



Mémoire de fin d'études

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE : Master

Filière : Physique
Option : Physique des Matériaux

THÈME :
Systemes non-hermitiques dépendants du temps:
Système à deux niveaux

Préparé par : SILEM Samah

Soutenu le : 01/06/2026

Devant le jury :

Président :	MIHOUBI Karima	MCB	Université de BBA
Rapporteur :	KOUSSA Welid	MCB	Université de BBA
Co-rapporteur :	SAAD SAOUD Fatma	MCA	Université de BBA
Examineur :	LAMRI Sara	MCB	Université de BBA

Année Universitaire 2025-2026

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents, pour leur amour, leurs sacrifices et leur soutien inconditionnel tout au long de mon parcours.

*À mes chers frères, **LEHLALI** et **ABDESSEMAD**, mes piliers et mes fidèles soutiens dans les moments les plus précieux.*

*À mes chères sœurs, **KHOULOU** et **BATOUL**, sources de joie, de tendresse compagnons de voyage*

À toute ma famille, mes amis, et tous ceux qui me sont chers.

Merci à vous tous, du fond du cœur.

SAMAH

Remerciements

Je tiens à adresser mes profonds remerciements à l'égard de mon encadreur de mémoire Dr. **Koussa Welid**, car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cet mémoire.

Je tiens à remercier Dr. **Mihoubi Karima**, d'avoir bien voulu présider mon jury de mémoire.

J'adresse tous mes remerciements au membre de jury Dr. **Lamri Sara** et l'honneur qu'elle ma fait en étant l'examinatrice de ce travail.

Je remercie sincèrement Dr. **Saad Saoud Fatma**, pour son soutien précieux et son accompagnement professionnel tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants du département de physique qui ont contribué à ma formation par leurs conseils et leurs orientations.

Table des matières

Introduction	6
1 $\mathcal{PT}$-symétrie et pseudo-Hermiticité	8
1.1 Symétrie $\mathcal{PT}$ et $\mathcal{CPT}$	8
1.1.1 $\mathcal{PT}$ -symétrie	8
1.1.2 Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétriques	10
1.1.3 Les énergies lorsque la symétrie $\mathcal{PT}$ est brisée	11
1.1.4 $\mathcal{PT}$ -produit scalaire	12
1.1.5 L'opérateur $\mathcal{C}$ et le $\mathcal{CPT}$ produit scalaire	13
1.1.6 Système à deux niveaux indépendant du temps	14
1.2 Pseudo-hermiticité	16
1.2.1 Hamiltoniens pseudo-hermitiques	16
1.2.2 Spectre d'un hamiltonien pseudo-hermitique	18
1.2.3 Pseudo produit scalaire $\langle \psi_1 \psi_2 \rangle_\eta$	19
1.2.4 Base bi-orthonormée des Hamiltoniens pseudo-Hermitiques	20
1.2.5 Équivalence de pseudo-Hermiticité et symétries antilinéaires	21
1.2.6 Oscillateur harmonique dans un champ complexe uniforme	22
2 Systèmes quantiques non-hermitiques dépendants du temps	24
2.1 Équation de Schrödinger	24
2.2 Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger	26
2.2.1 Approximation soudain	27

2.2.2	Théorie des invariants de Lewis-Reisenfeld	27
2.2.3	Exemple illustratif 1 : Oscillateur harmonique de fréquence dépendante du temps	30
2.2.4	Exemple illustratif 2 : Interaction spin champs magnétique	31
2.3	Méthode des invariants pseudo-hermitiques	33
3	Système à deux niveaux dépendant du temps	35
3.1	Invariant pseudo-Hermitique de $H(t)$	36
3.2	Le vecteur d'onde spinoriel	37
3.3	Cas particulière : Etats stationnaires du spin soumis à l'action d'un champs magnétique constant	41
	Conclusion	43
	Bibliographie	44

Introduction

La mécanique quantique est l'un des fondements de la physique moderne. Depuis sa formulation au début du XXe siècle, elle a permis de décrire avec précision le comportement des systèmes microscopiques grâce à l'équation de Schrödinger et au concept d'hamiltonien hermitique. Dans la formulation standard de la mécanique quantique, la nature hermitienne de l'hamiltonien est une condition nécessaire à l'existence de valeurs propres réelles, ainsi qu'à la conservation de la probabilité de présence au cours du temps.

Cependant, plusieurs études ont montré que certains hamiltoniens non hermitiques peuvent posséder un spectre réel et une évolution physique unitaire. Le concept d'hamiltoniens non hermitiques a été introduit pour la première fois en 1959 par Wu Tai-Tsun lors de son étude de l'état fondamental des systèmes de Bose. Plus tard, en 1967, Jack Wong a étudié certains hamiltoniens non hermitiens, démontrant que la propriété hermitienne peut être perdue lorsque le système interagit avec un environnement extérieur.

L'année 1998 a marqué un tournant décisif dans le domaine de la physique théorique avec les travaux pionniers de Carl Bender et Stefan Boettcher. En introduisant le concept de symétrie PT , ils ont démontré que l'hermiticité d'un Hamiltonien n'est pas une condition nécessaire pour obtenir des valeurs propres réelles. Ils ont prouvé qu'un Hamiltonien non hermitien ($H \neq H^\dagger$), invariant sous l'action combinée des opérateurs de parité P et de renversement du temps T , peut posséder un spectre d'énergie réel et positif, tant que cette symétrie n'est pas brisée. Cette découverte majeure a donné naissance à une extension fondamentale du formalisme standard, désormais connue sous le nom de mécanique quantique PT -symétrique.

Quelques années plus tard, Mostafazadeh (2002) a introduit la théorie de la pseudo-Hermiticité.[15, 16, 17] considérée comme une généralisation de la PT symétrie. Cette théorie permet d'introduire un opérateur métrique η reliant un Hamiltonien non hermitien à un Hamiltonien hermitien équivalent, assurant ainsi la réalité du spectre et l'unitarité de l'évolution temporelle.

Dans le cas des systèmes dépendants du temps, la résolution de l'équation de Schrödinger devient plus difficile, particulièrement lorsque l'Hamiltonien est non hermitien. Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ce type de problèmes, telles que l'approximation adiabatique, l'approximation soudaine ainsi que la méthode des invariants $I^{PH}(t)$ introduite

par H. R. Lewis et W. B. Riesenfeld en 1969.

Nous commençons le premier chapitre par une introduction aux notions de PT symétrie et de pseudo-hermiticité. Le deuxième chapitre présente la méthode des invariants pseudo-hermitiens pour déduire la solution de l'équation de Schrödinger des systèmes non hermitiques dépendants du temps. Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un système à deux niveaux dépendant du temps.

Chapitre 1

$\mathcal{PT}$ -symétrie et pseudo-Hermiticité

L'idée des Hamiltoniens complexes avait déjà fait surface dans des domaines divers, tels que la diffusion mécanique quantique conventionnelle [3]. En 1959 Wu Tai Tsun a publié un article [4] dont l'objectif était calculé l'énergie de l'état fondamental des sphères de Bose. Wu avait constaté que cette énergie était divergente, afin de résoudre ce problème il a utilisé un hamiltonien non hermitique et non diagonalisable. Ce qui est impressionnant dans ce travail est que les valeurs propres de ce Hamiltonien sont réelles, quoi que, le papier n'a offert aucune justification pour la représentation de tel hamiltonien.

En 1967, Jack Wonga a publié un article [5] dans lequel il a fait la remarque que les hamiltoniens des systèmes fermés sont décrits par des hamiltoniens hermitiques, cependant, l'hamiltonien perd son Hermiticité lorsqu'une interaction externe est considérée. Ces hamiltoniens peuvent avoir une partie du spectre qui est discrète, de plus, les valeurs propres qui sont complexes semblent être admises pourtant il n'y a pas d'explication de la façon dont elles pourraient probablement être physiquement raisonnable.

1.1 Symétrie $\mathcal{PT}$ et $\mathcal{CPT}$

1.1.1 $\mathcal{PT}$ -symétrie

La théorie de $\mathcal{PT}$ -symétrie a été introduite pour la première fois en 1998 par Carl Bender et Stefan Boettcher [6, 7, 8] qui ont montré que le spectre de l'hamiltonien non-hermitique

$(H = p^2 + x^2 - ix^3)$ est réel et positif.

La théorie de la $\mathcal{PT}$ symétrie est un concept relativement nouveau où Carl Bender [6] et Stefan Boettcher ont interprété la réalité de ce spectre comme étant indice de sa symétrie $\mathcal{PT}$. Autrement dit, si nous réfléchissons simultanément dans l'hamiltonien de potentiel cubique ix^3 nous voyons qu'il reste inchangé par une réflexion d'espace et conjugaison du nombre complexe i . Le fait qu'il soit possible de trouver de vraies valeurs propres dans un hamiltonien qui est non-hermitique a suscité un certain intérêt, d'autant plus que le concept de symétrie $\mathcal{PT}$ semble avoir une interprétation plus physique que le concept très mathématique d'hermiticité. par l'introduction de l'opérateur $\mathcal{PT}$;

Où $\mathcal{P}$ est l'opérateur de parité (ou réflexion d'espace) et $\mathcal{T}$ est l'opérateur renversement du temps, que nous pouvons définir séparément :

L'opérateur $\mathcal{P}$ est défini comme :

$$\mathcal{P}x\mathcal{P}^{-1} = -x \quad ; \quad \mathcal{P}p\mathcal{P}^{-1} = -p \quad (1.1)$$

Tandis que l'opérateur $\mathcal{T}$ est défini comme :

$$\mathcal{T}x\mathcal{T}^{-1} = x \quad ; \quad \mathcal{T}p\mathcal{T}^{-1} = -p \quad ; \quad \mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i \quad (1.2)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= \mathcal{T}^2 = \mathbf{1} \\ [\mathcal{P}, \mathcal{T}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Où l'opérateur $\mathcal{PT}$ préserve la relation de commutation habituelle :

$$[x, p] = i\hbar \quad (1.4)$$

1.1.2 Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétriques

Un hamiltonien H est dit $\mathcal{PT}$ -symétrique s'il est invariant par la transformation $\mathcal{PT}$, c'est-à-dire

$$H = (\mathcal{PT}) H (\mathcal{PT})^{-1} \quad (1.5)$$

Qui implique que

$$[H, \mathcal{PT}] = 0 \quad (1.6)$$

Par conséquent la propriété principale des hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétriques est que leur spectre est réel à cause de la $\mathcal{PT}$ -symétrie de ces hamiltoniens, comme a également été montré par Carl Bender et Stefan Boettcher.

Quand on étudie la $\mathcal{PT}$ -symétrie des hamiltoniens nous distinguons deux types de symétrie : brisée et non brisée, la symétrie est dite non brisée si toutes les fonctions propres de l'hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique sont en même temps des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$. Par contre, s'il existe des fonctions propres de l'hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique qui ne sont pas des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, elle est dite brisée.

Maintenant Pour démontrer que les valeurs propres sont réelles, nous exigeons que la symétrie ne soit pas brisée, donc on peut écrire :

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (1.7)$$

Et

$$\mathcal{PT} |\psi_n\rangle = \theta |\psi_n\rangle \quad (1.8)$$

Mais comme

$$(\mathcal{PT})^2 = I \quad (1.9)$$

Il en résulte que :

$$|\theta|^2 = 1 \quad (1.10)$$

La relation (1.7) permet d'écrire :

$$H\mathcal{PT} |\psi_n\rangle = \mathcal{PT} E_n |\psi_n\rangle \quad (1.11)$$

De l'autre côté nous avons

$$\mathcal{PT} E_n \mathcal{PT} = E_n^* \quad (1.12)$$

Et

$$\mathcal{P}^2 = I \quad (1.13)$$

De ces dernières équations on trouve que

$$E_n = E_n^* \quad (1.14)$$

1.1.3 Les énergies lorsque la symétrie $\mathcal{PT}$ est brisée

Dans le cas où H et l'opérateur $\mathcal{PT}$ sont simultanément diagonalisables, nous pouvons également avoir des cas où ce n'est pas vrai. Dans ces cas (1.6) il est toujours valable

$$[H, \mathcal{PT}] = 0 \quad (1.15)$$

car nous avons toujours un hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique. Cependant, comme $\mathcal{PT}$ est non linéaire, Le $\mathcal{PT}$ n'a pas besoin d'être diagonalisable simultanément. On écrit $|\psi_n\rangle$ comme vecteur propre avec l'énergie E_n , de sorte que

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (1.16)$$

Si $\mathcal{PT}$ et H ne sont pas diagonalisables simultanément, nous avons la situation

$$\mathcal{PT} |\psi_n\rangle = |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} \quad (1.17)$$

$$|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} \neq \theta |\psi_n\rangle \quad (1.18)$$

pour toute constante θ . c'est-à-dire que les vecteurs propres, $|\psi_n\rangle$, de H ne sont pas des vecteurs propres de $\mathcal{PT}$. Dans ce cas, nous décrivons la symétrie $\mathcal{PT}$ de l'hamiltonien comme étant spontanément brisée. La notation $|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}}$, ne nous dit pas encore, aucune information sur l'énergie de $|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}}$, elle désigne simplement la fonction dérivée de l'action de $\mathcal{PT}$ sur l'état propre $|\psi_n\rangle$. En effet, jusqu'à présent, nous ne savons pas si $|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}}$ est une fonction propre de H du tout. En utilisant (1.6), nous avons

$$[H, \mathcal{PT}] |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} = H\mathcal{PT} |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} - \mathcal{PT}H |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} = 0 \quad (1.19)$$

donc

$$H |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} = E_n^* |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} \quad (1.20)$$

Cela nous indique que $|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}}$ est un vecteur propre de H avec la valeur propre E_n^* .

$$|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} = |\psi_n\rangle^{E_n^*} \quad (1.21)$$

En supposant qu'il n'y a pas de valeurs propres dégénérées, cela signifie que lorsque la $\mathcal{PT}$ symétrie est brisée, les valeurs propres d'énergie viennent en paires conjuguées complexes. L'opérateur $\mathcal{PT}$ échange entre les vecteurs propres avec des valeurs propres conjuguées complexes.

On peut alors dire que pour un hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique toutes les valeurs propres d'énergie sont soit réels, soit se produisent dans des paires conjuguées complexes.

1.1.4 $\mathcal{PT}$ -produit scalaire

En mécanique quantique usuelle, la norme d'un vecteur dans l'espace de Hilbert doit être positif.

Carl Bender a introduit un $\mathcal{PT}$ -produit scalaire associé aux hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétrique, qui le définit comme :

$$(f, g)_{\mathcal{PT}} = \int [\mathcal{PT} f(x)] g(x) dx \quad (1.22)$$

Où

$$\mathcal{PT} f(x) = f^*(-x) \quad (1.23)$$

Désignons par ψ_n et ψ_m les fonctions propres de H qui sont orthogonales dans le sens du $\mathcal{PT}$ -produit scalaire

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}} = \langle \psi_m | \mathcal{P} | \psi_n \rangle = \int [\mathcal{PT} \psi_m(x)] \psi_n(x) dx = (-1)^n \delta_{mn} \quad (1.24)$$

Notons que pour $m = n$ le produit $\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}}$ devient

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}} = (-1)^n \quad (1.25)$$

On voit que le $\mathcal{PT}$ -produit scalaire parfois donne le produit $\langle \psi | \psi \rangle_{\mathcal{PT}} = -1$.

1.1.5 L'opérateur $\mathcal{C}$ et le $\mathcal{CPT}$ produit scalaire

Nous avons un problème de norme avec le $\mathcal{PT}$ -produit scalaire dans la section précédente, pour résoudre le problème de la norme négative, Bender a montré que tous les hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétrique dont la symétrie n'est pas brisée possèdent une autre symétrie engendrée par un nouvel opérateur linéaire noté $\mathcal{C}$: les propriétés de l'opérateur $\mathcal{C}$ sont presque identiques à ceux de l'opérateur de la conjugaison de charge $\mathcal{C}$.

L'opérateur $\mathcal{C}$ est représenté dans l'espace des coordonnées par :

$$\mathcal{C}(x, y) = \sum_n \psi_n(x) \psi_n(y) \quad (1.26)$$

et leur carré est égal à l'unité

$$\int \mathcal{C}(x, y) \mathcal{C}(y, z) = \delta(x - z) \quad (1.27)$$

Qui implique que

$$\mathcal{C}^2 = I \quad (1.28)$$

Par conséquent les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{C}$ sont ± 1 dont l'action sur les fonctions propres est donnée par :

$$\mathcal{C}\psi_n(x) = (-1)^n \psi_n(x) \quad (1.29)$$

Additionnellement à la symétrie de l'hamiltonien H l'opérateur $\mathcal{C}$ vérifie les relations de commutation suivantes :

$$[\mathcal{C}, H] = 0 \quad (1.30)$$

Et

$$[\mathcal{C}, PT] = 0 \quad (1.31)$$

Par contre $\mathcal{C}$ ne commute pas avec les opérateurs P et T séparément :

$$[\mathcal{C}, P] \neq 0; [\mathcal{C}, T] \neq 0 \quad (1.32)$$

La redéfinition du $\mathcal{PT}$ -produit scalaire (1.24) à l'aide de (1.29) rend les états propres énergétiques $|\psi_n\rangle$ orthonormé dans le sens du $\mathcal{CPT}$ -produit scalaire :

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{CPT}} = \int [\mathcal{CPT} \psi_m(x)] \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (1.33)$$

1.1.6 Système à deux niveaux indépendant du temps

Le système à deux niveaux est l'un des problèmes les plus importants à l'étude des systèmes $\mathcal{PT}$ -symétrique, et est décrit par l'hamiltonien ;

$$H = \begin{pmatrix} \Omega e^{i\beta} & \Delta \\ \Delta & \Omega e^{-i\beta} \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

où les trois paramètres Ω, Δ et β sont réels. Cet Hamiltonien n'est pas Hermitique, mais il est facile de voir qu'il est $\mathcal{PT}$ -symétrique, où l'on définit l'opérateur parité comme

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

et nous définissons l'opérateur $\mathcal{T}$ pour effectuer une conjugaison complexe ($\mathcal{T} H \mathcal{T} = H^*$).

Comme première étape de l'analyse de l'hamiltonien (1.34), nous calculons ses deux valeurs propres :

$$E_{\pm} = \Omega \cos \beta \pm \sqrt{\Delta^2 - \Omega^2 \sin^2 \beta} \quad (1.36)$$

Il y a clairement deux régions paramétriques à considérer, une pour laquelle la racine carrée $\sqrt{\Delta^2 - \Omega^2 \sin^2 \beta}$ est réel et l'autre pour lequel il est imaginaire. Lorsque $\Delta^2 \prec \Omega^2 \sin^2 \beta$, les valeurs propres forment une paire conjuguée complexe. C'est la région où la symétrie $\mathcal{PT}$ est brisée.

En revanche, lorsque $\Delta^2 \succeq \Omega^2 \sin^2 \beta$, les valeurs propres $E_{\pm} = \Omega \cos \theta \pm \sqrt{\Delta^2 - \Omega^2 \sin^2 \beta}$ sont réels. C'est la région de la symétrie $\mathcal{PT}$ non brisée. Dans la région non brisée, les états propres simultanés des opérateurs H et $\mathcal{PT}$ sont

$$|E_+\rangle = \sqrt{\frac{1}{2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} e^{+\frac{i}{2}\alpha} \\ e^{-\frac{i}{2}\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |E_-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\alpha} \\ -e^{\frac{i}{2}\alpha} \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

Où

$$\sin \alpha = \frac{\Omega}{\Delta} \sin \beta, \quad (1.38)$$

le $\mathcal{PT}$ -produit scalaire donne

$$\langle E_{\pm} | E_{\pm} \rangle_{\mathcal{PT}} = \pm 1 \quad \text{et} \quad \langle E_{\pm} | E_{\mp} \rangle_{\mathcal{PT}} = 0, \quad (1.39)$$

où $\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}} = \langle \psi_m | \mathcal{P} | \psi_n \rangle$. En ce qui concerne le $\mathcal{PT}$ -produit scalaire, l'espace vectoriel étendus par les états propres énergétiques a une métrique de signature $(+, -)$. Si la condition $\Delta^2 \succeq \Omega^2 \sin^2 \beta$ pour une symétrie $\mathcal{PT}$ non brisée est violée, les états (1.37) ne sont plus états propres de $\mathcal{PT}$ parce que α devient imaginaire. Lorsque la symétrie $\mathcal{PT}$ est brisée, La norme $\mathcal{PT}$ de l'état propre énergétique disparaît.

Ensuite, nous construisons l'opérateur $\mathcal{C}$ en utilisant (1.26) :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} i \sin \alpha & 1 \\ 1 & -i \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Notez que $\mathcal{C}$ est la propriété clé

$$\mathcal{C} |E_{\pm}\rangle = \pm |E_{\pm}\rangle.$$

L'opérateur $\mathcal{C}$ commute avec H et satisfait $\mathcal{C}^2 = 1$. Les valeurs propres de $\mathcal{C}$ sont précisément les signes des normes $\mathcal{PT}$ (1.39) des états propres correspondants. En utilisant l'opérateur $\mathcal{C}$ nous construire la nouvelle structure de $\mathcal{PT}$ -produit scalaire $\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{CPT}}$. Ce produit interne est définie positive car $\langle E_{\pm} | E_{\pm} \rangle_{\mathcal{CPT}} = 1$. Ainsi, l'espace de Hilbert bidimensionnel

étendu par $|E_{\pm}\rangle$, avec le produit $\langle E_{\pm} | E_{\pm} \rangle_{\mathcal{CPT}}$, a la signature $(+, +)$.

1.2 Pseudo-hermiticité

Le concept de pseudo-hermiticité a été introduit dans les années 1940 par Dirac et Pauli [9], et plus tard discuté par Lee [10], Wick et Sudarshan [11], qui essayaient de résoudre les problèmes qui se posent dans la quantification de l'électrodynamique et d'autres théories quantiques des champs dans lesquels la norm négative, les états apparaissent comme une conséquence de la renormalisation [12, 13]. Celles-ci les problèmes sont illustrés très clairement par le modèle de Lee. Un autre concept est la quasi-hermiticité correspond avec le concept de pseudo-Hermiticité a été bien traitée dans [14].

Il y a deux décennies AliMustafazadah a énoncé trois articles [15, 16, 17] dont l'objectif est définit une classe des hamiltoniens qui ne sont pas hermitiques mais qui possèdent un spectre réel et positif. AliMustafazadah a présenté une alternative à la mécanique quantique conventionnelle, et il a trouvé la condition nécessaire de la réalité du spectre d'un hamiltonien non-hermitique dans laquelle les hamiltoniens sont *pseudo – Hermitiques*. Et par conséquent il a remplacé la condition de $\mathcal{PT}$ -symétrie par une approche physique plus générale connu sous le nom de *pseudo – Hermiticité*.

1.2.1 Hamiltoniens pseudo-hermitiques

L'hamiltonien pseudo-hermitique est l'opérateur qui vérifier Les règles de pseudo-Hermiticité ; qui permet de faire passer d'un hamiltonien non-hermitique H à un hamiltonien hermitique h équivalent, autrement dit, tout hamiltonien pseudo-hermitique H est similaire à un hamiltonien auto-adjoint (hermitique) h , l'hamiltonien pseudo-hermitique H est relié avec son hamiltonien hermitique h par la relation

$$h = \rho H \rho^{-1} \quad (1.41)$$

Où ρ est un opérateur linéaire, inversible et borné.

Et les états propres des deux Hamiltoniens sont reliés par

$$|\psi_n\rangle = \rho^{-1}|\varphi_n\rangle \quad (1.42)$$

tel que

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle,$$

et

$$h|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle,$$

comme h est hermitique c'est-à-dire $h = h^+$, on a :

$$h = \rho H \rho^{-1} = (\rho^{-1})^+ H^+ \rho^+ \quad (1.43)$$

donc

$$\rho H \rho^{-1} = (\rho^{-1})^+ H^+ \rho^+$$

Qui implique que l'hamiltonien H est lié avec son adjoint par la relation de pseudo-Hermiticité

$$H^+ = \eta H \eta^{-1} \quad (1.44)$$

Par définition, un opérateur linéaire $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ qui agit sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit pseudo-hermitique, s'il existe un opérateur linéaire, hermitique et inversible $\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tel que : H satisfait la relation de pseudo-hermiticité $H^+ = \eta H \eta^{-1}$.

Avec

$$\eta = \rho^+ \rho ; \quad \eta^{-1} = (\rho^+ \rho)^{-1} \quad (1.45)$$

L'opérateur η est appelée la métrique qui relie les états propres $|\psi_n\rangle$ et $|\chi_n\rangle$ de H et H^+ respectivement comme

$$|\chi_n\rangle = \eta |\psi_n\rangle \quad (1.46)$$

La définition $\eta = \rho^+ \rho$ nous dit que η est invariante par une transformation unitaire de l'opérateur ρ ($\rho \rightarrow U\rho$), avec $U^+U = I$.

1.2.2 Spectre d'un hamiltonien pseudo-hermitique

Pour analyser les propriétés spectrales d'un hamiltonien pseudo-Hermitique on considère que H est un opérateur linéaire agissant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et supposons que le spectre de H soit discret. A mon avis, la définition donnée par l'équation (1.44) a des conséquences remarquables. Commençant par (1.44), ensuit multiplions à droite les deux côtés par un vecteur propre $|E_j\rangle$, puis multiplions à gauche les deux côtés par un autre vecteur propre $\langle E_i|$:

$$\begin{aligned} H^+ \eta &= \eta H \\ H^+ \eta |E_j\rangle &= \eta H |E_j\rangle \\ \langle E_i| H^+ \eta |E_j\rangle &= \langle E_i| \eta H |E_j\rangle \end{aligned} \quad (1.47)$$

En Remplaçantn l'hamiltonien par leur valeurs propres ($H |E_j\rangle = E_j |E_j\rangle$), $\langle E_i| H^+ = \langle E_i| E_i^*$), les dernières équations réécrivent en termes de produit η -scalaire [15] comme :

$$\begin{aligned} E_i^* \langle E_i| \eta |E_j\rangle &= E_j \langle E_i| \eta |E_j\rangle \\ E_i^* \langle E_i |E_j\rangle_\eta &= E_j \langle E_i |E_j\rangle_\eta \\ (E_i^* - E_j) \langle E_i |E_j\rangle_\eta &= 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Le résultat de cette équation conduit directement à la deuxième proposition de Mostafazadeh, citée ci-dessous :

Un Hamiltonien η -pseudo-Hermitique a les propriétés suivantes :

(a) Les vecteurs propres avec une valeur propre non réelle ont une semi-norme, c'est-à-dire ;

$$E_i \notin \mathbb{R} \implies \langle E_i |E_i\rangle_\eta = 0 \quad (1.49)$$

(b) Deux vecteurs propres quelconques sont pseudo-orthogonaux à moins que leurs valeurs propres ne soient conjugués complexes,

$$E_i^* \neq E_j \implies \langle E_i |E_j\rangle_\eta = 0 \quad (1.50)$$

Ensuite, Mostafazadeh a présenté une série de propositions pour démontrer les propriétés spectrales d'un Hamiltonien pseudo-Hermitique où les conditions suivantes sont équivalentes :

1. les valeurs propres de H sont réelles ou viennent en paires conjuguées complexes.
2. H est pseudo-Hermitique.

1.2.3 Pseudo produit scalaire $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\eta$

Mostafazadeh a introduit le pseudo produit scalaire (produit η -scalaire) noté $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\eta$ entre deux vecteurs $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ appartenant à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tel que

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\eta := \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle, \quad (1.51)$$

Ce produit ne peut être invariant dans le temps que si son taux de variation avec le temps est nul ;

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle = \left(i \frac{d}{dt} \langle \psi_1 | \right) \eta + \eta \left(i \frac{d}{dt} | \psi_2 \rangle \right) = 0 \quad (1.52)$$

étant donné que $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ obéissent à l'équation de Schrödinger d'évolution ($i \frac{d}{dt} |\psi_{1,2}\rangle = H |\psi_{1,2}\rangle$), la dernière équation devient

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \eta H - H^\dagger \eta | \psi_2 \rangle_\eta = 0 \quad (1.53)$$

Le pseudo produit scalaire $\langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle$ est invariant sous la translation du temps générée par l'hamiltonien H si et seulement si H est pseudo-Hermitique ($\eta H - H^\dagger \eta$).

Comme l'hamiltonien pseudo-Hermitique H a un Hamiltonien Hermitique h équivalent, et l'hamiltonien Hermitique h préserve le produit scalaire usuel ($\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{mn}$). à l'aide des équations (1.45) et (1.42), le pseudo produit scalaire (produit η -scalaire) est équivalent avec le produit scalaire standard :

$$\langle \psi_n | \eta | \psi_m \rangle = \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{mn} \quad (1.54)$$

Donc le pseudo produit scalaire est défini positif, et il est conservé.

1.2.4 Base bi-orthonormée des Hamiltoniens pseudo-Hermitiques

Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, les Hamiltoniens pseudo-Hermitiques possèdent une base des vecteurs propres bi-orthonormée complète $\{|\psi_n\rangle, |\chi_n\rangle\}$ avec spectre discret et non dégénéré. Par définition [17] : une base bi-orthonormée

complète est une base de vecteurs $\{|\psi_n\rangle, |\chi_n\rangle\}$ tel que ;

$$\langle \chi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn} \quad (1.55)$$

et

$$\sum_n |\chi_n\rangle \langle \psi_n| = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \chi_n| = \mathbf{I} \quad (1.56)$$

Où $|\psi_n\rangle$ et $|\chi_n\rangle$ sont les états propres de H et H^+ respectivement qui obeissent aux équations :

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (1.57)$$

$$H^+ |\chi_n\rangle = E_n |\chi_n\rangle \quad (1.58)$$

Par conséquent l'hamiltonien H et son adjoint H^+ s'écrivent dans la base bi-orthonormée comme

$$H = \sum_n E_n |\psi_n\rangle \langle \chi_n| \quad (1.59)$$

$$H^+ = \sum_n E_n |\chi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1.60)$$

afin d'exprimer les opérateurs métriques η et ρ en termes de la base bi-orthonormée, nous utilisons les deux propriétés (1.55) et (1.56) de la base bi-orthonormée, et la relation entre les états $|\psi_n\rangle$, $|\chi_n\rangle$, et $|\varphi_n\rangle$ Eqs. (1.42) et (1.46), les opérateurs η et ρ décomposent dans la base bi-orthonormée sous la forme

$$\eta = \sum_n |\chi_n\rangle \langle \chi_n|, \quad \eta^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1.61)$$

et

$$\rho = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \chi_n|, \quad \rho^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \varphi_n| \quad (1.62)$$

Effectivement l'action des opérateurs métrique η et ρ donne les relations (1.42) et (1.46). La généralisation de ces résultats est bien présentée dans [17] comme :

Théorème.

Soit H un Hamiltonien non-Hermitique avec un spectre discret et un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres $\{|\psi_n\rangle, |\chi_n\rangle\}$, alors H est pseudo-Hermitique si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite [17] :

1. le spectre de H est réel
2. les valeurs propres complexes sont classées en paires de complexes conjuguées avec la même multiplicité.

Une implication directe de ce théorème sont les corollaires suivants :

Corollaire 1

Chaque Hamiltonien non-Hermitique avec un spectre réel et discret qui possède un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres est pseudo-Hermitique.

Corollaire 2

Tout Hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique qui possède un spectre discret et un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres est pseudo-Hermitique.

1.2.5 Équivalence de pseudo-Hermiticité et symétries antilinéaires

Une caractéristique très intéressante de la pseudo-Hermiticité est sa connexion avec l'existence de symétries anti-linéaires. Comme il est bien connu des symétries antilinéaires jouer un rôle important en physique (l'inversion du temps est associée à un opérateur anti-linéaire).

La décomposition de l'opérateur métrique η en termes d'opérateurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ à l'aide de comparaison des relations (1.33) et (1.54) selon

$$\eta = \mathcal{C}\mathcal{P} \tag{1.63}$$

Il existe une équivalence entre les relations suivantes

$$H^+ = \eta H \eta^{-1} \Leftrightarrow [H, \mathcal{C}] = 0 \tag{1.64}$$

De plus, si l'hamiltonien est $\mathcal{PT}$ -symétrique, ce qui signifie $[H, \mathcal{PT}] = 0$, nous avons aussi que l'opérateur $\mathcal{C}$ et l'opérateur métrique η sont $\mathcal{PT}$ -symétriques : $[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = [\eta, \mathcal{PT}] = 0$. Bien

que la réalité du spectre d'un Hamiltonien serait être garantie par l'existence d'une symétrie anti-linéaire de cet opérateur, comme $\mathcal{PT}$ par exemple. Cet résultat obtenu a été généralisé dans [17] :

Théorème. Soit H un opérateur linéaire. Supposons que le spectre de H est discret, que ses valeurs propres ont une multiplicité algébrique nie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Les valeurs propres de H sont réelles ou viennent en paires conjuguées complexes.
2. H a une symétrie (anti-linéaire) générée par un opérateur anti-linéaire, tel que $[H, \tau] = 0$.
3. H est pseudo-Hermitique.

1.2.6 Oscillateur harmonique dans un champ complexe uniforme

Maintenant On va étudier la pseudo-Hermiticité d'un Oscillateur harmonique dans un champs uniforme défini par l'Hamiltonien non-Hermitique suivante

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + iEx \neq H^\dagger \quad (1.65)$$

où m est la masse de la particule, ω est la fréquence, E est le module du champ électrique. Il est facile de montrer que les niveaux d'énergies de ce système sont

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{E}{m\omega^2}\right)^2 \quad (1.66)$$

qui correspondent aux vecteurs propres suivantes

$$\varphi_n^H(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{E}{m\omega^2}p} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{1}{2\hbar}m\omega x^2} \quad (1.67)$$

Où H_n sont les polynomes d'hermite.

Nous définissons l'opérateur métrique $\eta = \rho^\dagger \rho$ qui relie H avec $H^\dagger$ par la relation de pseudo-Hermiticité ($H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$)

$$\eta = e^{\frac{2E}{m\omega^2}p} \quad (1.68)$$

l'opérateur ρ qui relie l'hamiltonien H avec son Hamiltonien Hermitique h peut être écrit comme

$$\rho = e^{\frac{E}{m\omega^2}p} \quad (1.69)$$

et

$$\rho^{-1} = e^{-\frac{E}{m\omega^2}p} \quad (1.70)$$

Comme nous l'avons bien vu dans les sections présidents l'opérateur ρ mappe l'hamiltonien H vers un Hamiltonien Hermitique h ;

$$h = \rho H \rho^{-1} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \left(\frac{E}{m\omega^2}\right)^2 \quad (1.71)$$

dont les  tats propres de l'oscillateur harmonique habituel

$$\varphi_n^h(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{1}{2\hbar}m\omega x^2} \quad (1.72)$$

Par conséquent le pseudo-produit scalaire définie en (1.54) donne

$$\langle \varphi_n^H | \varphi_m^H \rangle_\eta = \langle \varphi_n^H | \eta | \varphi_m^H \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_n^H(x)]^* \eta(x) \varphi_m^H(x) dx \quad (1.73)$$

En remplaçant la métrique $\eta(x)$ par (1.68) et les  tats propres $[\varphi_n^H(x)]^*$, $\varphi_m^H(x)$ par (1.67), le pseudo-produit scalaire (1.73) devient

$$\langle \varphi_n^H | \eta | \varphi_m^H \rangle = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) H_m \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) dx \quad (1.74)$$

Par changement de variable $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q$, le produit $\langle \varphi_n^H | \eta | \varphi_m^H \rangle$ se simplifie en

$$\langle \varphi_n^H | \eta | \varphi_m^H \rangle = \delta_{mn} \quad (1.75)$$

Chapitre 2

Systèmes quantiques non-hermitiques dépendants du temps

Nous présentons les méthodes systématiques pour traiter la dynamique quantique des systèmes hermitiques ayant des Hamiltoniens dépendants manifestement du temps ; ($H(t) = H(t)^+$), basée sur l'équation de Schrödinger d'évolution ($H(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle$) et la généralisation de ces concepts aux cas non-Hermitique où on introduit une nouvelle approche des systèmes non-Hermitiques dépendants du temps. Une fois cet objectif atteint, nous calculons le vecteur d'onde $|\Psi(t)\rangle$ analytiquement en fonction du temps, afin de généraliser la notion de pseudo-Hermiticité à la théorie des invariants de Lewis Reisenfeld.

2.1 Équation de Schrödinger

Dans le monde macroscopique dans lequel nous vivons, les phénomènes les plus intéressants impliquent des changements. Les systèmes physiques sont, en général, dynamiques, c'est-à-dire qu'ils évoluent dans le temps sous la description d'une loi dynamique qui présente le formalisme du système et donne la prévision de l'avenir du comportement du système à partir d'une connaissance de son comportement présent ou passé (l'équation du mouvement). La dynamique des systèmes classique est décrit par la loi du mouvement de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.1}$$

tandis que la dynamique du champ électromagnétique classique est déterminé par les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.5)$$

Soit les équations de Newton ou les équations de Maxwell constituent des lois de la physique dont la forme est particulière au type de système qui est décrit, bien qu'une certaine unification soit assurée en termes de principe de Hamilton, un manière universelle d'énoncer les lois de la dynamique classique

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned}$$

La mécanique quantique postule que l'équation de Schrödinger d'évolution [18] est l'équation dynamique des systèmes quantiques Hamiltoniens, et elle est de la forme

$$H(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \quad (2.6)$$

avec

$H(t)$: est l'hamiltonien du système qui appelé générateur de l'évolution.

$|\Psi(t)\rangle$: est l'état qui décrit le système à chaque instant.

L'équation de Schrödinger (2.6) est l'une des équations fondamentales de la mécanique quantique non relativiste, a été formulée en 1926 par le physicien autrichien Erwin Schrödinger. Elle décrit comment les états quantiques $|\Psi(t)\rangle$ d'un système physique changent dans le temps. L'état $|\Psi(t)\rangle$ est également appelé fonction d'onde ou vecteur d'état. En mathématiques pures, l'équation de Schrödinger et ses variantes sont largement utilisées dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Il a une application en géométrie, théorie spectrale et diffusion et aux systèmes intégraux.

L'équation de Schrödinger peut être écrite sous deux formes différentes, l'équation de Schrödinger dépendante du temps ($H(t)|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle$) et l'équation de Schrödinger indépendante du temps ($H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$). En outre l'équation de Schrödinger a la fameuse forme suivante :

$$H(t)U(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t) \quad (2.7)$$

où $U(t)$ est l'opérateur d'évolution qui agit sur un état initial $|\Psi(0)\rangle$ et le porte à l'état $|\Psi(t)\rangle$ comme

$$U(t)|\Psi(0)\rangle = |\Psi(t)\rangle \quad (2.8)$$

Dans tout ce qui suit nous s'intéresse au cas où les Hamiltoniens ayant une dépendance manifeste du temps c'est à dire nous utilisons l'équation de Schrödinger de type ($H(t)|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle$).

2.2 Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger

Depuis le début de la mécanique quantique, différentes méthodes ont été développées pour résoudre l'équation de Schrödinger, cependant, il existe quelques systèmes dont la solution est exacte où l'hamiltonien H est indépendant du temps, ces systèmes exactement solubles sont utilisés pour construire une solution approximative pour les systèmes non exactement solubles (des systèmes ayant des Hamiltoniens dépendants du temps $H = H(t)$) à l'aide des transformations canoniques ou des méthodes d'approximation, par exemple, de nombreux systèmes dont la solution n'est pas exacte, sont généralement résolus grâce à l'utilisation des méthodes d'approximations. Quoi qu'il en soit, en général lorsque l'hamiltonien est une fonction explicite du temps, la solution est souvent soit une solution approchée analytique, soit une solution numérique.

Dans le cadre des systèmes quantiques qui dépendent dans leur description des Hamiltoniens dépendants du temps, il existe deux situations importantes pour la dépendance temporelle de l'hamiltonien, ce qui dépend des modifications de l'hamiltonien sont soit très rapides, ou très lent, suivant ces deux situations nous avons deux approximations (adiabatique et soudain) qui

traitent une sorte d'hamiltoniens dont l'évolution dans le temps est de la forme

$$H(t) = \begin{cases} H_0 & t \prec t_0 \\ H(t) & t_0 \prec t \prec t_1 \\ H_1 & t \succ t_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

où l'hamiltonien $H(t)$ passe de H_0 à H_1 sur un intervalle du temps $T = t_1 - t_0$. Le régime soudain correspond à une intervalle du temps $T \ll$ petit, tandis que le régime adiabatique corresponde à une intervalle du temps $T \gg$ grand. Nous discutons chaque cas séparément.

2.2.1 Approximation soudain

Contrairement à la procédure mentionnée ci-dessus l'approximation soudaine est l'approximation la mieux adaptée pour étudier les systèmes dont les Hamiltoniens changent brusquement (sur un intervalle de temps très court T), l'état ne peut pas rattraper le changement et reste essentiellement inchangé. L'approximation soudaine devrait être bonne si l'échelle de temps du le changement T est beaucoup plus petit que les répartitions d'énergie typiques ΔE parmi les niveaux d'énergie. C'est la base de l'approximation soudain $T \ll \frac{\hbar}{\Delta E}$.

Sous cette approximation, l'opérateur d'évolution $U_T(s)$ s'intègre de l'équation (2.7) comme

$$U_T(s) = I + \frac{T}{i\hbar} \int H(s) U_T(s) ds \quad (2.10)$$

dans la limite où $T \rightarrow 0$ le seconde terme $\frac{T}{i\hbar} \int H(s) U_T(s) ds$ tende vers zero où on peut poser que $U_T(s) \simeq I$.

et par conséquent un vecteur d'état $|\phi_n(t_0)\rangle$ reste inchangé sous l'action de l'opérateur d'évolution

$$U_T(s) |\phi_n(t_0)\rangle \simeq |\phi_n(t_0)\rangle \quad (2.11)$$

2.2.2 Théorie des invariants de Lewis-Reisenfeld

La théorie des invariants de Lewis-Reisenfeld (LR) est basée sur la construction d'un opérateur invariant Hermitique explicitement dépendant du temps (constante de mouvement) qui décrit un système quantique modulé par un Hamiltonien Hermitique dépendant du temps

($H = H(t)$). L'utilisation de la théorie des invariants pour résoudre des systèmes quantiques, a l'avantage d'offrir une solution exacte aux problèmes résolu par la théorie traditionnelle de la perturbation dépendante du temps. La théorie a été introduite pour la première fois par Lewis et Riesenfeld [19]. Il y a une classe d'invariants Hermitiques $I(t)$ exacts pour les oscillateurs harmoniques dépendants du temps décrit par l'hamiltonien $H(t) = \frac{p^2}{2m} + m\omega(t)^2 \frac{x^2}{2}$ et celui d'une particule dans un champ électromagnétique dépendant du temps d'hamiltonien $H(t) = \frac{(p - eA(r,t))^2}{2m} + e\Phi(r, t)$ qui ont été rapportés dans. La solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps dans le contexte de cette méthode est obtenue en termes des états propres de l'opérateur invariant Hermitique, où l'opérateur invariant vérifie l'équation de Von-Neumann

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0 \quad (2.12)$$

Ensuite, selon Réf. [19] nous supposons que l'invariant $I(t)$ possède un ensemble complet d'états propres orthonormés et satisfait les équation aux valeurs propres

$$I(t) |\varphi_\lambda(t)\rangle = \lambda |\varphi_\lambda(t)\rangle \quad (2.13)$$

qui lui correspondent des valeurs propres λ .

tans que $I(t)$ est Hermitique les fonctions propres $|\varphi_\lambda(t)\rangle$ sont orthonormées

$$\langle \varphi_{\lambda'}(t) | \varphi_\lambda(t) \rangle = \delta_{\lambda'\lambda} \quad (2.14)$$

maintenant, en suivant les mêmes étapes de réf. [19], on différencie l'équation. (2.13) par rapport au temps

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_\lambda(t)\rangle + I(t) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda(t)\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\varphi_\lambda(t)\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda(t)\rangle \quad (2.15)$$

multiplions ensuite à gauche par $\langle \varphi_\lambda(t) |$ nous obtenons

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \varphi_\lambda(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} | \varphi_\lambda(t) \rangle \quad (2.16)$$

également en fonctionnant avec le côté gauche de l'éq. (2.12) avec l'état $|\varphi_\lambda(t)\rangle$ et en projetant sur l'état $\langle \varphi_{\lambda'}(t) |$, on trouve

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda'}(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} | \varphi_{\lambda}(t) \rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \varphi_{\lambda'}(t) | H(t) | \varphi_{\lambda}(t) \rangle = 0 \quad (2.17)$$

Ensuite, en prenant $\lambda = \lambda'$, nous trouvons que $\langle \varphi_{\lambda}(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} | \varphi_{\lambda}(t) \rangle = 0$. Donc, en substituant ce résultat dans éq. (2.17) on obtient que les valeurs propres de l'invariant sont indépendantes du temps, c'est-à-dire $\partial \lambda / \partial t = 0$.

Afin d'étudier la connexion entre les états propres de $I(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger (2.6) nous procédons comme suit. En utilisant le fait que les valeurs propres de l'invariant sont des constantes, nous combiner éqs. (2.16) et (2.17) pour obtenir

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \varphi_{\lambda'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda}(t) \rangle = (\lambda - \lambda') \langle \varphi_{\lambda'}(t) | H(t) | \varphi_{\lambda}(t) \rangle \quad (2.18)$$

Ensuite, pour $\lambda \neq \lambda'$ on déduit que

$$\langle \varphi_{\lambda'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda}(t) \rangle = \langle \varphi_{\lambda'}(t) | H(t) | \varphi_{\lambda}(t) \rangle \quad (2.19)$$

Ici, nous notons que cette équation n'est pas valide pour $\lambda = \lambda'$. Cependant, sur la base de la réf. [19], on peut faire la transformation $|\varphi_{\lambda}(t)\rangle \rightarrow e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\varphi_{\lambda}(t)\rangle$, de sorte que l'éq. (2.18) peut être réécrit comme

$$\frac{d\alpha_{\lambda}(t)}{dt} = \langle \varphi_{\lambda}(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \varphi_{\lambda}(t) \rangle \quad (2.20)$$

où $\alpha_{\lambda}(t)$ est une fonction réelle du temps, et les nouveaux états $e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\varphi_{\lambda}(t)\rangle$ sont toujours des états propres de $I(t)$. De plus, si $\alpha_{\lambda}(t)$ satisfait à l'équation. (2.20), éq. (2.19) est valable pour $\lambda \neq \lambda'$ ainsi que pour $\lambda = \lambda'$. On peut alors déduire que les nouveaux états $e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\varphi_{\lambda}(t)\rangle$ satisfont l'équation de Schrödinger dépendante du temps (2.6). Par conséquent, la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps est

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} |\Psi_{\lambda}(t)\rangle \quad (2.21)$$

où

$$|\Psi_{\lambda}(t)\rangle = e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\varphi_{\lambda}(t)\rangle \quad (2.22)$$

2.2.3 Exemple illustratif 1 : Oscillateur harmonique de fréquence dépendante du temps

L'oscillateur harmonique unidimensionnel de fréquence dépendante du temps est un système dont l'opérateur Hamiltonien est de la forme [19]

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2 \quad (2.23)$$

où x est une coordonnée canonique, p est son moment conjugué, $\omega(t)$ est la fréquence qui dépendante du temps, et m est la masse du système. Les variables x et p satisfont la relation de commutation canonique

$$[x, p] = i, \quad \hbar = 1 \quad (2.24)$$

et les équations classiques du mouvement sont

$$\dot{x}_c(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial p_c(t)} = \frac{p_c(t)}{m} \quad (2.25)$$

$$\dot{p}_c(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x_c(t)} = -\frac{\omega^2(t)}{m}x_c(t) \quad (2.26)$$

Nous supposons l'existence d'un invariant Hermitique de la forme homogène, quadratique [19]

$$I(t) = \frac{1}{2} [\alpha(t)p^2 + \beta(t)x^2 + \gamma(t)(xp + px)] \quad (2.27)$$

où $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des fonctions réelles du temps. L'équation de Von-Neumann (2.12) pour $I(t)$ donne

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\dot{\alpha}(t) - 2\frac{\omega^2(t)}{m}\gamma(t) \right) x^2 + \left(\dot{\beta}(t) + \frac{2}{m}\gamma(t) \right) p^2 + \left(\dot{\gamma}(t) + \frac{\alpha(t)}{m} - \omega^2(t)\frac{\beta(t)}{m} \right) (xp + px) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

qui implique les contraintes

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= 2\frac{\omega^2(t)}{m}\gamma(t) \\ \dot{\beta}(t) &= -\frac{2}{m}\gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) &= -\frac{\alpha(t)}{m} + \omega^2(t)\frac{\beta(t)}{m} \end{aligned} \quad (2.29)$$

afin de déterminer le facteur de phase de Lewis-Reisenfield ($\frac{d\delta_n(t)}{dt} = \langle \varphi_n(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \varphi_n(t) \rangle$), nous utilisons les états propres de l'invariant (2.27) qui sont donnés en représentation $\{x\}$ par

$$\varphi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\Omega}{\pi \hbar \alpha(t)} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[i \frac{\gamma(t)}{2\alpha(t)} x^2 \right] e^{-\frac{\Omega}{2\alpha(t)\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{\Omega}{\alpha(t)\hbar}} x \right) \quad (2.30)$$

où H_n sont les polynômes d'Hermite, et Ω est la valeur propre de $I(t)$. En suit, En injectant ces états propres dans la phase de Lewis-Reisenfield $\alpha_n(t)$ défini en (2.20) et on combine avec les contraintes (2.29), la phase $\alpha_n(t)$ devient

$$\delta_n(t) = -\frac{1}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{1}{\beta(t')} dt' \quad (2.31)$$

par conséquent la solution de l'équation de Schrödinger à partir de (2.22) peut être s'écrit comme

$$\Psi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\Omega}{\pi \hbar \alpha(t)} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-i \frac{1}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{1}{\beta(t')} dt' \right] \exp \left[i \frac{\gamma(t)}{2\alpha(t)} x^2 \right] e^{-\frac{\Omega}{2\alpha(t)\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{\Omega}{\alpha(t)\hbar}} x \right) \quad (2.32)$$

qui vérifie la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 dx = 1 \quad (2.33)$$

2.2.4 Exemple illustratif 2 : Interaction spin champs magnétique

Dans l'étude de la dynamique quantique, l'interaction d'un spin $\vec{S}$ avec un champs magnétique dépendant du temps $\vec{B}(t)$ peut être d'écrit par l'hamiltonien ;

$$H(t) = \mu_B \vec{B}(t) \cdot \vec{S} \quad (2.34)$$

où μ_B est le magnéton de Bohr, $\mathbf{B}(t)$ est le vecteur du champs magnétique ; $\vec{B}(t) = (B_x(t), B_y(t), B_z(t))$, tandis que $\vec{S}$ est le spin quantique représenté par les trois matrices de Pauli ; $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ tel que

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

En remplaçant $\vec{B}(t)$ et $\vec{S}$ dans l'hamiltonien (2.34) on obtient l'hamiltonien

$$H(t) = \begin{pmatrix} \omega(t) & \varrho(t) \\ \varrho^*(t) & -\omega(t) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

où $\omega(t) = \frac{\hbar}{2}\mu_B B_z(t)$ et $\varrho(t) = \frac{\hbar}{2}\mu_B(B_x(t) - iB_y(t))$.

L'invariant $I(t)$ approprié pour cet Hamiltonien est choisie sous la forme

$$I(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t)e^{-i\varphi(t)} \\ \sin \theta(t)e^{i\varphi(t)} & -\cos \theta(t) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

dont ses états propres sont

$$|I_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta(t)}{2} e^{-i\frac{\varphi(t)}{2}} \\ \sin \frac{\theta(t)}{2} e^{i\frac{\varphi(t)}{2}} \end{pmatrix}, \quad |I_-(t)\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta(t)}{2} e^{-i\frac{\varphi(t)}{2}} \\ \cos \frac{\theta(t)}{2} e^{i\frac{\varphi(t)}{2}} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

l'équation de Von-Neumann (2.12) pour $I(t)$ donne

$$\begin{aligned} i\hbar \begin{pmatrix} -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) & (\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - i\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t))e^{-i\varphi(t)} \\ (\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + i\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t))e^{i\varphi(t)} & \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (\varrho(t)e^{i\varphi(t)} - \varrho^*(t)e^{-i\varphi(t)}) \sin \theta(t) & 2\omega(t) \sin \theta(t)e^{-i\varphi(t)} - 2\varrho(t) \cos \theta(t) \\ 2\varrho^*(t) \cos \theta(t) - 2\omega(t) \sin \theta(t)e^{i\varphi(t)} & -(\varrho(t)e^{i\varphi(t)} - \varrho^*(t)e^{-i\varphi(t)}) \sin \theta(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui implique les contraintes

$$-i\hbar\dot{\theta}(t) = (\varrho(t)e^{i\varphi(t)} - \varrho^*(t)e^{-i\varphi(t)}) \quad (2.39)$$

$$i\hbar(\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - i\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t))e^{-i\varphi(t)} = 2\omega(t) \sin \theta(t)e^{-i\varphi(t)} - 2\varrho(t) \cos \theta(t) \quad (2.40)$$

$$i\hbar(\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + i\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t))e^{i\varphi(t)} = 2\varrho^*(t) \cos \theta(t) - 2\omega(t) \sin \theta(t)e^{i\varphi(t)} \quad (2.41)$$

Maintenant calculons la moyenne des dérivés des états propres $|I_{\pm}(t)\rangle$

$$\langle I_{\pm}(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | I_{\pm}(t) \rangle = \pm \hbar \frac{\dot{\varphi}(t)}{2} \cos \theta(t) \quad (2.42)$$

tandis que le terme dynamique $\langle I_{\pm}(t) | H(t) | I_{\pm}(t) \rangle$ de la phase (2.20) est obtenu en remplaçant les états propres (2.38)

$$\langle I_{\pm}(t) | H(t) | I_{\pm}(t) \rangle = \pm \left[\omega(t) \cos \theta(t) + \frac{1}{2} \sin \theta(t) (\varrho(t) e^{i\varphi} + \varrho^*(t) e^{-i\varphi}) \right] \quad (2.43)$$

en injectant les deux termes (2.42) et (2.43) dans la phase (2.20), on obtient

$$\delta_{\pm}(t) = \mp \int_0^t \frac{(\varrho(t') e^{i\varphi(t')} + \varrho^*(t') e^{-i\varphi(t')})}{2 \sin \theta(t')} dt' \quad (2.44)$$

en suposant $\varrho(t') = |\varrho(t')| e^{-i\varphi_{\varrho}(t')}$ la phase $\alpha_{\pm}(t)$ devient

$$\delta_{\pm}(t) = \mp \int_0^t \frac{|\varrho(t')| \cos(\varphi(t') - \varphi_{\varrho}(t'))}{\sin \theta(t')} dt' \quad (2.45)$$

finalemt la solution de l'équation de Schrödinger pour un spin en interaction avec champs magnétique est donnée selon (2.22) et (2.45) comme

$$|\Psi_{\pm}(t)\rangle = e^{\mp i \int_0^t \frac{|\varrho(t')| \cos(\varphi(t') - \varphi_{\varrho}(t'))}{\sin \theta(t')} dt'} |I_{\pm}(t)\rangle \quad (2.46)$$

2.3 Méthode des invariants pseudo-hermitiques

On peut également utiliser l'approche standard de Lewis-Riesenfeld du calcul des invariants comme argumenté dans [20, 21, 22, 23]. Cette approche nécessite de construire un opérateur invariant pseudo-Hermitique $I^{PH}(t)$, c'est-à-dire l'invariant $I^{PH}(t)$ est un observable qui obeit à l'équation de pseudo-Hermiticité

$$I^{PH+}(t) = \eta(t) I^{PH}(t) \eta(t)^{-1} \Leftrightarrow I^h(t) = \rho(t) I^{PH}(t) \rho(t)^{-1}, \quad \eta(t) = \rho^+(t) \rho(t) \quad (2.47)$$

Et vérifie l'équation de Von-Newman

$$\frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t} = i [I^{PH}(t), H(t)], \quad \hbar = 1, \quad (2.48)$$

Son adjoint $I^{PH+}(t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial I^{PH+}(t)}{\partial t} = i \left[I^{PH+}(t), \eta(t)H(t)\eta(t)^{-1} + i \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} \eta(t)^{-1} \right], \hbar = 1,$$

Cette dernière équation est obtenue en injectant $I^{PH}(t) = \eta(t)^{-1} I^{PH+}(t) \eta(t)$ dans l'équation (2.48) ce qui implique la relation de pseudo-Hermiticité dépendante du temps entre $H(t)$ et $H(t)^+$

$$H(t)^+ = \eta(t)H(t)\eta(t)^{-1} + i \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} \eta(t)^{-1}, \hbar = 1, \quad (2.49)$$

Les états propres $|\Phi_n^{I^{PH}}(t)\rangle$ de l'invariant pseudo-Hermitique $I^{PH}(t)$ obéissent à l'équation aux valeurs propres

$$I^{PH}(t) |\Phi_n^{I^{PH}}(t)\rangle = \lambda_n^{I^{PH}} |\Phi_n^{I^{PH}}(t)\rangle \quad (2.50)$$

qui vérifient la relation d'ortho-normalisation

$$\langle \Phi_m^{I^{PH}}(t) | \eta(t) | \Phi_n^{I^{PH}}(t) \rangle = \delta_{mn} \quad (2.51)$$

où les valeurs propres $\lambda_n^{I^{PH}}$ sont constantes ;

$$\frac{\partial \lambda_n^{I^{PH}}}{\partial t} = 0 \quad (2.52)$$

La phase définit dans (2.20) est reformulée comme

$$\frac{d\delta_n(t)}{dt} = \langle \Phi_n^{I^{PH}}(t) | \eta(t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right) | \Phi_n^{I^{PH}}(t) \rangle \quad (2.53)$$

et elle est réelle par la relation (2.49) qui relie $H(t)$ à $H(t)^+$.

Plus loin, la solution de l'équation de Schrödinger (2.6) dépendante du temps avec un Hamiltonien non-Hermitique ($H(t) \neq H(t)^+$) est obtenue en termes des états propres de l'invariant pseudo-Hermétique $I^{PH}(t)$ [20, 21, 22, 23] :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp[i\alpha_n(t)] |\Phi_n^{I^{PH}}(t)\rangle \quad (2.54)$$

où nous avons démontré que l'évolution par cette méthode est unitaire tant que les phases (2.53) sont réelles :

$$\langle \Psi(t) | \eta(t) | \Psi(t) \rangle = \text{conste} = 1 \quad (2.55)$$

Chapitre 3

Système à deux niveaux dépendant du temps

L'objectif principal de ce chapitre est de résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un système à deux niveaux, en utilisant la méthode de l'opérateur invariant pseudo-hermitien $I^{PH}(t)$, présentée dans le deuxième chapitre. à travers cette approche, nous cherchons à déterminer la phase de Lewis–Riesenfeld ainsi que l'état d'évolution $|\Psi(t)\rangle$.

Comme il s'agit d'un système dépendant du temps et non hermitique, l'hamiltonien d'un système à deux niveaux peut être écrit sous forme matricielle simple ;

$$H(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & \alpha(t) \\ \beta(t) & -\gamma(t) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Les fonctions $\gamma(t)$, $\alpha(t)$, et $\beta(t)$ sont des fonctions réelles dépendants du temps.

$$H^+(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & \beta(t) \\ \alpha(t) & -\gamma(t) \end{pmatrix} \neq H(t) \quad (3.2)$$

$$H(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \quad (3.3)$$

Pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$H(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \quad (3.4)$$

avec $H(t)$ donné par (3.1), nous employons la méthode des invariants pseudo-Hermitiques présentée dans la dernière section du deuxième chapitre en suivant les mêmes étapes.

3.1 Invariant pseudo-Hermitique de $H(t)$

Dans le cas d'un système à deux niveaux dépendant du temps décrit par l'hamiltonien (3.1), nous choisissons l'opérateur invariant pseudo-Hermitique $I^{PH}(t)$ sous la forme

$$I^{PH}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A(t) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où $A(t)$ et $B(t)$, et $C(t)$ sont des paramètres réels dépendantes du temps à déterminer. La condition d'invariance $\frac{dI^{PH}(t)}{dt} = \frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t} - i[I^{PH}(t), H(t)] = 0$ implique que

$$I^{PH}H - HI^{PH} = \left\{ \begin{pmatrix} A(t)\gamma(t) + B(t)\beta(t) & A(t)\alpha(t) - B(t)\gamma(t) \\ C(t)\gamma(t) - A(t)\beta(t) & C(t)\alpha(t) + \gamma(t)A(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma(t)A(t) + \alpha(t)C(t) & \gamma(t)B(t) - \alpha(t)A(t) \\ \beta(t)A(t) - \gamma(t)C(t) & \beta(t)B(t) + \gamma(t)A(t) \end{pmatrix} \right\} \quad (3.6)$$

donc

$$[I^{PH}, H] = \begin{pmatrix} B(t)\beta(t) - \alpha(t)C(t) & 2A(t)\alpha(t) - 2\gamma(t)B(t) \\ 2\gamma(t)C(t) - 2A(t)\beta(t) & C(t)\alpha(t) - B(t)\beta(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial I^{PH}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} \dot{A}(t) & \dot{B}(t) \\ \dot{C}(t) & -\dot{A}(t) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

En insérant les deux équations (3.7) et (3.8) dans (2.53), nous obtenons ;

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= -\frac{i}{\hbar} (B(t)\beta(t) - \alpha(t)C(t)) \\ \dot{B}(t) &= -\frac{i}{\hbar} (2A(t)\alpha(t) - 2\gamma(t)B(t)) \\ \dot{C}(t) &= -\frac{i}{\hbar} (2\gamma(t)C(t) - 2A(t)\beta(t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2 Le vecteur d'onde spinoriel

Dans le cadre de la méthode des invariants pseudo-Hermitiques, la solution de l'équation de Schrödinger ;

$$H(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle, \quad (3.10)$$

où l'hamiltonien (3.1), s'écrit en termes des états propres de l'invariant (3.5) comme ;

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\delta_n(t)} |\Phi_n^{IPH}(t)\rangle \quad (3.11)$$

où $\delta_n(t)$ est la phase de Lewis-Reisenfeld généralisée [23]. Nous devons d'abord résoudre l'équation aux valeurs propres de l'invariant $I^{PH}(t)$

$$I^{PH}(t) |\Phi_n^{IPH}(t)\rangle = \lambda |\Phi_n^{IPH}(t)\rangle \quad (3.12)$$

où λ est un paramètre indépendant du temps. Après quelques calculs de base, nous obtenons que les solutions de l'équation aux valeurs propres sont données par les états propres $|\Phi_n^{IPH}(t)\rangle$ et $|\Phi_n^{IPH+}(t)\rangle$, de $I^{PH}(t)$ et $I^{PH+}(t)$ respectivement ;

$$I^{PH}(t) |\Phi_n^{IPH}(t)\rangle = \lambda_n |\Phi_n^{IPH}(t)\rangle \quad (3.13)$$

les valeurs propres λ_n vérifient

$$\det |I^{PH}(t) - \lambda_n 1| = 0 \quad (3.14)$$

$$\begin{vmatrix} A(t) - \lambda & B(t) \\ C(t) & -A(t) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

ce qui donne

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{A^2(t) + B(t)C(t)} \quad (3.16)$$

Considérons $|\Phi_+^{IPH}(t)\rangle = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, et $|\Phi_-^{IPH}(t)\rangle = \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$ les vecteurs propres de $I^{PH}(t)$. Ensuite, nous substituons $|\Phi_+^{IPH}(t)\rangle$ et $|\Phi_-^{IPH}(t)\rangle$ dans l'équation (3.13) respectivement pour obtenir

$$I^{PH}(t) \mid \Phi_+^{I^{PH}}(t)\rangle = \lambda_+ \mid \Phi_+^{I^{PH}}(t)\rangle \quad (3.17)$$

$$\begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \lambda_+ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Par simplification, nous obtenons les états propres de $I^{PH}(t)$

$$\mid \Phi_+^{I^{PH}}(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mid \Phi_-^{I^{PH}}(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_- - A(t)}{B(t)} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

L'équation aux valeurs propres de l'adjoint $I^{PH+}(t)$ est

$$I^{PH+}(t) \mid \Phi_n^{PH+}(t)\rangle = \lambda'_n \mid \Phi_n^{PH+}(t)\rangle \quad (3.21)$$

où

$$\begin{pmatrix} A(t) & C(t) \\ B(t) & -A(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda'_n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Donc, les valeurs propres de $I^{PH+}(t)$ sont donnés par :

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{A^2(t) + B(t)C(t)} \quad (3.23)$$

de même nous considérons $\mid \Phi_+^{PH+}(t)\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\mid \Phi_-^{PH+}(t)\rangle = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ les vecteurs propres de $I^{PH+}(t)$. Ensuite, nous substituons ces vecteurs dans l'équation (3.21) respectivement pour trouver

$$\mid \Phi_+^{I^{PH+}}(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_+ - A(t)}{C(t)} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mid \Phi_-^{I^{PH+}}(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_- - A(t)}{C(t)} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

La solution de l'équation de Schrödinger ; $H(t) | \Psi_n(t) \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Psi_n(t) \rangle$, est

$$| \Psi_{\pm}(t) \rangle = e^{i\delta_{\pm}(t)} | \Phi_{\pm}^{IPH}(t) \rangle \quad (3.26)$$

Où $\delta_{\pm}(t)$, la fonction de phase qui donnée (2.53) par

$$\dot{\delta}_n(t) = \langle \Phi_n^{IPH+}(t) | i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\hbar} H(t) | \Phi_n^{IPH}(t) \rangle \quad (3.27)$$

Tout d'abord, nous avons

$$\langle \Phi_n^{IPH+}(t) | i \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n^{IPH}(t) \rangle = \left(1 \quad \frac{\lambda_+ - A(t)}{C(t)} \right) i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)}} \right) \quad (3.28)$$

ce qui donne

$$\langle \Phi_n^{IPH+}(t) | i \frac{\partial}{\partial t} | \Phi_n^{IPH}(t) \rangle = i \left(\frac{\lambda_+ - A(t)}{C(t)} \right) \left(\frac{\dot{A}(t) B(t) - \dot{B}(t) (\lambda_+ - A(t))}{B^2(t)} \right) \quad (3.29)$$

Deuxièmement, le terme $-\frac{1}{\hbar} \langle \Phi_n^{IPH+}(t) | H(t) | \Phi_n^{IPH}(t) \rangle$, implique :

$$\langle \Phi_n^{IPH+}(t) | H(t) | \Phi_n^{IPH}(t) \rangle = - \left(1 \frac{\lambda_+ - A(t)}{C(t)} \right) \begin{pmatrix} \gamma(t) & \alpha(t) \\ \beta(t) & -\gamma(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Par simplification, nous déduisons ;

$$H(t) | \Phi_n^{IPH}(t) \rangle = - \left(1 \frac{\lambda_+ - A(t)}{C(t)} \right) \begin{pmatrix} \gamma(t) + \alpha(t) \left(\frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)} \right) \\ \beta(t) - \gamma(t) \left(\frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)} \right) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n^{IPH+}(t) | H(t) | \Phi_n^{IPH}(t) \rangle &= \frac{1}{\hbar} \left[1 \left(\gamma(t) + \alpha(t) \left(\frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)} \right) \right) + \frac{\lambda_+ - A(t)}{C(t)} \left(\beta(t) - \gamma(t) \left(\frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

La combinaison des équations (3.29) et (3.30) donne

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_n^{I^{PH+}}(t) | & \quad i \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \Phi_n^{I^{PH}}(t) \rangle \\
 = & \quad \left\{ i \left(\frac{\lambda_+ - A(t)}{C(t)} \right) \left(\frac{\dot{A}(t) B(t) - \dot{B}(t) (\lambda_+ - A(t))}{B^2(t)} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \left[1 \left(\gamma(t) + \alpha(t) \left(\frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)} \right) \right) + \frac{\lambda_+ - A(t)}{C(t)} \left(\beta(t) - \gamma(t) \left(\frac{\lambda_+ - A(t)}{B(t)} \right) \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_{\pm}(t) &= \langle \Phi_n^{I^{PH+}}(t) | i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\hbar} H(t) | \Phi_n^{I^{PH}}(t) \rangle \\
 = & \quad \left\{ \left(\frac{\lambda_{\pm} - A(t)}{C(t)} \right) \left(\frac{B(t) (B(t) \beta(t) - \alpha(t) C(t)) - (2A(t) \alpha(t) - 2\gamma(t) B(t)) (1 - A(t))}{B^2(t)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \left(\gamma(t) + \alpha(t) \left(\frac{\lambda_{\pm} - A(t)}{B(t)} \right) \right) + \frac{1 - A(t)}{C(t)} \left(\beta(t) - \gamma(t) \left(\frac{1 - A(t)}{B(t)} \right) \right) \right\} \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Après simplification, on trouve

$$\dot{\delta}_{\pm}(t) = \left(\frac{(\lambda_{\pm} - A(t))^2}{B(t) C(t)} \right) \left(\frac{2A(t) \alpha(t)}{B(t)} + (\alpha(t) C(t))^2 \right) - \gamma(t) \quad (3.34)$$

en remplaçant $|\Phi_+^{I^{PH}}(t)\rangle$ (3.18) multipliée par un facteur de phase $e^{i\delta(t)}$ dans l'équation de Schrödinger $H(t)|\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle$, on a

$$\dot{\delta}_{\pm}(t) |\Phi_{\pm}^{I^{PH}}(t)\rangle = \left[\left(\frac{(\lambda_{\pm} - A(t))^2}{B(t) C(t)} \right) \left(\frac{2A(t) \alpha(t)}{B(t)} + (\alpha(t) C(t))^2 \right) - \gamma(t) \right] |\Phi_{\pm}^{I^{PH}}(t)\rangle,$$

ou

$$\delta_{\pm}(t) = \int_0^t \dot{\delta}_{\pm}(t) dt \quad (3.35)$$

Après un calcul direct, nous obtenons la solution d'expression générale sous la forme du vecteur spinoriel

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n e^{i\delta_n(t)} |\Phi_n^{I^{PH}}\rangle = |\Psi_+(t)\rangle + |\Psi_-(t)\rangle \quad (3.36)$$

avec

$$| \Psi_{\pm}^H(t) \rangle = \exp i \left[\int \left(\left(\frac{(\lambda_{\pm} - A(t'))^2}{B(t') C(t')} \right) \left(\frac{2A(t') \alpha(t')}{B(t')} + (\alpha(t') C(t'))^2 \right) - \gamma(t') \right) dt' \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_{\pm} - A(t)}{B(t)} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

3.3 Cas particulière : Etats stationnaires du spin soumis à l'action d'un champs magnétique constant

Comme un cas particulier, lorsque les paramètres $\alpha(t)$, $\beta(t)$, et $\gamma(t)$ de l'hamiltonien (3.1) sont constants, i.e. $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = \gamma_0$, où γ_0 est une constante proportionnelle au champ magnétique ; $\gamma_0 = \mu_B B_z$. l'hamiltonien (3.1) devient

$$H(t) = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

dans ce cas les équations (3.9) deviennents,

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= 0 \\ \dot{B}(t) &= 2i\gamma_0 B(t) \\ \dot{C}(t) &= -2i\gamma_0 C(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

La résolution du système différentiel conduit aux solutions générales des fonctions $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$, données par

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 \\ B(t) &= B_0 e^{2i\gamma_0 t} \\ C(t) &= C_0 e^{-2i\gamma_0 t} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Après avoir résolu le système d'équations différentielles, nous injectons les expressions de $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ dans la matrice $I(t)$. Cette dernière prend alors la forme

$$I^{PH}(t) = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 e^{2i\gamma_0 t} \\ C_0 e^{-2i\gamma_0 t} & -A_0 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Pour déterminer les états propres de l'opérateur $I^{PH}(t)$, nous résolvons l'équation aux valeurs propres $\det |I(t) - \lambda 1| = 0$, nous obtenons donc

$$\begin{aligned} |\Phi_+^{I^{PH}}(t)\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_+ - A_0}{B_0} e^{-2i\gamma_0 t} \end{pmatrix} \\ |\Phi_-^{I^{PH}}(t)\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_- - A_0}{B_0} e^{-2i\gamma_0 t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Lorsque nous remplaçons $\alpha = \beta = 0$ dans la phase $\dot{\delta}_n(t)$ donc on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_n(t) &= -\gamma(t) \\ \delta_n(t) &= \int_0^t \dot{\delta}_n(t) dt \\ \delta_n(t) &= -\gamma_0 t \end{aligned} \quad (3.43)$$

En substituant les phases $\delta_{\pm}(t) = \pm\gamma_0 t$, ainsi que les vecteurs propres de l'invariant pseudo-hermitique dans l'expression générale de la solution de l'équation de Schrödinger, on obtient l'état stationnaire d'un spin soumis à l'action d'un champs magnétique constant ;

$$\Psi_{\pm}^H(t)\rangle = \exp(\mp i\gamma_0 t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_{\pm} - A_0}{B_0} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Conclusion

Au cours de ce mémoire :

- Nous avons examiné la notion des systèmes quantiques non-hermitiques : pseudo-hermitiques et $\mathcal{PT}$ symétriques.
- Nous avons introduit la méthode d'invariants pseudo-hermitiques pour résoudre des systèmes quantiques non-hermitiques, et nous avons constaté que cette méthode est efficace pour l'étude des systèmes non-hermitiques dépendants du temps et qui préserve les postulats de la mécanique quantique.
- La théorie des pseudo-invariants a été illustrée par l'étude des systèmes physiques concrets comme : système à deux niveaux spinoriel.
- Le vecteur d'état pour notre problème représente un spinoriel dans l'espace de Dirac, et sa pseudo norme est conservée.

Bibliographie

- [1] L. D. Landau, Lifchiz, Mécanique Quantique, (Editions Mir, Moscou 1967).
- [2] A. Messiah, Mécanique Quantique Tome1, Tome2, (Dunod, Paris, 1995).
- [3] H. Teshbach , C. E. Porter and V. F. Weisskopf , Model for Nuclear Reactions with Neutrons, Phys. Rev. **96**, 448 (1954).
- [4] Wu Tai Tsun, Ground State of a Bose System of Hard Spheres, Phys. Rev. **115**, 1390 (1959).
- [5] Wong Jack, Results on Certain Non-Hermitian Hamiltonians, J. Math. Phys. **8**, 2039 (1967).
- [6] Carl M. Bender and Stefan Boettcher, Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243–5246 (1998).
- [7] Carl M. Bender, Dorje C. Brody, and Hugh F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics, Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002).
- [8] Carl M. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
- [9] W. Pauli, On Dirac's New Method of Field Quantization, Rev. Mod. Phys. **15**, 175-207 (1943).
- [10] T. D. Lee, G. C. Wick, Negative metric and the unitarity of the S-matrix, Nucl. Phys. B **9**, 209-243 (1969).
- [11] E. C. G. Sudarshan, Quantum Mechanical Systems with Indefinite Metric, Phys. Rev. **123**, 2183-2193 (1961).
- [12] S. N. Gupta, On the Calculation of Self-Energy of Particles, Phys. Rev. **77**, 294-295 (1950).

- [13] K. Bleuler, Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen, *Helv. Phys. Act.* **23**, 567 (1950).
- [14] F. G. Scholz, H. B. Geyer, F. J. Hahne, Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, *Ann. Phys.* **213**, 74 (1992).
- [15] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **43**, 205-214 (2002).
- [16] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, *J. Math. Phys.* **43**, 2814-2816 (2002).
- [17] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.III. Equivalence of Pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, *J. Math. Phys.* **43**, 3944-3951 (2002).
- [18] E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik, *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).
- [19] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, An exact quantum theory of the time dependent harmonic oscillator and of a charged particle time dependent electromagnetic field, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
- [20] B. Khantoul, A. Bounames and M. Maamache, On the invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians, *Eur. Phys. J. Plus* **132** : 258 (2017).
- [21] M. Maamache, O-K. Djeghiour, N. Mana and W. Koussa, Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 383 (2017).
- [22] W. Koussa, N. Mana, O- K. Djeghiour, and M. Maamache, The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a SU(1,1) and SU(2) dynamical symmetry, *J. Math. Phys.* **59**, 072103 (2018).
- [23] W. Koussa, M. Maamache, Pseudo-Invariant Approach for a Particle in a Complex Time-Dependent Linear Potential, *Int. J. Theor. Phys.* **59**, 1490–1503 (2020).
- [24] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, (Ungar, New York 1961).

Abstract:

In our work, we recall the concepts of PT-symmetry, the pseudo-Hermiticity, PT and CPT inner-products. We study the non-Hermitian quantum systems described by the non-Hermitian Hamiltonian with an examination of the pseudo-invariant theory. We use a linear pseudo invariant operator to solve analytical time-dependent Schrodinger equation for a two-level system . Finally, perturbation theory for the non-Hermitian case is discussed as well.

Résumé :

Dans notre travail, nous rappelons les concepts de PT-symétrie, de pseudo-Hermécticité, de produits scalaires PT et CPT. Nous étudions les systèmes quantiques non Hermétiques décrits par l'hamiltonien non Hermétique en examinant la théorie des pseudo-invariants. Nous utilisons un opérateur linéaire pseudo-invariant pour résoudre l'équation de Schrödinger analytique dépendante du temps pour un Système à deux niveaux . Enfin, la théorie des perturbations pour le cas non-Hermitien est également discutée.

الملخص:

"نقوم في هذا العمل بالتذكير بمفاهيم تناظر التكافؤ والزمن (PT-Symmetry) ، الهرميتية الكاذبة (Pseudo-Hermiticity) ، والمنتجات السلمية من نمط PT و CPT . كما ندرس الأنظمة الكمومية غير الهرميتية الموصوفة بهاميلتوني غير هرميتي من خلال فحص نظرية اللامتحوالات الكاذبة (Pseudo-invariants) بالإضافة إلى ذلك، نستخدم مؤثرًا خطيًا لا متحولًا كاذبًا لحل معادلة شرودنجر التحليلية التابعة للزمن لسبين (غزل) يتفاعل مع حقل مغناطيسي خارجي مركب ذي تطور أحادي. وأخيرًا، نناقش أيضًا نظرية الاضطرابات الخاصة بالحالة غير الهرميتية.