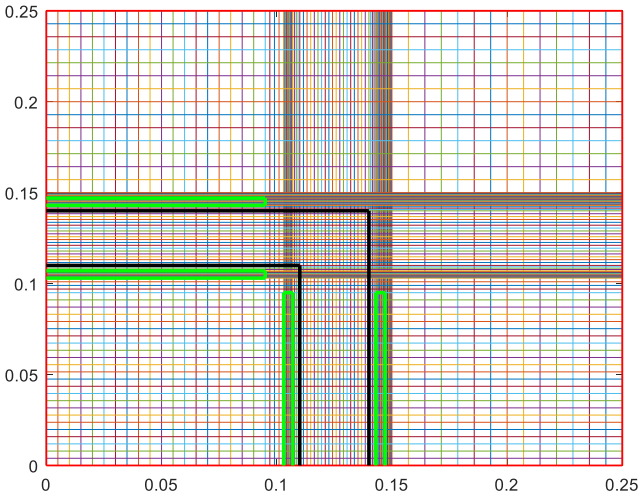


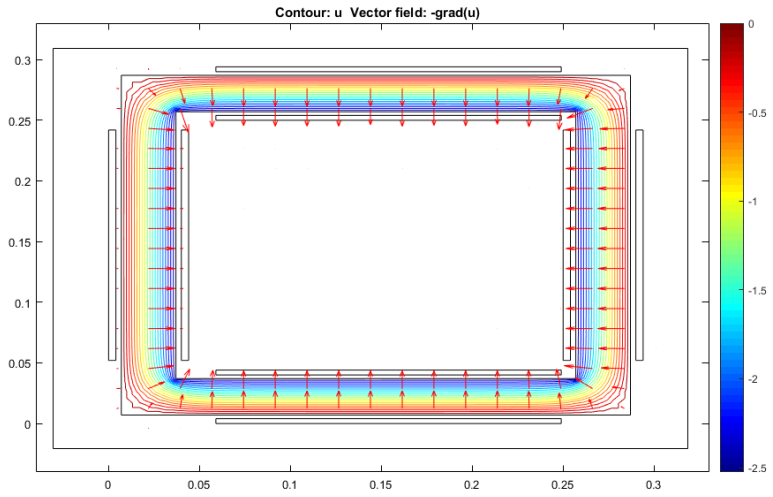

**Figure 4-3:** Illustration du maillage sur tous les domaines.

## *4.3. Résultats de simulation*

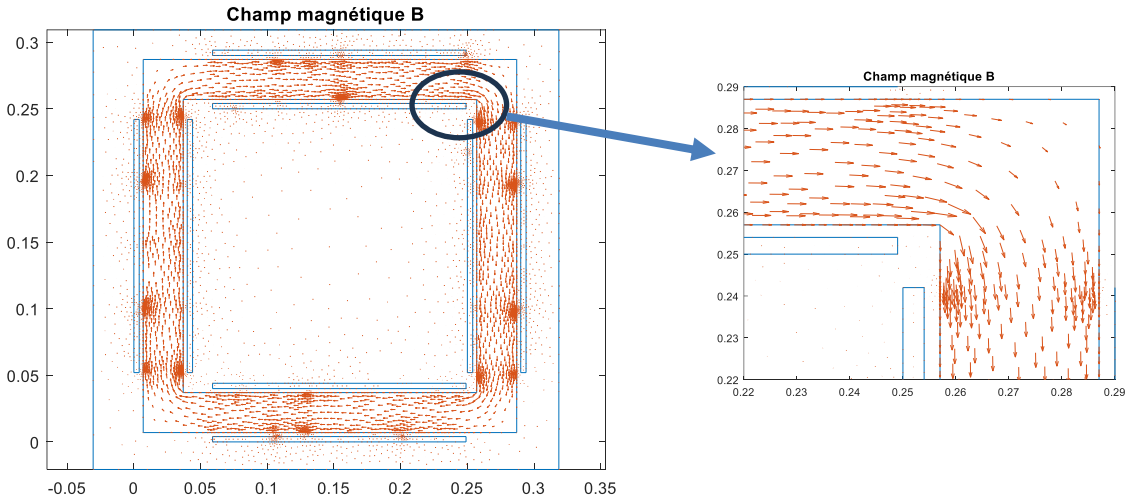
### *4.3.1. Comportement linéaire*

Dans cette section, premièrement on représente la distribution du potentiel vecteur magnétique et la répartition de la densité de flux magnétique obtenus par PDETOOL dans le dispositif complet (figure 4.4.a & figure 4.4.b), puis nous comparons les

résultats de la distribution du potentiel vecteur magnétique et la répartition de la densité de flux magnétique évalués par la méthode des volumes finis (figure 4.5.a) à ceux issus de la méthode des éléments finis (figure 4.5.b). Cette comparaison est effectuée dans le cas d'une perméabilité relative constante $\mu_r$=1500 et une densité de courant $J=1.10^6 A/m^2$.

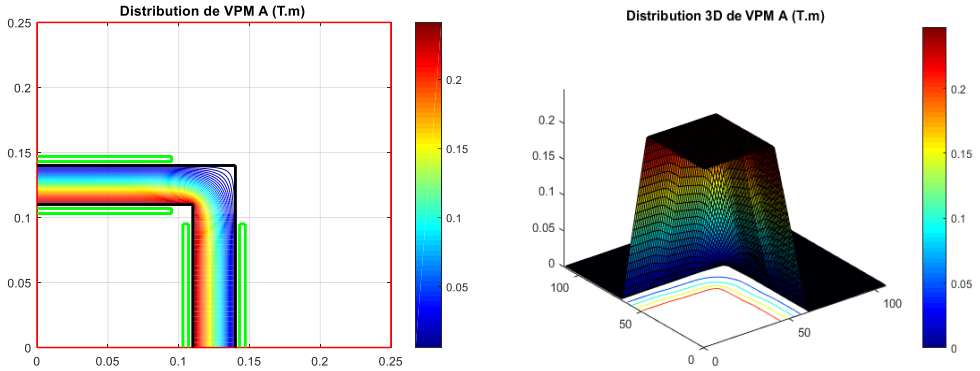



**(a)**

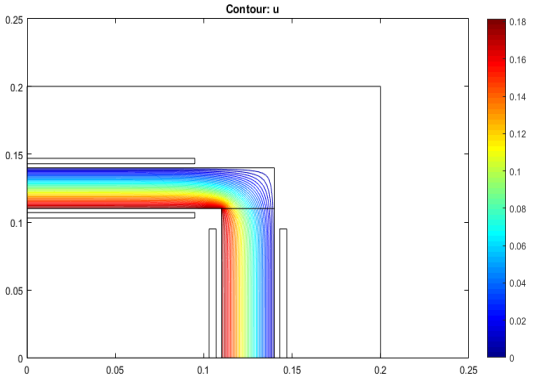



**(b)**

**Figure 4-4** : **(a)** Distribution de potentiel vecteur magnétique dans le dispositif complet par PDETOOL**. (b)** Répartition de l'induction magnétique $\vec{B}$ dans le dispositif complet par PDETOOL.




**(a)**

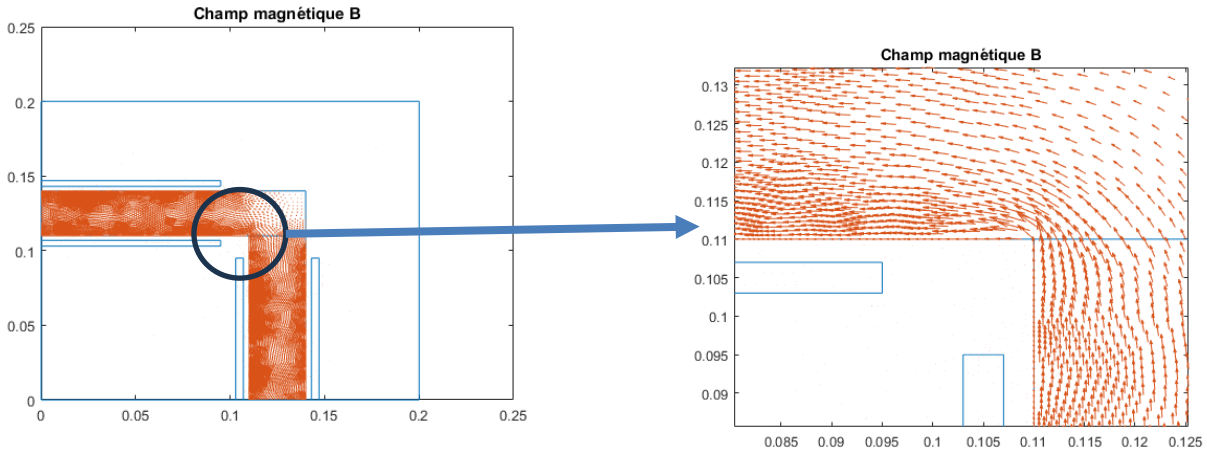



**(b)**

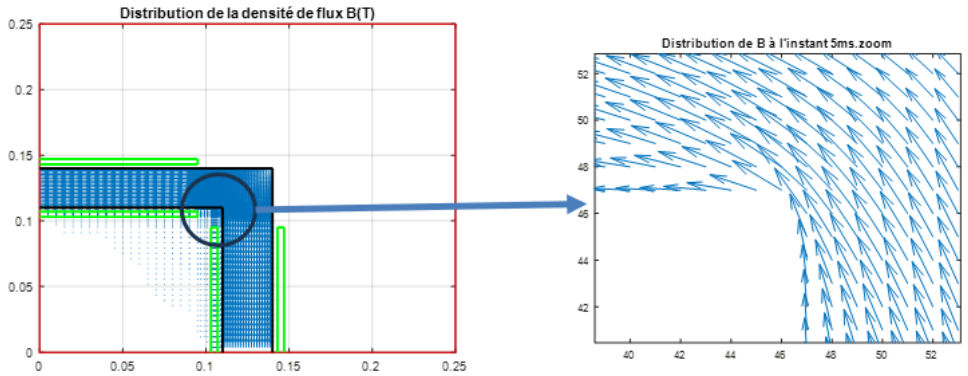
**Figure 4-5** : (**a).** Distribution de $\vec{A}$ obtenue par FVM**. (b).** Distribution de $\vec{A}$ obtenue par PDETOOL.

## Interprétation

Les résultats obtenus montrent que les lignes de champ du vecteur potentiel magnétique ($\vec{A}$) obtenus par FVM et PDETOOL sont identiques avec une amplitude max de l'ordre A=0.2 T.m, ce qui prouve de l'efficacité de la méthode des volumes finis pour ce type de problème. En outre, dans la figure 4.6.a l'induction magnétique générée par PDETOOL présente une forme similaire à celle obtenue par FVM (figure 4.6.a), ce qui confirme la pertinence et la fiabilité de la méthode employée.




**(a)**




**(b)**

**Figure 4-6: a.** Répartition de $\vec{B}$ obtenu par PDETOOL**. b.** Répartition de $\vec{B}$ obtenu par FVM.

### *4.3.2. Comportement non linéaire*

Dans cette partie, en premier lieu on représente les résultats obtenus par l'approche de l'intégration de FVM avec EM, cette approche permet de visualiser la distribution du potentiel vecteur magnétique et la répartition de la densité de flux magnétique à chaque instant dans le cas de perméabilité variable et (figure 4.7.a & figure 4.7.b); la simulation a été effectuée avec $J=1.10^6 A/m^2$ et $J=3.10^6 A/m^2$.

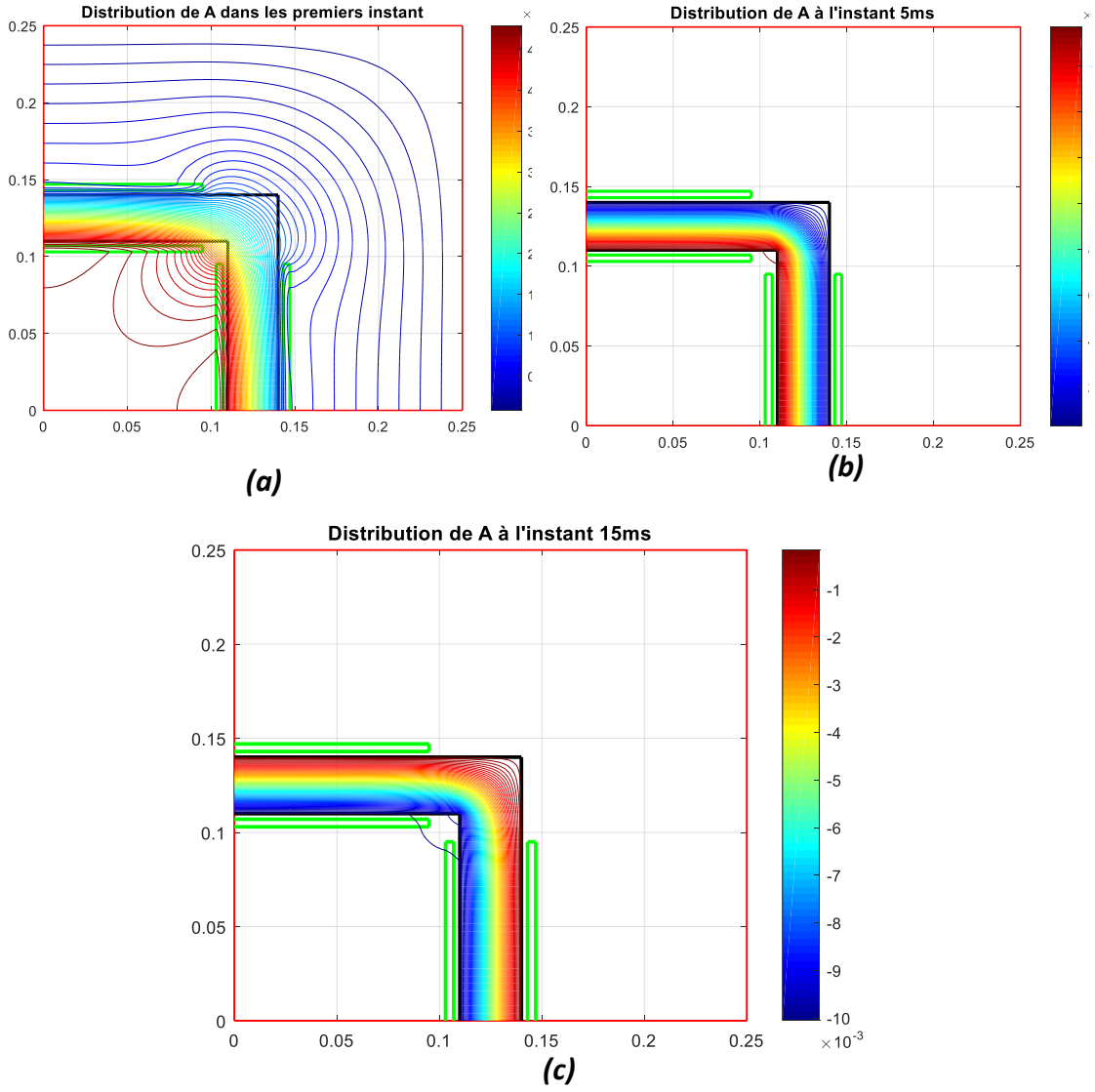
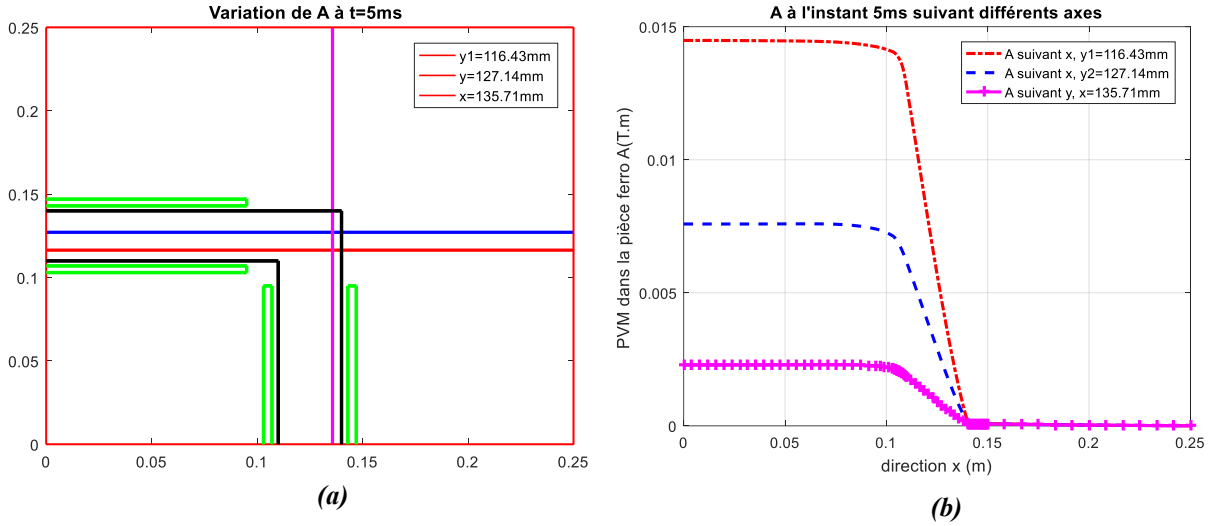



**Figure 4-7: (a) :** Distribution de $\vec{A}$ dans les premiers instants. **(b) :** Distribution de $\vec{A}$ dans l'instant 5ms. **(c) :** Distribution de $\vec{A}$ dans l'instant 15ms.

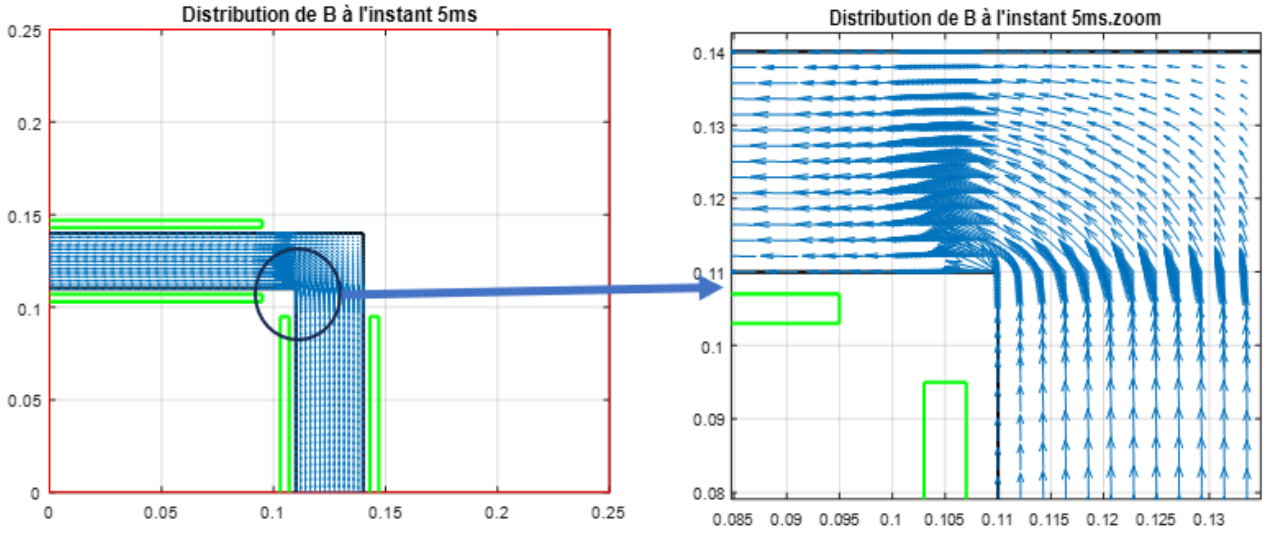
La figure (4.7.a) montre la distribution de vecteur potentiel magnétique ($\vec{A}$) obtenus par FVM avec une amplitude max de l'ordre A=4,5.10$^{-6}$T.m, cette amplitude traduit une perméabilité encore faible, ce qui indique que le matériau n'est pas encore saturé, en raison de la non-orientation complète des moments magnétiques, tandis que la figure (4.7.b), illustre une concentration de $\boldsymbol{A}$ dans la zone ferromagnétique avec une amplitude max de l'ordre A=16.10$^{-3}$T.m, cette intensification du champ entraîne une élévation de la perméabilité du matériau, favorisant ainsi la concentration du flux magnétique dans cette région, et cela revient à la saturation du matériau en raison de l'orientation complète des moments magnétiques ; alors que la figure (4.7.c) clarifie la concentration de $\boldsymbol{A}$ en sens inverse par rapport à la figure (4.7.b), et cela, dû à l'inversion de l'excitation de courant électrique (alternance négative).

La figure 4.8.b représente l'évaluation de A dans des axes choisis, on remarque la distribution de ***A*** dans les frontières de dispositif suivant l'axe de '***x***' prend une valeur max, puis se diminue à chaque fois on rapproche aux limites de domaine.

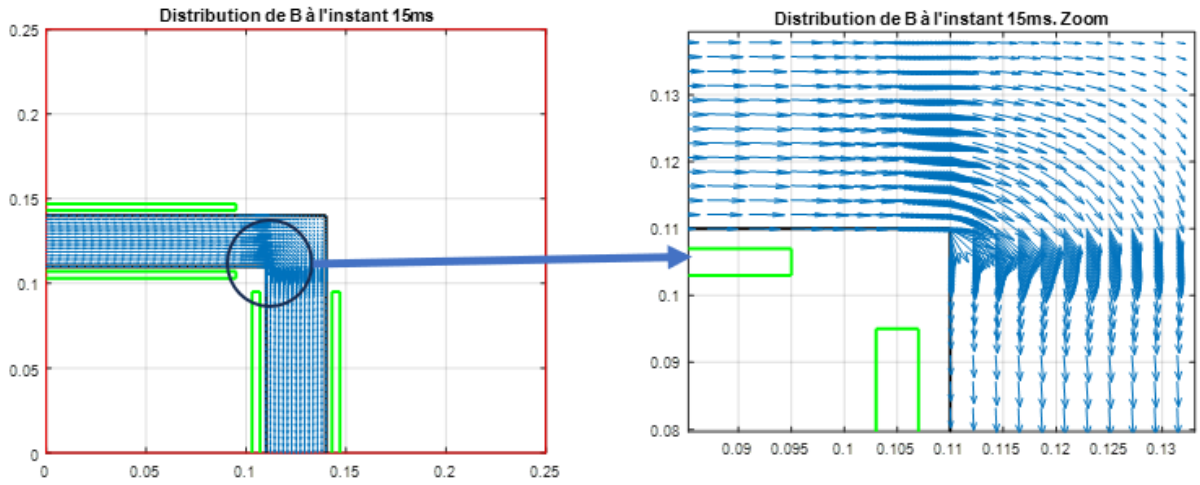



***(a)*** ***(b)***

**Figure 4-8: (*a*)** Axe de visualisons de $\vec{A}$ **(b)** Evolution de $\vec{A}$ dans les axes '***x***' et '***y***'




***(a)***




*(b)*

**Figure 4-9 : (a) :** Distribution de $\vec{A}$ dans l'instant 5ms. **(b) :** Distribution de $\vec{A}$ dans l'instant 15ms.

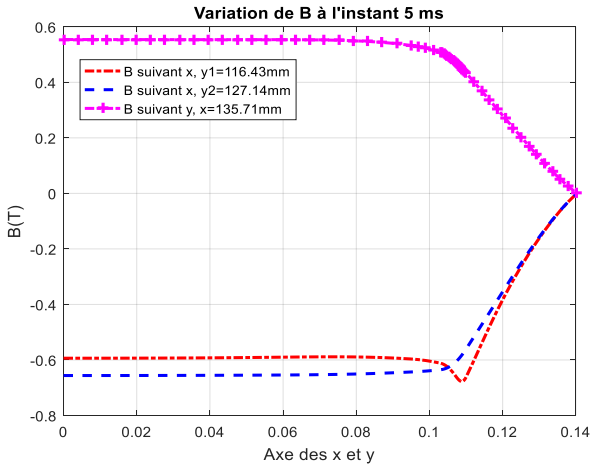



**Figure 4-10** : Evolution de $\vec{B}$ dans les axes '$x$' et '$y$'

Les figures 4.9.a et 4.9.b illustrent la distribution spatiale de l'induction magnétique $\vec{B}$ obtenue à l'aide de la méthode des volumes finis (FVM) à deux instants différents. Il est clairement observable que $\vec{B}$ adopte des directions opposées entre ces deux instants, ce qui s'explique par l'inversion du courant d'excitation lors de l'alternance négative. Il en résulte que les lignes d'induction $\vec{B}$ sont tangentes aux lignes de niveau du vecteur potentiel magnétique $\vec{A}$.

La figure 4.10 illustre l'évaluation de $\vec{B}$ selon des axes choisis. On observe que la l'induction magnétique $\vec{B}$ le long de l'axe '$x$' atteint une valeur maximale, puis décroît progressivement à mesure que l'on s'approche des frontières du domaine.

### *4.4. Cycle d'hystérésis*

Le code de calcul a permis de tracer les cycles d'hystérésis en chaque point du dispositif. À titre d'exemple, la figure 4.10 présente une sélection de points représentatifs situés à l'intérieur de la pièce ferromagnétique et Les cycles d'hystérésis associés à ces points sont illustrés. Le cycle global de dispositif est celui calculé dans la longueur moyenne des culasses.

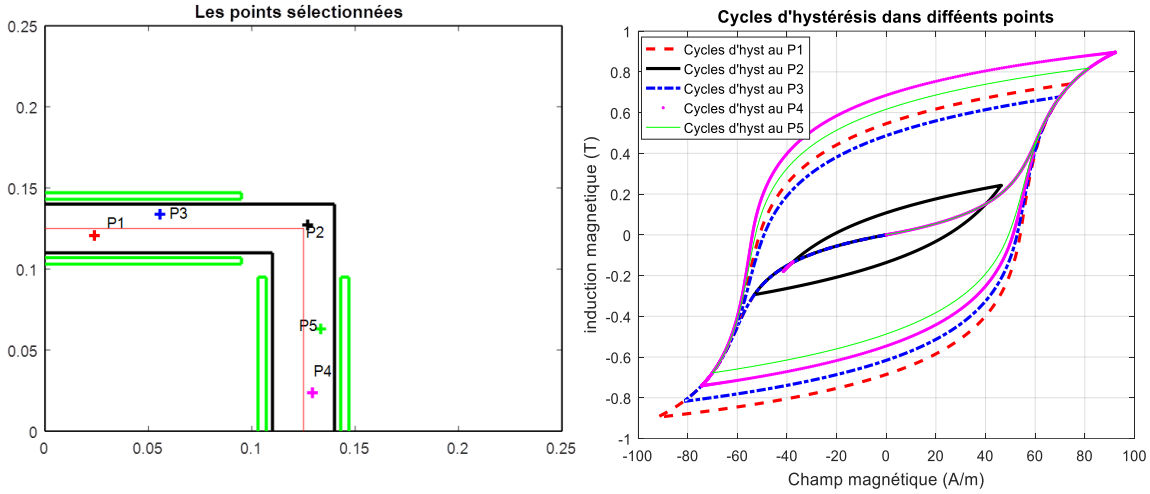



**Figure 4-11.** Les endroits choisis au milieu matériel et les cycles d'hyéstérisis associés.

La figure 4.11 montre que les cycles d'hystérésis aux points P1, P3, P4 et P5 sont plus larges que ceux observés aux points P2. Cela indique que les pertes par hystérésis sont plus importantes aux points P1, P3, P4 et P5, comparativement aux autres zones analysées.

Par ailleurs, il est également possible de représenter les formes d'onde de l'induction magnétique et du champ magnétique pour ces mêmes points. Les figures (4.12) illustrent respectivement les évolutions temporelles de ces grandeurs.

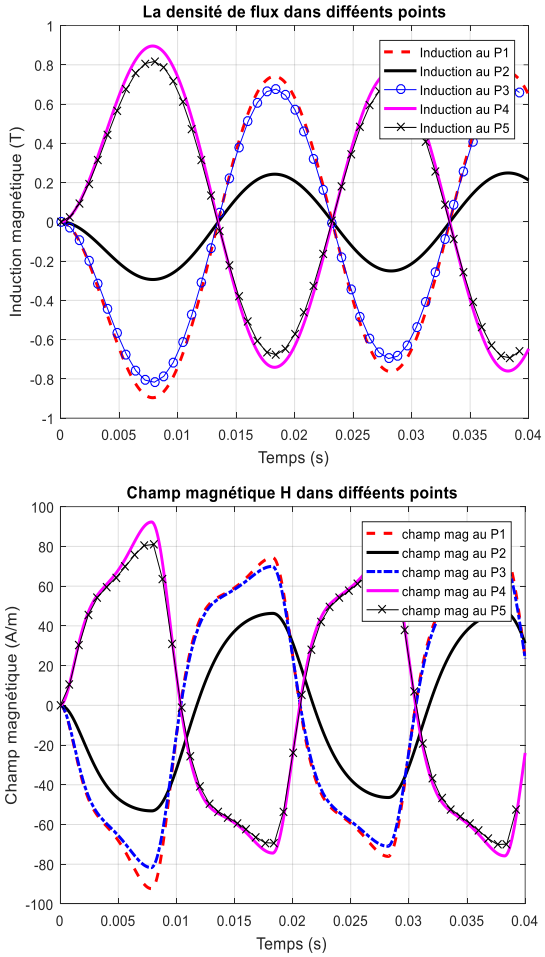



**Figure 4-12** : Induction magnétique et champ magnétique dans les endroits choisis.

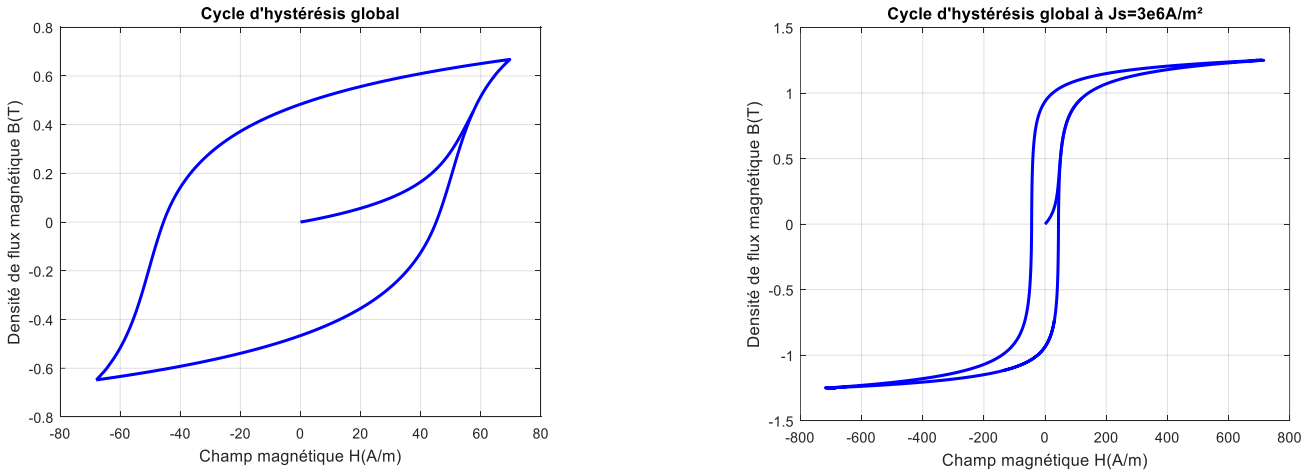



**Figure 4-13** : Cycles d'hyéstérisis avec une densité $J=1.10^6 A/m^2$ et $J=3.10^6 A/m^2$.

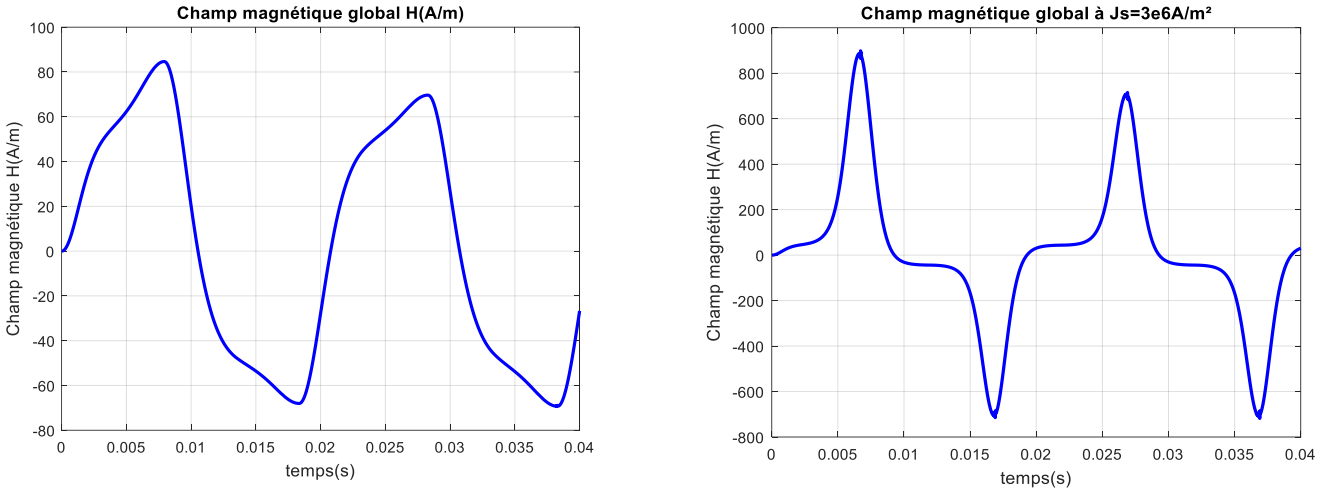



**Figure 4-14** : Champ magnétique avec une densité $J=1.10^6 A/m^2$ et $J=3.10^6 A/m^2$.

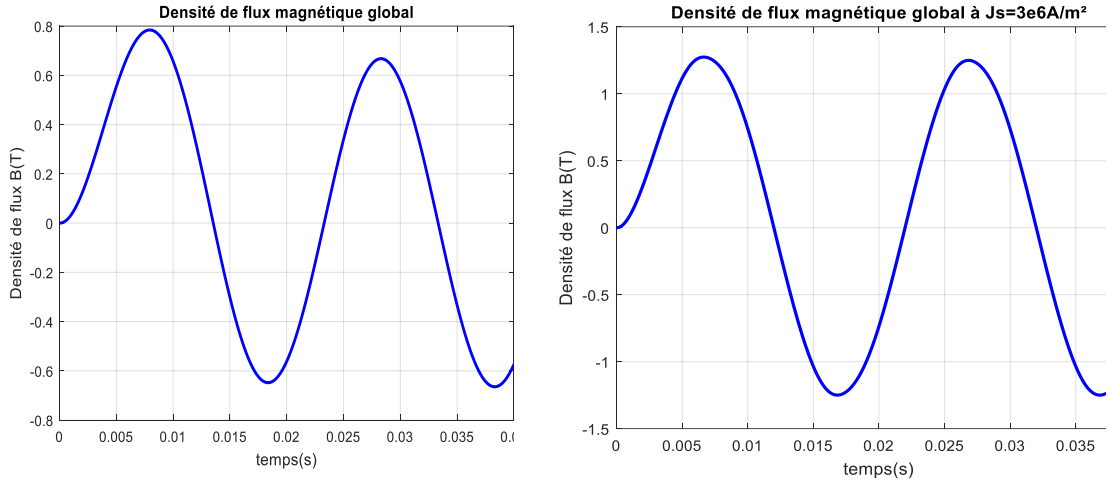



**Figure 4-15 :** Induction magnétique avec une densité $J=1.10^6 A/m^2$ et $J=3.10^6 A/m^2$.

Le code de calcul développé a permis de visualiser les cycles d'hystérésis global en chaque point du dispositif. On remarque Lorsque l'excitation est faible amplitude $J=1.10^6 A/m^2$, l'induction $B$ attient une valeur max $B=0.8T$ et $H=70A/m$, ce qui traduit une aimantation partielle du matériau et des pertes hystérétiques relativement faibles, et cela explique que l'aimantation est irréversible faible. En revanche, pour une excitation plus élevée, $J=3.10^6 A/m^2$, l'induction $B$ attient une valeur max $B=1.36T$ et $H=700A/m$,, traduisant une saturation progressive du matériau ainsi qu'une augmentation significative des pertes par hystérésis. Les figures suivantes représentent la perméabilité absolue dans les deux cas $J=1.10^6 A/m^2$ et $J=3.10^6 A/m^2$. On remarque en régime non linéaire dans le cas $J=1.10^6 A/m^2$ la perméabilité est

faible, dû à l'excitation faible, en fort J, nous remarquons une saturation progressive, domaine d'aimantation irréversible et μ diminue fortement.

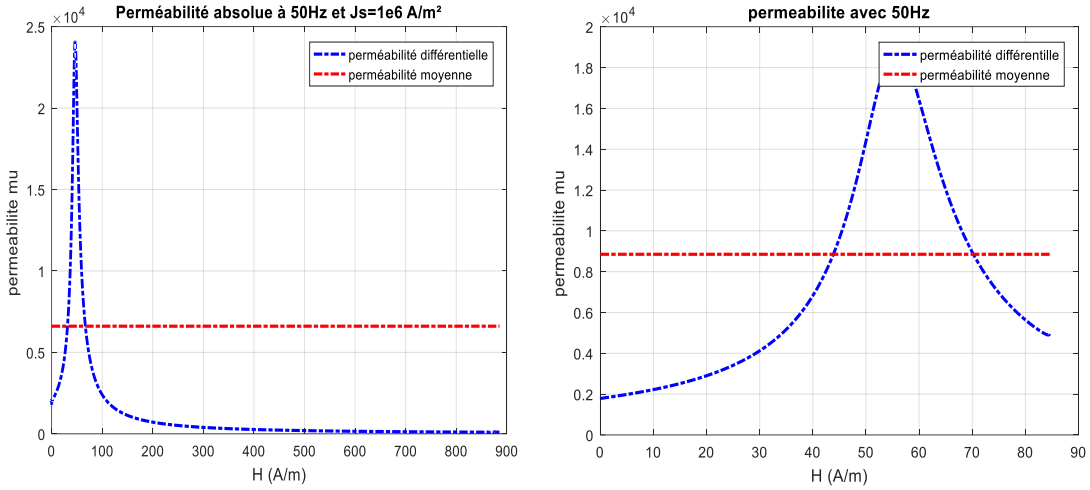



**Figure 4-16** : Perméabilité absolue avec une densité ***J=1.10⁶A/m²*** **et** ***J=3.10⁶A/m².***

### *Conclusion*

Dans ce chapitre, nous avons validé notre code de calcul basé sur le couplage entre le modèle énergétique et la méthode des volumes finis. Dans un premier temps, nous avons supposé que la perméabilité du dispositif était constante (comportement linéaire), ce qui ne reflète pas fidèlement le comportement réel du matériau, mais permet d'obtenir une première approximation des grandeurs recherchées. Afin d'améliorer la précision des résultats, nous avons intégré le modèle énergétique dans le code de volumes finis. Cette intégration a permis d'obtenir des résultats plus représentatifs du comportement réel du dispositif. Les résultats obtenus démontrent l'efficacité de ce modèle et montrent que notre code est apte à modéliser d'autres dispositifs électromagnétiques de manière fiable.

# Conclusion Générale

# *Conclusion Générale*

Au terme de cette étude, il apparaît clairement que l'intégration rigoureuse de l'analyse théorique, fondée sur les équations de Maxwell, et de la modélisation numérique avancée a permis de développer une compréhension fine et exhaustive du comportement des matériaux ferromagnétiques soumis à des champs magnétiques variables. Le phénomène d'hystérésis, qui reflète la mémoire magnétique, la non-linéarité et la dissipation d'énergie dans ces matériaux, a été modélisé avec une grande précision grâce à une approche énergétique innovante.

Parmi les résultats les plus significatifs de ce travail, on peut citer :

- **La performance du modèle énergétique** : Ce modèle s'est distingué par sa capacité à reproduire fidèlement les cycles d'hystérésis complexes, en tenant compte des effets de saturation, de coercitivité, de rémanence et de pertes internes. Il offre une représentation cohérente et robuste du comportement magnétique, tout en s'adaptant facilement à des implémentations numériques.
- **La fiabilité de la simulation numérique** : L'utilisation de la méthode des volumes finis (MVF) a permis de simuler efficacement la distribution du champ magnétique **H** et du potentiel vecteur **A**, avec une excellente concordance avec les résultats obtenus via la méthode des éléments finis (FEM). Cette approche a également mis en évidence les zones critiques, comme les points P5 et P6, caractérisées par des pertes magnétiques élevées, ce qui représente un apport décisif pour l'optimisation géométrique des noyaux magnétiques.
- **Les perspectives applicatives** : Le modèle développé peut être utilisé pour guider la conception de dispositifs électromagnétiques tels que les transformateurs, les machines électriques ou les inductances, en identifiant les régions à forte densité de pertes afin de réduire les effets dissipatifs et améliorer la performance énergétique globale des systèmes.

Cependant, certaines limitations persistent, notamment la complexité liée au calcul du champ d'aimantation **M** dans les milieux hétérogènes et la lourdeur computationnelle des simulations tridimensionnelles à haute résolution. Ces défis ouvrent la voie à plusieurs perspectives prometteuses :

- L'intégration d'**algorithmes d'intelligence artificielle**, notamment d'apprentissage automatique, pour accélérer l'identification des paramètres internes du modèle.
- L'extension de cette méthodologie aux **matériaux nanostructurés**, qui présentent des propriétés magnétiques émergentes et inédites, potentiellement exploitables dans les dispositifs de nouvelle génération.

En définitive, cette thèse constitue une contribution notable à l'ingénierie électromagnétique moderne, en illustrant comment les outils théoriques et numériques peuvent être harmonieusement articulés pour répondre à des enjeux industriels concrets. Elle confirme également le rôle stratégique de la simulation scientifique dans l'optimisation des matériaux magnétiques, dans un contexte d'innovation technologique et de transition énergétique.

# *Références*


[1] Cullity, B. D., & Graham, C. D. (2011). *Introduction to magnetic materials*. John Wiley & Sons.

[2] M. Lax et D. F. Nelson, « Maxwell equations in material form », *Phys. Rev. B*, vol. 13, n° 4, p. 1777, 1976.

[3] I. Belgasmi et M. Hamimid, « Accurate hysteresis loops calculation under the frequency effect using the inverse jiles-atherton model », *Adv. Electromagn.*, vol. 9, n° 2, p. 93-98, 2020.

[4] P. Curie, « Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique », *J. Phys. Théorique Appliquée*, vol. 3, n° 1, p. 393-415, 1894.

[5] G. Lucenet et J. Lafoucriere, « Une methode de calcul des formes polaires destinees a fournir une induction magnetique de topographie pre-determinee », *Nucl. Instrum. Methods*, vol. 24, p. 51-54, 1963.

[6] A. Bossavit, « Le calcul des courants de Foucault, en trois dimensions, en présence de corps à haute perméabilité magnétique », *Rev. Phys. Appliquée*, vol. 23, n° 6, p. 1147-1159, 1988.

[7] P. Weiss, « L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique », *J Phys Theor Appl*, vol. 6, n° 1, p. 661-690, 1907.

[8] D. C. Jiles, « Dynamics of domain magnetization and the Barkhausen effect », *Czechoslov. J. Phys.*, vol. 50, n° 8, p. 893-924, 2000.

[9] P. Mironescu, « Les minimiseurs locaux pour Péquation de Ginzburg-Landau sont: 71 symétrie radiale », 1996.

[10] M. Dafri, A. Ladjimi, S. Mendaci, et A. Babouri, « Phenomenological model of the temperature dependence of hysteresis based on the Preisach model », *J. Supercond. Nov. Magn.*, vol. 34, p. 1453-1458, 2021.

10] M. Hamimid, « Modèles de l'hystérésis magnétique et leurs implémentations par la méthode des volumes finis dans les dispositifs électromagnétiques », Université Mohamed Khider Biskra., 2011.

[11] B. Karima, « Modélisation de l'hystéresis magnétique en vue d'une application industrielle », Université Mouloud Mammeri, 2015.

[12] C. Guérin, « Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique », Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 1994.

[13] O. Maloberti, « Contribution à la modélisation de la dynamique d'aimantation dans les matériaux magnétiques doux: Caractérisation et simulation », Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2006.

[14] M. L. Ababsa, « Caractérisation de composants magnétiques et diélectriques pour les machines électriques tournantes très haute température », Artois, 2018.

[15] I.E. Commission, "Magnetic materials-part 2 methods of measurement of the magnetic properties of electrical steel sheet and strip by means of an Epstein farme, IEC Stand., p60042,1996.

[16] U. D. Annakkage, P. G. McLaren, E. Dirks, R. P. Jayasinghe, et A. D. Parker, « A current transformer model based on the Jiles-Atherton theory of ferromagnetic hysteresis », *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 15, n° 1, p. 57-61, 2000.

[17] J. A. Ewing, « X. Experimental researches in magnetism », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, n° 176, p. 523-640, 1885.

[18] Petersen, A. (1963). The philosophy of niels bohr. *Bulletin of the atomic scientists*, *19*(7), 8-14.

[19] Hodgdon, M. L. (2002). Mathematical theory and calculations of magnetic hysteresis curves. *IEEE Transactions on magnetics*, *24*(6), 3120-3122.

[20] Tannous, C., & Gieraltowski, J. (2008). The Stoner–Wohlfarth model of ferromagnetism. *European journal of physics*, *29*(3), 475.

[21] Hauser, H. (2004). Energetic model of ferromagnetic hysteresis: Isotropic magnetization. *Journal of applied physics*, *96*(5), 2753-2767.

[22] Fetouhi, L. (2018). Caracterisation et modilisation du comportement des materieaux ferromag doux.

[23] A. Nourdine, "Modélisation de l'hystérésis dans les matériaux magnétiques et Introduction de modèles dans le logiciel de simulation aux éléments finis Flux3D", Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique De Grenoble, France, 2002.

[24] M. Hamimid., "Modèles de l'hystérésis magnétique et leurs implémentations par la méthode des volumes finis dans les dispositifs électromagnétique", Thèse de Doctorat, Université de Biskra, Algérie, 2011.

[25] A, Hammouche . M, Hamimid. A, Kansab, B, Belmadani. 'Integration of energetic model for ferromagnetic hysteresis in finite volume method for electromagnetic field calculation'. Instrumentation Mesure Métrologie, Vol. 20, No. 1, pp. 23-27. (2021).

[26] K.W. Morton and D.F. Mayers. Numerical Solution of Partial Di erential Equation ,Cambridge University Press 2005.

[27] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois. Méthode des éléments nis , Lavoisier,Paris 2005.

[28] S. V. Patankar, Numerical heat transfer and uid ow , Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. 1980 Hemisphere Publishing Corporation.

[29] MICHEL HULIN, NICOLE HULIN et DENISE PERRIN « Equation de MAXWELL ondes électromagnétique » Dunod, France : 1991.

[30] M.BERTIN, J.P.FAROUX et J.RENAULT « Electromagnétique électrostatique et magnétique » Dunod, pairs, France : 1999.

[31] EDGARD ELBAZ « L'électromagnétisme à l'électrofaible monopoles magnétiques » Ellipses, pairs : 1989.

[32] JOSEPH A.EDMINISTER « Electromagnétisme » Série Schaum, pairs, France 1985.

[33] L. Arbenz.,"Caractérisation des propriétés électromagnétiques des matériaux magnétiquement doux : application aux roues polaires de machine à griffes ", Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de ParisTech, France, 2016.

[34] BELKHIRI Yamina," Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques et Mécaniques Couplés par la Méthode des Volumes Finis (CVM) ",MEMOIRE DE MAGISTER , UNIVERSITE DE BATNA, 2012.

[35] AUSLEN DER « Optimisation Méthode numérique » Masson, New York, USE : 1986.

[36] AZZOUI SEDDIK « Modélisation des phénomènes électromagnétique et thermique Couplés dans les dispositifs de chauffage par induction par Couplage: Méthode des volumes finis (CVM)-Algorithme Alterné » Thèse de Magister, machines électriques Batna : 2002.

[37] HAMIMID MOURAD « Modélisation axisymétrique par la Méthodes des volumes finis Du Transformateur à plasma thermique inductif » Thèse Magister, Réseaux électriques, Batna : 2000/2001.

[38] A. Chentouf, "Contribution à la modélisation électrique, magnétique et thermique d'un applicateur de plasma inductif haute fréquence''. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1994.

[39] Dubas, F.; Rahideh, A. 2-D analytical PM eddy-current loss calculations in slotless PMSM equipped with surface-inset magnets.

[40] Rahideh, A.; Korakianitis, T. Analytical calculation of open-circuit magnetic field distribution of slotless brushless PM machines. *Electr. Power Energy Syst.* **2012**, *44*, 99–114.

[41] Dubas, F. Conception D'un Moteur Rapide à Aimants Permanents Pour L'entraînement de Compresseurs de Piles à Combustible. Ph.D. Thesis, University of Franche-Comté (UFC), Belfort, France, 2006.

# ANNEXES

## *ANNEXE 1*

## *ANNEXE 2*