

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI (BBA, ALGÉRIE)

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

POLYCOPIÉ DE COURS

PRÉSENTÉ PAR

DR. SMAIL ADDOUNE

OPTIMISATION

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Table des matières

Introduction	3
1 Notions de base	6
1.1 Existence de solutions	6
1.2 Séparation et hyperplan d'appui	9
1.3 Polarité et cônes convexes	17
1.3.1 Cônes convexes	17
1.3.2 Cône polaire	18
1.4 Théorèmes de l'alternative	20
2 Fonctions convexes généralisées	25
2.1 Quasiconvexité	25
2.1.1 Fonctions quasi-convexes	25
2.1.2 Fonctions semi-strictement quasi-convexes	30
2.1.3 Cas différentiable	33
2.1.4 Cas deux fois différentiable	36
2.2 Fonctions pseudoconvexes	42
2.2.1 Définitions et propriétés	42
2.2.2 Relations entre quasi-convexité et pseudoconvexité	46
2.3 Convexité en un point	51
3 Conditions d'optimalité	56
3.1 Conditions d'optimalité géométriques	56
3.2 Conditions d'optimalité analytiques	69
3.2.1 Conditions d'optimalité de Fritz John	70
3.2.2 Conditions d'optimalité de KKT	74
3.3 Conditions d'optimalité du second ordre	89
4 Dualité Lagrangienne	99
4.1 Introduction	99
4.2 Principe de relaxation	100

4.3	Dualité Lagrangienne	101
4.4	Interprétation géométrique de la dualité	106
4.5	Dualité et points selles du Lagrangien	109
4.5.1	Dualité en programmation convexe	114
4.5.2	Dualité forte en programmation linéaire	117
4.5.3	Dualité forte en programmation quadratique	120

Introduction

La théorie de l'optimisation constitue un outil fondamental dans de nombreux domaines, allant de la recherche opérationnelle à l'intelligence artificielle, en passant par l'ingénierie, l'économie, les sciences physiques, la biologie et les télécommunications. Elle permet de modéliser, analyser et résoudre des problèmes complexes de prise de décision et d'allocation optimale des ressources.

L'optimisation est une discipline riche et variée, regroupant plusieurs domaines allant de la programmation linéaire et convexe à l'optimisation stochastique, dynamique et multi-objectifs. Chaque domaine répond à des problématiques spécifiques liées à la structure des fonctions et des contraintes du problème étudié.

Les problèmes d'optimisation peuvent être classés selon plusieurs critères, notamment :

- ▷ optimisation linéaire et optimisation non linéaire ;
- ▷ optimisation continue et optimisation discrète ;
- ▷ optimisation différentiable et optimisation non différentiable ;
- ▷ optimisation monocritère et optimisation multicritère ;
- ▷ optimisation sans contraintes et optimisation avec contraintes.

Dans ce document, nous nous intéressons à l'optimisation continue à un seul objectif. Plus précisément, ce travail est consacré à l'étude théorique de cette classe de problèmes, qui constitue un socle fondamental pour la compréhension des algorithmes numériques destinés à leur résolution.

Ce polycopié présente l'essentiel du cours *Optimisation 2*, dispensé aux étudiants de première année Master, spécialité *Analyse Mathématique et Applications*.

Le document est divisé en quatre chapitres intitulés :

1. Notions de base ;
2. Fonctions convexes généralisées ;
3. Conditions d'optimalité ;
4. Dualité lagrangienne.

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler quelques résultats fondamentaux concernant l'existence de solutions à un problème d'optimisation.¹

Un outil central de cette étude est la séparation de deux ensembles convexes et, plus particulièrement, la notion d'hyperplan d'appui. Ces concepts jouent un rôle clé dans la démonstration des théorèmes de l'alternative, qui permettent de traduire des conditions d'optimalité géométriques en conditions analytiques beaucoup plus faciles à vérifier.

1. Si l'on souhaite trouver une solution à un problème, il est évidemment préalable de savoir qu'elle existe !

Nous introduisons ensuite la notion de cône convexe, indispensable pour formuler les conditions d’optimalité du premier ordre. Nous définissons notamment le cône convexe engendré par un ensemble, le cône polaire d’un ensemble, ainsi que les cônes polyédriques.

Le chapitre se termine par l’énoncé et la démonstration de plusieurs théorèmes de l’alternative classiques² :

- ▷ le théorème de Farkas,
- ▷ le théorème de Gordan,
- ▷ le théorème de Ville,
- ▷ le théorème de Motzkin,
- ▷ le théorème de Steimke.

Ces résultats constituent les briques de base de la dualité en optimisation et reviennent systématiquement dans l’étude des conditions nécessaires et suffisantes d’optimalité.

Dans le second chapitre, intitulé « Fonctions convexes généralisées », nous nous intéressons à plusieurs extensions du concept classique de convexité. L’étude de ces fonctions plus générales est motivée par le fait que, dans de nombreux problèmes d’optimisation, l’hypothèse de convexité stricte est trop restrictive, alors que certaines propriétés essentielles — unicité des minimiseurs, caractère global des minima locaux, structure géométrique simple des sous-niveaux — peuvent néanmoins être préservées.

Nous commençons par introduire les *fonctions quasi-convexes*, à la fois dans les cas différentiable et non différentiable. Leur définition repose sur la convexité des ensembles de sous-niveaux, ce qui permet d’obtenir une première série de propriétés structurelles. Nous présentons ensuite plusieurs résultats de caractérisation de ces fonctions :

- en termes de propriétés géométriques de leurs sous-niveaux ;
- à partir des dérivées première ou seconde dans le cadre différentiable.

Nous étudions ensuite la classe des *fonctions strictement quasi-convexes*, qui constitue une extension naturelle des fonctions strictement convexes. Pour cette famille de fonctions, l’unicité de la solution d’un problème de minimisation est garantie, ce qui renforce leur intérêt théorique et pratique.

Nous présentons également les *fonctions semi-strictement quasi-convexes*, qui forment une classe encore plus large que celle des fonctions strictement quasi-convexes. Elles possèdent la propriété remarquable que tout minimum local est automatiquement un minimum global, ce qui les rend particulièrement utiles dans l’analyse de la convergence des algorithmes d’optimisation.

La dernière partie du chapitre est consacrée aux *fonctions pseudoconvexes*, qui jouent un rôle central en optimisation non linéaire différentiable. Ces fonctions sont caractérisées par le fait que tout point critique (c’est-à-dire tout point où le gradient s’annule) est nécessairement un minimum global. Cette propriété en fait une extension particulièrement pertinente des fonctions convexes dans le cadre différentiable.

Enfin, nous examinons en détail les relations entre les différentes classes introduites — quasi-convexité, strict quasi-convexité, semi-strict quasi-convexité et pseudoconvexité — en mettant l’accent sur leur hiérarchie et leurs implications dans les cas différentiable et deux fois différentiable. Ces liens offrent une vision unifiée des différentes généralisations de la convexité et permettent de mieux comprendre leur rôle fondamental en optimisation.

2. Les preuves détaillées des théorèmes de Farkas et de Gordan sont données dans le texte; les autres sont proposés sous forme d’exercices.

Le chapitre 3 constitue le cœur de ce document. Il est consacré à l'étude des conditions d'optimalité qui permettent de caractériser les solutions optimales sous forme d'équations et d'inéquations.

Dans un premier temps, ces conditions sont formulées dans un cadre géométrique, par l'introduction du cône tangent et du cône des directions de descente. Les conditions analytiques de type Fritz John sont ensuite établies à l'aide des théorèmes de l'alternative présentés au chapitre 1.

Les conditions d'optimalité de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) exigent, pour être valables comme conditions nécessaires, l'imposition de conditions de qualification des contraintes. Plusieurs d'entre elles sont ainsi exposées : la condition d'Abadie, la condition de Cottle (équivalente à celle de Mangasarian–Fromovitz), la condition d'indépendance linéaire des contraintes actives, ainsi que la condition de Slater. Lorsque la fonction objectif et les fonctions définissant les contraintes satisfont des hypothèses de convexité appropriées, ces conditions deviennent également suffisantes pour garantir l'optimalité globale.

Cependant, les conditions d'optimalité du premier ordre pouvant se révéler insuffisantes pour une caractérisation complète des solutions, le chapitre s'achève par l'introduction des conditions d'optimalité du second ordre, qui permettent une analyse plus précise de la nature des points stationnaires obtenus.

Le document se termine par un chapitre consacré à l'étude du concept de la dualité lagrangienne en optimisation. La dualité lagrangienne constitue l'un des cadres fondamentaux de la théorie de la dualité en optimisation mathématique, en particulier pour l'étude des problèmes d'optimisation avec contraintes. Elle repose sur l'introduction de multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes, permettant d'incorporer celles-ci dans la fonction objectif au moyen du lagrangien. Cette reformulation offre une approche unifiée pour l'analyse des propriétés structurelles du problème primal.

À partir du lagrangien, on définit la fonction duale comme l'infimum du lagrangien par rapport aux variables primales. Cette fonction, concave par construction, conduit naturellement à la formulation du problème dual, dont l'objectif est de maximiser la fonction duale sous des contraintes appropriées sur les multiplicateurs. Le principe de dualité faible assure alors que toute valeur réalisable du problème dual fournit une borne sur la valeur optimale du problème primal.

Sous certaines hypothèses, notamment des conditions de convexité et de qualification des contraintes, la dualité lagrangienne conduit à la dualité forte, caractérisée par l'égalité entre les valeurs optimales des problèmes primal et dual. Dans ce cadre, les conditions d'optimalité de Karush–Kuhn–Tucker apparaissent comme une conséquence directe de l'analyse lagrangienne, les multiplicateurs de Lagrange jouant le rôle de variables duales.

Au-delà de son intérêt théorique, la dualité lagrangienne constitue un outil central pour la résolution numérique des problèmes d'optimisation. Elle est à la base de nombreuses méthodes algorithmiques, telles que les méthodes de décomposition, les méthodes de relaxation lagrangienne ou encore les algorithmes de type primal-dual. Elle offre ainsi un cadre puissant permettant à la fois l'analyse fine des solutions et le développement de techniques de calcul efficaces.

Notions de base

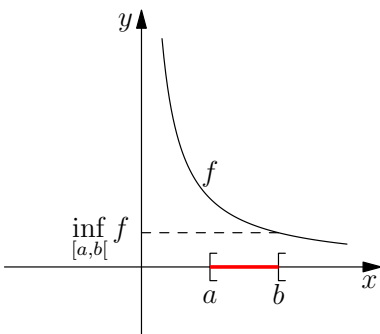


FIGURE 1.1 – f est continue sur $S = [a, b[$ mais $S = [a, b[$ n'est pas fermé.

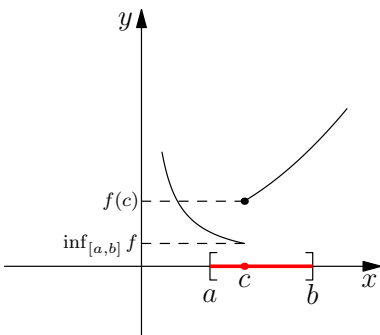


FIGURE 1.2 – $S = [a, b]$ est compact mais f n'y est pas s.c.i. sur S .

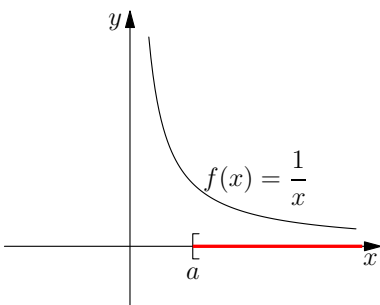


FIGURE 1.3 – f est continue sur $S = [a, \infty[$ qui n'est pas borné.

1.1 Existence de solutions

Le théorème suivant est un résultat très important en théorie de l'optimisation. Il nous donne des conditions suffisantes garantissant l'existence de solutions pour un problème d'optimisation. On dit que \bar{x} est une solution du problème $\min\{f(x) : x \in S\}$ si $\bar{x} \in S$ et $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pour tout $x \in S$. Dans ce cas, on dit que \bar{x} est un minimiseur de f sur S ou que le minimum de f sur S est atteint en \bar{x} . Dans les figures ci-contre on présente trois cas où le minimiseur n'existe pas. Pour la FIGURE 1.1 la valeur minimale de f est donnée par $f(b)$ mais $b \notin S$ (S n'est pas fermé). La FIGURE 1.2 montre un cas où l'ensemble S est compact par contre la fonction f n'est pas semi-continue inférieurement en c , la valeur minimale de f est donnée par la limite de $f(x)$ quand x tend vers c par la gauche, mais il est évident que cette valeur n'est réalisée par aucun point de S . Le cas de la FIGURE 1.3 illustre la situation où f est continue mais avec S non borné ($\inf\{f(x) : x \in S\} = 0$) et le problème n'admet pas de solutions. Dans le théorème qui suit, on montre que si S est un compact non vide (bornée et fermé dans le cas de la dimension finie) et f est une fonction semi-continue inférieurement sur S , alors contrairement aux cas précédents, un minimiseur existe.

Définition 1.1

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) := \sup_{r > 0} \inf_{x \in B_r(x_0)} f(x) \geq f(x_0).$$

Ou, en utilisant le langage des suites : pour toute suite (x_n)



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin, était un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895. Il a étudié les mathématiques à l'université de Münster et obtint une chaire à l'Université technique de Berlin. Il fut immobile les trois dernières années de sa vie et s'éteignit à Berlin à la suite d'une pneumonie. Il créa avec Alfred Enneper une classe complète de paramétrisations. Karl Weierstrass est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Il consolida des travaux de Cauchy sur les nombres irrationnels et leur amena une nouvelle compréhension. Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

FIGURE 1.4 – Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

convergeant vers x_0 on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Si S est une partie non vide de \mathbb{R}^n alors f est s.c.i sur S si elle est s.c.i en tout point de S .

Rappels

Soit (r_n) une suite de nombres réels, si elle n'est pas minorée alors on a $\liminf r_n = -\infty$. Sinon, on définit la suite (x_n) par

$$x_n = \inf_{k \geq n} r_k.$$

La suite (x_n) est croissante, donc elle converge vers $\sup_n x_n$ (qui peut être égal à $+\infty$). Cette limite s'appelle la limite inférieure de la suite (r_n) qu'on note $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n$, c'est la plus petite valeur d'adhérence^a de la suite (r_n) .

Déterminer la limite inférieure des suites suivantes : $(-1)^n$, (n) , $(\sin(n))$ et $(-\log(n))$.

^a $r \in \overline{\mathbb{R}}$ est une valeur d'adhérence de la suite (r_n) si on peut extraire de cette suite une sous-suite convergeant vers r .

EXERCICE 1.1

Soit S une partie fermée de \mathbb{R}^n et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que f est s.c.i sur S si et seulement si l'épigraphe de f sur S est un ensemble fermé dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. On rappelle que l'épigraphe de f sur S est donné par

$$\text{epi}(f) := \{(x, r) \in S \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

2. Montrer que la semi-continuité inférieure de f sur S est équivalente à la fermeture des ensembles de sous-niveaux $\mathcal{L}_{\alpha, f}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_{\alpha, f} := \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}.$$

Théorème 1.1 (Weierstrass)

Soit S un compact non vide de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement sur S . Alors le problème de minimiser f sur S admet au moins une solution.

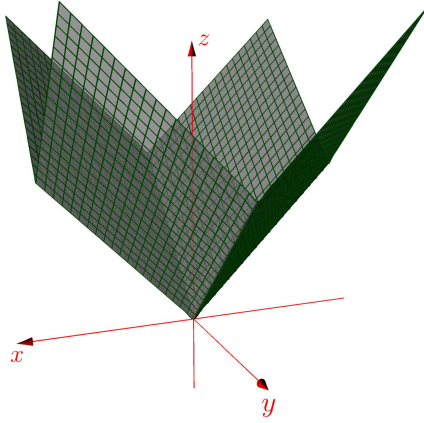


FIGURE 1.5 – Graphe de la fonction norme $x \mapsto \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

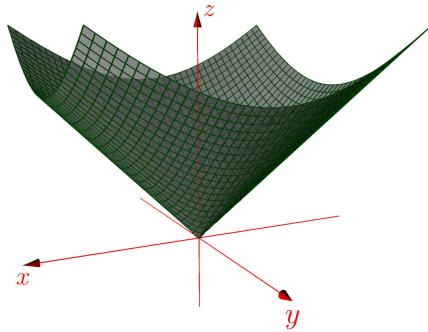


FIGURE 1.6 – Graphe de la fonction norme $x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

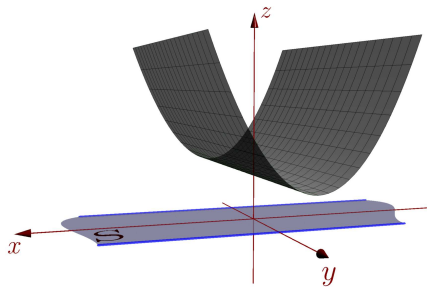


FIGURE 1.7 – La fonction $(x, y) \mapsto x^2$ est coercive sur $S = \{(x, y) : a \leq y \leq b\}$ mais elle ne l'est pas sur \mathbb{R}^2 . On remarque que malgré que la fonction n'est pas coercive, elle admet un minimum sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Soit (x_n) une suite d'éléments de S telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf \{f(x) : x \in S\}.$$

Puisque S est compact, on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_n)_{n \in K}$ qui converge vers un point de S , disons x_0 . La semi-continuité inférieure de f en x_0 entraîne que

$$\inf \{f(x) : x \in S\} = \liminf_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in K}} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Par suite x_0 est un minimiseur de f sur S . ■

Corollaire 1.1

Soit S une partie fermée non vide de \mathbb{R}^n (pas nécessairement bornée) et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction s.c.i et coercive sur S , c'est à dire

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in S}} f(x) = +\infty.$$

Alors un minimiseur de f sur S existe.

Démonstration. Soit $x_0 \in S \neq \emptyset$. La coercivité de f sur S entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in S$ vérifiant $\|x - x_0\| > \delta$ on a $f(x) > f(x_0)$. Le minimiseur de f sur S se trouve donc dans l'ensemble $S \cap \text{cl}(B_\delta(x_0))$, comme ce dernier est compact alors le résultat s'obtient par le Théorème 1.1. ■

Quelques exemples de fonctions coercives

- ▷ Toute norme définie sur l'espace \mathbb{R}^n est coercive sur ce dernier (voir FIGURES 1.5 et 1.6).
- ▷ Si f est une fonction coercive sur S et g une fonction bornée inférieurement sur S alors leur somme $f + g$ est coercive sur S .

EXERCICE 1.2

Soit H une matrice définie positive. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Hx \rangle + \langle c, x \rangle + \alpha.$$

où c est un vecteur de \mathbb{R}^n et α un nombre réel.



Augustin

Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'Œuvre des Écoles d'Orient. Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques, sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

FIGURE 1.8 – Augustin Louis Cauchy

1. Montrer l'inégalité suivante

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq \langle x, Hx \rangle \leq \lambda_{\max} \|x\|^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

où λ_{\min} et λ_{\max} sont respectivement la valeur propre minimale et maximale de la matrice H .

2. En utilisant l'inégalité (1.1), montrer que la fonction f est coercive sur \mathbb{R}^n .
3. Le résultat reste-t-il vrai si on suppose que la matrice H est seulement semi-définie positive.
4. Plus généralement, montrer que toute fonction fortement convexe différentiable définie sur un ensemble convexe non borné S est coercive sur ce dernier.

1.2 Séparation et hyperplan d'appui

La notion d'hyperplan d'appui et la séparation de deux ensembles convexes joue un rôle très important dans la théorie de l'optimisation. Elle est utilisée notamment pour établir des conditions d'optimalité et aussi dans la dualité.

On commence par présenter le théorème de la projection d'un point sur un convexe fermé. Étant donné un espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n , un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ et un point y de \mathbb{R}^n . La question est de trouver, s'il existe, un point \bar{x} de S qui soit le plus proche de y , c'est à dire chercher parmi tous les points x de S ceux qui rendent la quantité $\|x - y\|$ minimale. Dans la suite, on démontre que dans le cas où S est un convexe fermé, un tel \bar{x} existe et il est unique. Dans ce cas, on appelle \bar{x} la projection orthogonale de y sur S . On établit ainsi, une application $p_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui associe à chaque $y \in \mathbb{R}^n$ sa projection orthogonale. Quelques propriétés de cette application sont résumées dans le Théorème 1.4.

Rappelons la loi du parallélogramme

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle, \text{ pour tout } u, v \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit \mathbb{R}^n un espace vectoriel euclidien, on a alors

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \text{ pour tout } u, v \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

L'inégalité (1.3) devient une égalité si et seulement si u et v sont



Hermann Amandus Schwarz, né le 25 janvier 1843 à Hermisdorf, en Silésie (aujourd'hui la ville de Jerzmanowa en Pologne) et mort le 30 novembre 1921 à Berlin, est un mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie. Il a travaillé à Halle, Göttingen puis à Berlin, sur des sujets allant de la théorie des fonctions à la géométrie différentielle en passant par le calcul des variations.

FIGURE 1.9 – Hermann Amandus Schwarz

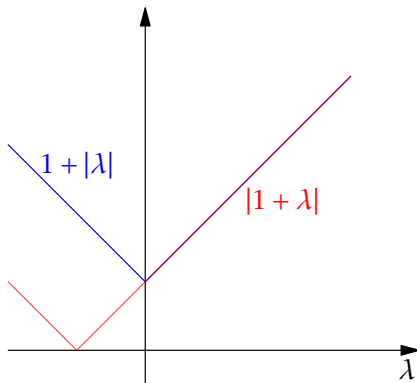


FIGURE 1.10 – Les graphes de $\lambda \mapsto 1 + |\lambda|$ en bleu et celui de $\lambda \mapsto |1 + \lambda|$ en rouge coïncident seulement pour $\lambda \geq 0$.

linéairement dépendants.

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n . L'inégalité (1.3) est vérifiée si l'un des vecteurs est nul, supposons que les deux vecteurs u et v sont non nuls. Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \|u + tv\|^2$. On a

$$\varphi(t) = \|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2.$$

La fonction φ est une fonction quadratique en t positive ou nulle sur tout \mathbb{R} . Par suite l'équation $\varphi(t) = 0$ admet au plus une solution, c'est à dire le discriminant Δ associé à cette équation est négatif ou nul ($\Delta \leq 0$), or $\Delta = 4\langle u, v \rangle - 4\|u\|^2\|v\|^2$.

La deuxième partie du théorème s'obtient en remarquant l'équivalence des trois assertions suivantes

- (i) Les vecteurs u et v sont linéairement dépendants.
- (ii) L'équation $\varphi(t) = 0$ admet une seule solution non nulle.
- (iii) $\Delta = 0$ c'est à dire $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$. ■

Remarque 1.1

Soient u et v deux vecteurs non nuls tels que

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|. \quad (1.4)$$

La loi du parallélogramme (1.2) nous donne alors

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|.$$

On obtient donc $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$, il existe, d'après le Théorème 1.2, $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda v$. La relation (1.4) nous permet d'écrire $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$, d'où $\lambda > 0$ (voir FIGURE 1.10).

Théorème 1.3 (Projection sur un convexe fermé.)

Soit S un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n et $y \notin S$, alors il existe un unique $\bar{x} \in S$ qui réalise la distance minimale de y à S , c'est à dire $\|\bar{x} - y\| = \min\{\|x - y\| : x \in S\}$. De plus, \bar{x} est caractérisé par

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } x \in S. \quad (1.5)$$

Démonstration. Comme la fonction $x \mapsto \|x - y\|$ est continue et coercive sur S alors, d'après le Corollaire 1.1, un minimiseur existe.

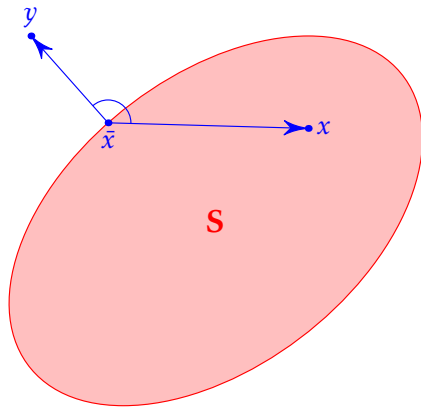


FIGURE 1.11 – Projection sur un convexe fermé. On remarque que pour tout $x \in S$, l'angle entre les vecteurs $x - \bar{x}$ et $y - \bar{x}$ est obtus.

L'unicité de la projection n'est pas assurée si la norme utilisée est non euclidienne. Prenons comme exemple la recherche parmi les points de l'ensemble $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$ ceux qui sont les plus proches du point $(2, 2)$ au sens de la norme ℓ_1 . Il s'agit de résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser}_{(x,y)} |x - 2| + |y - 2| \\ \text{s.c} \\ x + y = 1, \end{cases}$$

qui est équivalent au problème unidimensionnelle sans contraintes suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser}_x |x - 2| + |x + 1| \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce problème est l'intervalle $[-1, 2]$ (faire un dessin pour s'en convaincre). Tous les points de coordonnées $(x, 1 - x)$ avec $x \in [-1, 2]$ sont à la même distance minimale du point $(2, 2)$. Donc la projection au sens de ℓ_1 n'est pas en général unique même si l'ensemble est un convexe fermé.

Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux éléments x_1 et x_2 de S tels que

$$\|x_1 - y\| = \|x_2 - y\| = \gamma = \inf\{\|x - y\| : x \in S\}. \quad (1.6)$$

Le point $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in S$ (S est convexe), par conséquent

$$\gamma \leq \left\| y - \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}\|y - x_1\| + \frac{1}{2}\|y - x_2\| = \gamma.$$

On a alors

$$\|(y - x_1) + (y - x_2)\| = \|y - x_1\| + \|y - x_2\|.$$

Donc il existe (voir remarque 1.1) un $\lambda > 0$ tel que $y - x_1 = \lambda(y - x_2)$. En utilisant l'égalité (1.6) on obtient $\lambda = 1$ et $x_1 = x_2$.

Démontrons maintenant que la relation (1.5) est une condition nécessaire et suffisante pour que \bar{x} soit la projection de y sur S .

Supposons que \bar{x} vérifie (1.5), et soit $x \in S$, on a alors

$$\|y - x\|^2 = \|(y - \bar{x}) + (\bar{x} - x)\|^2 = \|y - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - x\|^2 + 2\langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle.$$

D'où $\|y - x\| \geq \|y - \bar{x}\|$.

Réciproquement, supposons que \bar{x} soit la projection de y sur S et soit $x \in S$, on a $\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) \in S$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$. On obtient, pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|y - \bar{x}\|^2 &\leq \|y - \bar{x} - \lambda(x - \bar{x})\|^2 \\ &= \|y - \bar{x}\|^2 + \lambda^2\|x - \bar{x}\|^2 - 2\lambda\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui donne $2\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq \lambda\|x - \bar{x}\|^2$ pour tout $\lambda \in]0, 1]$. En faisant tendre λ vers 0^+ on obtient le résultat voulu. ■

Théorème 1.4 (Propriétés de la projection orthogonale.)

Soit S un convexe fermé non vide de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . L'application p_S qui associe à chaque élément de \mathbb{R}^n sa projection orthogonale sur l'ensemble S vérifie les propriétés suivantes :

- ▷ $p_S \circ p_S = p_S$ (idempotente).
- ▷ $\|p_S(x) - p_S(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ (non expansive).
- ▷ $\langle p_S(x) - p_S(y), x - y \rangle \geq 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ (monotone).

Démonstration. L'application p_S est idempotente : En effet, si $x \in \mathbb{R}^n$ alors $p_S(x) \in S$ et par suite son image est lui même.

L'application p_S est monotone et non expansive : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, si

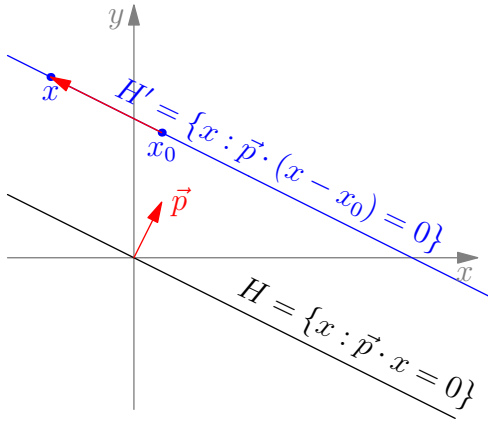


FIGURE 1.12 – Hyperplans vectoriel et affine. Pour $x_0 \in H'$ fixé, les points $x \in H'$ sont tels que les vecteurs $x - x_0$ et \vec{p} sont orthogonaux.

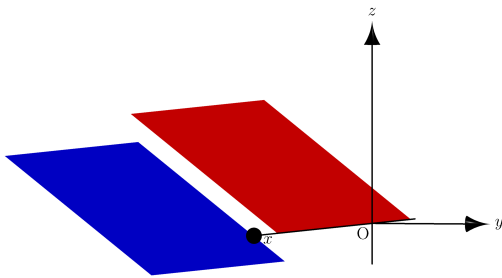


FIGURE 1.13 – Hyperplans vectoriel (en rouge) et affine (en bleu) dans \mathbb{R}^3 .

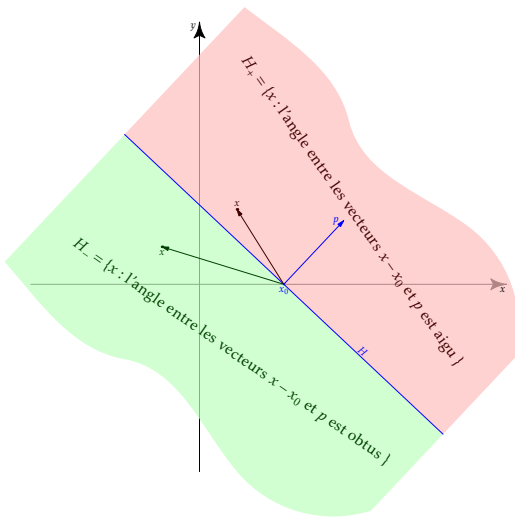


FIGURE 1.14 – Demi-espaces fermés définis par un hyperplan.

$p_S(x) = p_S(y)$ alors il n'y a rien à démontrer. Supposons que $p_S(x) \neq p_S(y)$, on obtient en appliquant la relation (1.5)

$$\langle x - p_S(x), p_S(y) - p_S(x) \rangle \leq 0 \quad (1.7)$$

$$\langle p_S(y) - y, p_S(y) - p_S(x) \rangle \leq 0. \quad (1.8)$$

En sommant les inégalités (1.7) et (1.8) on obtient

$$\langle p_S(y) - p_S(x) - (y - x), p_S(y) - p_S(x) \rangle \leq 0.$$

L'inégalité précédente s'écrit

$$\|p_S(y) - p_S(x)\|^2 \leq \langle y - x, p_S(y) - p_S(x) \rangle.$$

D'où la monotonie. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient que p_S est non expansive. ■

Définition 1.2

Un hyperplan vectoriel dans \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel maximal au sens de l'inclusion, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Les hyperplans vectoriels sont les sous-espaces vectoriels orthogonaux à des sous-espaces vectoriels de dimension 1, engendrés par un seul vecteur non nul p . Donc, un hyperplan vectoriel H est donné par (voir FIGURE 1.12)

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = 0\}.$$

Un hyperplan affine est un sous-espace affine dirigé par un hyperplan vectoriel, il est défini comme suit

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x - x_0 \rangle = 0\}.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in H$ (voir FIGURE 1.12).

Un hyperplan H sépare l'espace \mathbb{R}^n en deux demi-espaces fermés

$$H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x - x_0 \rangle \leq 0\}$$

et

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \geq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x - x_0 \rangle \geq 0\}$$

où x_0 est un point quelconque de H (voir FIGURE 1.14).

Les demi-espaces ouverts correspondants seront notés $\overset{\circ}{H}_-$ et $\overset{\circ}{H}_+$,

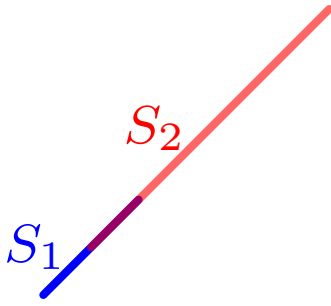


FIGURE 1.15 – Séparation impropre : Les ensembles S_1 et S_2 sont des segments de droite d'intersection non vide qui se trouvent sur la même droite. Le seul hyperplan qui les sépare, de façon impropre, est la droite qui les contient.

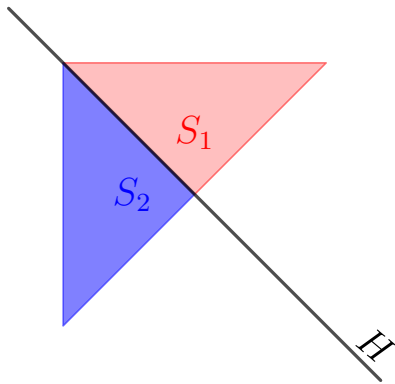


FIGURE 1.16 – Séparation propre

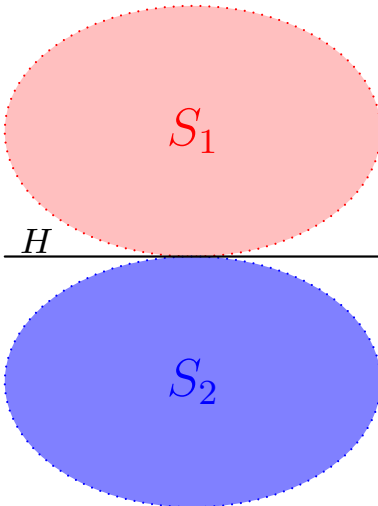


FIGURE 1.17 – Séparation stricte

c'est à dire

$$\overset{\circ}{H}_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle < \alpha\} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle > \alpha\}.$$

Définition 1.3

Soient S_1 et S_2 deux ensembles non vides de \mathbb{R}^n et $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\}$ un hyperplan affine.

1. On dit que l'hyperplan H sépare les ensembles S_1 et S_2 si $\langle p, x \rangle \geq \alpha$ pour tout $x \in S_1$ et $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ pour tout $x \in S_2$.
2. Si $S_1 \cup S_2 \not\subset H$ il s'agit d'une séparation propre de S_1 et S_2 .
3. Si on a $\langle p, x \rangle > \alpha, \forall x \in S_1$ et $\langle p, x \rangle < \alpha, \forall x \in S_2$, la séparation est dite *stricte*.
4. H sépare fortement S_1 et S_2 s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\langle p, x \rangle \geq \alpha + \epsilon$, pour tout $x \in S_1$ et $\langle p, x \rangle \leq \alpha - \epsilon$, pour tout $x \in S_2$, ce qui peut s'écrire

$$\inf_{x \in S_1} \langle p, x \rangle \geq \sup_{x \in S_2} \langle p, x \rangle + \epsilon.$$

On commence par donner un résultat de séparation lorsque l'ensemble S_1 est réduit à un singleton et l'ensemble S_2 est un convexe fermé.

Théorème 1.5

Soit S un ensemble convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n et y un point de \mathbb{R}^n n'appartenant pas à S . Alors il existe un vecteur non nul p de \mathbb{R}^n et un scalaire α tels que $\langle p, y \rangle > \alpha$ et $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ pour tout $x \in S$.

Démonstration. D'après le Théorème 1.3, il existe $\bar{x} \in S$ tel que

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Le résultat s'obtient en posant $p = y - \bar{x}$ et $\alpha = \langle p, \bar{x} \rangle$. ■

Corollaire 1.2

Soit S un ensemble convexe fermé non vide d'un espace vectoriel

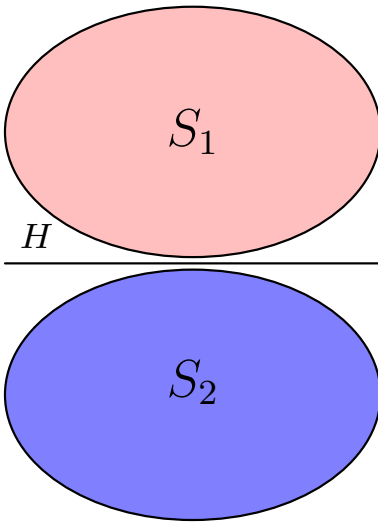


FIGURE 1.18 – Séparation forte.

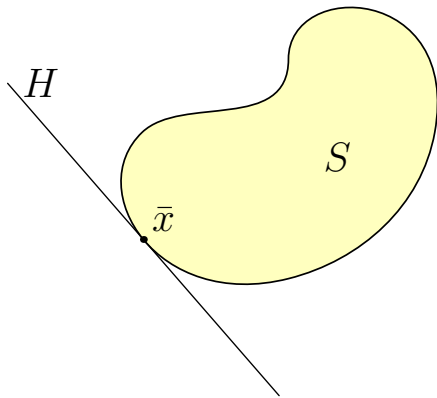


FIGURE 1.19 – Un unique hyperplan d'appui.

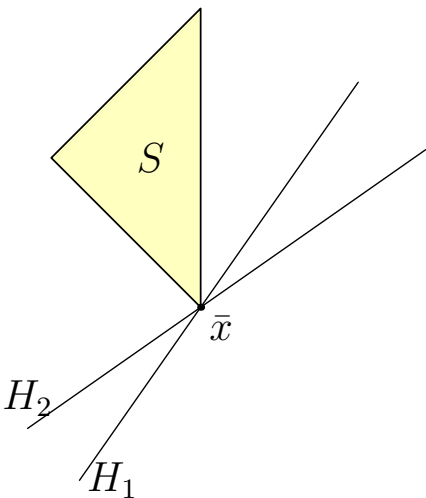


FIGURE 1.20 – Une infinité d'hyperplans d'appui.

euclidien \mathbb{R}^n , alors S est l'intersection de tous les demi-espaces fermés le contenant.

Démonstration. Soit y un point n'appartenant pas à S , d'après le Théorème 1.5, il existe un vecteur $p \neq 0$ et un scalaire α tels que $\langle p, y \rangle > \alpha$ et $\langle p, x \rangle \leq \alpha$, pour tout $x \in S$. Donc le demi-espace fermé $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq \alpha\}$ contient S et ne contient pas y , par suite y n'appartient pas à l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant S . ■

Définition 1.4

Soit S une partie non vide de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n et $\bar{x} \in \partial S$. Un hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x - \bar{x} \rangle = 0\}$ passant par \bar{x} est appelé un hyperplan d'appui de S en \bar{x} si $S \subset H^-$ ou $S \subset H^+$. Autrement dit

$$\langle p, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S \quad \text{ou} \quad \langle p, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in S.$$

Le lecteur peut vérifier que H est un hyperplan d'appui de S en $\bar{x} \in \partial S$ si et seulement si

$$\langle p, \bar{x} \rangle = \inf_{x \in S} \langle p, x \rangle \quad \text{ou} \quad \langle p, \bar{x} \rangle = \sup_{x \in S} \langle p, x \rangle.$$

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'un ensemble admette un hyperplan d'appui en chaque point de sa frontière. En effet, il suffit que cet ensemble soit convexe. Cette condition est-elle nécessaire?

Théorème 1.6

Soit S une partie convexe non vide de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n et $\bar{x} \in \partial S$. Alors il existe un hyperplan d'appui de S en \bar{x} , i.e il existe un vecteur non nul p tel que $\langle p, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ pour tout $x \in \text{cl}(S)$.

Démonstration. Comme $\bar{x} \in \partial S$, il existe une suite $(y_k) \notin \text{cl}(S)$ telle que $y_k \rightarrow \bar{x}$ (on rappelle qu'on a $\text{int}(\text{cl}(S)) = \text{int}(S)$). Donc pour tout k il existe, d'après le théorème 1.5, un vecteur p_k de norme 1 tel que

$$\langle p_k, x \rangle \leq \langle p_k, y_k \rangle \quad \text{pour tout } x \in \text{cl}(S). \quad (1.9)$$

La suite (p_k) étant bornée on peut en extraire une sous-suite $(p_k)_{k \in K}$ qui converge vers un vecteur p de norme 1 ($p \neq 0$). En faisant tendre $k \in K$ vers l'infini, l'inégalité 1.9 nous donne $\langle p, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ pour tout $x \in \text{cl}(S)$. ■

Corollaire 1.3

Soit S une partie convexe non vide de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n et $\bar{x} \notin \text{int}(S)$. Il existe alors un vecteur non nul p tel que $\langle p, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ pour tout $x \in \text{cl}(S)$.

Démonstration. Si $\bar{x} \notin \text{cl}(S)$, le résultat s'obtient par application du Théorème 1.5, sinon $\bar{x} \in \partial S$ et la proposition du corollaire se réduira au Théorème 1.6. ■

Séparation de deux ensembles convexes

Précédemment, on a discuté la possibilité de séparer un ensemble convexe et un point ne lui appartenant pas ainsi que la possibilité d'établir l'existence d'hyperplans d'appui en tout point appartenant à la frontière d'un ensemble convexe. Dans la suite, on va montrer qu'il est possible de séparer deux ensembles convexes disjoints par un hyperplan H dans ce sens qu'un ensemble soit inclus dans le demi-espace H^+ et l'autre dans le demi-espace H^- . On verra que ce résultat reste vrai même si les ensembles ne sont pas disjoints pourvu que leurs intérieurs le soient.

Les théorèmes de séparation nous permettent, entre autres, de démontrer les théorèmes de l'alternative qu'on utilise pour établir des conditions d'optimalité pour des problèmes d'optimisation comme on le verra au chapitre 3.

Théorème 1.7

Soient S_1 et S_2 deux ensembles convexes non vides disjoints de \mathbb{R}^n . Alors il existe un hyperplan les séparant, c'est à dire il existe un vecteur p non nul de \mathbb{R}^n tel que

$$\sup_{x \in S_1} \langle p, x \rangle \leq \inf_{x \in S_2} \langle p, x \rangle.$$

Démonstration. Posons $S = S_1 - S_2$, il est à noter que S est un ensemble convexe ne contenant pas 0. Le Corollaire 1.3 nous dit qu'il existe un vecteur p non nul tel que $\langle p, x \rangle \leq 0$ pour tout $x \in S$. On obtient donc, $\langle p, x_1 \rangle \leq \langle p, x_2 \rangle$ pour tout $x_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2$. Le résultat s'en suit. ■

Corollaire 1.4

Soient S_1 et S_2 deux ensembles convexes non vides de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n . Supposons que S_2 est d'intérieur non vide et que $S_1 \cap \text{int}(S_2) = \emptyset$ alors on peut séparer S_1 et S_2 : il

existe un vecteur p non nul de \mathbb{R}^n tel que

$$\sup_{x \in S_1} \langle p, x \rangle \leq \inf_{x \in S_2} \langle p, x \rangle.$$

L'hypothèse de non vacuité de l'intérieur de l'ensemble S_2 dans le Corollaire 1.4 est indispensable pour obtenir le résultat de séparation. Penser à deux droites concourantes dans le plan.

Démonstration. Le résultat s'obtient en remplaçant S_2 par $\text{int}(S_2)$ dans le Théorème 1.7 et en remarquant que (pourquoi?)

$$\inf_{x \in S_2} \langle p, x \rangle = \inf_{x \in \text{int}(S_2)} \langle p, x \rangle. \quad \blacksquare$$

Théorème 1.8 (Séparation forte)

Soient S_1 et S_2 deux ensembles convexes fermés de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n . Supposons que S_1 est borné et que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ alors on peut séparer fortement S_1 et S_2 , c'est à dire il existe un vecteur p non nul et un réel $\epsilon > 0$ tels que

$$\sup_{x \in S_1} \langle p, x \rangle + \epsilon \leq \inf_{x \in S_2} \langle p, x \rangle.$$

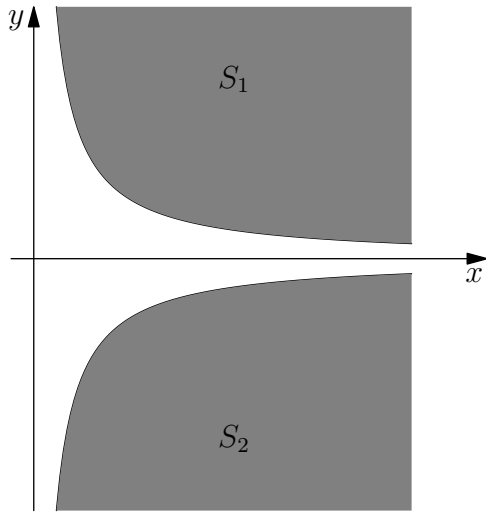


FIGURE 1.21 – On ne peut pas séparer fortement les deux ensembles fermés $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$ et $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq -\frac{1}{x}\}$.

Démonstration. L'ensemble $S = S_1 - S_2$ est un ensemble convexe ne contenant pas 0. L'ensemble S est aussi fermé, en effet soit (x_k) une suite d'éléments de S convergeant vers un élément x . Par définition de S il existe deux suites (y_k) et (z_k) appartenant à S_1 et S_2 respectivement telles que $x_k = y_k - z_k$. S_1 étant compact, on peut extraire de la suite (y_k) une sous-suite $(y_k)_{k \in K}$ convergeant vers un élément $y \in S_1$. la suite $(z_k)_{k \in K}$ est la différence de deux suites convergentes, donc elle converge vers la différence des limites, c'est à dire $y - x$ qui est un élément de S_2 (S_2 est fermé). En posant $z = y - x$ alors $x = y - z \in S$.

D'après le Théorème 1.5, il existe un vecteur non nul p et un scalaire α tels que $\langle p, x \rangle \leq \alpha$ pour tout $x \in S$ et $\langle p, 0 \rangle > \alpha$. On obtient, en posant $\epsilon = -\alpha > 0$, $\langle p, x_1 \rangle + \epsilon \leq \langle p, x_2 \rangle$ pour tout $x_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2$, ce qui achève la démonstration. \blacksquare

Noter l'importance de l'hypothèse de bornage imposée à l'un des ensembles dans le Théorème 1.8. La FIGURE 1.21 illustre une situation où les deux ensembles sont convexes fermés et disjoints mais la séparation n'est que stricte.

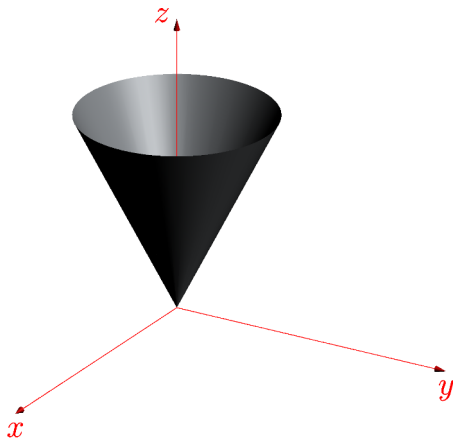


FIGURE 1.22 – Un cône non convexe dans \mathbb{R}^3 , c'est l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$.

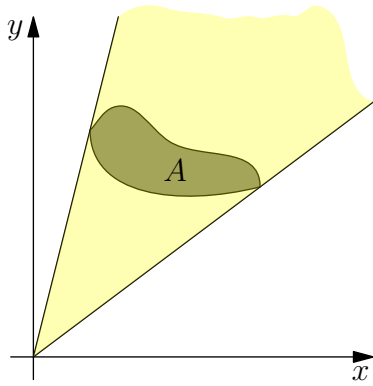


FIGURE 1.23 – Cône convexe engendré par la partie A .

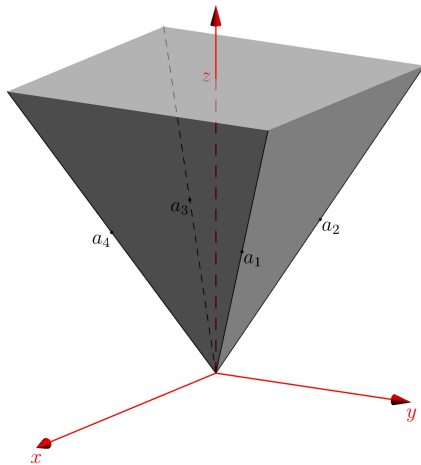


FIGURE 1.24 – Le cône convexe engendré par les points a_1, a_2, a_3 et a_4 .

1.3 Polarité et cônes convexes

1.3.1 Cônes convexes

Dans cette section, on introduit la notion de cône (convexe) qui joue le "même" rôle en analyse convexe que celui des sous-espaces vectoriels en algèbre linéaire.

Définition 1.5

Soit \mathbb{R}^n un espace vectoriel et K une partie non vide de \mathbb{R}^n . On dit que K est un cône (de sommet O^a) s'il contient toutes les demi-droites issues de l'origine et passant par ses points, c'est à dire

pour tout $x \in K$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $\lambda x \in K$.

a. Le sommet peut ne pas appartenir au cône

Un cône peut être vu comme une réunion de demi-droites partant de l'origine. Un cône n'est pas en général convexe (FIGURE 1.22). Les cônes convexes sont beaucoup utilisés en analyse convexe et en théorie de l'optimisation.

Le lecteur peut vérifier qu'un ensemble est un cône convexe si et seulement s'il est stable par passage aux combinaisons coniques. On dit qu'un point $x \in \mathbb{R}^n$ est une combinaison conique des points x_1, \dots, x_k s'il existe des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Soit A une partie de \mathbb{R}^n , l'ensemble de toutes les combinaisons coniques d'éléments de A est appelé le *cône convexe engendré par A* , il sera noté $\mathbf{cone}(A)$ (FIGURE 1.23). On a donc

$$\mathbf{cone}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \text{ et } x_i \in A \text{ pour } 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Le cône convexe engendré par une partie A contient toujours le sommet (l'origine). Il est le plus petit cône convexe (contenant l'origine) contenant A .

Le cône convexe engendré par une partie n'est pas en général fermé même si cette dernière est compacte (déterminer le cône convexe engendré par la boule fermée de centre $(0, 1)$ et de rayon 1).

Dans le cas où l'ensemble A est fini, disons $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, alors

$\text{cone}(A)$ est donné par (voir FIGURE 1.24)

$$\text{cone}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Proposition 1.1

Le cône convexe engendré par une partie finie de points est fermé.

Démonstration. voir Exercice 1.3. ■

Indications pour l'EXERCICE 1.3. Pour la question 1, considérer une suite (x_n) d'éléments de K convergente. Les éléments de cette suite s'écrivent sous la forme $x_n = \sum_{i=1}^k \lambda_{n,i} a_i$. Montrer que la suite de terme général $\lambda_n = (\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,k})$ est bornée.

Pour la deuxième question, l'inclusion réciproque est évidente. Pour celle directe, considérer un élément $x \in K$ et montrer qu'on peut l'exprimer comme combinaison conique de $k-1$ points au lieu de k en utilisant l'hypothèse $0 \in \text{conv}(\{a_1, \dots, a_k\})$.

De même, on définit le cône dual d'un ensemble A , qu'on note A° , comme étant l'ensemble de tous les vecteurs qui font un angle aigu avec tous les vecteurs de A :

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \geq 0, \forall a \in A\}.$$

EXERCICE 1.3

Soient a_1, \dots, a_k des vecteurs de \mathbb{R}^n . On se propose dans cet exercice de démontrer que le cône convexe engendré par un nombre fini de points est fermé. Notons $K = \text{cone}(\{a_1, \dots, a_k\})$ le cône convexe engendré par les points a_1, \dots, a_k .

1. On suppose dans cette question que $0 \notin \text{conv}(\{a_1, \dots, a_k\})$ ($\text{conv}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A). Démontrer la fermeture de K .
2. Montrer que si $0 \in \text{conv}(\{a_1, \dots, a_k\})$ alors on a

$$K = \bigcup_{i=1}^k \text{cone}(\{a_1, \dots, a_k\} \setminus \{a_i\}).$$

3. En déduire (par un raisonnement par récurrence) que K est fermé.

1.3.2 Cône polaire

Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^n . On définit le cône polaire de A , noté A^* , comme l'ensemble de tous les vecteurs qui font un angle obtus avec tous les vecteurs appartenant à A (FIGURE 1.25)

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Si A est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n alors A^* coïncide avec A^\perp , l'orthogonal de A .

Le cône polaire d'une partie A quelconque est un cône convexe fermé.

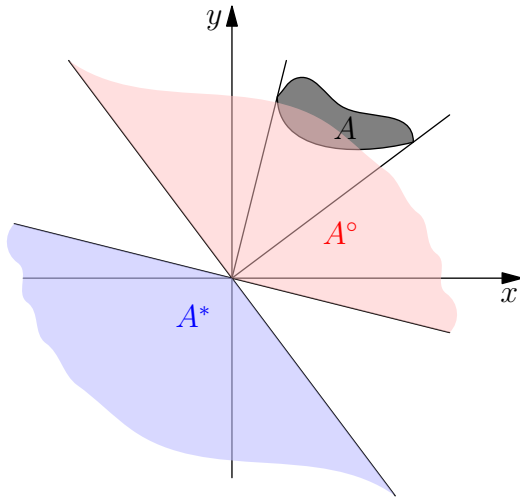


FIGURE 1.25 – Le cône polaire et dual d'un ensemble.

Théorème 1.9

Soit K une partie non vide de \mathbb{R}^n . On a alors, K est un cône convexe fermé si et seulement si $K^{**} := (K^*)^* = K$.

Démonstration. Soit $x \in K^{**}$, montrons que $x \in K$. Si $x \notin K$ il existe, d'après le Théorème 1.5, un vecteur non nul p et un scalaire α tels que

$$\langle p, x \rangle > \alpha \quad (1.10)$$

$$\langle p, y \rangle \leq \alpha \text{ pour tout } y \in K. \quad (1.11)$$

Puisque $0 \in K$, on déduit de l'inégalité (1.11) que $\alpha \geq 0$. D'autre part, on peut affirmer que $\langle p, y \rangle \leq 0$ pour tout $y \in K$. En effet, s'il existe un $y_0 \in K$ tel que $\langle p, y_0 \rangle > 0$ alors $\lambda y_0 \in K$ pour tout $\lambda > 0$ et la quantité $\langle p, \lambda y_0 \rangle = \lambda \langle p, y_0 \rangle$ devient très grande pour des valeurs de λ assez larges, ce qui contredirait la relation (1.11). Le vecteur p est donc dans K^* et comme $x \in K^{**}$ on devrait avoir $\langle p, x \rangle \leq 0$, affirmation contradictoire avec la relation (1.10). Par suite $x \in K$.

L'inclusion réciproque est facile à établir. ■

Soient u_1, \dots, u_k des vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n et K l'ensemble défini par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u_i, x \rangle \leq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, k\}.$$

K est un cône convexe fermé, c'est le *cône polyédrique* défini par les vecteurs u_1, \dots, u_k .

Proposition 1.2

Soient a_1, \dots, a_k des points de \mathbb{R}^n . Désignons par K le cône polyédrique défini par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle \leq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, k\}.$$

Alors le cône polaire de K est exactement le cône convexe engendré par les vecteurs a_i :

$$K^* = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, k \right\}.$$

Démonstration. Posons $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Le lecteur peut vérifier que $\text{cone}(A) \subset K^*$. Supposons qu'il existe un élément $y \in K^*$ n'appartenant pas à $\text{cone}(A)$, puisque ce dernier est un convexe fermé (Propo-



Farkas Gyula ou Julius

Farkas est un mathématicien et physicien hongrois, né le 28 mars 1847 à Sárosd et mort le 27 décembre 1930 à Pestszentlőrinc. Il a étudié le droit et les sciences physiques à Budapest. Après avoir enseigné à l'école secondaire de Székesfehérvár, il est devenu le directeur de l'école normale de Pàpa, ensuite enseignant de mathématiques à l'université de Budapest en 1881. Il a occupé le poste de professeur de physiques à l'université de Franz Joseph à Kolozsvár de 1888 jusqu'à 1915. Il a été choisi par l'académie des sciences de la Hongrie comme correspondant en 1898. Il a apporté des contributions majeures en mathématiques appliquées et physiques et plus particulièrement en mécanique, thermodynamiques et électrodynamiques.

FIGURE 1.26 – Gyula Farkas

sition 1.1) il existe un vecteur p non nul et un scalaire α tels que

$$\langle p, y \rangle > \alpha \quad (1.12)$$

$$\langle p, x \rangle \leq \alpha \text{ pour tout } x \in \text{cone}(A). \quad (1.13)$$

En utilisant l'inégalité (1.13) on obtient $\alpha \geq 0$ ($0 \in \text{cone}(A)$). De plus on peut affirmer que $p \in K$ car sinon il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $\langle p, a_i \rangle > 0$. Comme $\lambda a_i \in \text{cone}(A)$ pour tout $\lambda > 0$ on déduit de la relation (1.13) que

$$\langle p, \lambda a_i \rangle = \lambda \langle p, a_i \rangle \leq \alpha \text{ pour tout } \lambda > 0,$$

ce qui est impossible puisque $\langle p, a_i \rangle > 0$.

En conclusion, on obtient un vecteur p qui vérifie, d'une part, $\langle p, y \rangle > 0$ (inégalité (1.12)) et d'autre part $\langle p, y \rangle \leq 0$ ($p \in K$ et $y \in K^*$), on obtient ainsi une contradiction qui confirme le résultat de la proposition. ■

Remarque 1.2

L'ensemble K défini dans la proposition précédente est un cône convexe fermé, il est identique à son bipolaire ($K = K^{**}$). On déduit alors de la Proposition 1.2 que le cône polaire du cône convexe engendré par une famille finie de vecteurs est le cône polyédrique défini par cette famille.

1.4 Théorèmes de l'alternative

Ces théorèmes concernent des systèmes d'équations et d'inéquations linéaires dans des espaces de dimension finie. En général, on a affaire à deux systèmes dont la non consistance de l'un entraîne la consistance de l'autre et inversement. Dans ce qui suit on cite parmi ces théorèmes, le théorème de Farkas, le théorème de Gordan Ces théorèmes vont nous permettre d'écrire les conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation sous forme analytique.

Théorème 1.10 (Théorème de Farkas)

Soit A une matrice $m \times n$ et c un vecteur de \mathbb{R}^n . Alors un et un seul des deux systèmes linéaires suivants a une solution

(S₁) Déterminer $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $Ax \leq 0$ et $c^T x > 0$.

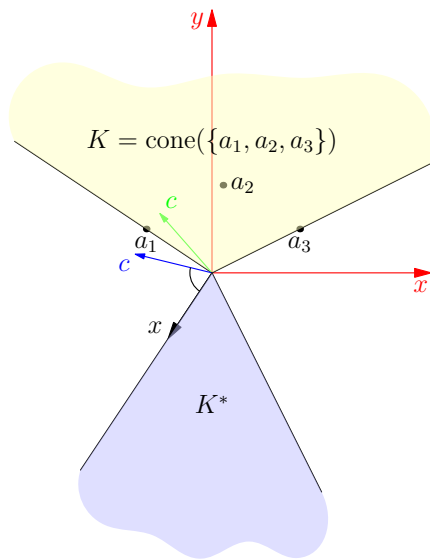


FIGURE 1.27 – Ou bien le vecteur c (en vert) appartient au cône engendré par les vecteurs a_1, a_2 et a_3 , ou bien il existe un vecteur $x \in K^*$ qui fait un angle aigu avec le vecteur c (en bleu)



Paul Albert

Gordan né le 27 avril 1837 à Breslau (Pologne) et mort le 21 décembre 1912 à Erlangen (Allemagne), est un mathématicien allemand. Il a étudié à l'université de Königsberg sous la direction de Carl Jacobi, Ensuite il s'est déplacé à Berlin où il s'est intéressé aux équations algébriques. Il est surtout connu pour ses travaux sur *la théorie des invariants* où il a démontré que l'anneau des invariants des polynômes homogènes à deux variables de degré fixé est de type fini. On lui doit le *Théorème de Gordan* ainsi que la découverte des coefficients de Clebsch-Gordan utilisés dans les harmoniques sphériques.

FIGURE 1.28 – Paul Albert Gordan

(S₂) Déterminer $y \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $A^\top y = c$. (A^\top est la matrice transposée de A).

Démonstration. Notons par a_1, \dots, a_m les vecteurs lignes de la matrice A . Soit K le cône convexe engendré par les vecteurs a_1, \dots, a_m . K est fermé (voir Proposition 1.1), par suite $K^{**} = K$ (Théorème 1.8). Si le vecteur c est dans K alors le système (S₂) admet une solution. Dans le cas contraire $c \notin K^{**}$ et par suite il existe $x \in K^*$ tel que $c^\top x > 0$. Comme $K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ (voir Remarque 1.2) alors le système (S₁) admet une solution. ■

Remarque 1.3

De la preuve du théorème précédent, on peut donner l'interprétation géométrique du théorème de Farkas (voir Figure 1.27) : Si on a une famille finie de vecteurs dans un espace de dimension finie et un vecteur c . Alors ou bien ce vecteur est dans le cône convexe engendré par cette famille, ou bien il existe un élément dans le cône polaire de cette famille de vecteurs qui fait un angle aigu avec le vecteur c .

Théorème 1.11 (Théorème de Gordan)

Soit B une matrice $m \times n$ alors un et un seul des deux systèmes suivants admet une solution

(S'₁) Il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $Bz < 0$.

(S'₂) Il existe un vecteur non nul $y \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $B^\top y = 0$.

Démonstration. Soit le système suivant

(S₁) Il existe $(z, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que

$$Bz + \epsilon e \leq 0 \text{ et } c^\top \begin{bmatrix} z \\ \epsilon \end{bmatrix} > 0$$

où e est le vecteur de \mathbb{R}^m dont toutes les composantes sont égales à 1 et c le vecteur de \mathbb{R}^{n+1} dont toutes les composantes sont nulles sauf la dernière qui est égale à 1.

En posant $A = [B \ e]$ la matrice $m \times (n+1)$ et $x = (z, \epsilon)$ le système précédent s'écrit

Existe-t-il $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Ax \leq 0$ et $c^\top x > 0$

Les deux systèmes (S₁) et (S'₁) sont équivalents dans ce sens que si un système admet une solution, la solution de l'autre s'en déduit facilement.



Ivar Fredholm

né le 7 avril 1866 à Stockholm et mort le 17 août 1927 à Danderyd (Suède) est un mathématicien suédois. Il a étudié les équations intégrales et la théorie spectrale. Une grosse partie de ses recherches s'est faite en 1899, lorsqu'il est allé à Paris étudier le problème de Dirichlet avec Poincaré, Émile Picard, et Hadamard. En 1906, il obtient la chaire de mécanique et physique mathématique de l'université de Stockholm. (WIKIPÉDIA)

FIGURE 1.29 – Ivar Fredholm

Indication pour les exercices 1.4 et 1.5 : Utiliser le Théorème de Farkas (Théorème 1.10).

L'alternative de Ville est utilisée, entre autres, pour démontrer l'existence de solutions d'un problème de complémentarité linéaire [17].

Jean Ville, aussi connu sous les noms Jean-André Ville et André Ville, né le 24 juin 1910 à Marseille, mort le 22 janvier 1989 à Blois (Loir-et-Cher), est un mathématicien français, élève de Maurice René Fréchet. Il est connu pour avoir démontré en 1938 une extension du théorème du minimax de von Neumann, ainsi que pour ses contributions dans le domaine des statistiques et de l'économie. Il est un des pionniers de la théorie des martingales et a procédé à des critiques rigoureuses et pertinentes de la notion de suite aléatoire. (WIKIPÉDIA)

Or le système (S_1) est similaire à celui du Théorème de Farkas dont le système (S_2) correspondant est

$$(S_2) \text{ Il existe } y \in \mathbb{R}_+^m \text{ tel que } c = A^T y.$$

L'équation $c = A^T y$ peut s'écrire $B^T y = 0$ et $y_1 + \dots + y_m = 1$. On déduit que les deux systèmes (S_2) et (S'_2) sont aussi équivalents et le résultat s'obtient en utilisant le Théorème de Farkas. ■

On termine le chapitre par une série d'exercices traitant d'autres théorèmes de l'alternative. On utilise la notation $x \preceq y$ pour dire que $x \leq y$ et $x \neq y$ (idem pour $x \succeq y$).

EXERCICE 1.4 (Alternative de Fredholm)

Soit A une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Montrer que exactement un et un seul des deux systèmes suivants admet une solution

- (S_1) Le système $Ax = b$ admet au moins une solution.
- (S_2) Il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $A^T y = 0$ et $\langle b, y \rangle > 0$.

EXERCICE 1.5

Soit A une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Montrer que exactement un et un seul des deux systèmes suivants admet une solution

- (S_1) Le système $Ax \leq b$ admet au moins une solution.
- (S_2) Il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $A^T y = 0$ et $\langle b, y \rangle < 0$.

EXERCICE 1.6 (Alternative de Ville)

Soit A une matrice $m \times n$, montrer que exactement un et un seul des deux systèmes suivants admet une solution

- (S_1) Il existe $x \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $Ax > 0$.
- (S_2) Il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $A^T y = 0$.

Théorème 1.12 (Alternative de Stiemke [18])

Soit A une matrice $m \times n$, montrer que exactement un et un seul des deux systèmes suivants admet une solution

- (S_1) Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax \succeq 0$.
- (S_2) Il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}_{++}^m$ tel que $A^T y = 0$.

Démonstration. Remarquons que si les systèmes (S_1) et (S_2) admettent des solutions qu'on note x et y alors on obtient la contradic-

tion suivante

$$0 < \langle y, Ax \rangle = \langle A^\top y, x \rangle = 0.$$

Supposons que le système (S_2) n'admet pas de solution. Donc, les ensembles convexes suivants

$$A_1 = \{y \in \mathbb{R}^m : y > 0\} \text{ et } A_2 = \ker A^\top$$

sont disjoints. Il existe alors, d'après le Théorème 1.7, un vecteur p non nul et un scalaire α tels que

$$\langle p, z \rangle \geq \alpha \text{ pour tout } z \in A_1, \quad (1.14)$$

$$\langle p, z \rangle \leq \alpha \text{ pour tout } z \in A_2. \quad (1.15)$$

En faisant tendre z vers 0 dans (1.14) et en choisissant $z = 0$ dans (1.15), on obtient $\alpha = 0$. L'inégalité (1.15) devient $\langle p, z \rangle = 0$ pour tout $z \in A_2$ (A_2 étant un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m). Donc, $p \in (\ker A^\top)^\perp = \text{im}(A)$. Par suite, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $p = Ax$. Il est facile de déduire de (1.14) que le vecteur p est positif.

Supposons maintenant que le système (S_2) n'admet pas de solutions. Alors le système suivant

$$Ax \geq 0 \text{ et } \mathbf{e}^\top Ax = 1$$

avec $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1, n'admet pas de solution. En posant

$$B = \begin{bmatrix} -A \\ \mathbf{e}^\top A \\ -\mathbf{e}^\top A \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 0_m \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

on obtient que le système $Bx \leq b$ n'admet pas de solution dans \mathbb{R}^n . L'exercice 1.5 nous dit qu'il existe $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tel que $B^\top y = 0$ et $\langle b, y \rangle < 0$, qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} A^\top (y_1 + (y_3 - y_2)\mathbf{e}) &= 0 \\ y_3 - y_2 &> 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur $y = y_1 + (y_3 - y_2)\mathbf{e}$ est une solution du système (S_2) . ■



Théodore Sa-

muel Motzkin est un mathématicien né le 26 mars 1908 à Berlin et mort le 15 décembre 1970 à Los Angeles. Il a fait ses études universitaires à Berlin jusqu'à sa thèse sur les *structures algébriques*. Pionnier dans le travail sur les inégalités en algèbre linéaire et sur la convexité, il est à l'origine des polynômes de Motzkin, des nombres de Motzkin et de plusieurs théorèmes : théorème de Motzkin sur les fermés convexes, théorème de Motzkin sur les inéquations linéaires et élimination de Fourier-Motzkin. (WIKIPÉDIA)

FIGURE 1.30 – Théodore Samuel Motzkin

EXERCICE 1.7 (Alternative de Motzkin [15])

Soit A, B et C des matrices de taille $p \times n, q \times n$ et $r \times n$ respectivement. Montrer qu'exactement un et un seul des deux systèmes suivants admet une solution

Indication pour l'exercice 1.7 : Utiliser le Théorème de Farkas (Théorème 1.10).

(S₁) Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax < 0$, $Bx \leq 0$ et $Cx = 0$.

(S₂) Il existe un vecteur $(u, v, w) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ tel que $u \geq 0$, $v \geq 0$ et $A^\top u + B^\top v + C^\top w = 0$.

Remarque 1.4

Dans l'exercice 1.7, la matrice A doit être prise en considération car sinon le vecteur nul présente une solution des deux systèmes.

Si les matrices B et C sont omises (ou égales à la matrice nulle) alors on obtient le Théorème de Gordan.

Fonctions convexes généralisées

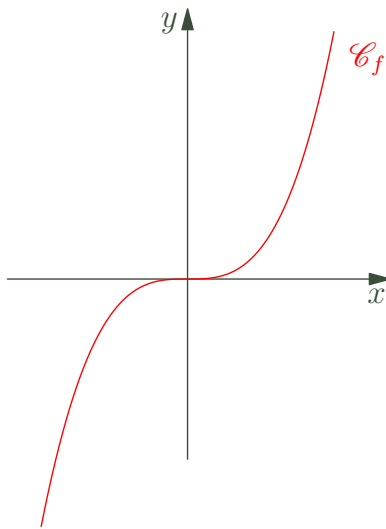


FIGURE 2.1 – La fonction $x \mapsto x^3$ est quasi-convexe, mais non convexe sur \mathbb{R} .

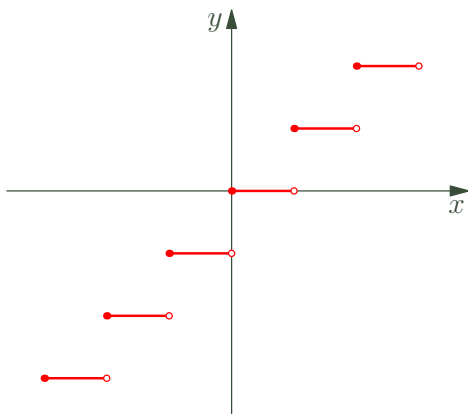


FIGURE 2.2 – Graphe de la fonction partie entière. Cette fonction est quasi-convexe sur \mathbb{R} mais, contrairement aux fonctions convexes, elle n'est pas continue à l'intérieur de son domaine.

2.1 Quasiconvexité

2.1.1 Fonctions quasi-convexes

Une manière de généraliser la définition d'une fonction convexe est de relaxer la condition de convexité en imposant aux valeurs prises par la fonction à l'intérieur d'un segment d'être inférieures à l'une des valeurs des deux extrémités. Ce qui nous ramène à la définition suivante :

Définition 2.1

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est dite *quasi-convexe* sur S si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.1)$$

pour tout $x, y \in S$ et pour tout $\lambda \in]0, 1[$.

Si l'inégalité (2.1) est stricte pour tout $x, y \in S$ tel que $x \neq y$ alors la fonction f est dite *strictement quasi-convexe*.

Il est clair qu'une fonction strictement quasi-convexe est quasi-convexe, l'inverse n'est pas vrai.

Une fonction f est quasi-concave sur S si et seulement si $-f$ est quasi-convexe sur S . Ce qui se traduit par

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\},$$

pour tout $x, y \in S$ et $\lambda \in]0, 1[$.

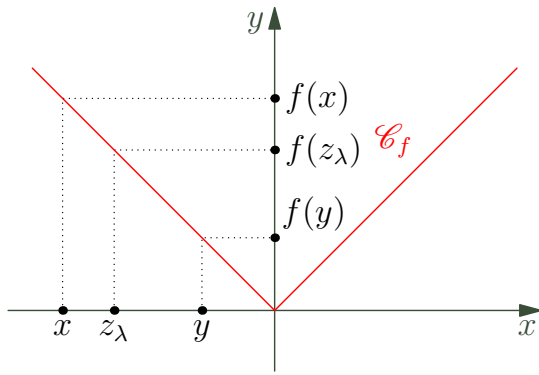


FIGURE 2.3 – La fonction $x \mapsto |x|$ est strictement quasi-convexe sur \mathbb{R} mais elle n'est pas strictement convexe. En effet, on a $f(z_\lambda) < f(x) = \max\{f(x), f(y)\}$, par contre $f(z_\lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

EXERCICE 2.1

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide. A chaque point $a \in S$ et chaque vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ on associe un ensemble qu'on note $I_{a,d} \subset \mathbb{R}$ défini par

$$I_{a,d} = \{t \in \mathbb{R} : a + td \in S\}.$$

1. Montrer que $I_{a,d}$ est un intervalle non vide de \mathbb{R} .

Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $a \in S$ et tout $d \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction $f_{a,d} : I_{a,d} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_{a,d}(t) = f(a + td)$.

2. Montrer que f est quasi-convexe (resp. strictement quasi-convexe) sur S si et seulement si $f_{a,d}$ est quasi-convexe (resp. strictement quasi-convexe) sur $I_{a,d}$ pour tout $a \in S$ et tout $d \in \mathbb{R}^n$.
3. Dédurre que la fonction $(x, y) \mapsto x^3 + y^3$ n'est pas quasi-convexe sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 2.1

1. Toute fonction convexe est quasi-convexe et toute fonction strictement convexe est strictement quasi-convexe.
2. Si f est une fonction d'une seule variable réelle et si elle est monotone (resp. strictement monotone) sur un intervalle I alors elle est quasi-convexe (resp. strictement quasi-convexe) sur I . Par exemple les fonctions suivantes sont strictement quasi-convexes sur I .
 - (a) $x \mapsto x^3$ sur $I = \mathbb{R}$.
 - (b) $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+$.
 - (c) $x \mapsto \log x$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.
3. La fonction constante est quasi-convexe mais pas strictement quasi-convexe.
4. La fonction $x \mapsto |x|$ est strictement quasi-convexe mais pas strictement convexe (voir FIGURE 2.3).
5. La fonction $f(x, y) = x^3 + y^3$ n'est pas quasi-convexe sur \mathbb{R}^2 . En effet il suffit de choisir $\bar{x} = (1, -2)$, $\bar{y} = (-2, 1)$ et $\bar{z} = \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Le point $\bar{z} \in]\bar{x}, \bar{y}[$ et

$$f(\bar{z}) = -\frac{1}{4} > \max\{f(\bar{x}), f(\bar{y})\} = -7.$$

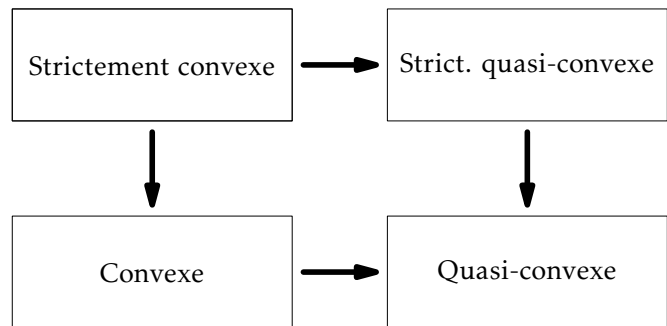


FIGURE 2.4 – Relations entre les différents types de convexités.

Si les fonctions convexes peuvent être caractérisées géométriquement par leurs épigraphes, les fonctions quasi-convexes, quant à elles, le sont par leurs ensembles de sous-niveau, comme l'indique la Proposition 2.1.

A chaque fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, on associe les ensembles

$$\mathcal{L}_{f,\alpha} = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, qu'on appelle *ensembles de sous-niveau*.

Les ensembles de sous-niveau d'une fonction convexe sont convexes.

En revanche, la réciproque n'est pas toujours vraie (penser à la fonction $x \mapsto x^3$).

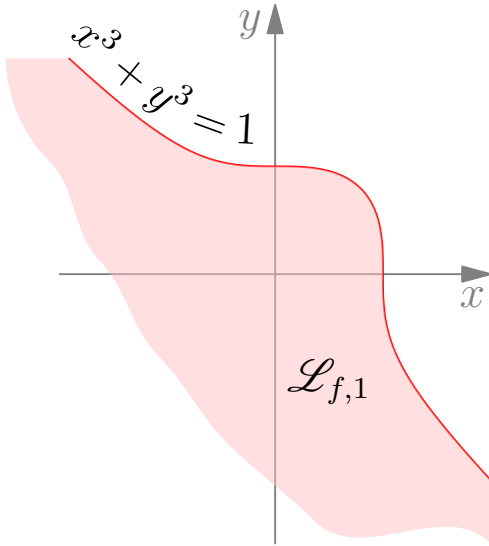


FIGURE 2.5 – L'ensemble de sous-niveau $\mathcal{L}_{f,1}$ de la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3$. On note que cet ensemble n'est pas convexe, donc la fonction f n'est pas quasi-convexe sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 2.1

Soit S une partie convexe non vide de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est quasi-convexe sur S si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau $\mathcal{L}_{f,\alpha}$ est convexe (on convient que l'ensemble vide est convexe).

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrons que l'ensemble $\mathcal{L}_{f,\alpha}$, qu'on suppose non vide, est convexe. Soient $x, y \in \mathcal{L}_{f,\alpha}$ et $z \in]x, y[$, on a alors

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \max\{f(x), f(y)\} && (f \text{ est quasi-convexe}) \\ &\leq \alpha && (f(x) \leq \alpha \text{ et } f(y) \leq \alpha). \end{aligned}$$

Donc $z \in \mathcal{L}_{f,\alpha}$.

Réciproquement, soient $x, y \in S$ et $z \in]x, y[$. En posant

$$\alpha = \max\{f(x), f(y)\}$$

on obtient que $x, y \in \mathcal{L}_{f,\alpha}$ qui est convexe par hypothèse, par suite $z \in \mathcal{L}_{f,\alpha}$, ce qui donne $f(z) \leq \alpha = \max\{f(x), f(y)\}$. Cela montre que la fonction f est quasi-convexe sur S . ■

L'ensemble $\{x \in S : g_i(x) \leq 0, i \in I\}$, où I est un ensemble d'indices fini ou infini, est convexe dès lors que S est convexe et que les fonctions $g_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ sont quasi-convexes. Un tel ensemble représente l'ensemble des contraintes d'un problème d'optimisation.

On peut généraliser la définition d'une fonction quasi-convexe à plusieurs points comme dans le cas convexe.

Proposition 2.2

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est quasi-convexe sur S si et seulement si pour tout point $(x_1, \dots, x_m) \in S^m$ et tout $\lambda \in \Sigma_m$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} f(x_i), \quad (2.2)$$

Démonstration. Supposons que la fonction f est quasi-convexe et montrons que l'inégalité (2.2) est vraie pour m points avec $m \geq 2$. On va procéder par récurrence sur m . La propriété est, par hypothèse,

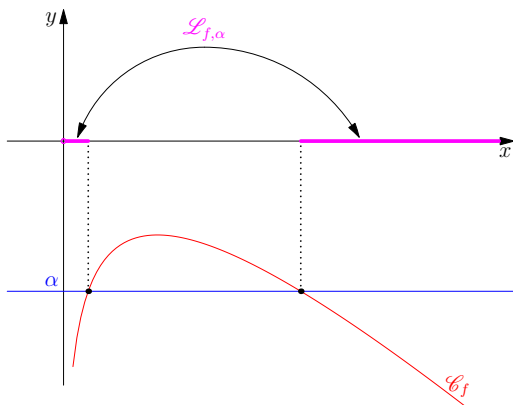


FIGURE 2.6 – Graphe de la fonction $x \mapsto \log x - x$ ainsi qu'un ensemble de sous-niveau. On remarque que cet ensemble n'est pas convexe donc cette fonction n'est pas quasi-convexe sur \mathbb{R}_+^* .

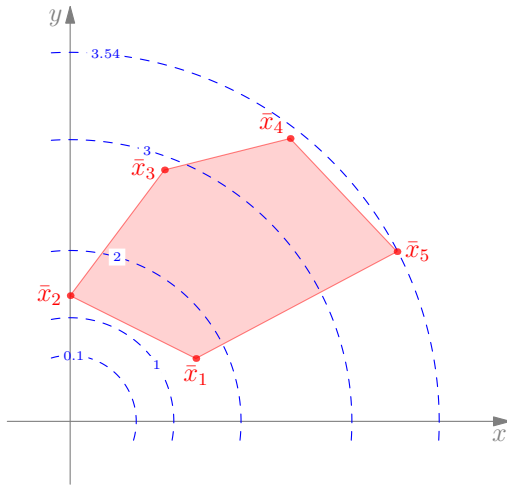


FIGURE 2.7 – Le maximum de la fonction quasi-convexe $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ sur le polytope P défini par les sommets $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5$ est atteint au sommet \bar{x}_5 . En revanche, on remarque que le minimum n'est pas atteint en un sommet.

vraie pour $m = 2$. Supposons qu'elle est vraie pour m points et montrons qu'elle reste vraie pour $m + 1$ points. Soient $x_1, \dots, x_{m+1} \in S$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$. En posant $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1} x_{m+1} &= \lambda \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda} x_m \right) + \lambda_{m+1} x_{m+1} \\ &= \lambda x + \lambda_{m+1} x_{m+1} \\ &= \lambda x + (1 - \lambda) x_{m+1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i\right) &= f(\lambda x + (1 - \lambda) x_{m+1}) \\ &\leq \max\{f(x), f(x_{m+1})\} \quad (f \text{ est quasi-convexe}) \\ &\leq \max\{\max_{1 \leq i \leq m} f(x_i), f(x_{m+1})\} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \max_{1 \leq i \leq m+1} f(x_i). \end{aligned}$$

On peut déduire de la Proposition 2.2 que si on cherche à maximiser une fonction quasi-convexe sur un polytope P alors les sommets du polytope en question constituent de bons candidats pour la solution (voir FIGURE 2.7). En effet, soit $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$ les sommets du polytope et $x \in P$, il existe alors $\lambda \in \Sigma_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{x}_i$, on obtient alors

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{x}_i\right) \leq \max_{1 \leq i \leq p} f(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_r).$$

Ainsi, \bar{x}_r est une solution du problème.

La classe des fonctions quasi-convexes est strictement plus large que celle des fonctions convexes. Cependant, de nombreuses propriétés caractéristiques des fonctions convexes ne s'étendent pas nécessairement au cas quasi-convexe.

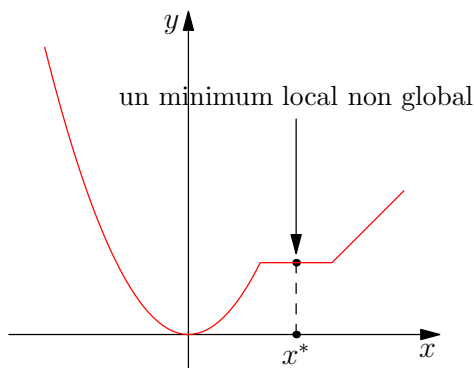


FIGURE 2.8 – Une fonction quasi-convexe peut admettre des minima locaux non globaux. Selon la Proposition 2.3, ce minimum ne peut pas être strict.

1. Une fonction quasi-convexe peut admettre des minima locaux qui ne sont pas globaux (voir figure 2.8).
2. Le maximum global d'une fonction quasi-convexe peut être atteint à l'intérieur de l'ensemble de contraintes (voir figure 2.9).
3. Les points critiques d'une fonction quasi-convexe ne sont pas nécessairement des minima. Par exemple, pour la fonction $x \mapsto x^3$, le point critique $x = 0$ n'est pas un minimum.
4. Contrairement aux fonctions convexes, la classe des fonctions quasi-convexes ne forme pas un cône convexe fermé. En particulier, la somme de deux fonctions quasi-convexes n'est pas toujours quasi-convexe. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \log x - x$$

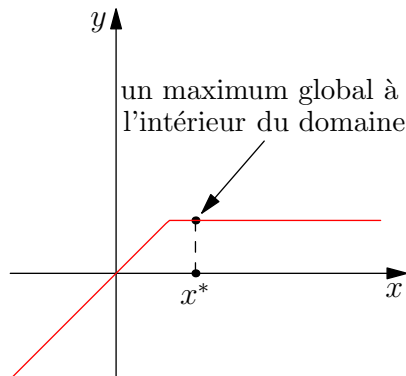


FIGURE 2.9 – Une fonction quasi-convexe peut présenter des maxima globaux à l'intérieur de son domaine. Ce résultat contraste avec le comportement des fonctions convexes, où un maximum global ne peut se trouver à l'intérieur que si la fonction est constante sur tout son domaine. Supposons par l'absurde qu'une fonction convexe $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ admette un maximum global non constant $x^* \in \text{int}(S)$. Alors il existe $x^1 \in S$ tels que $f(x^1) < f(x^*)$. Il existe $y^1 \in S$ tel que $x^* \in]x^1, y^1[$. Par définition de la convexité, pour un certain $\lambda \in (0, 1)$ on a : $f(x^*) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(y^1) < \lambda f(x^*) + (1 - \lambda)f(x^*) = f(x^*)$. Ce qui conduit à la contradiction $f(x^*) < f(x^*)$. Par conséquent, un maximum global d'une fonction convexe ne peut être situé à l'intérieur que si la fonction est constante.

EXERCICE 2.2

Soit S un cône convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasi-convexe et positivement homogène telle que $f > 0$ sur S .

(i) Montrer que f est sous-additive sur S , c'est-à-dire

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in S.$$

(ii) En déduire que f est convexe sur S .

définie sur $S = \mathbb{R}_+^*$, est la somme de deux fonctions quasi-convexes : $x \mapsto \log x$ et $x \mapsto -x$, mais elle n'est pas quasi-convexe sur S (voir figure 2.6). En effet, on vérifie que

$$f(1) > \max \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right), f(2) \right\},$$

alors que $1 \in]\frac{1}{2}, 2[$, ce qui viole la condition de quasi-convexité.

En revanche, un minimum local non global d'une fonction quasi-convexe ne peut jamais être strict, comme l'établit la proposition suivante.

Proposition 2.3

Soit S un ensemble convexe non vide de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasi-convexe. Alors tout minimum local strict de f sur S est un minimum global strict.

Démonstration. Soit x^* un minimum local strict, il existe alors une boule $B_\delta(x^*)$ de centre x^* et de rayon $\delta > 0$ telle que

$$f(x^*) < f(x) \quad \text{pour tout } x \in B_\delta(x^*) \cap S \setminus \{x^*\}. \quad (2.3)$$

Supposons par l'absurde que x^* ne soit pas un minimum global strict, il existe alors un point $\bar{x} \in S$, avec $\bar{x} \neq x^*$, tel que $f(\bar{x}) \leq f(x^*)$.

Par quasi-convexité de f on a

$$f(\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x^*) \leq f(x^*) \quad \text{pour tout } \lambda \in]0, 1[. \quad (2.4)$$

Or, pour λ suffisamment proche de 0, le point $\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x^*$ appartient à $B_\delta(x^*) \cap S \setminus \{x^*\}$. Les relations (2.3) et (2.4) sont alors contradictoires. ■

Contrairement aux fonctions quasi-convexes, les fonctions strictement quasi-convexes n'admettent pas de minimas locaux non globaux comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.4

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement quasi-convexe. Alors tout minimum local de f sur S est l'unique minimum global.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un minimum local x^* qui ne soit pas l'unique minimum global. Alors, il existe

EXERCICE 2.3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que la fonction f est quasi-convexe sur $[a, b]$ si et seulement si l'une au moins des propriétés suivantes est vérifiée :

- i) la fonction f est croissante ou décroissante sur $[a, b]$;
- ii) la fonction f est décroissante sur $[a, b[$ ou croissante sur $]a, b]$;
- iii) il existe $t_0 \in]a, b[$ tel que la fonction f est décroissante sur $[a, t_0[$ et croissante sur $]t_0, b]$ où au moins l'un des deux intervalles est fermé.

Indications. Considérer une suite minimisante (t_n) d'éléments de $[a, b]$ telle que $(f(t_n))$ converge vers $\inf_{t \in [a, b]} f(t)$.

Supposons maintenant que la fonction f est s.c.i sur $[a, b]$.

- iv) Montrer que la quasi-convexité de la fonction f est équivalente à l'existence d'un $t_0 \in [a, b]$ tel que f est décroissante sur $[a, t_0]$ et croissante sur $[t_0, b]$.

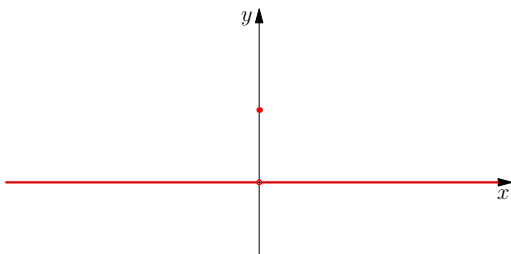


FIGURE 2.10 – Une fonction qui est semi strictement quasi-convexe mais non quasi-convexe.

$\bar{x} \in S$ tel que $\bar{x} \neq x^*$ et $f(\bar{x}) \leq f(x^*)$. Or, pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a

$$f(\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x^*) < \max\{f(\bar{x}), f(x^*)\} = f(x^*).$$

On obtient une contradiction en choisissant λ proche de 0. ■

2.1.2 Fonctions semi-strictement quasi-convexes

Les fonctions semi-strictement quasi-convexes constituent une classe de fonctions se trouvant entre la famille des fonctions convexes et celle des fonctions quasi-convexes. Ces fonctions ont une propriété importante¹ en optimisation à savoir « tout minimum local est global ».

Définition 2.2 ([7, Definition 2.3.1])

Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la fonction f est semi-strictement quasi-convexe sur S si et seulement si pour tout $x, y \in S$ tels que $f(x) \neq f(y)$ et tout $z \in]x, y[$, on a

$$f(z) < \max\{f(x), f(y)\}.$$

Il est facile de vérifier, en utilisant la définition, que la classe des fonctions semi-strictement quasi-convexes contient la classe des fonctions convexes ainsi que celle des fonctions strictement quasi-convexes. Les fonctions constantes sont semi-strictement quasi-convexes mais elles ne sont pas strictement quasi-convexes. Cependant, aucune relation d'inclusion entre la classe des fonctions semi-strictement quasi-convexes et celle des fonctions quasi-convexes n'existe comme illustré par les exemples suivants :

Exemple 2.2

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est quasi-convexe mais elle n'est pas semi-strictement quasi-convexe. En effet $1 \in]0, 2[$, $f(0) \neq f(2)$ et

$$1 = f(1) \not< \max\{f(0), f(2)\} = 1.$$

1. Rappelons que cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas des fonctions quasi-convexes.

L'exemple qui suit montre qu'une fonction semi-strictement quasi-convexe n'est pas nécessairement quasi-convexe.

EXERCICE 2.4

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. En posant

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

montrer que la fonction h est semi-strictement quasi-convexe si

1. la fonction f est positive et convexe sur S , et la fonction g est strictement positive et concave sur S .
2. la fonction f est négative et convexe sur S , et g est strictement positive et convexe sur S .
3. la fonction f est convexe, et la fonction g est strictement positive et affine.

D'après le Théorème 2.1, la classe des fonctions semi-strictement quasi-convexes continues est incluse dans celle des fonctions quasi-convexes.

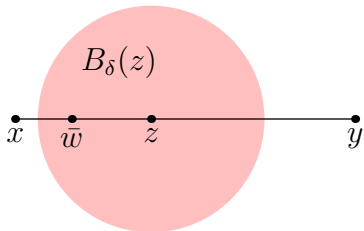


FIGURE 2.11 – Illustration de la preuve du Théorème 2.1.

Exemple 2.3

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par (voir FIGURE 2.10)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction g n'est pas quasi-convexe ($0 \in]-1, 1[$ mais $g(0) > \max\{g(-1), g(1)\} = 0$). Cependant, elle est semi-strictement quasi-convexe car si on choisit deux points x et y tels que $g(x) \neq g(y)$, on doit avoir l'un des deux points égal à 0 et l'autre différent de 0, supposons que c'est y qui est différent de 0 alors la valeur de la fonction g en tout point appartenant à l'intervalle $]0, y[$ (ou l'intervalle $]y, 0[$ si $y < 0$) vaut 0 et par suite elle est inférieure strictement à $\max\{g(0), g(y)\} = 1$.

Une fonction semi-strictement quasi-convexe n'est pas en général quasi-convexe, mais cette implication devient vraie en présence d'une hypothèse de continuité.

Théorème 2.1

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-strictement quasi-convexe et semi-continue inférieurement sur S alors f est quasi-convexe sur S .

Démonstration. Soient $x, y \in S$ et $z \in]x, y[$. Montrons que :

$$f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \quad (2.5)$$

Cas 1 : Si $f(x) \neq f(y)$, l'inégalité (2.5) découle directement de la semi-strictement quasi-convexité de f .

Cas 2 : Supposons $f(x) = f(y) = c$ et que (2.5) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire $f(z) > c$.

Par semi-continuité inférieure de f en z , pour $\epsilon = f(z) - c > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall w \in B_\delta(z) \cap S, \quad f(w) > f(z) - \epsilon = c.$$

Choisissons $\bar{w} \in]x, z[\cap B_\delta(z)$ (voir Figure 2.11). Alors :

1. Par construction, $f(\bar{w}) > c = f(x) = f(y)$.

Dans [9], l'auteur a défini une classe de fonctions qu'il a appelée explicitement quasi-convexes.

Il s'agit de fonctions à la fois semi strictement quasi-convexes et quasi-convexes. Cette classe de fonctions contient notamment celle des fonctions strictement quasi-convexes ainsi que celle des fonctions semi-strictement quasi-convexes s.c.i. Cependant, il existe des fonctions qui ne sont pas explicitement quasi-convexes (voir EXEMPLE 2.3).

À l'exception des fonctions constantes, ces fonctions ne peuvent pas admettre un maximum local à l'intérieur de leurs domaines.

La fonction de l'exemple 2.3 admet un maximum en 0, situé à l'intérieur de son domaine \mathbb{R} . Comme cette fonction est semi strictement quasi-convexe, elle ne peut pas être quasi-convexe.

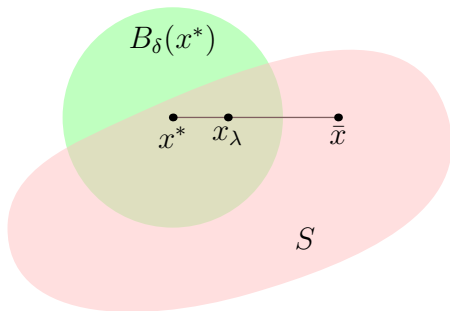


FIGURE 2.12 – Illustration de la preuve du Théorème 2.2. Le point x_λ vérifie, d'après (2.6) et (2.7), la double inégalité contradictoire suivante $f(x_\lambda) < f(x^*) \leq f(x_\lambda)$.

2. Par semi-strictement quasi-convexité entre x, \bar{w} et z :

$$f(\bar{w}) < \max\{f(x), f(z)\} = f(z).$$

3. De même, entre \bar{w}, z et y :

$$f(z) < \max\{f(\bar{w}), f(y)\} = f(\bar{w}).$$

On obtient ainsi la contradiction $f(z) < f(\bar{w}) < f(z)$, ce qui prouve l'inégalité (2.5). ■

EXERCICE 2.5

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasi-convexe (resp. semi-strictement quasi-convexe) sur S .

1. Montrer que la fonction αf est quasi-convexe (resp. semi-strictement quasi-convexe) pour tout $\alpha > 0$.

Soit $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante (resp. strictement croissante) avec $f(S) \subset A$.

2. Montrer la quasi-convexité (resp. la semi-strictement quasi-convexité) de la fonction $g \circ f$ sur S .

3. En supposant que f ne change pas de signe sur S , montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est quasi-concave (resp. semi-strictement quasi-concave) sur S .

Soit $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction affine telle que l'ensemble $S' = h^{-1}(S)$ est non vide.

4. Dites pourquoi l'ensemble S' est convexe.

5. Montrer que l'application $f \circ h$ est quasi-convexe sur S' lorsque f est quasi-convexe.

6. La fonction $f \circ h$ est-elle semi-strictement quasi-convexe lorsque f l'est? Discuter.

Théorème 2.2

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-strictement quasi-convexe sur S . Alors tout minimiseur local de f sur S est global.

Démonstration. Soit x^* un minimiseur local de f sur S alors il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \text{pour tout } x \in B_\delta(x^*) \cap S. \quad (2.6)$$

EXERCICE 2.6

Parmi les fonctions suivantes lesquelles sont quasi-convexes, sem-strictement quasi-convexes et strictement quasi-convexes sur l'ensemble S en question :

1. $f(x) = \log(\sum_{i=1}^n x_i)$ avec $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$.
2. $f(x) = \log(\sum_{i=1}^n |x_i| + 1)$ avec $S = \mathbb{R}^n$.
3. $f(x) = (\sum_{i=1}^n x_i)^\alpha$ où $\alpha > 0$ avec $S = \mathbb{R}_+^n$.
4. $f(x) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ où $A > 0$ et $\alpha_i \leq 0, i = 1, \dots, n$ avec $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$.
5. $f(x) = (\sum_{i=1}^n a_i x_i^\beta)^\frac{1}{\beta}$ où $a_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\beta \neq 0$ avec $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$.
6. $f(x) = \left(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{a_i}\right)^\alpha$ où $a_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\alpha > 0$ avec $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$.

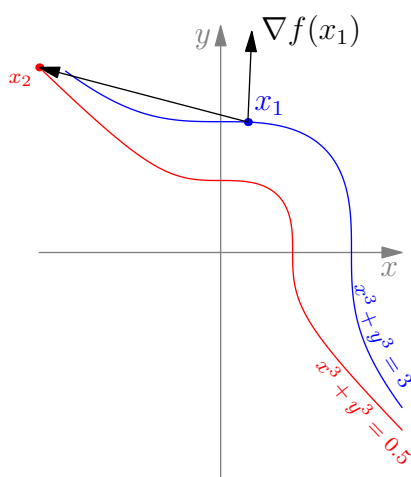


FIGURE 2.13 – Une autre manière de montrer la non quasi-convexité de la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3$ est d'utiliser le Théorème 2.3. On remarque que $f(x_1) = 3 > f(x_2) = 0.5$, $\nabla f(x_1) \neq 0$ et les deux vecteurs $\nabla f(x_1)$ et $x_2 - x_1$ font un angle aigu, ce qui veut dire que leur produit scalaire est strictement positif.

Supposons que x^* n'est pas un minimiseur global de f sur S alors il existe \bar{x} dans S tel que $f(\bar{x}) < f(x^*)$. La semi-stricte quasi-convexité de la fonction f nous permet d'écrire

$$f(\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x^*) < f(x^*) \quad \text{pour tout } \lambda \in]0, 1[. \quad (2.7)$$

Les relations (2.6) et (2.7) sont incompatibles pour des valeurs de λ proches de 0 (voir FIGURE 2.12). ■

2.1.3 Cas différentiable

Pour qu'une fonction différentiable f soit convexe sur un ouvert convexe S il faut et suffit que

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad \text{pour tout } x, y \in S.$$

De même, le théorème suivant fournit une caractérisation des fonctions quasi-convexes différentiables en terme de leurs gradients.

Théorème 2.3

Soit S un convexe ouvert non vide de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur S . La fonction f est quasi-convexe sur S si et seulement si pour tout $x_1, x_2 \in S$ on a

$$f(x_2) \leq f(x_1) \implies \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \leq 0. \quad (2.8)$$

ou

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle > 0 \implies f(x_2) > f(x_1). \quad (2.9)$$

Démonstration. Supposons que la fonction f soit quasi-convexe sur S . Considérons deux points x_1 et x_2 de S tels que $f(x_2) \leq f(x_1)$. On a

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(x_1) \leq 0, \quad \text{pour tout } t \in]0, 1[. \quad (2.10)$$

On obtient le résultat en divisant l'inégalité (2.10) par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0^+ .

Réciproquement, supposons que la relation (2.8) soit vérifiée. Montrons que f est quasi-convexe sur S . Supposons par l'absurde qu'il existe x_1 et x_2 deux éléments de S tels que $f(x_1) \leq f(x_2)$ et

$$M = \max_{t \in [0, 1]} F(t) > F(1), \quad \text{où } F(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1)).$$

Soit $\bar{t} = \inf\{t \in [0, 1] : F(t) = M\}$, on a $\bar{t} > 0$ et $F(\bar{t}) = M$ (pourquoi?).

EXERCICE 2.7

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $t_0 \in I$ est un maximum local semi-strict (voir [19]) s'il existe $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 < t_0 < t_2$, $\varphi(t) \leq \varphi(t_0)$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$ et

$$\max\{\varphi(t_1), \varphi(t_2)\} < \varphi(t_0),$$

voir FIGURE 2.14.

1. En supposant φ s.c.s, montrer qu'elle est quasi-convexe sur I si et seulement si il n'existe aucun maximum local semi-strict.
2. Donner un exemple pour montrer que l'hypothèse de s.c.s imposée dans la question précédente ne peut pas être relaxé.
3. Soit S un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que f est quasi-convexe sur S si et seulement si pour tout $a \in S$ et tout $d \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle \nabla f(a), d \rangle = 0$, la fonction $f_{a,d}(t) = f(a + td)$ n'admet pas de minimum local semi-strict en 0.

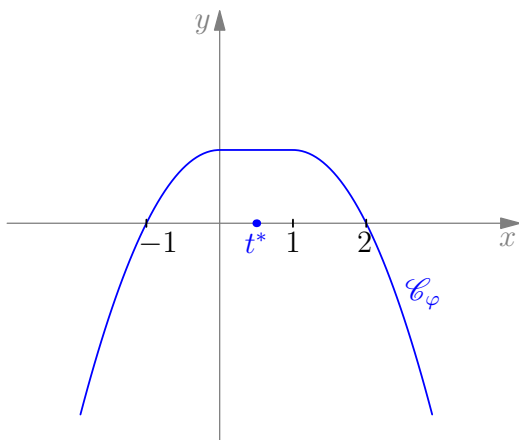


FIGURE 2.14 – Le point t^* est un maximum local semi-strict de φ sur $] - 1, 2[$, mais il ne l'est pas sur $]0, 2[$.

Comme la fonction F est continue en \bar{t} , on peut choisir $0 < \tilde{t} < \bar{t}$ tel que

$$F(t) > F(1), \quad \text{pour tout } \tilde{t} < t < \bar{t}. \quad (2.11)$$

De plus, on a $F(\bar{t}) < M = F(\bar{t})$ (car sinon on obtient une contradiction avec la définition de \bar{t}). En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur l'intervalle $[\tilde{t}, \bar{t}]$, il existe $t^* \in]\tilde{t}, \bar{t}[$ tel que

$$F'(t^*) = \frac{F(\bar{t}) - F(\tilde{t})}{\bar{t} - \tilde{t}} > 0. \quad (2.12)$$

Par ailleurs, d'après (2.11) on a $f(z^*) = F(t^*) > F(1) = f(x_2)$, où $z^* = x_1 + t^*(x_2 - x_1)$. En utilisant l'hypothèse (2.8), il vient

$$(1 - t^*)F'(t^*) = \langle \nabla f(z^*), x_2 - z^* \rangle \leq 0,$$

ce qui contredit la relation (2.12), d'où le résultat. ■

Remarque 2.1 ([16])

Si l'on suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 , alors la condition (2.8) est équivalente à

$$f(x_2) < f(x_1) \implies \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \leq 0. \quad (2.13)$$

En effet, une des implications est évidente. Pour l'autre, supposons qu'il existe deux points x_1 et x_2 dans S tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle > 0. \quad (2.14)$$

On peut alors montrer qu'il existe un réel $\delta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x_2) = f(x_1) < f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \text{ pour tout } 0 < t < \delta.$$

En appliquant (2.13), on obtient

$$\langle \nabla f(x_1 + t(x_2 - x_1)), (1 - t)(x_2 - x_1) \rangle \leq 0. \quad (2.15)$$

En faisant tendre t vers 0 dans (2.15), on obtient

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \leq 0.$$

ce qui contredit (2.14).

Le résultat suivant montre que l'inégalité dans le second membre de la relation (2.8) peut être stricte si x_1 n'est pas un point critique de la fonction f .

Théorème 2.4

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasi-convexe et différentiable. Alors si x_1 et x_2 sont deux éléments de S tels que $f(x_1) > f(x_2)$ et $\nabla f(x_1) \neq 0$ alors $\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0$.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux points x_1 et x_2 appartenant à S tels que $f(x_1) > f(x_2)$, $\nabla f(x_1) \neq 0$ et $\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$. D'après le Théorème 2.3 et puisque f est quasi-convexe sur S , on a nécessairement $\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle = 0$. Comme S est ouvert et f est continue en x_2 , il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $z = x_2 + \alpha \nabla f(x_1) \in S$ et $f(z) < f(x_1)$. En utilisant une nouvelle fois la quasi-convexité de f , on obtient

$$\langle \nabla f(x_1), z - x_1 \rangle \leq 0. \quad (2.16)$$

Or,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x_1), z - x_1 \rangle &= \langle \nabla f(x_1), z - x_2 \rangle + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \\ &= \langle \nabla f(x_1), z - x_2 \rangle \\ &= \alpha \|\nabla f(x_1)\|^2 > 0. \end{aligned}$$

ce qui contredit l'inégalité (2.16) ■

Le résultat suivant est similaire au précédent mais pour les fonctions strictement quasi-convexes.

Théorème 2.5

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement quasi-convexe et différentiable. Alors pour tout $x_1, x_2 \in S$ avec $x_1 \neq x_2$, on a

$$f(x_2) \leq f(x_1) \text{ et } \nabla f(x_1) \neq 0 \implies \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0. \quad (2.17)$$

Démonstration. Si $f(x_2) < f(x_1)$, le résultat découle directement du Théorème 2.4. Supposons maintenant que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors il existe $x^* \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x^*) < f(x_1)$. En appliquant le Théorème 2.4, on obtient

$$\langle \nabla f(x_1), x^* - x_1 \rangle < 0.$$

Or, il existe $\lambda^* > 1$ tel que

$$x_2 - x_1 = \lambda^*(x^* - x_1) \quad (\text{voir FIGURE 2.15}).$$

Ainsi, le résultat s'en suit. ■

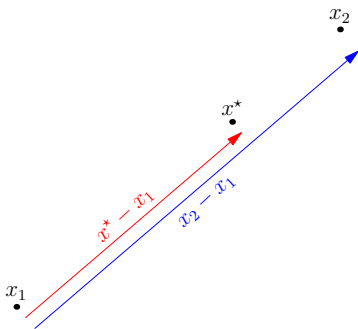


FIGURE 2.15 – Illustration du Théorème 2.5

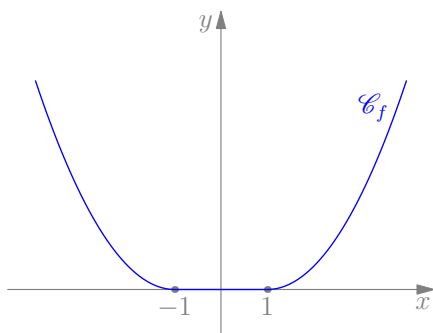


FIGURE 2.16 – Graphe de a fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas strictement quasi-convexe sur \mathbb{R} , malgré le fait qu'elle vérifie la condition (2.17). En effet, pour les valeurs de $x_1 > 1$ on obtient $f'(x_1) > 0$ et $x_2 < x_1$, d'où $f'(x_1)(x_2 - x_1) < 0$. Un raisonnement analogue s'applique lorsque $x_1 < -1$.

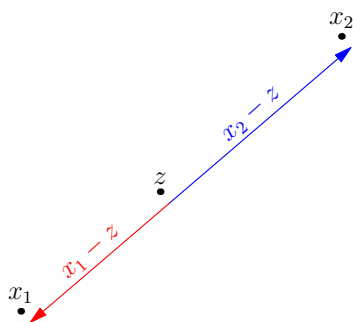


FIGURE 2.17 – Les vecteurs $x_1 - z$ et $x_2 - z$ sont opposés.

On note que la relation (2.17) n'est pas suffisante (voir FIGURE 2.16).

La condition (2.17) devient suffisante si, de plus, on suppose que le gradient de la fonction f ne s'annule pas sur S [7, Theorem 3.2.4]. En effet, d'après le Théorème 2.3, f est quasi-convexe sur S . Supposons qu'elle ne soit pas strictement quasi-convexe sur S , il existe alors $x_1, x_2, z \in S$ avec $x_1 \neq x_2$, $z \in]x_1, x_2[$ tel que $f(z) = f(x_1)$ (en supposant $f(x_2) \leq f(x_1)$). Comme $\nabla f(z) \neq 0$ (par hypothèse), l'application de (2.17) à (x_1, z) et (x_2, z) donne

$$\langle \nabla f(z), x_1 - z \rangle < 0, \quad (2.18)$$

$$\langle \nabla f(z), x_2 - z \rangle < 0. \quad (2.19)$$

Or, on a $x_2 - z = \lambda(x_1 - z)$ pour un certain $\lambda < 0$ (voir FIGURE 2.17). Ainsi, les deux inégalités (2.18) et (2.19) sont contradictoires.

2.1.4 Cas deux fois différentiable

Les fonctions convexes deux fois différentiables, définies sur un ouvert convexe de \mathbb{R}^n , se caractérisent par le fait que leurs matrices hessiennes sont semi-définies positives en tout point de cet ouvert. Autrement dit, toutes les valeurs propres de ces matrices sont positives. Dans le théorème suivant, nous montrerons que les matrices hessiennes des fonctions quasi-convexes deux fois différentiables ne peuvent comporter plus d'une valeur propre strictement négative. Bien que cette propriété ne caractérise pas les fonctions quasi-convexes, elle permet néanmoins d'identifier celles qui ne le sont pas.

Théorème 2.6

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasi-convexe deux fois différentiable. Alors pour tout $x \in S$, la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ admet au plus une valeur propre simple strictement négative.

Démonstration. Supposons qu'il existe $\bar{x} \in S$ tel que $\nabla^2 f(\bar{x})$ admet deux valeurs propres strictement négatives λ_1 et λ_2 . Notons $\{u_1, \dots, u_n\}$ une bases orthonormée de vecteurs propres et supposons que u_1 et u_2 correspondent respectivement à λ_1 et λ_2 . Notons V le sous-espace vectoriel engendré par u_1 et u_2 . On a alors

$$\langle d, \nabla^2 f(\bar{x})d \rangle < 0 \quad \text{pour tout } d \in V \setminus \{0\}. \quad (2.20)$$

Si $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ alors $H \cap V \neq \{0\}$ où H désigne l'hyperplan orthogonal à $\nabla f(\bar{x})$. En effet, si ce n'était pas le cas, la dimension du sous-espace

Exemple 2.4

Considérons la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3$ dont on sait déjà qu'elle n'est pas quasi-convexe sur \mathbb{R}^2 . Sa matrice hessienne est donnée par

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}.$$

La fonction f est convexe sur l'ensemble $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ car $\nabla^2 f(x, y)$ y est définie positive. Elle est concave (non quasi-convexe) sur $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}$ puisque la matrice hessienne est définie négative sur cet ensemble et elle admet deux valeurs propres strictement négatives. Sur $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}$, $\nabla^2 f(x, y)$ possède une valeur propre strictement négative et une autre strictement positive. Le Théorème 2.6 ne nous permet pas de conclure quand à la quasi-convexité de f sur cette dernière région.

En prenant $a = (5, -1)$ et $d = (3, -\frac{7}{2})$, on obtient

$$f_{a,d}(t) = -\frac{127}{8}t^3 + \frac{393}{4}t^2 + \frac{429}{2}t + 124$$

avec $I_{a,d} =]-\frac{2}{7}, +\infty[$. La fonction $f_{a,d}$ n'est pas quasi-convexe sur $I_{a,d}$ (voir FIGURE 2.18); par conséquent, f n'est pas quasi-convexe sur S_3 (voir Exercice 2.1).

vectorel $H + V$ serait égale à $n + 1$, ce qui impossible.

Soit d un vecteur non nul appartenant à $H \cap V$. On a

$$f(\bar{x} + td) = f(\bar{x}) + \frac{t^2}{2} \langle d, \nabla^2 f(\bar{x})d \rangle + t^2 \|d\|^2 \varepsilon(t) \quad (2.21)$$

avec $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$.

En combinant (2.20) et (2.21), on déduit que 0 est un maximum local strict de la fonction $t \mapsto f(\bar{x} + td)$, ce qui prouve que f n'est pas quasi-convexe sur S .

Un raisonnement analogue s'applique dans le cas où $\nabla f(\bar{x}) = 0$. ■

Une autre condition nécessaire de quasi-convexité est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.7 ([2])

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable et quasi-convexe. Alors, pour tout $x \in S$ on a

$$d \in \mathbb{R}^n : \langle d, \nabla f(x) \rangle = 0 \implies \langle d, \nabla^2 f(x)d \rangle \geq 0. \quad (2.22)$$

Démonstration. S'il existe $x \in S$ et $d \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle d, \nabla f(x) \rangle = 0$ et $\langle d, \nabla^2 f(x)d \rangle < 0$ alors on montre, comme dans le théorème précédent, que la fonction $t \mapsto f(x + td)$ admet un maximum local strict en 0. Ce qui contredit la quasi-convexité de f . ■

Le Théorème 2.7 établit que les fonctions quasi-convexes de classe \mathcal{C}^2 , définies sur un ouvert S , possèdent des matrices hessiennes semi-définies positives aux points x où leur gradient s'annule.

En combinant les résultats du Théorème 2.7 et de l'Exercice 2.8, on obtient que la condition (2.22) est nécessaire et suffisante pour la quasi-convexité des fonctions ne possédant pas de points critiques. Ce résultat a été établi dans [19, Theorem 5].

EXERCICE 2.8

Soit f une fonction deux fois continûment différentiable sur un ouvert convexe $S \subset \mathbb{R}^n$ qui vérifie la condition (2.22) et telle que $\nabla f(x) \neq 0$ pour tout $x \in S$.

On se propose de montrer que f est quasi-convexe sur S . Supposons, par l'absurde, qu'il existe deux point $x_1, x_2 \in S$ tels que

$$M = \max_{t \in [0,1]} \varphi(t) := f(x_1 + t(x_2 - x_1)) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

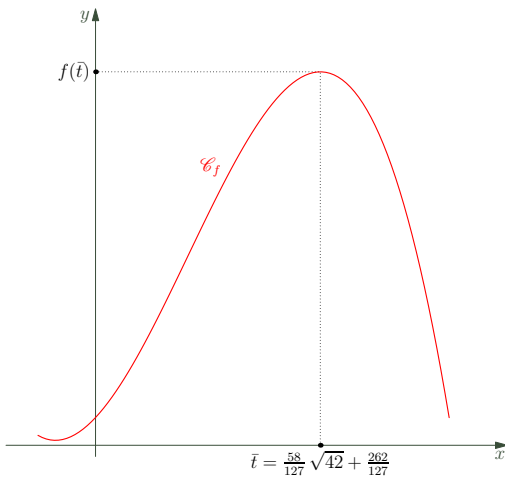


FIGURE 2.18 – Graphe de la fonction $f_{a,d}$ de l'Exemple 2.4.

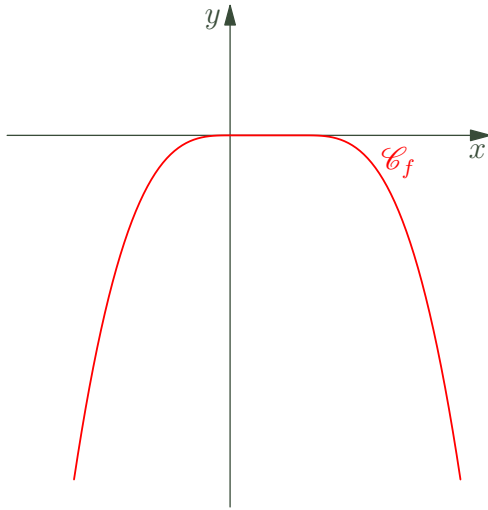


FIGURE 2.19 – Graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x-1)^3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas quasi-convexe sur \mathbb{R} , toutefois elle satisfait la condition (2.22). Par conséquent, cette condition n'est pas suffisante en général pour garantir la quasi-convexité de f .

Dans l'exercice 2.8, on montre que cette condition est suffisante pour les fonctions qui n'admettent pas de points critiques.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que

$$f(x) < f(x_0), \quad \text{pour tout } x \in]x_1, x_0[. \quad (2.23)$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(w, z) = f(w\nabla f(x_0) + z(x_2 - x_1) + x_0) - f(x_0).$$

2. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 tels que $\psi(0) = 0$ et

$$f(x(z)) = f(x_0) \quad \text{pour tout } z \in I, \quad (2.24)$$

où $x(z) = \psi(z)\nabla f(x_0) + z(x_2 - x_1) + x_0$.

3. En utilisant (2.24), trouver les identités suivantes

$$\langle \nabla f(x(z)), \psi'(z)\nabla f(x_0) + x_2 - x_1 \rangle = 0, \quad \forall z \in I \quad (2.25)$$

et

$$\langle \nabla^2 f(x(z))[\psi'(z)\nabla f(x_0) + x_2 - x_1], \psi'(z)\nabla f(x_0) + x_2 - x_1 \rangle + \psi''(z)\langle \nabla f(x(z)), \nabla f(x_0) \rangle = 0, \quad \text{pour tout } z \in I. \quad (2.26)$$

4. En utilisant (2.25), (2.26) et (2.22), montrer qu'il existe $z^* > 0$ tel que

$$\psi(z) < 0, \quad \text{pour tout } z \in]-z^*, z^*[\setminus \{0\}. \quad (2.27)$$

5. En posant $y(z) = z(x_2 - x_1) + x_0$, on sait d'après le théorème de la valeur moyenne qu'il existe $u(z) \in]y(z), x(z)[$ tel que

$$f(x(z)) - f(y(z)) = \langle \nabla f(u(z)), x(z) - y(z) \rangle \quad (2.28)$$

Montrer que les relations (2.28) et (2.23) sont contradictoires.

Cette contradiction montre que f est quasi-convexe sur S .

Le résultat suivant, établi dans [8], fournit une autre condition suffisante de quasi-convexité dans le cas où la fonction admet des points critiques.

Soit f une fonction définie et différentiable sur un ouvert $S \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in S$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$, on définit

$$H_{f,x} = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x), d \rangle = 0\},$$

l'hyperplan orthogonal au vecteur $\nabla f(x)$.

Théorème 2.8

Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et deux fois différentiable sur un ouvert convexe $S \subset \mathbb{R}^n$. Si la fonction f satisfait les conditions suivantes

- (i) pour tout $x \in S$ tel que $\nabla f(x) = 0$, la matrice $\nabla^2 f(x)$ est définie positive.
- (ii) pour tout $x \in S$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$, la matrice $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive sur $H_{f,x}$.

alors f est quasi-convexe sur S .

Pour la démonstration, le lecteur peut consulter [3, Theorem 3.19].

Caractérisation par la matrice hessienne bordée

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

et a le vecteur

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 & 6 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pour $\alpha = \{1, 3\}$ on obtient

$$D_\alpha = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \right) = 218.$$

Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n et a un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . On appelle *matrice bordée* de A , la matrice notée A_a d'ordre $n + 1$ définie par

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & a^\top \\ a & A \end{bmatrix}.$$

Pour tout ensemble $\alpha \subset \{1, \dots, n\}$, on note D_α le mineur principal bordée défini par

$$D_\alpha = \det \begin{bmatrix} 0 & a_\alpha^\top \\ a_\alpha & A_\alpha \end{bmatrix},$$

où A_α désigne la sous-matrice extraite de A en ne conservant que les lignes et colonnes d'indices appartenant à α , et où a_α est défini de manière analogue.

Pour $\alpha = \{1, \dots, r\}$ où $1 \leq r \leq n$, on appelle D_α le mineur principal dominant bordé d'ordre r , il sera noté D_r .

Les résultats suivants sont présentés dans [12, 11, 10], où l'on trouve également les démonstrations.

Proposition 2.5 ([12, Theorem 4.1])

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout vecteur d tel que $\langle a, d \rangle = 0$, on a $\langle d, Ad \rangle \geq 0$.
- (ii) La matrice A est soit semi-définie positive, soit elle admet une seule valeur propre simple négative et il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = a$ et $\langle a, x \rangle \leq 0$.

Proposition 2.6 ([11, Theorem 2.9])

Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (i) Pour tout vecteur d tel que $\langle a, d \rangle = 0$, on a $\langle d, Ad \rangle \geq 0$.
- (iii) La matrice A_a admet une seule valeur propre négative simple.

Proposition 2.7 ([10, Theorem 9])

Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (i) Pour tout vecteur d tel que $\langle a, d \rangle = 0$, on a $\langle d, Ad \rangle \geq 0$.
- (iv) Pour tout $\alpha \subset \{1, \dots, n\}$, on a $D_\alpha \leq 0$.

On note que les quatre conditions (i), (ii), (iii) et (iv) énoncées dans les propositions précédentes sont équivalentes.

On définit le hessien bordé d'une fonction f deux fois différentiable par

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 0 & \nabla f(x)^\top \\ \nabla f(x) & \nabla^2 f(x) \end{bmatrix}.$$

De même, pour $\alpha = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, on note $D_\alpha f(x)$ le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_k}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_1}}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_k}^2}(x) \end{bmatrix}.$$

Lorsque $\alpha = \{1, \dots, k\}$, on notera $D_\alpha f(x)$ simplement $D_k f(x)$.

Avec ces notations, on peut énoncer le résultat suivant

Théorème 2.9

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable. Si f est quasi-convexe sur S , alors pour tout $\alpha \subset \{1, \dots, n\}$, on a

$$D_\alpha f(x) \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in S. \quad (2.29)$$

De plus, si $\nabla f(x) \neq 0$ pour tout $x \in S$, alors la condition (2.29) est également suffisante.

Le Théorème 2.9 découle directement du Théorème 2.7, de l'Exercice 2.8 et de la Proposition 2.7. Il permet, pour des dimensions modestes, d'établir la quasi-convexité de certaines fonctions, comme l'illustre les exemples qui suivent.

Exemple 2.5

Considérons la fonction $f(x, y) = 3y + \frac{y-x}{y+1}$ définie sur $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$. On a

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{1+y} & \frac{4+x+6y+3y^2}{(1+y)^2} \\ \frac{-1}{1+y} & 0 & \frac{1}{(1+y)^2} \\ \frac{4+x+6y+3y^2}{(1+y)^2} & \frac{1}{(1+y)^2} & \frac{-2-2x}{(1+y)^3} \end{bmatrix}$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} D_{\{1\}}f(x, y) &= -\frac{1}{(1+y)^2} \leq 0, \\ D_{\{2\}}f(x, y) &= -\left(3 + \frac{x-y}{(1+y)^2} + \frac{1}{1+y}\right)^2 \leq 0, \\ D_{\{1,2\}}f(x, y) &= -\frac{6}{(1+y)^3} \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la condition (2.29) est vérifiée et, comme le gradient de f ne s'annule pas sur S , on conclut que f est quasi-convexe sur S .

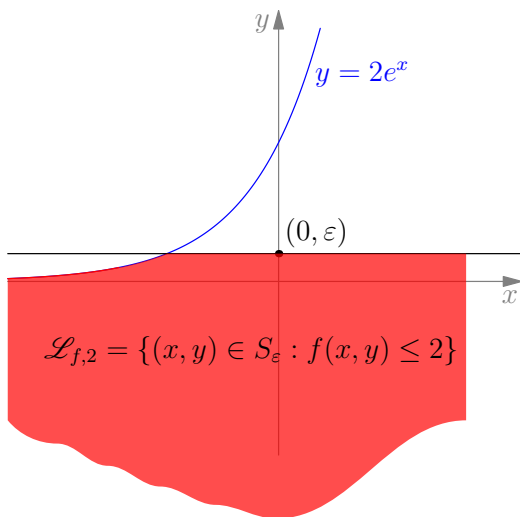


FIGURE 2.20 – Ensemble de sous niveau de la fonction f de l'Exemple 2.6 lorsqu'elle est définie sur l'ensemble S_ε avec $\varepsilon > 0$.

Exemple 2.6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = ye^{-x}$. Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} D_{\{1\}}f(x, y) &= -e^{-2x}y^2 \leq 0, \\ D_{\{2\}}f(x, y) &= -e^{-2x} \leq 0, \\ D_{\{1,2\}}f(x, y) &= e^{-3x}y. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Le gradient de cette fonction est non nul sur tout \mathbb{R}^2 . En appliquant le Théorème 2.9, la relation (2.30) permet de conclure que le plus grand ensemble sur lequel f est quasi-convexe est

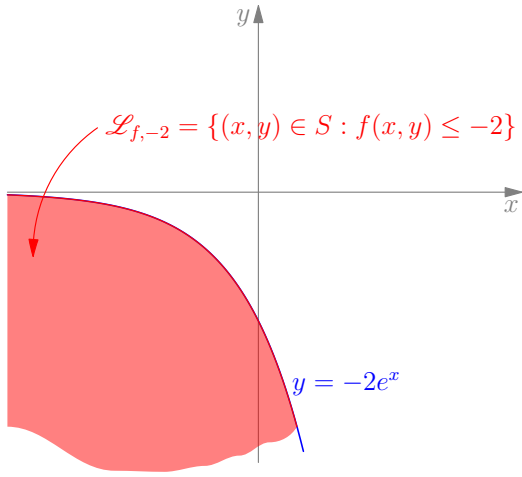


FIGURE 2.21 – Ensemble de sous niveau de la fonction f de l'Exemple 2.6 lorsqu'elle est définie sur S . On note qu'il s'agit bien d'un ensemble convexe.

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$. On remarque, en posant

$$S_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \varepsilon\},$$

que les ensembles

$$\mathcal{L}_{f,\alpha} = \{(x, y) \in S_\varepsilon : f(x, y) \leq \alpha\}$$

sont non convexes dès que $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$ (Figure 2.20).

En revanche, lorsqu'on restreint le domaine à S , les ensembles de sous-niveau

$$\mathcal{L}_{f,\alpha} = \{(x, y) \in S : f(x, y) \leq \alpha\}$$

sont convexes pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (voir FIGURE 2.21).

2.2 Fonctions pseudoconvexes

2.2.1 Définitions et propriétés

Il est bien connu qu'un point critique d'une fonction convexe différentiable est aussi un minimum global. Cette propriété n'est pas vraie dans le cas « quasi-convexe ». Cependant, la classe des fonctions pseudoconvexes possède cette propriété, très utile en théorie de l'optimisation.

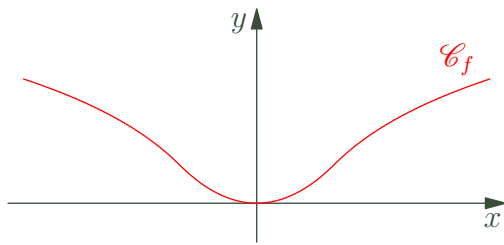


FIGURE 2.22 – Graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \log(-x) & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \log(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une fonction pseudoconvexe définie sur \mathbb{R} . Elle admet un minimum global à l'origine, mais elle n'est pas convexe.

Définition 2.3

Soit S un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. La fonction est dite *pseudoconvexe* sur S si pour tout $x_1, x_2 \in S$ on a

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1). \quad (2.31)$$

On remarque que la relation (2.31) est équivalente à l'énoncé suivant :

$$\forall x_1, x_2 \in S, f(x_1) > f(x_2) \implies \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0. \quad (2.32)$$

De manière analogue, on introduit la notion de stricte pseudoconvexité.

Définition 2.4

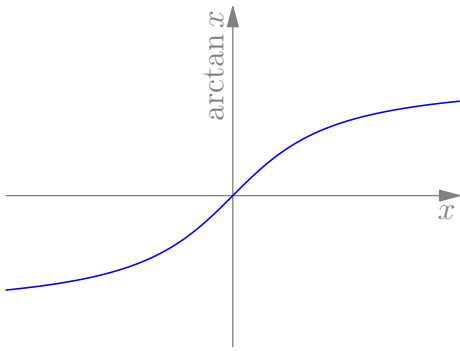


FIGURE 2.23 – Graphe de la fonction $x \mapsto \arctan x$. Il s'agit d'une fonction pseudoconvexe (non convexe) sur \mathbb{R} .

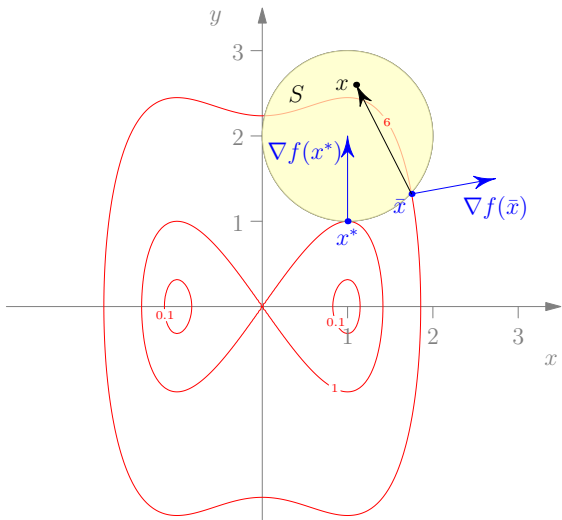


FIGURE 2.24 – On considère le problème de minimiser la fonction $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^2$ (qui n'est pas convexe) sur l'ensemble convexe S défini par la contrainte $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$. On constate que le point x^* est la solution optimale globale, et que la condition (2.37) est vérifiée en ce point. En revanche, pour le point \bar{x} , il existe des éléments de S qui violent cette condition. Par conséquent, ce dernier point ne présente pas un minimum local pour ce problème.

Une fonction f définie et différentiable sur une partie S convexe et ouverte de \mathbb{R}^n est dite strictement pseudoconvexe sur S si pour tout $x_1, x_2 \in S$ avec $x_1 \neq x_2$ on a

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1). \quad (2.33)$$

Il est de même de dire que la fonction f est strictement pseudoconvexe sur S si pour tout $x_1, x_2 \in S$ avec $x_1 \neq x_2$ on a

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0. \quad (2.34)$$

On déduit aisément de la définition que toute fonction strictement pseudoconvexe est pseudoconvexe. La réciproque est fautive (les fonctions constantes sont pseudoconvexes mais elles ne sont pas strictement pseudoconvexes). Il est aussi facile de voir que

- toute fonction convexe différentiable est pseudoconvexe,
- toute fonction strictement convexe différentiable est strictement pseudoconvexe.
- toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, monotone et différentiable, ne possédant aucun point critique (c'est-à-dire vérifiant $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), est strictement pseudoconvexe sur \mathbb{R} (voir FIGURE 2.23).

Rappels

Soit S un ensemble convexe de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert contenant S . Soit x^* un minimum local de f sur S , il existe alors un nombre réel $r > 0$ tel que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \text{pour tout } x \in B_r(x^*) \cap S. \quad (2.35)$$

Soit x un élément quelconque de S . le point $x^* + t(x - x^*)$ est dans S pour tout $t \in]0, 1[$ (S est convexe). Aussi, il existe un nombre réel t_0 vérifiant $0 < t_0 < 1$ tel que

$$x^* + t(x - x^*) \in B_r(x^*) \quad \text{pour tout } 0 < t < t_0.$$

En remplaçant dans (2.35) on obtient

$$f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*) \geq 0 \quad \text{pour tout } 0 < t < t_0. \quad (2.36)$$

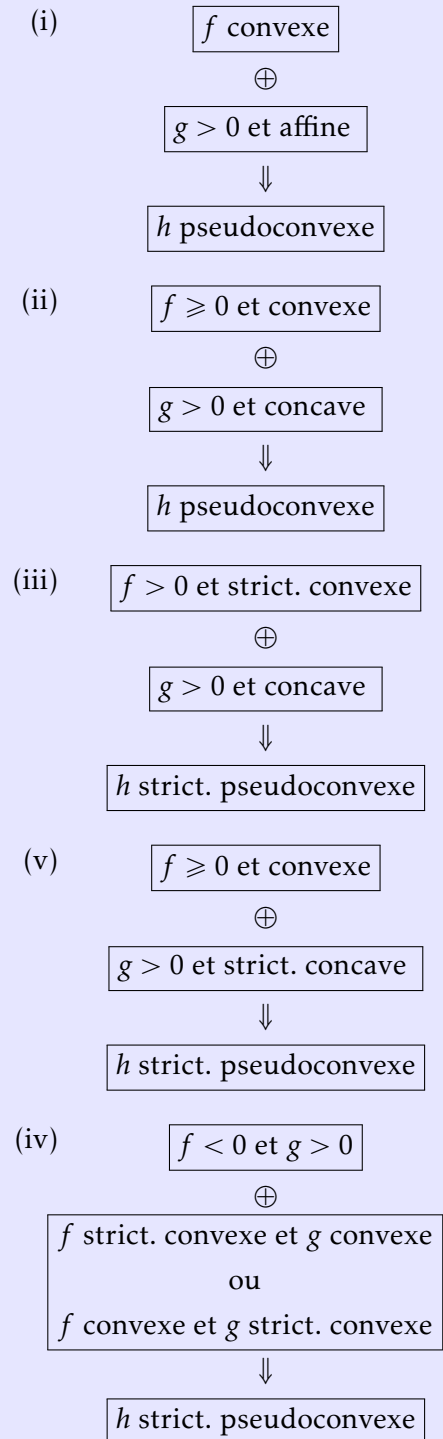
En divisant l'inégalité (2.36) par t et en faisant tendre t vers 0 on obtient

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in S. \quad (2.37)$$

La relation (2.37), que l'on désigne sous le nom d'inéquation

EXERCICE 2.9

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables telles que g ne s'annule pas sur S . Considérons la fonction $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Montrer les assertions suivantes



variationnelle, constitue une condition nécessaire d'optimalité. Dans le cas où l'ensemble S est ouvert, elle est équivalente à la nullité du gradient.

On vérifie aisément que la condition (2.37) devient suffisante si la fonction f est pseudoconvexe sur S . Dans ce cas, elle implique que x^* constitue un minimum global de f sur S .

Proposition 2.8

Si f est une fonction différentiable et strictement pseudoconvexe sur un convexe S de \mathbb{R}^n alors elle admet au plus un minimum global.

Démonstration. Puisque la fonction f est pseudoconvexe sur S , elle ne peut admettre de minimum local qui ne soit pas également global. Soit x^* un minimum global de f sur S . D'après la remarque précédente, x^* doit vérifier la condition (2.37).

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un autre minimum global $\hat{x} \neq x^*$ tel que $f(x^*) = f(\hat{x})$. D'après la relation (2.34), on devrait alors avoir

$$\langle \nabla f(x^*), \hat{x} - x^* \rangle < 0,$$

ce qui contredit la condition (2.37). ■

Dans le résultat qui suit, nous montrons comment caractériser la pseudoconvexité d'une fonction à partir de l'étude de ses restrictions le long de certaines directions en chaque point de son domaine de définition.

Proposition 2.9

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors, f est (strictement) pseudoconvexe sur S si et seulement si, pour tout $x \in S$ et pour tout vecteur non nul $u \in (\nabla f(x))^\perp$, la fonction $f_{x,u} : I_{x,u} \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un minimum local (strict) en 0.

Démonstration. Supposons d'abord que f est pseudoconvexe sur S . Alors, pour tout $x \in S$ et pour tout vecteur $u \neq 0$, la fonction unidimensionnelle $f_{x,u}$ est pseudoconvexe sur l'intervalle ouvert $I_{x,u}$. Par conséquent, la condition $\langle \nabla f(x), u \rangle = f'_{x,u}(0) = 0$ implique que 0 est un minimum global de $f_{x,u}$ sur $I_{x,u}$.

Réciproquement, raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas pseudoconvexe sur S . Il existe alors deux points distincts $x_1, x_2 \in$

S tels que

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x_2) < f(x_1). \quad (2.38)$$

En posant $u = x_2 - x_1$, la fonction $f_{x_1, u}$, définie sur l'intervalle ouvert $I_{x_1, u} \supset]0, 1[$, vérifie

$$f'_{x_1, u}(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad f_{x_1, u}(1) < f_{x_1, u}(0). \quad (2.39)$$

Deux cas se présentent :

Cas 1 : $f'_{x_1, u}(0) > 0$

Dans ce cas, on déduit de la relation (2.39) que l'ensemble $\operatorname{argmax}_{[0,1]} f_{x_1, u} \neq \emptyset$ est contenu dans $]0, 1[$. Soit

$$\bar{t} = \sup_{[0,1]} \operatorname{argmax} f_{x_1, u}$$

on a donc $0 < \bar{t} < 1$, $f'_{x_1, u}(\bar{t}) = 0$ et

$$f_{x_1, u}(t) < f_{x_1, u}(\bar{t}), \quad \text{pour tout } t \in]\bar{t}, 1[. \quad (2.40)$$

En posant, $\bar{x} = x_1 + \bar{t}u$ on obtient $\langle \nabla f(\bar{x}), u \rangle = 0$. D'après l'hypothèse, 0 doit être un minimum local de la fonction $\varphi(t) = f(\bar{x} + tu)$, c'est-à-dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\varphi(0) \leq \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in]-\epsilon, \epsilon[. \quad (2.41)$$

Or, $\varphi(t) = f_{x_1, u}(t + \bar{t})$, et la relation (2.41) se réécrit

$$f_{x_1, u}(\bar{t}) \leq f_{x_1, u}(t) \quad \text{pour tout } t \in]\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon[, \quad (2.42)$$

ce qui contredit la relation (2.40).

Cas 2 $f'_{x_1, u}(0) = 0$

Dans ce cas 0 est un minimum local de la fonction $f_{x_1, u}$. On peut vérifier facilement que la valeur

$$\bar{t} = \sup_{[0,1]} \operatorname{argmax} f_{x_1, u} \in]0, 1[,$$

et un raisonnement analogue au précédent conduit à une contradiction.

Le cas de la stricte pseudoconvexité s'établit de manière analogue et est laissé au lecteur. ■

2.2.2 Relations entre quasi-convexité et pseudo-convexité

Dans cette section, nous présentons les principales relations qui existent entre la quasi-convexité et la pseudoconvexité. Nous mettons en évidence les liens théoriques qui permettent de comparer ces deux notions, en soulignant leurs différences ainsi que les conditions dans lesquelles elles coïncident.

Cas différentiable

Proposition 2.10

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un convexe ouvert non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur S . Alors on a :

- (i) Si f est pseudoconvexe sur S alors elle y est semi strictement quasi-convexe et donc quasi-convexe.
- (ii) Si f est quasi-convexe sur S et si $\nabla f(x) \neq 0$ pour tout $x \in S$ alors f est pseudoconvexe sur S .

Démonstration. Supposons que la fonction f ne soit pas semi strictement quasi-convexe sur S . Il existe alors deux points $x, y \in S$ vérifiant $f(x) \neq f(y)$, et un point $z \in]x, y[$ tels que

$$f(z) \geq \max\{f(x), f(y)\}.$$

En supposant que $f(x) < f(y)$ on obtient alors

$$f(z) \geq f(y) > f(x). \quad (2.43)$$

La pseudoconvexité de f implique alors que $\langle \nabla f(z), x - z \rangle < 0$. Or, les vecteurs $x - z$ et $y - z$ sont colinéaires et de sens opposés, d'où $\langle \nabla f(z), y - z \rangle > 0$. Par la pseudoconvexité de f , on devrait donc avoir $f(y) \geq f(z)$, et l'inégalité (2.43) conduit à $f(z) = f(y)$.

D'autre part on a

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(z + \lambda(y - z)) - f(z)}{\lambda} = \langle \nabla f(z), y - z \rangle = \ell > 0$$

Cela signifie que, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda < \delta$ on a

$$\ell - \epsilon < \frac{f(z + \lambda(y - z)) - f(z)}{\lambda} < \ell + \epsilon$$

En choisissant $0 < \epsilon < \ell$ on obtient l'existence d'un point $\hat{z} \in]z, y[$ tel que $f(\hat{z}) > f(z) = f(y)$. En appliquant de nouveau la pseudocon-

vexité de f , on a alors :

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(\hat{z}), y - \hat{z} \rangle &< 0 \\ \langle \nabla f(\hat{z}), z - \hat{z} \rangle &< 0.\end{aligned}$$

Or, les vecteurs $z - \hat{z}$ et $y - \hat{z}$ étant colinéaires et de sens opposés, ces deux inégalités sont incompatibles. On obtient ainsi une contradiction, ce qui démontre la semi-stricte quasi-convexité de la fonction f .

Pour la seconde partie, considérons deux points $x_1, x_2 \in S$ tels que $f(x_2) < f(x_1)$, et montrons que $\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0$. Comme f est quasi-convexe sur S , il suffit de prouver que $\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \neq 0$.

Supposons, par l'absurde, que $\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle = 0$. Par la continuité de f et puisque $\nabla f(x_1) \neq 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(x_2 + \epsilon \nabla f(x_1)) < f(x_1)$. La quasi-convexité de f entraîne alors que

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 + \epsilon \nabla f(x_1) \rangle \leq 0. \quad (2.44)$$

Or,

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 + \epsilon \nabla f(x_1) \rangle &= \underbrace{\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle}_{=0} + \epsilon \|\nabla f(x_1)\|^2 \\ &= \epsilon \|\nabla f(x_1)\|^2 > 0,\end{aligned}$$

ce qui contredit l'inégalité (2.44).

On conclut donc que $\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0$. ■

Avant d'établir un nouveau lien entre les fonctions quasi-convexes et pseudoconvexes, nous introduisons la définition suivante.

Définition 2.5

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

- On dit que f vérifie la propriété (\mathcal{L}) si tout point critique de f est un minimum local de f .
- On dit que f vérifie la propriété (\mathcal{G}) si tout point critique de f est un minimum global de f .

Bien sûr, toutes les fonctions vérifiant la propriété (\mathcal{G}), vérifient aussi la propriété (\mathcal{L}) mais la réciproque n'est pas en général vraie (voir FIGURE).

Remarque 2.2

Les deux propriétés (\mathcal{L}) et (\mathcal{G}) sont équivalentes pour les fonctions définies sur \mathbb{R} .

En effet, Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si tout point critique de f est un minimum local, alors tout point critique est un minimum global.

Démonstration. Supposons qu'il existe $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$ mais que a ne soit pas un minimum global. Il existe alors $b \in I$ tel que $f(b) < f(a)$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a < b$.

Comme a est un minimum local, il existe $r > 0$ tel que

$$f(a) \leq f(t) \quad \text{pour tout } t \in]a - r, a + r[. \quad (2.45)$$

Posons

$$C = \arg \max_{t \in [a, b]} f(t), \quad M = \max_{t \in [a, b]} f(t).$$

Deux cas se présentent.

Premier cas : $a \in C$. Posons

$$t_0 = \inf\{t \in [a, b] : f(t) < M\}.$$

À cause de (2.45), on a nécessairement $t_0 > a$, et

$$f(a) = f(t_0) = M \quad \text{et} \quad f(t) = M \quad \text{pour tout } t \in [a, t_0].$$

On en déduit que $f'(t_0) = 0$. Cependant, t_0 n'est pas un minimum local : il existe une suite (t_n) telle que $t_n \rightarrow t_0$ et $f(t_n) < M = f(t_0)$. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle tout point critique est un minimum local.

Deuxième cas : $a \notin C$. Dans ce cas, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Comme c est un maximum local, on a forcément $f'(c) = 0$. Par hypothèse, c doit donc être un minimum local.

En appliquant le même raisonnement que dans le premier cas, cette fois entre c et b , on obtient encore une contradiction.

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction. Ainsi, tout point critique de f doit être un minimum global. ■

Dans le cas où l'espace est de dimension au moins égale à 2, les propriétés (\mathcal{L}) et (\mathcal{G}) restent équivalentes dès lors que la fonction f est quasi-convexe, comme l'indique le lemme ci-après.

Lemme 2.1

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasi-convexe. Si tout point critique de f est un minimum local, alors tout point critique est un minimum global.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\hat{x} \in S$ tel que $\nabla f(\hat{x}) = 0$ mais que \hat{x} ne soit pas un minimum global. Alors il existe $\tilde{x} \in S$ tel que

$$f(\tilde{x}) < f(\hat{x}).$$

Considérons l'application

$$\varphi(t) = f(\hat{x} + t(\tilde{x} - \hat{x})), \quad t \in [0, 1].$$

Comme f est quasi-convexe, on a

$$\varphi(t) \leq \varphi(0), \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (2.46)$$

Puisque \hat{x} est un minimum local, il existe $r > 0$ tel que

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in B(\hat{x}, r) \subset S. \quad (2.47)$$

En combinant (2.46) et (2.47), on obtient

$$\varphi(t) = \varphi(0), \quad \forall t \in [0, r[. \quad (2.48)$$

Définissons

$$t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \varphi(t) < \varphi(0)\}.$$

Le point (2.48) implique $t_0 > 0$, et la continuité de φ assure que $t_0 < 1$. De plus, on a nécessairement $\varphi(t_0) = \varphi(0)$, sinon la continuité donnerait un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varphi(t) < \varphi(0), \quad \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

ce qui contredit la définition de t_0 .

Nous avons donc

$$\varphi(t) = \varphi(0), \quad \forall t \in [0, t_0],$$

La fonction φ étant dérivable, on obtient

$$\varphi'(t_0) = \nabla f(x_0)^\top (\tilde{x} - \hat{x}) = 0, \quad (2.49)$$

avec

$$x_0 = \hat{x} + t_0(\tilde{x} - \hat{x}).$$

Cependant, x_0 n'est pas un minimum local. En effet, il existe une suite (t_n) convergeant vers t_0 telle que $\varphi(t_n) < \varphi(0) = \varphi(t_0)$. Ainsi, la suite (x_n) telle que $x_n = \hat{x} + t_n(\tilde{x} - \hat{x})$ converge vers x_0 et vérifie $f(x_n) < f(x_0)$. Donc $\nabla f(x_0) \neq 0$.

Comme $f(\tilde{x}) < f(x_0)$ et $\nabla f(x_0) \neq 0$, le Théorème 2.5 implique

$$\nabla f(x_0)^\top (\tilde{x} - x_0) < 0,$$

ce qui contredit (2.49).

Ainsi, tout point critique de f doit être un minimum global. ■

Théorème 2.10

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et quasi-convexe. Alors, f est pseudoconvexe sur S si et seulement si elle vérifie la propriété (\mathcal{L}) .

Démonstration. Si f est pseudoconvexe, alors tout point critique est un minimum global.

Réciproquement, d'après le Lemme 2.1, on peut supposer que f satisfait la propriété (\mathcal{G}) .

Supposons, par l'absurde, que f n'est pas pseudoconvexe sur S . Comme f est quasi-convexe, il existe deux points $x^1, x^2 \in S$ tels que

$$f(x^1) < f(x^2) \quad \text{et} \quad \langle \nabla f(x^2), x^1 - x^2 \rangle = 0. \quad (2.50)$$

Puisque x^2 n'est pas un minimum global, on doit avoir $\nabla f(x^2) \neq 0$. Par ailleurs, la continuité de f garantit l'existence d'un réel $\bar{t} > 0$ tel que

$$f(x^1 + \bar{t}\nabla f(x^2)) < f(x^2).$$

En utilisant à nouveau la quasi-convexité de f , on obtient

$$\langle \nabla f(x^2), x^1 + \bar{t}\nabla f(x^2) - x^2 \rangle \leq 0.$$

À l'aide de (2.50), cette inégalité équivaut à

$$\bar{t}\langle \nabla f(x^2), \nabla f(x^2) \rangle \leq 0.$$

On obtient alors une contradiction, puisque $\bar{t} > 0$ et $\nabla f(x^2) \neq 0$ impliquent

$$\bar{t}\langle \nabla f(x^2), \nabla f(x^2) \rangle > 0.$$

L'hypothèse selon laquelle f n'est pas pseudoconvexe est donc im-

possible. ■

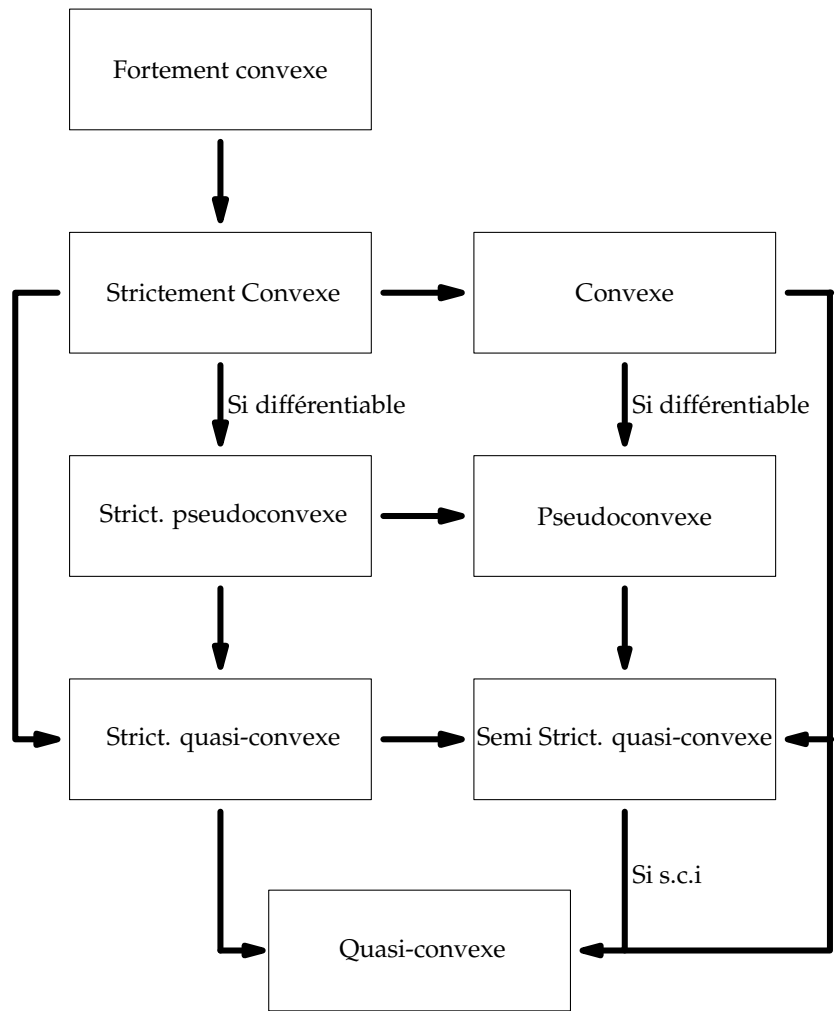


FIGURE 2.25 – Relations entre les différents types de convexités.

2.3 Convexité en un point

Un autre concept de convexité plus faible que celui évoqué précédemment est celui de la "convexité" en un point. Souvent, l'hypothèse de convexité sur l'ensemble tout entier n'est pas nécessaire pour établir certains résultats, il suffit d'assumer une sorte de convexité locale.

On commence par donner la définition d'un ensemble étoilé en un point. Elle nous permet de relaxer l'hypothèse de convexité vu que tout ensemble convexe est étoilé en chacun de ses points.

Définition 2.6

Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^n et \bar{a} un élément de A . On dit que l'ensemble A est étoilé en \bar{a} si et seulement si le segment $[\bar{a}, x]$ est inclus dans A pour tout $x \in A$.

Définitions

Soit S un ensemble non vide de \mathbb{R}^n , $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et \bar{x} un élément de S tel que S est étoilé en \bar{x} .

Les définitions suivantes présentent une certaine relaxation de celles introduites dans ce chapitre.

- ▷ **Convexité en un point.** La fonction f est dite convexe en \bar{x} si

$$f(\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(x), \quad \forall x \in S, \forall \lambda \in]0, 1[.$$

- ▷ **Strict convexité en un point.** La fonction f est dite strictement convexe en \bar{x} si

$$f(\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x) < \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(x), \quad \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\}, \forall \lambda \in]0, 1[.$$

FIGURE 2.26 – L'ensemble des points où la fonction f est strictement convexe.

Exemple 2.7

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ (x - 1)^2 - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que cette fonction n'est pas convexe sur \mathbb{R} . Cependant,

- ▷ elle est strictement convexe en tout point $\bar{x} > 3$. En effet, pour les valeurs de $\bar{x} \geq 0$, on utilise la strict convexité de la fonction $x \mapsto (x - 1)^2 - 1$. Concernant les valeurs de $\bar{x} < 0$, on remarque que la corde reliant les points A et B se trouve strictement au dessus du graphe de la fonction f (voir FIGURE 2.26).
- ▷ cette fonction est convexe au points $\bar{x} = 3$ et $\bar{x} = 0$. Pour les valeurs de $\bar{x} \geq 0$, on utilise la strict convexité de la fonction $x \mapsto (x - 1)^2 - 1$. Concernant les valeurs de $\bar{x} < 0$, on remarque que la corde reliant les points A et B se trouve au dessus (pas strictement) du graphe de la fonction f (voir FIGURE 2.27).
- ▷ elle n'est pas convexe en tout point $\bar{x} < 3$ avec $\bar{x} \neq 0$. En effet, la FIGURE 2.28 nous montre que la corde reliant les

FIGURE 2.27 – La fonction f est convexe aux points 0 et 3.

points A et B ne se trouvent pas au-dessus du graphe de la fonction f . Donc, $]-\infty, 3[\setminus \{0\}$ représente l'ensemble des points où la fonction f n'est pas convexe.

- ▷ **Quasi-convexité en un point.** La fonction f est dite quasi-convexe en \bar{x} si

$$f(\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x) \leq \max\{f(\bar{x}), f(x)\}, \quad \forall x \in S, \forall \lambda \in]0, 1[.$$

- ▷ **Strict quasi-convexité en un point.** La fonction f est dite strictement quasi-convexe en \bar{x} si

$$f(\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x) < \max\{f(\bar{x}), f(x)\}, \quad \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\}, \forall \lambda \in]0, 1[.$$

- ▷ **Semi strict quasi-convexité en un point.** La fonction f est dite semi strictement quasi-convexe en \bar{x} si

$$f(\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x) < \max\{f(\bar{x}), f(x)\},$$

pour tout $\lambda \in]0, 1[$ et tout $x \in S$ tel que $f(x) \neq f(\bar{x})$.

FIGURE 2.28 – La fonction f n'est pas convexe sur $]-\infty, 3[\setminus \{0\}$.

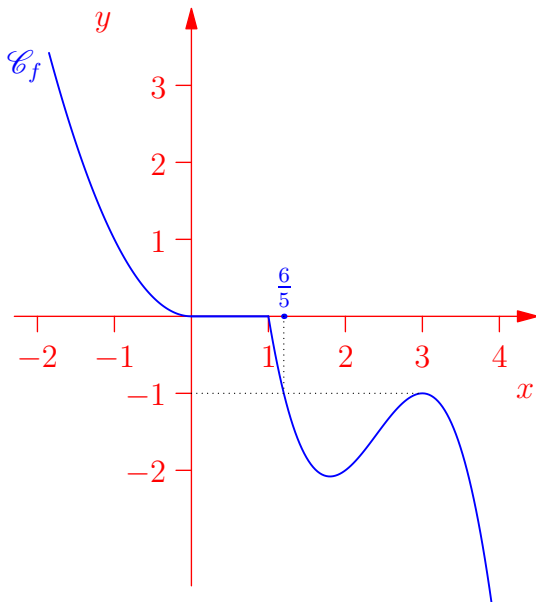


FIGURE 2.29 – Graphe de la fonction f de l'Exemple 2.8.

Exemple 2.8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{5}{4}x^3 + 9x^2 - \frac{81}{4}x + \frac{25}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme il est montré sur la FIGURE 2.29, cette fonction n'est pas quasi-convexe sur \mathbb{R} . En observant sa représentation graphique, on s'aperçoit qu'elle est strictement quasi-convexe en tout point $x < 0$. Elle est semi strictement quasi-convexe mais pas strictement quasi-convexe au point $x = 1$ et quasi-convexe en chaque point appartenant à $[0, \frac{6}{5}]$.

- ▷ **Pseudoconvexité en un point.** La fonction f est dite pseudoconvexe en \bar{x} si pour tout $x \in S$ on a

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}).$$

- ▷ **Strict pseudoconvexité en un point.** La fonction f est dite strictement pseudoconvexe en \bar{x} si pour tout $x \in S \setminus \{\bar{x}\}$ on a

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0 \Rightarrow f(x) > f(\bar{x}).$$

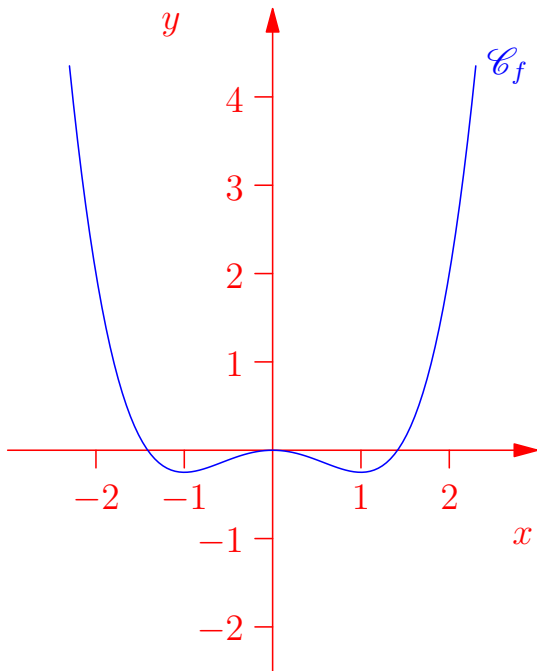


FIGURE 2.30 – Graphe de la fonction f de l'Exemple 2.9.

Exemple 2.9

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$. Cette fonction n'est pas pseudoconvexe sur \mathbb{R} (voir FIGURE 2.30). Cependant, elle est strictement pseudoconvexe en tout point $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Elle est pseudoconvexe aux points -1 et 1 mais elle ne l'est pas en tout point appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$.

Quelques propriétés liées à la convexité en un point

Certains résultats établis dans un cadre de convexité général restent valides en ne supposant la convexité de la fonction qu'en un point. En voici quelques uns (les démonstrations sont similaires à celles données précédemment, le lecteur peut s'amuser à les refaire à titre d'exercices). L'ensemble S est toujours supposé étoilé en \bar{x} .

▷ Si f est convexe et différentiable en \bar{x} alors on a

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle, \quad \text{pour tout } x \in S. \quad (2.51)$$

La réciproque est en général fautive (voit FIGURE 2.31).

Si f est strictement convexe en \bar{x} alors l'inégalité (2.51) est stricte pour tout $x \neq \bar{x}$.

- ▷ Si f est deux fois différentiable et convexe en \bar{x} alors la matrice hessienne $\nabla^2 f(\bar{x})$ est semi-définie positive.
- ▷ Si f est convexe en \bar{x} et si \bar{x} est un minimum local de f sur S alors \bar{x} est un minimum global de f sur S .
- ▷ Supposons que f est convexe et différentiable en \bar{x} . Alors \bar{x} est un minimum global de f sur S si et seulement si $\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0$ pour tout $x \in S$. En particulier, si $\bar{x} \in \text{int}(S)$ alors la dernière propriété est équivalente à $\nabla f(\bar{x}) = 0$.
- ▷ En supposant f convexe et différentiable en \bar{x} qui est un maximum local de f sur S alors on a $\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \leq 0$ pour tout $x \in S$.

En effet, il existe $r > 0$ tel que

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \text{pour tout } x \in B_r(\bar{x}) \cap S. \quad (2.52)$$

Soit $x \in S$, comme S est étoilé en \bar{x} on obtient que $\bar{x} + t(x - \bar{x}) \in B_r(\bar{x}) \cap S$ pour tous les $t > 0$ assez petits. La relation (2.52) nous permet alors d'écrire

$$0 \geq f(\bar{x}) - f(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ assez petit.} \quad (2.53)$$

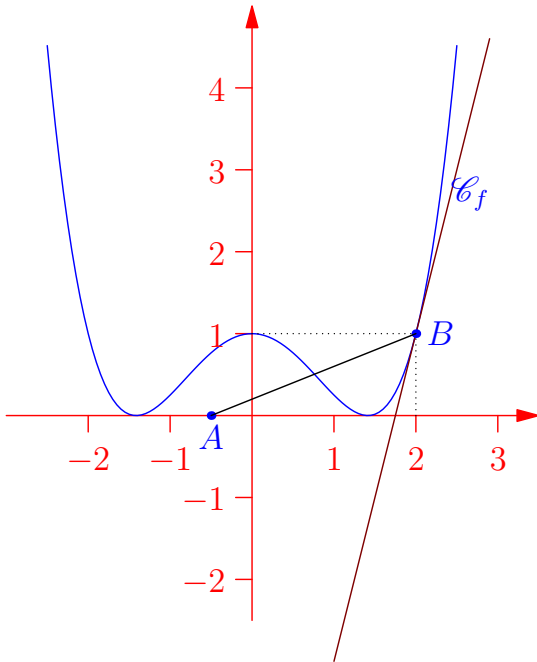


FIGURE 2.31 – Graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$. On remarque qu'au point $\bar{x} = 2$, la propriété (2.51) est vérifiée par contre la fonction n'est pas convexe en ce point.

En divisant (2.53) par t et en faisant tendre t vers 0 on obtient le résultat souhaité.

- ▷ Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasi-convexe et différentiable en \bar{x} . Si x est un point de S qui vérifie $f(x) \leq f(\bar{x})$ alors on obtient $\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \leq 0$.
- ▷ Supposons que \bar{x} est un minimum local de f sur S . Si f est semi-strictement quasi-convexe en \bar{x} alors \bar{x} est un minimum global de f sur S . Si f est strictement quasi-convexe en \bar{x} alors \bar{x} est l'unique minimum global de f sur S .
- ▷ Soit S un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et pseudoconvexe (resp. strictement pseudoconvexe) en \bar{x} . Si $\nabla f(\bar{x}) = 0$ alors \bar{x} est un minimum global de f sur S (resp. l'unique minimum global de f sur S).

Conditions d'optimalité

3.1 Conditions d'optimalité géométriques

On commence, dans un premier temps, par établir des conditions nécessaires d'optimalité de type géométrique qui vont nous permettre de dégager des conditions analytiques plus faciles à vérifier. Afin de pouvoir fournir ces conditions on est ramené à introduire des notions de cônes liées à l'ensemble définissant les contraintes S et la fonction objectif f .

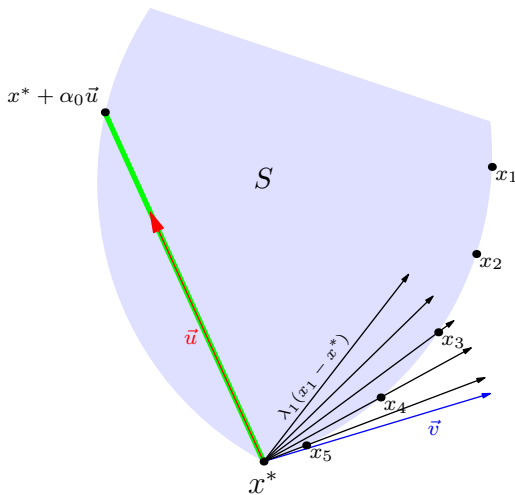


FIGURE 3.1 – Le vecteur \vec{v} est une direction tangentielle à l'ensemble S au point x^* . L'ensemble $\{x^* + \alpha\vec{u} : 0 \leq \alpha \leq \alpha_0\}$ (en vert) est inclus dans S , donc le vecteur \vec{u} est une direction admissible.

Définition 3.1

On dit qu'un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible à l'ensemble S en un point $x^* \in S$ s'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $x^* + \alpha d \in S$ pour tout $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$.

L'ensemble des directions admissibles à S en un point x^* est un cône (non convexe en général), on l'appelle *cône radial* ou cône des directions admissibles, il sera noté $R_S(x^*)$ par la suite.

Une direction tangentielle à un ensemble S en un point x^* est un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de S et une suite de nombres réels positifs (λ_n) vérifiant

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x_n - x^*).$$

L'ensemble de toutes les directions tangentielles à l'ensemble S en un point $x^* \in S$ est un cône (non convexe en général). On l'appelle le cône tangent (au sens de Bouligand) à S en x^* et on le note $T_S(x^*)$.

EXERCICE 3.1

Montrer qu'un vecteur $d \in E$ est une direction tangentielle à un

BOULIGAND GEORGES LOUIS (1889–1979) est un mathématicien français, il a étudié à l'école normale supérieure où il en sort agrégé en 1912. Après avoir enseigné au lycée de Rennes en classe de mathématiques spéciales, il a obtenu la chaire de mécanique rationnelle à la faculté des sciences de Poitiers puis la chaire de calcul différentiel et intégral. Il est nommé à la sorbonne en 1938 où il a obtenu la chaire d'application de l'analyse à la géométrie en 1948 qu'il a gardé jusqu'à sa retraite en 1961. Ses travaux ont porté sur l'analyse, la géométrie analytique et différentielle, la théorie de la relativité, les fractals, la topologie et la physique mathématique. On lui doit aussi un nombre important de publications pédagogiques concernant l'enseignement des mathématiques ainsi que des réflexions sur l'évolution de la recherche scientifique.

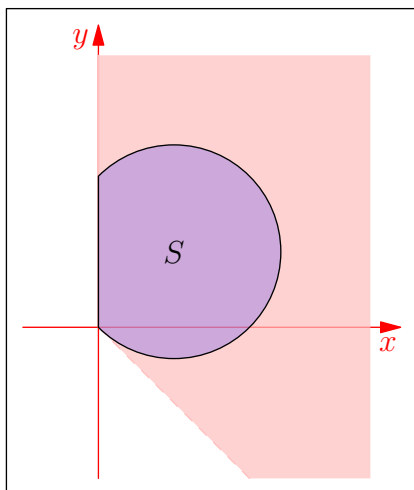


FIGURE 3.2 – Le cône radial de l'ensemble $S = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, x \geq 0\}$ au point $(0, 0)$.

ensemble S en un point x^* si et seulement s'il existe une suite (t_n) de nombres réels positifs convergeant vers 0 et une suite de vecteurs (d_n) convergeant vers d tels que $x^* + t_n d_n \in S$ pour tout n .

Remarque 3.1

- Le cône radial n'est pas en général fermé (voir Figure 3.2).
- La suite (λ_n) qui intervient dans la définition de la direction tangentielle tend vers l'infini pour les directions non nulles.
- Toute direction admissible est tangentielle.
- Le cône radial, et par suite le cône tangent, coïncide avec \mathbb{R}^n pour les points x^* qui sont dans l'intérieur de S .

Exemple 3.1

1. Soit S la partie de \mathbb{R}^2 définie par

$$S = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, x \geq 0\},$$

et $x^* = (0, 0)$ alors le cône radial à S au point x^* est donné par (voir Figure 3.2)

$$R_S(x^*) = \{(d_1, d_2) : d_1 \geq 0, d_2 > -d_1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Le cône tangent à S au point x^* correspond à la fermeture du cône radial, c'est à dire

$$T_S(x^*) = \{(d_1, d_2) : d_1 \geq 0, d_2 \geq -d_1\}.$$

2. Considérons l'ensemble

$$S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}.$$

Les cônes radial et tangent à S au point $(0, 0)$ coïncident avec l'ensemble en question (voir Figure 3.3).

3. On considère S l'ensemble donné par (voir Figure 3.16)

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}.$$

Le cône radial à S au point $(0, 0)$ est réduit à $\{0\}$, par

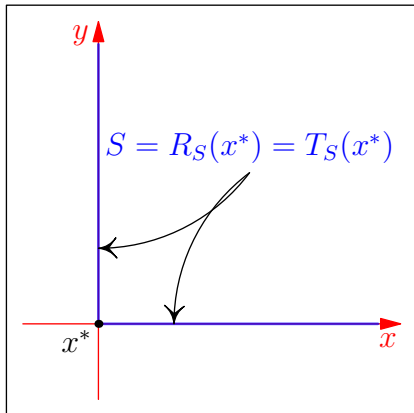


FIGURE 3.3 – L'ensemble (en bleu) $S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}$. Les cônes radial et tangent au point $x^* = (0, 0)$ sont identiques.

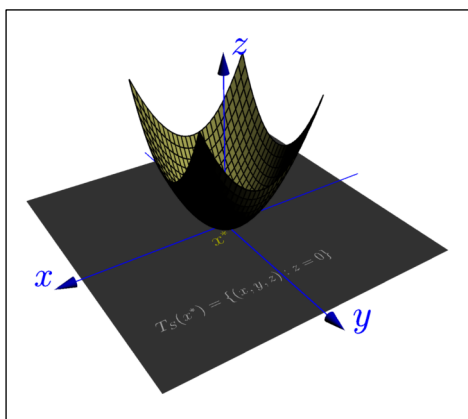


FIGURE 3.4 – L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ ainsi que son cône tangent à l'origine. On remarque que, dans ce cas, le cône radial est réduit au singleton $\{(0, 0)\}$ qui est strictement inclus dans le cône tangent.

contre le cône tangent est la partie positive de l'axe des abscisses.

4. Prenons un exemple dans \mathbb{R}^3 , Soit S la paraboléide définie par (voir Figure 3.4)

$$S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\}.$$

Au point $x^* = (0, 0, 0)$, le cône tangent à S correspond au plan tangent à la surface en ce point. Le cône radial, quant à lui, est réduit à $\{0\}$.

Contrairement au cône radial, le cône tangent est un ensemble fermé pour tout ensemble S et pour tout point $x^* \in S$.

Proposition 3.1

Soit S une partie non vide de \mathbb{R}^n et $x^* \in S$ alors le cône tangent à S en x^* est un ensemble fermé.

Démonstration. Soit $(d_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $T_S(x^*)$ convergant vers d et montrons que $d \in T_S(x^*)$. En effet, il existe, pour chaque $n \geq 1$, une suite $(x_{n,k})_{k \geq 1}$ d'éléments de S convergant vers x^* et une suite $(\lambda_{n,k})_{k \geq 1}$ de nombres réels positifs tels que

$$d_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n,k}(x_{n,k} - x^*). \quad (3.1)$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq k_\epsilon$ on a

$$\|\lambda_{n,k}(x_{n,k} - x^*) - d_n\| < \epsilon \quad \text{et} \quad \|x_{n,k} - x^*\| < \epsilon. \quad (3.2)$$

En prenant $\epsilon = 1/n$, on peut choisir k_n une suite strictement croissante telle que la relation (3.2) soit vraie pour $k = k_n$. En posant $y_n = x_{n,k_n}$ et $\lambda_n = \lambda_{n,k_n}$ on obtient alors

$$\|\lambda_n(y_n - x^*) - d_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|y_n - x^*\| < \frac{1}{n},$$

ce qui entraîne, d'une part la convergence de la suite (y_n) qui appartient à S vers x^* et d'autre part

$$\|\lambda_n(y_n - x^*) - d\| \leq \|\lambda_n(y_n - x^*) - d_n\| + \|d_n - d\| \leq \frac{1}{n} + \|d_n - d\|. \quad (3.3)$$

Un passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans l'inégalité (3.3) achève la démonstration. ■

1. L'entier k_ϵ dépend aussi de n .

Comme il a été déjà mentionné, les cônes radial et tangent ne sont pas en général convexes mais ils le sont lorsque l'ensemble S est convexe.

EXERCICE 3.2

Soit S un ensemble convexe d'un espace euclidien E et $x^* \in S$.
Montrer qu'on a

1. $R_S(x^*) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(S - x^*)$.
2. $T_S(x^*) = \mathbf{cl}(R_S(x^*))$.
3. $R_S(x^*)$ et $T_S(x^*)$ sont convexes.
4. $\mathbf{aff}(T_S(x^*)) = \mathbf{aff}(R_S(x^*)) = \mathbf{aff}(S) - x^*$.

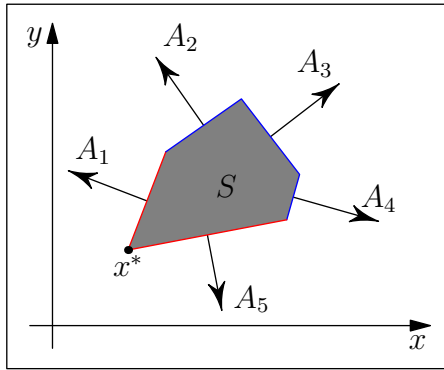


FIGURE 3.5 – S est un polyèdre, les contraintes saturées en x^* (en rouge) et les contraintes non saturées (en bleu).

En général, il est difficile de déterminer les cônes radial et tangent d'un ensemble quelconque. Cependant, on peut en donner une caractérisation pour certains ensembles décrits par des contraintes d'inégalité et d'égalité. La proposition qui suit donne une caractérisation des cônes radial et tangent d'un polyèdre convexe, c'est à dire lorsque les contraintes définissant l'ensemble sont linéaires. On verra plus tard le cas non linéaire.

Proposition 3.2

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un polyèdre convexe de \mathbb{R}^n où A est une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Pour tout $x \in S$, on note $I(x)$ l'ensemble des indices des contraintes saturées en x , c'est à dire

$$I(x) = \{1 \leq i \leq m : A_i x = b_i\},$$

où A_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

On a alors

$$T_S(x^*) = R_S(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : A_i d \leq 0, i \in I(x^*)\}.$$

Démonstration. Soit $G = \{d \in \mathbb{R}^n : A_i d \leq 0, i \in I(x^*)\}$, comme $R_S(x^*) \subset T_S(x^*)$ il suffit de montrer que $G \subset R_S(x^*)$ et que $T_S(x^*) \subset G$. Soit $d \in G$, pour les contraintes saturées ($i \in I(x^*)$) on a

$$A_i(x^* + \alpha d) = A_i x^* + \alpha A_i d = b_i + \alpha A_i d \leq b_i, \quad \text{pour tout } \alpha \geq 0.$$

Pour $i \notin I(x^*)$, c'est à dire $A_i x^* < b_i$ on peut choisir

$$\alpha_0 = \min \left\{ \frac{b_i - A_i x^*}{A_i d} : i \in I^* \right\}$$

où $I^* = \{i \notin I(x^*) : A_i d > 0\}$. Le réel α_0 est strictement positif si

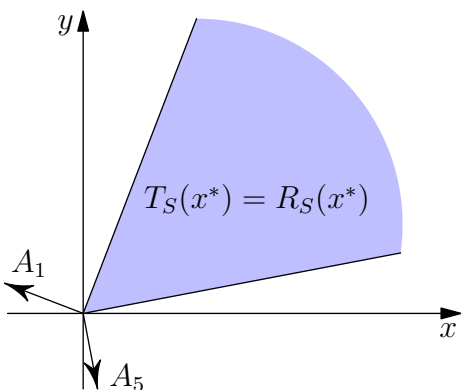


FIGURE 3.6 – Les cônes radial et tangent du polyèdre de la figure 3.5. On remarque que les contraintes non saturées ne jouent aucun rôle dans le calcul du cône tangent.

$I^* \neq \emptyset$ et il est égal à $+\infty$ sinon. On peut vérifier facilement qu'on a

$$A(x^* + \alpha d) \leq b, \quad \text{pour tout } 0 \leq \alpha \leq \alpha_0.$$

Il s'en suit que $d \in R_S(x^*)$.

Soit maintenant $d \in T_S(x^*)$, il existe une suite (x_n) d'éléments de S convergeant vers x^* et une suite de nombres réels positifs (λ_n) tels que $d = \lim \lambda_n(x_n - x^*)$. Comme $x_n \in S$ on a alors $Ax_n \leq b$ et par suite on obtient

$$A_i(\lambda_n(x_n - x^*)) = \lambda_n(A_i x_n - A_i x^*) = \lambda_n(A_i x_n - b_i) \leq 0, \quad \forall i \in I(x^*).$$

Un passage à la limite dans l'inégalité précédente donne

$$A_i d \leq 0, \quad \text{pour tout } i \in I(x^*),$$

et par suite $d \in G$. ■

Un cône associé à la fonction objectif f est le cône des directions de descente. Un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est dit une direction de descente de la fonction f en un point x^* s'il existe un nombre réel $t_0 > 0$ tel que

$$f(x^* + t d) < f(x^*) \quad \text{pour tout } 0 < t < t_0 \text{ (voir FIGURE 3.8)}.$$

L'ensemble de toutes les directions de descente de la fonction f en x^* est un cône (s'il est non vide), on le notera, par la suite, $F(x^*)$. Ces vecteurs jouent un rôle important en théorie de l'optimisation car ils nous permettent de faire décroître la fonction objectif en se déplaçant le long.

Dans le cas différentiable, on considère l'ensemble des vecteurs qui font un angle obtus strict avec le gradient de la fonction en un point x^* . Cet ensemble est un cône (ne contenant pas l'origine) qu'on note $\overset{\circ}{F}(x^*)$, il est défini par

$$\overset{\circ}{F}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x^*), d \rangle < 0\}.$$

FIGURE 3.7 – Le vecteur $d = (0, -3)$ est une direction de descente de la fonction $f(x, y) = -0.2x^2(y - 2) + 0.3y^2 + 2$ au point $x^* = (0, 2)$.

FIGURE 3.8 – Graphe de la fonction $f(x, y) = \sin(x) \cos(y) + 1$. Le vecteur $d = (-1, \frac{1}{2})$ est une direction de descente de f en $x^* = (1.5, 0)$. En se déplaçant le long de cette direction, on remarque que les points $x_t = x^* + t d$ vérifient $f(x_t) < f(x^*)$ pour tout $0 < t < t_0$ où t_0 est un nombre réel strictement positif.

Remarque 3.2

Tout vecteur d appartenant à $\overset{\circ}{F}(x^*)$ est une direction de descente de la fonction f en x^* (la réciproque est en général fautive comme montré sur la figure 3.9). En effet, on a

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \alpha \langle \nabla f(x^*), d \rangle + \alpha \|d\| \varepsilon(\alpha), \quad (3.4)$$

avec $\varepsilon(\alpha) \rightarrow 0$ quand $\alpha \downarrow 0$. On déduit de la relation (3.4)

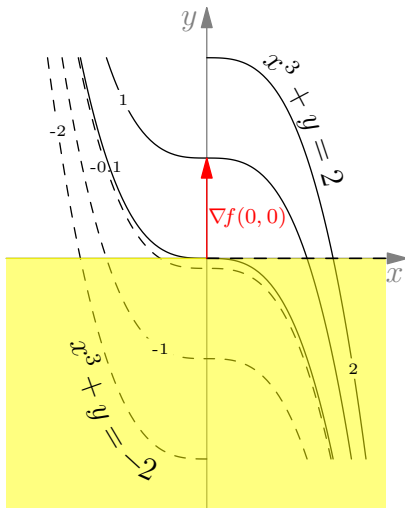


FIGURE 3.9 – Les courbes de niveaux de la fonction $f(x, y) = x^3 + y$. Le cône des directions de descente (en jaune) de f au point $(0, 0)$ contient strictement le cône $\overset{\circ}{F}(0, 0)$.

l'existence d'un $\alpha_0 > 0$ tel que $f(x^* + \alpha d) < f(x^*)$ pour tout $0 < \alpha < \alpha_0$ (pourquoi?).

Dans le cas où la fonction f est différentiable, il est facile de vérifier les inclusions suivantes

$$\overset{\circ}{F}(x^*) \subseteq F(x^*) \subseteq \bar{F}(x^*), \quad (3.5)$$

où $\bar{F}(x^*) := \{d \neq 0 : \langle \nabla f(x^*), d \rangle \leq 0\}$.

En observant la FIGURE 3.9, on s'aperçoit que, pour $x^* = (0, 0)$, on a

$$\overset{\circ}{F}(x^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\},$$

$$F(x^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \cup \{(x, 0) : x < 0\},$$

$$\bar{F}(x^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}.$$

Pour cet exemple, on remarque que les inclusions dans (3.55) sont strictes.

EXERCICE 3.3

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point $x^* \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

1. si f est pseudoconvexe en x^* alors $\overset{\circ}{F}(x^*) = F(x^*)$.
2. si f est strictement pseudoconcave en x^* alors $F(x^*) = \bar{F}(x^*)$.

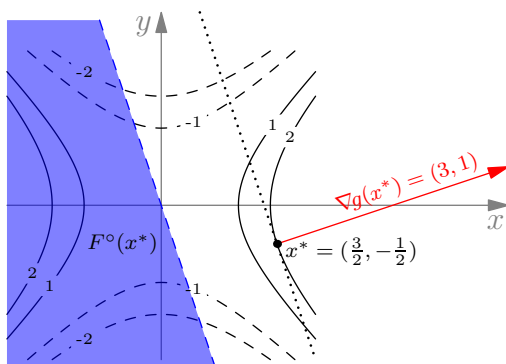


FIGURE 3.10 – Les courbes de niveaux de la fonction $g(x, y) = x^2 - y^2$. Le cône $\overset{\circ}{F}(x^*)$ (indiqué en bleu) des vecteurs qui font un angle obtus strict avec le gradient de la fonction g au point $x^* = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

Exemple 3.2

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + y$. L'ensemble des directions de descentes de la fonction f au points $(0, 0)$ est le cône décrit par (voir Figure 3.9)

$$\{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2 \leq 0\} \setminus \{(d_1, 0) : d_1 \geq 0\}.$$

Le cône $\overset{\circ}{F}(0, 0) = \{(d_1, d_2) : d_2 < 0\}$.

2. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Au point $x^* = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ l'ensemble des directions de descente est donné par (voir Figure 3.10)

$$\{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2 \leq -3d_1\}.$$

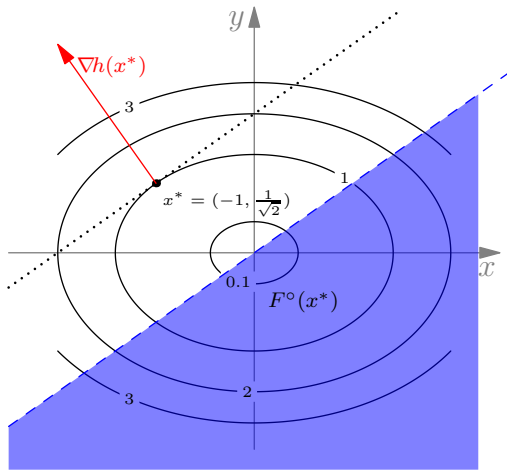


FIGURE 3.11 – Les courbes de niveaux de la fonction $h(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$. Le cône $\mathring{F}(x^*)$ (indiqué en bleu) coïncide avec le cône des directions de descente de la fonction h au point $x^* = (-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

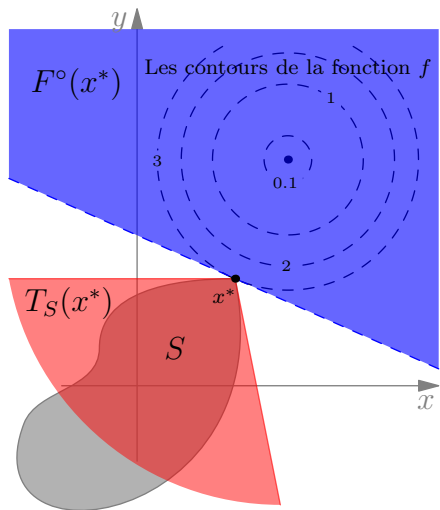


FIGURE 3.12 – Illustration de la Proposition 3.3. Le point x^* est un minimum (ici global) de f sur S . On constate que les cônes $T_S(x^*)$ et $\mathring{F}(x^*)$ (dessinés au point x^* pour plus de clarté) ne s'intersectent pas.

L'ensemble $\mathring{F}(x^*)$ est égal à

$$\begin{aligned} \mathring{F}(x^*) &= \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : \langle \nabla f(x^*), (d_1, d_2) \rangle < 0\} \\ &= \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : \langle (3, 1), (d_1, d_2) \rangle < 0\} \\ &= \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : 3d_1 + d_2 < 0\} \\ &= \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2 < -3d_1\}. \end{aligned}$$

On s'aperçoit aussi que, dans ce cas, le cône $\mathring{F}(x^*)$ est inclus strictement dans celui des directions de descente de f en x^* .

- Comme dernier exemple, on considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ dont le graphe est une ellipsoïde. Dans ce cas, le cône $\mathring{F}(x^*)$ et le cône des directions de descente sont les mêmes pour $x^* = (-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (voir Figure 3.11).

En observant les figures 3.9, 3.10 et 3.11 on remarque que le cône $\mathring{F}(x^*)$ coïncide avec l'intérieur du cône des directions de descente de la fonction en question au point x^* . Qu'est ce que vous en pensez?

Maintenant, on est en mesure de donner des conditions nécessaires d'optimalité. On remarque que si x^* est un minimum local de f sur S alors en ce point, il est impossible de trouver une direction qui est de descente et admissible en même temps. Ce qui revient à dire que $F(x^*) \cap R_S(x^*) = \emptyset$ ou $\mathring{F}(x^*) \cap R_S(x^*) = \emptyset$. La proposition suivante donne une condition plus fine que celle énoncée.

Proposition 3.3

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point $x^* \in S$. Si x^* est un minimum local de f sur S alors on a $\mathring{F}(x^*) \cap T_S(x^*) = \emptyset$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une boule $B(x^*, r)$ telle que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \text{pour tout } x \in B(x^*, r) \cap S. \quad (3.6)$$

Soit $d \in T_S(x^*)$, montrons que $d \notin \mathring{F}(x^*)$. En effet, il existe une suite (x_n) d'éléments de S convergeant vers x^* et une suite (λ_n) de nombres réels positifs tels que d est la limite de la suite $(\lambda_n(x_n - x^*))$. Le développement de Taylor de f au voisinage de x^* donne

$$f(x_n) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x_n - x^* \rangle + \|x_n - x^*\| \varepsilon_n, \quad (3.7)$$

avec (ε_n) une suite qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Comme les points

x_n appartiennent à $B(x^*, r) \cap S$ à partir d'un certain rang, les relations (3.6) et (3.7) nous donnent

$$\langle \nabla f(x^*), x_n - x^* \rangle + \|x_n - x^*\| \varepsilon_n \geq 0, \quad (3.8)$$

pour n assez large. En multipliant l'inégalité précédente par λ_n et en faisant tendre n vers ∞ on obtient

$$\langle \nabla f(x^*), d \rangle \geq 0.$$

Par suite le vecteur $d \notin \overset{\circ}{F}(x^*)$. ■

La condition nécessaire établie dans la Proposition 3.3 nous permet d'identifier les points qui ne sont pas candidats à être des solutions (voir FIGURE 3.13).

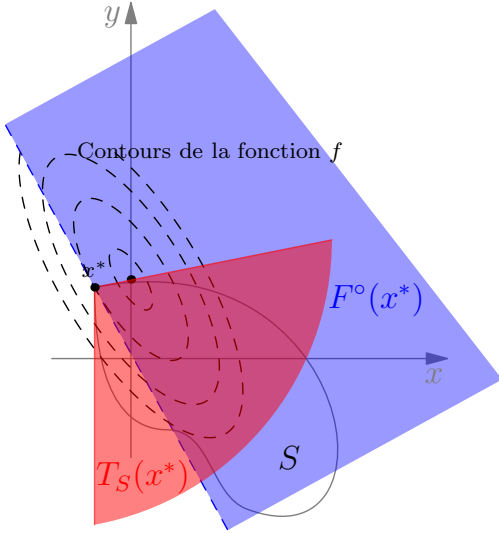


FIGURE 3.13 – Dans ce cas de figure, on remarque que le cône tangent à S en x^* intersecte le cône $\overset{\circ}{F}(x^*)$. Par conséquent, le point x^* ne peut être un minimum local de la fonction f sur S .

Remarque 3.3

La condition $T_S(x^*) \cap \overset{\circ}{F}(x^*) = \emptyset$ n'est pas en général suffisante pour l'optimalité locale du point x^* . Si on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + (y - 2)^4$ et l'ensemble S tel que

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Alors on remarque que le point $x^* = (0, 0)$ n'est pas un minimum local de f sur S bien que $T_S(x^*) \cap \overset{\circ}{F}(x^*) = \emptyset$ (voir Figure 3.14). En effet, Soit (x_n) la suite définie par $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, cette suite est réalisable ($x_n \in S$ pour tout $n \geq 1$), elle tend vers $x^* = (0, 0)$ et vérifie pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{1}{n^4} + \left(\frac{1}{n^2} - 2\right)^4 \\ &= \frac{-32n^6 + 25n^4 - 8n^2 + 1}{n^8} + 16 \\ &< 16 = f(x^*). \end{aligned}$$

Le résultat suivant nous donne une condition suffisante d'optimalité (type géométrique).

Proposition 3.4

Soit S une partie non vide de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point $\bar{x} \in S$. Supposons que

- ▷ $\overset{\circ}{F}(\bar{x}) \cap T_S(\bar{x}) = \emptyset$,
- ▷ f est pseudoconvexe en \bar{x} ,
- ▷ S est étoilé en \bar{x} .

Alors le point \bar{x} est un minimum global de f sur S .

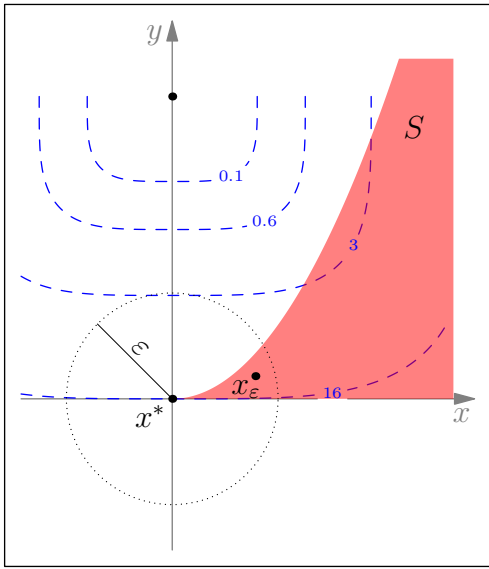


FIGURE 3.14 – La condition d’optimalité $T_S(x^*) \cap \mathring{F}(x^*) = \emptyset$ n’est pas en général suffisante. Le point $x^* = (0, 0)$ n’est pas un minimum local de la fonction $f(x, y) = x^4 + (y - 2)^4$ sur l’ensemble S (en rouge). En effet pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_\varepsilon \in B(x^*, \varepsilon) \cap S$ tel que $f(x_\varepsilon) < f(x^*)$.

Démonstration. Si ce n’est pas le cas, alors il existe $x^* \in S$ tel que $f(x^*) < f(\bar{x})$. Par la pseudoconvexité de f en \bar{x} on obtient $\langle \nabla f(\bar{x}), x^* - \bar{x} \rangle < 0$. Il est facile aussi de vérifier, en utilisant le fait que S est étoilé en \bar{x} , que $x^* - \bar{x} \in T_S(\bar{x})$. On obtient ainsi une contradiction $(x^* - \bar{x} \in \mathring{F}(\bar{x}) \cap T_S(\bar{x}))$ qui confirme le résultat. ■

Considérons maintenant le cas où l’ensemble S est défini par des contraintes d’inégalité, c’est à dire que S est donné par

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\},$$

où, pour tout $i \in [1, m]$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qu’on suppose différentiable. On définit, pour chaque $x \in S$, l’ensemble qu’on note $G(x)$ par

$$G(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0 \text{ pour tout } i \in I(x)\},$$

où $I(x) = \{i \in [1, m] : g_i(x) = 0\}$ est l’ensemble des indices des contraintes saturées en x .

Exemple 3.3

Soit $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et $g_2(x, y) = -x$. L’ensemble

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) \leq 0, g_2(x, y) \leq 0\}$$

est représenté dans la figure 3.15.

Le tableau suivant donne les ensembles d’indices des contraintes saturées en quelques points

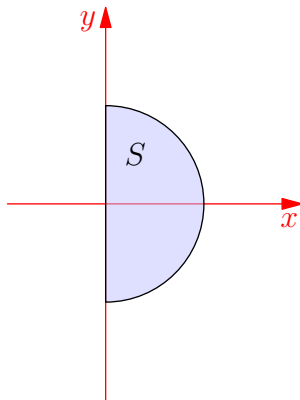


FIGURE 3.15 – L’ensemble S de l’Exemple 3.3.

$x = (0, 0)$	$x = (0, 1)$	$x = (1, 0)$	$x = (0, -1)$	$x = (\frac{1}{2}, 0)$
$I(x) = \{2\}$	$I(x) = \{1, 2\}$	$I(x) = \{1\}$	$I(x) = \{1, 2\}$	$I(x) = \emptyset$

- ▷ Pour $x = (0, 0)$ on a $G(x) = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 0\}$.
- ▷ Pour $x = (0, 1)$ on a $G(x) = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 0, d_2 \leq 0\}$.
- ▷ Pour $x = (1, 0)$ on a $G(x) = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1 \leq 0\}$.
- ▷ Pour $x = (0, -1)$ on a $G(x) = \{(d_1, d_2) : d_1 \geq 0, d_2 \geq 0\}$.
- ▷ Pour $x = (\frac{1}{2}, 0)$ on a $G(x) =$ je vous laisse deviner.

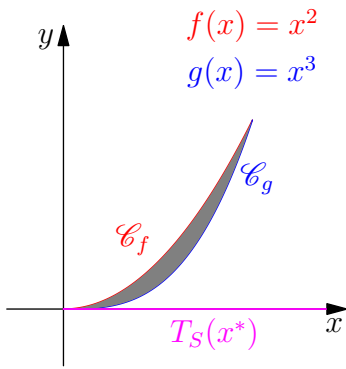


FIGURE 3.16 – L'ensemble S (en gris) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq x^2\}$. Pour $x^* = (0, 0)$, on a $\mathring{G}(x^*) = \emptyset$, $R_S(x^*) = \{(0, 0)\}$, $T_S(x^*) = \{(d_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 0\}$ et $G(x^*) = \mathbb{R} \times \{0\}$. On remarque que les inclusions de la Proposition 3.5 sont strictes.

En considérant l'ensemble S de l'exemple 3.3, on s'aperçoit que pour $x^* = (0, -1)$ on a $\mathring{G}(x^*) = R_S(x^*)$ et $T_S(x^*) = G(x^*)$.

De même, on définit l'ensemble qu'on note $\mathring{G}(x)$ par

$$\mathring{G}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_i(x), d \rangle < 0 \text{ pour tout } i \in I(x)\}.$$

On a les inclusions suivantes

Proposition 3.5

Pour tout $x \in S$, on a

$$\mathring{G}(x) \subset R_S(x) \subset T_S(x) \subset G(x).$$

Démonstration. Soit $d \in \mathring{G}(x)$, alors on a $\langle \nabla g_i(x), d \rangle < 0$ pour tout $i \in I(x)$. On obtient d'après la remarque 3.2 que pour tout $i \in I(x)$ il existe un $\alpha_i > 0$ tel que

$$g_i(x + \alpha d) < g_i(x) = 0, \text{ pour tout } 0 < \alpha < \alpha_i.$$

Pour $i \notin I(x)$ on a $g_i(x) < 0$ et la continuité de la fonction g_i entraîne l'existence d'un $\alpha'_i > 0$ tel que $g_i(x + \alpha d) < 0$ pour tout $0 < \alpha < \alpha'_i$. En posant

$$\tilde{\alpha} = \min \left\{ \min_{i \in I(x)} \alpha_i, \min_{i \notin I(x)} \alpha'_i \right\} > 0,$$

on obtient $x + \alpha d \in S$ pour tout $0 \leq \alpha < \tilde{\alpha}$, ce qui donne $d \in R_S(x)$.

Pour l'autre inclusion, soit $d \in T_S(x)$, il existe alors une suite (x_n) d'éléments de S convergeant vers x et une suite de nombres réels positifs (λ_n) tels que $\lambda_n(x_n - x) \rightarrow d$. Soit $i \in I(x)$, on a

$$g_i(x_n) = \overbrace{g_i(x)}^{=0} + \langle \nabla g_i(x), x_n - x \rangle + \|x_n - x\| \varepsilon_n, \quad (3.9)$$

où $\varepsilon_n \rightarrow 0$. En multipliant l'égalité (3.9) par λ_n et en remarquant que $\lambda_n g_i(x_n) \leq 0$ on obtient pour tout $n \geq 1$

$$\langle \nabla g_i(x), \lambda_n(x_n - x) \rangle + \|\lambda_n(x_n - x)\| \varepsilon_n \leq 0. \quad (3.10)$$

Un passage à la limite dans (3.10) donne

$$\langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0.$$

Par suite $d \in G(x)$. ■

Afin d'établir les conditions d'optimalité dans un cadre général (en présence des contraintes d'inégalité et d'égalité) on aura besoin du Lemme suivant.

Lemme 3.1

Soit S une partie de \mathbb{R}^n définie par

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\},$$

où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ($\ell \leq n$) est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Soit \bar{x} un point de S tel que $\nabla h(\bar{x})$ est de rang plein, c'est à dire les vecteurs lignes de la matrice $\nabla h(\bar{x})$ sont linéairement indépendants et \bar{d} un vecteur de \mathbb{R}^n tel que $\nabla h(\bar{x})\bar{d} = 0$ alors il existe $\epsilon > 0$ et une fonction $\theta :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable tels que $\theta(t) \in S$ pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$ et

$$\theta(0) = \bar{x} \tag{3.11}$$

$$\theta'(0) = \bar{d}. \tag{3.12}$$

Démonstration. Pour simplifier, notons $A = \nabla h(\bar{x})$. Les colonnes de la matrice $A^\top : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendantes, par suite le sous espace vectoriel $\text{im}(A^\top)$, engendré par les vecteurs lignes de A , est de dimension ℓ . Le noyau de la matrice A qui coïncide avec l'orthogonal de $\text{im}(A^\top)$ est de dimension $n - \ell$. Soit $\{v_1, \dots, v_{n-\ell}\}$ une base de $\ker A$ et posons $N \in \mathbb{R}^{n \times (n-\ell)}$ la matrice dont la i^{eme} colonne est le vecteur v_i .

La matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par

$$M = \begin{bmatrix} A \\ N^\top \end{bmatrix}$$

est inversible. En effet, soit $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $Md = 0$, on a alors $Ad = 0$ et $N^\top d = 0$, ce qui signifie que $d \in \ker A$ et $d \in (\ker A)^\perp$, donc $d = 0$, ce qui veut dire que M est injective donc bijective.

Considérons la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$F(t, x) = (h(x), N^\top(x - \bar{x} - t\bar{d})).$$

La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 , de plus $F(0, \bar{x}) = 0$ et $\nabla_x F(0, \bar{x}) = M$ est inversible. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\epsilon > 0$ et une fonction $\theta :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 tels que $\theta(0) = \bar{x}$ et

$$F(t, \theta(t)) = 0, \quad \text{pour tout } t \in]-\epsilon, \epsilon[\tag{3.13}$$

La relation (3.13) est équivalente à

$$h(\theta(t)) = 0, \quad \text{pour tout } t \in]-\epsilon, \epsilon[\tag{3.14}$$

$$N^\top(\theta(t) - \theta(0) - t\bar{d}) = 0 \quad \text{pour tout } t \in]-\epsilon, \epsilon[. \tag{3.15}$$

En dérivant par rapport à t dans l'équation (3.14) on obtient

$$\nabla h(\theta(t))\theta'(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in]-\epsilon, \epsilon[.$$

En particulier (pour $t = 0$) on obtient

$$A\theta'(0) = 0 = A\bar{d}. \quad (3.16)$$

D'autre part, en divisant l'égalité (3.15) par $t \neq 0$ et en faisant tendre t vers 0 on obtient

$$N^\top \theta'(0) = N^\top \bar{d}. \quad (3.17)$$

On a alors

$$M\theta'(0) = \begin{bmatrix} A \\ N^\top \end{bmatrix} \theta'(0) = \begin{bmatrix} A\theta'(0) \\ N^\top \theta'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\bar{d} \\ N^\top \bar{d} \end{bmatrix} = M\bar{d},$$

comme la matrice M est inversible on obtient $\theta'(0) = \bar{d}$. ■

Pour résumer, le Lemme 3.1 nous dit que si un point se trouve sur l'intersection finie de surfaces "lisses" et si un vecteur \bar{d} est orthogonal aux vecteurs normaux à ces surfaces en ce point alors il existe un chemin "lisse" qui passe par ce point en restant dans cette intersection de façon à ce que la tangente au chemin en ce point coïncide avec le vecteur \bar{d} (voir FIGURE 3.17).

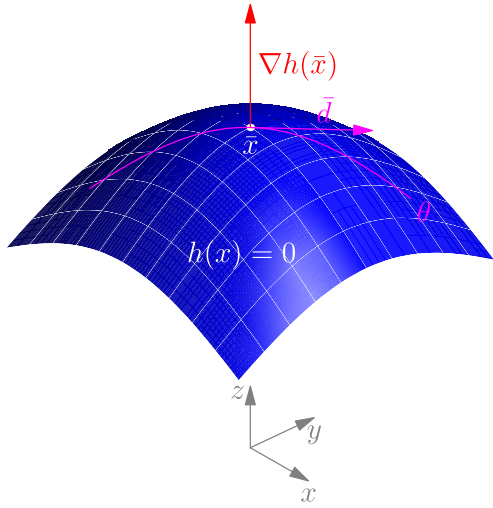


FIGURE 3.17 – Illustration graphique du Lemme 3.1.

Théorème 3.1

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble défini par $S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et x^* un point de S tel que la matrice $\nabla h(x^*)$ est de rang ℓ . On a alors

$$T_S(x^*) = H(x^*) = \ker \nabla h(x^*)^a.$$

a. Dans ce cas, le cône tangent coïncide avec l'espace tangent à la surface S au point x^* .

Démonstration. L'inclusion $T_S(x^*) \subset H(x^*)$ découle de la Proposition 3.5. Pour la réciproque, soit $d \in H(x^*)$. D'après le Lemme 3.1 il existe une application $\theta :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow S$ ($\epsilon > 0$) différentiable en 0 telle que $\theta(0) = x^*$ et $\theta'(0) = d$. En prenant une suite $t_k \downarrow 0$ et en posant $x_k = \theta(t_k)$ on a bien $x_k \in S$, $x_k \rightarrow x^* = \theta(0)$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x^*}{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\theta(t_k) - \theta(0)}{t_k} = \theta'(0) = d.$$

Ce qui donne $d \in T_S(x^*)$. ■

Exemple 3.4

1. Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = xy = 0\}$. L'ensemble S est la réunion des axes Ox et Oy , c'est un cône (non convexe). Pour $x^* = (0, 0)$ on a $T_S(x^*) = S$. Un simple calcul donne $H(x^*) = \mathbb{R}^2$. Le cône tangent à S en x^* est strictement inclus dans $H(x^*)$, l'égalité entre les deux ensembles n'a pas lieu (pourquoi?).
2. Considérons les fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(x, y) = 0, h_2(x, y) = 0\}$ où $h_1(x, y) = y - f(x)$ et $h_2(x, y) = y - g(x)$. L'ensemble S correspond à la partie négative de l'axe Ox (voir Figure 3.18). Au point $x^* = (0, 0)$, l'ensemble $H(x^*)$ est égal à l'axe Ox , il contient strictement le cône tangent $T_S(x^*)$ qui coïncide avec S . Dans ce cas aussi les deux ensembles ne sont pas égaux (pourquoi?).

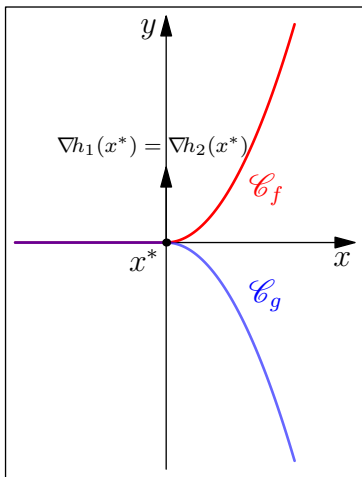


FIGURE 3.18 – L'ensemble S de l'exemple 3.4.

Le résultat suivant donne des conditions nécessaires d'optimalité dans un cadre géométrique en présence de contraintes d'égalité et d'inégalité.

Théorème 3.2

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble défini par

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\},$$

avec $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ($\ell \leq n$) des fonctions données.

Soit $x^* \in S$, supposons que

- ▷ la fonction g est différentiable en x^* ,
- ▷ la fonction h est continûment différentiable en x^* ,
- ▷ le rang de la matrice $\nabla h(x^*)$ est égal à ℓ .

alors on a l'inclusion suivante $\overset{\circ}{G}(x^*) \cap H(x^*) \subset T_S(x^*)$.

Démonstration. Soit d un vecteur appartenant à $\overset{\circ}{G}(x^*) \cap H(x^*)$. Il existe alors, d'après le Lemme 3.1, un chemin lisse $\theta :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S'$ où $S' = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ tel que $\theta(0) = x^*$ et $\theta'(0) = d$. Considérons une suite (t_k) de nombres réels strictement positifs convergeant vers

0 et posons $x_k = \theta(t_k)$. On s'aperçoit que la suite (x_k) converge vers x^* et la suite $((x_k - x^*)/t_k)$ converge vers le vecteur d . De plus les points x_k sont dans S à partir d'un certain rang. En effet, si $i \in I(x^*)$ alors on a

$$g_i(x_k) = \underbrace{g_i(x^*)}_{=0} + \langle \nabla g_i(x^*), x_k - x^* \rangle + \|x_k - x^*\| \varepsilon_k, \quad (3.18)$$

où (ε_k) est une suite de nombres réels tendant vers 0. Si $g_i(x_k) > 0$ pour une infinité de $k \in K$ alors on obtient de la relation (3.18)

$$\langle \nabla g_i(x^*), x_k - x^* \rangle + \|x_k - x^*\| \varepsilon_k > 0 \quad \text{pour tout } k \in K. \quad (3.19)$$

En divisant l'inégalité (3.19) par t_k et en faisant tendre k vers l'infini dans K on obtient $\langle \nabla g_i(x^*), d \rangle \geq 0$, ce qui est en contradiction avec $d \in \overset{\circ}{G}(x^*)$. D'où $g_i(x_k) \leq 0$ pour tout $k \geq k_0$ et pour tout $i \in I(x^*)$. Pour les indices i des contraintes non actives en x^* , la continuité de g_i nous permet de conclure que $g_i(x_k) \leq 0$ à partir d'un certain rang et par conséquent la suite (x_k) est réalisable à partir d'un certain rang.

On a trouvé une suite (x_k) d'éléments de S convergeant vers x^* et une suite $\lambda_k = \frac{1}{t_k} > 0$ tels que $d = \lim \lambda_k(x_k - x^*)$, donc $d \in T_S(x^*)$. ■

Corollaire 3.1

Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 3.2 on obtient que si x^* est un minimum local de f sur S alors on a

$$\overset{\circ}{F}(x^*) \cap \overset{\circ}{G}(x^*) \cap H(x^*) = \emptyset.$$

Démonstration. Comme le point x^* est un minimum local de f sur S on a $\overset{\circ}{F}(x^*) \cap T_S(x^*) = \emptyset$ (voir Proposition 3.3). Le résultat s'obtient par application du Théorème 3.2. ■

3.2 Conditions d'optimalité analytiques

Dans cette section, on va réécrire les conditions d'optimalité géométrique établies précédemment sous forme analytique. Cette écriture est plus facile à vérifier que celle géométrique.



Fritz John est un mathématicien allemand, né à Berlin le 14 juin 1910. Il a étudié les mathématiques de 1929 à 1933 à l'université de Göttingen sous la direction de quelques éminents mathématiciens comme Richard Courant. Après avoir obtenu son doctorat en 1934 avec une thèse intitulée *Détermination d'une fonction à partir de ses intégrales sur une certaine variété*, il a immigré aux USA en 1935 où il a été désigné professeur assistant à l'université de Kentucky. En 1946, il a rejoint l'université de New York où il est resté jusqu'à la fin de sa carrière.

Entre 1940 et 1950 il s'est consacré à l'étude de la transformée de Radon et surtout son application dans les domaines des équations aux dérivées partielles linéaires, la géométrie convexe et la théorie mathématiques du mouvement des eaux. A partir de 1950, il s'est intéressé aux problèmes d'équilibre en élasticité non linéaire. Il a aussi travaillé dans le domaine de l'analyse numérique et surtout sur les problèmes mal posés. Il a rédigé en collaboration avec Richard Courant deux volumes intitulés *"Introduction to Calculus and Analysis"* publiés en 1965.

Il a reçu plusieurs prix : le prix *Birkhoff Prize* en mathématiques appliquées en 1973 ainsi que le prix *Steele Prize* en 1982. Il est mort le 10 février 1994, âgé de 83 ans, à New York.

3.2.1 Conditions d'optimalité de Fritz John

Contraintes d'inégalité

Les conditions de Fritz John sont des égalités reliant le gradient de la fonction objectif avec celles des contraintes, ces conditions sont plus faciles à vérifier comparées aux conditions géométriques établies précédemment. Elles sont obtenues à partir des conditions géométriques grâce aux théorèmes de l'alternative.

Théorème 3.3 (Conditions nécessaires de Fritz John)

Soit x^* une solution locale du problème de minimiser une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur un ensemble S défini par

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\},$$

où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction. Si de plus les fonctions f et g sont différentiables en x^* alors il existe des scalaires $\lambda_0^*, \dots, \lambda_m^*$ positifs non tous nuls tels que

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0 \quad (3.20)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m. \quad (3.21)$$

Démonstration. Soit A la matrice dont la première ligne est $\nabla f(x^*)^t$ et les autres lignes sont les gradients des fonctions g_i en x^* pour $i \in I(x^*)$. On déduit des propositions 3.3 et 3.5, que l'ensemble $\mathring{F}(x^*) \cap \mathring{G}(x^*) = \emptyset$. Donc, le système $Ad < 0$ n'admet pas de solutions. D'après le théorème de Gordan (Théorème 1.11) il existe λ_0^* et $(\lambda_i^*)_{i \in I(x^*)}$ des scalaires positifs non tous nuls tels que

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0. \quad (3.22)$$

On obtient le résultat en prenant $\lambda_i^* = 0$ pour $i \notin I(x^*)$. ■

Les scalaires $\lambda_0^*, \dots, \lambda_m^*$ sont appelés les multiplicateurs de Lagrange associés au point x^* . Les conditions (3.21) sont dites «conditions de complémentarité». Tout point $x^* \in S$ vérifiant les conditions (3.20) et (3.21) sera appelé «point de Fritz John».

On remarque que la condition (3.21) donne $\lambda_i^* = 0$ pour tout $i \notin I(x^*)$, par suite la condition (3.20) devient

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0. \quad (3.23)$$

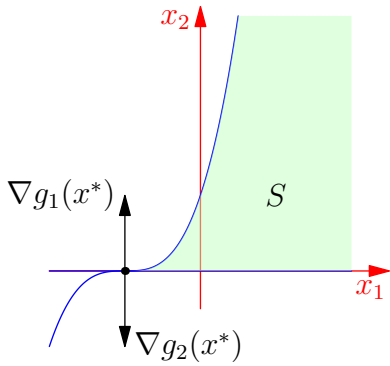


FIGURE 3.19 – L'ensemble S de l'exemple 3.5.

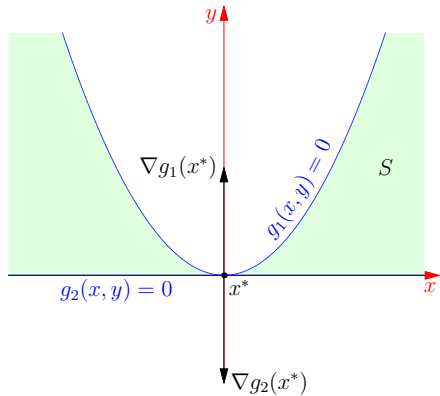


FIGURE 3.20 – Le point $x^* = (0, 0)$ est un point de Fritz John indépendamment de la fonction objectif considérée.

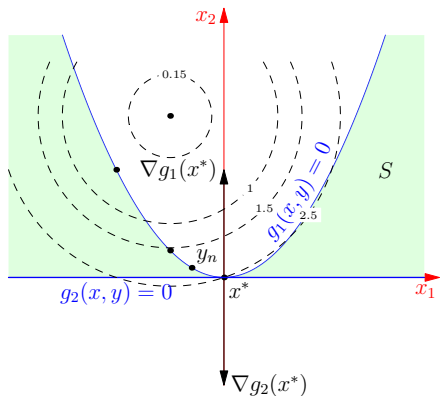


FIGURE 3.21 – Cas où $a < 0$ et $b > 0$: le point $(0, 0)$ n'est pas un minimum local.

On peut, donc, restreindre l'hypothèse de différentiabilité aux fonctions $\{g_i : i \in I(x^*)\}$.

Il est préférable d'utiliser la condition (3.23) pour savoir si un point donné vérifie les conditions de Fritz John. Par contre si on se propose de rechercher les points qui satisfont aux conditions de Fritz John alors il serait plus commode d'utiliser la relation (3.20) au lieu de l'égalité (3.23) parce qu'on ne connaît pas à priori le point x^* et donc on ne dispose pas de l'ensemble $I(x^*)$.

Exemple 3.5

1. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble défini par (voir Figure 3.19)

$$S = \{(x_1, x_2) : g_1(x_1, x_2) \leq 0, g_2(x_1, x_2) \leq 0\},$$

où $g_1(x_1, x_2) = x_2 - (x_1 + 1)^3$ et $g_2(x_1, x_2) = -x_2$.

Si on prend $f(x_1, x_2) = x_1$ alors $x^* = (-1, 0)$ est l'unique minimum global de f sur S . On a $I(x^*) = \{1, 2\}$ et les conditions de Fritz John sont données par

$$\lambda_0^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2^* \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ce qui donne $\lambda_0^* = 0$ et $\lambda_1^* = \lambda_2^*$. L'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associé au point x^* est le cône (sans l'origine) engendré par le vecteur $(0, 1, 1)$. Le lecteur peut vérifier que le point $x^* = (-1, 0)$ est le seul point de Fritz John pour ce problème.

On remarque dans cet exemple que le multiplicateur λ_0^* associé au gradient de la fonction objectif f doit être égal à zéro. Par suite la fonction f ne joue aucun rôle dans les conditions d'optimalité. De plus, vu que les vecteurs $\nabla g_1(x^*)$ et $\nabla g_2(x^*)$ sont opposés ($\nabla g_1(x^*) = -\nabla g_2(x^*)$), les conditions de Fritz John seront vérifiées en ce point quelque soit la fonction objectif.

Considérons un autre exemple où les conditions de Fritz John sont vérifiées en $(0, 0)$, soit $S \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble défini par (voir Figure 3.20)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) = y - x^2 \leq 0, g_2(x, y) = -y \leq 0\}.$$

Si on considère une fonction objectif f dont le graphe est une paraboloïde de centre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, c'est à dire $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2$ alors on s'aperçoit en observant les figures 3.21, 3.22, 3.23 et 3.24 que le

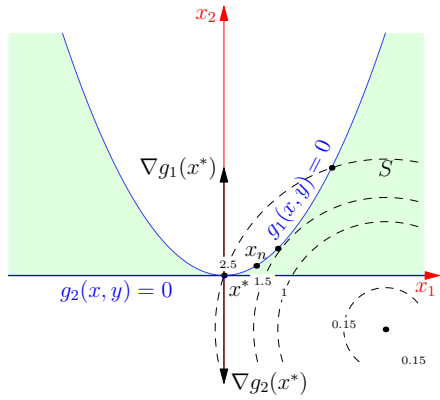


FIGURE 3.22 – Cas où $a > 0$ et $b < 0$: le point $(0,0)$ n'est pas un minimum local.

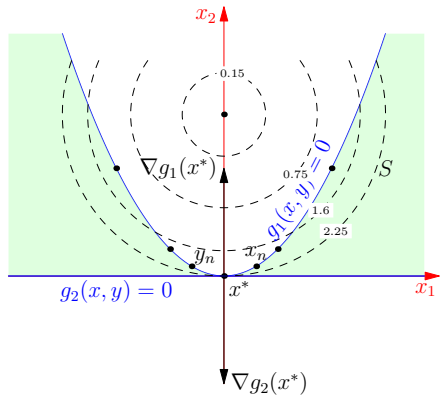


FIGURE 3.23 – Cas où $a < 0$ et $b > 0$: le point $(0,0)$ n'est pas un minimum local.

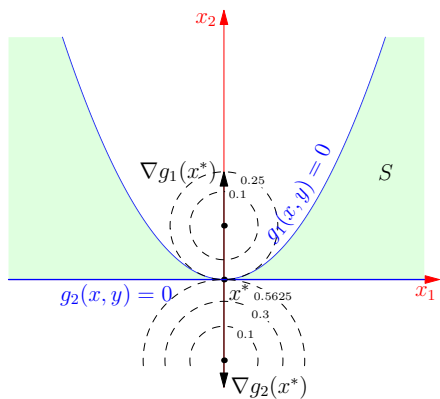


FIGURE 3.24 – Cas où $a = 0$ et $b \leq \frac{1}{2}$: le point $(0,0)$ est un minimum global.

point $x^* = (0,0)$ n'est minimum local que pour les points (a,b) qui se trouvent sur l'axe des ordonnées avec $b \leq \frac{1}{2}$. En effet, supposons $a \neq 0$ et considérons les deux suites $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ et $y_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$. On a $x_n, y_n \in S$ pour tout $n \geq 1$ et les deux suites convergent vers le point $x^* = (0,0)$, d'autre part on a

$$f(x^*) = a^2 + b^2, \quad (3.24)$$

$$f(x_n) = a^2 + b^2 - \frac{2an^3 + (2b-1)n^2 - 1}{n^4} \quad (3.25)$$

$$f(y_n) = a^2 + b^2 - \frac{-2an^3 + (2b-1)n^2 - 1}{n^4}. \quad (3.26)$$

En remarquant que si $a > 0$ alors on a $2an^3 + (2b-1)n^2 - 1 > 0$ pour tout $n \geq [\frac{1-b}{a}] + 1$ (où $[x]$ représente la partie entière du réel x) et par suite $f(x_n) < f(x^*)$ à partir d'un certain rang (voir Figure 3.22), ce qui veut dire que x^* n'est pas un minimum local de f sur S . Pour le cas $a < 0$, en considérant la suite (y_n) , on constate de même que $-2an^3 + (2b-1)n^2 - 1 > 0$ à partir d'un certain rang, ce qui donne $f(y_n) < f(x^*)$ (voir Figure 3.21) et par suite le point x^* ne présente pas un minimum local de f sur S . Si $a = 0$ alors les équations (3.24), (3.25) et (3.26) s'écrivent

$$f(x^*) = b^2,$$

$$f(x_n) = b^2 - \frac{(2b-1)n^2 - 1}{n^4}$$

$$f(y_n) = b^2 - \frac{(2b-1)n^2 - 1}{n^4}.$$

Donc, si $2b - 1 > 0$ alors $f(x_n) = f(y_n) < f(x^*)$ pour tout $n \geq n_0$ (voir Figure 3.23) et le point x^* n'est pas un minimum local de f sur S .

Supposons que $b \leq \frac{1}{2}$, on obtient alors pour $x \in S$

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - b)^2,$$

$$= x_1^2 + x_2^2 - 2bx_2 + b^2,$$

$$\geq x_2 - 2bx_2 + b^2, \quad \text{car } x_2 \leq x_1^2$$

$$= (1 - 2b)x_2 + b^2,$$

$$\geq b^2 = f(x^*). \quad \text{car } 1 - 2b \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0$$

Dans ce cas, le point x^* présente un minimum global de f sur l'ensemble S .



ALBERT WILLIAM TUCKER est un mathématicien canadien né le 28 novembre 1905 à Oshawa (Ontario). Il a obtenu son Ph.D en 1932 à l'université de Princeton sous la direction de Solomon Lefschetz avec un mémoire intitulé "An abstract approach to manifolds". Il a travaillé au département de mathématiques de l'université de Princeton depuis 1933 jusqu'à 1974 où il était le président pendant vingt ans. Il encadra plusieurs thèses parmi lesquelles on trouve celle de Michel Balinski, David Gale, John Forbes Nash. Dans des années 1960, il s'est investi dans l'enseignement des mathématiques. Au début des années 80, Tucker recruta le professeur d'histoire Charles Gillispie, pour l'aider à préserver l'histoire de la communauté des scientifiques de Princeton des années 1930. Dedans y sont décrites des personnes telles que Einstein, von Neumann, Gödel, le pionnier de l'informatique Herman Goldstine et les prix Nobel John Bardeen et Eugene Wigner. il est décédé le 25 janvier 1995 à Hightstown (New Jersey) à l'âge de 89 ans.

Pour résumer, si on considère le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser}_{(x,y)} \frac{1}{2}((x-a)^2 + (y-b)^2) \\ \text{s.c.} \\ y - x^2 \leq 0, \\ -y \leq 0, \end{cases}$$

Alors le point $x^* = (0,0)$ est un point de Fritz John quelque soit le choix du point (a,b) mais il n'est minimum local que pour les points $(0,b)$ avec $b \leq \frac{1}{2}$. En plus en écrivant ces conditions en $(0,0)$ on obtient

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le multiplicateur λ_0 correspondant à la fonction objectif sera nul pour toutes les valeurs non nulles du paramètre a . Pour assurer une contribution de la fonction objectif dans les conditions d'optimalité il faut que λ_0 soit strictement positif, ce qui nous amène aux conditions de KKT qu'on verra plus tard.

Cas général

Considérons maintenant le programme mathématique plus général suivant

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser}_x f(x) \\ \text{s.c.} \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires d'optimalité de type FJ. On note qu'il n'est pas possible d'obtenir ces conditions en utilisant le Théorème 3.3 en écrivant chaque contrainte d'égalité sous forme de deux contraintes d'inégalité, c'est à dire remplacer la contrainte $h(x) = 0$ par les deux contraintes $h(x) \leq 0$ et $-h(x) \leq 0$.

Théorème 3.4

soit $x^* \in S$ où

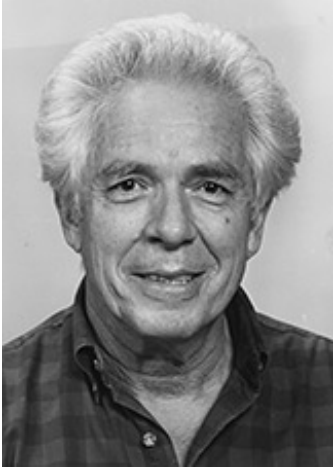
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}.$$

Supposons que les fonctions f et g sont différentiables en x^* , la fonction h est continûment différentiable en x^* et que le rang de la matrice $\nabla h(x^*)$ est égal à ℓ . Si x^* est un minimum local de f sur S alors il existe des scalaires positifs u_0, \dots, u_m non tous nuls

et des scalaires v_1, \dots, v_ℓ tels que

$$u_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} v_i \nabla h_i(x^*) = 0$$

$$u_i g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$



HAROLD WILLIAM KUHN est un mathématicien américain, né le 29 juillet 1925 à Santa Monica (Californie). En 1950, il a obtenu son Ph.D à l'université de Princeton où il a passé 37 ans comme enseignant-chercheur.

Il a exploré plusieurs domaines des mathématiques dont la théorie des jeux, l'optimisation linéaire et non linéaire représentent les axes les plus importants. Il a obtenu le prix John von Neumann avec Tucker en 1980. Il est aussi connu pour le développement de l'algorithme hongrois pour les problèmes d'affectation.

Il était aussi un enseignant influent, ses cours portant sur la théorie des jeux, management économique et programmation non linéaire étaient très appréciés par ses étudiants.

il est décédé le 2 juillet 2014 à New York à l'âge de 88 ans.

Démonstration. Soit A la matrice de taille $(|I(x^*)| + 1) \times n$ dont les vecteurs lignes sont $\nabla f(x^*)^t$ et $\nabla g_i(x^*)^t$ pour $i \in I(x^*)$ et $B = \nabla h(x^*)$. D'après le Théorème 3.2 le système $Ax < 0$ et $Bx = 0$ n'admet pas de solutions donc le système $A^t u + B^t v = 0$ avec $u \neq 0$ et $u \geq 0$ admet au moins une solution (voir Exercice ??). D'où le résultat. ■

3.2.2 Conditions d'optimalité de KKT²

Comme il a été mentionné avant, le multiplicateur associé à la fonction objectif dans les conditions d'optimalité de Fritz John peut être nul, ce qui signifie que la fonction objectif ne joue aucun rôle dans ces conditions. La question qu'on se pose alors est : Quelles sont les conditions qui assurent la non nullité de ce multiplicateur ?

Ces conditions sont appelées conditions de qualification des contraintes. On commence par le cas où le problème ne contient que des contraintes d'inégalité.

Cas des contraintes d'inégalité

Dans ce qui suit on considère le problème, qu'on note (P) , de minimiser une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ défini par des contraintes d'inégalité, c'est à dire $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ où les fonctions f et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont supposées différentiables sur S (ou un ouvert contenant S).

Définition 3.2

Soit S l'ensemble de \mathbb{R}^n défini par $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction différentiable. Soit x^* un point de S , on dit que le point x^* vérifie les conditions de qualification des contraintes de Cottle si $\text{cl}(\overset{\circ}{G}(x^*)) = G(x^*)$.

Le lecteur peut vérifier que la condition de Cottle est équivalente à la non vacuité de l'ensemble $\overset{\circ}{G}(x^*)$.

2. Le terme KKT est formé des initiales des trois mathématiciens : William Karush, Harold William Kuhn et Albert William Tucker.

Proposition 3.6

Soit x^* une solution locale du problème (P) qui vérifie la condition de Cottle alors il existe des scalaires u_1, \dots, u_m positifs tels que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^*) = 0 \quad (3.27)$$

$$u_i g_i(x^*) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m. \quad (3.28)$$

Démonstration. D'après le théorème 3.3, il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ positifs non tous nuls tels que

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \quad (3.29)$$

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m. \quad (3.30)$$

Si $\lambda_0 = 0$ alors la condition (3.29) devient

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0, \quad (3.31)$$

où les multiplicateurs $\{\lambda_i : i \in I(x^*)\}$ ne sont pas tous nuls. Les multiplicateurs correspondant aux contraintes non saturées ne figurent pas dans l'écriture de la condition (3.31) car ils sont nuls d'après la condition (3.30).

Comme le système (3.31) admet une solution positive non nulle alors le système

$$\langle \nabla g_i(x^*), d \rangle < 0 \quad \text{pour } i \in I(x^*)$$

n'admet pas de solution (voir Théorème de Gordan [Théorème 1.11]), ce qui contredit la non vacuité de l'ensemble $\hat{G}(x^*)$ et par conséquent, le multiplicateur $\lambda_0 > 0$. On obtient le résultat en divisant les égalités (3.29) et (3.30) par λ_0 et en posant $u_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$ pour $i = 1, \dots, m$. ■

Un point $x^* \in S$ pour lequel il existe des scalaires positifs u_1, u_2, \dots, u_m tels que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$u_i g_i(x^*) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m.$$

est appelé un point de KKT. Géométriquement, les points de KKT sont les points pour lesquels le vecteur opposé du gradient de la fonction objectif est dans le cône convexe engendré par les vecteurs gradients des contraintes saturées.

WILLIAM KARUSH né le 1er mars 1917 à Chicago (Etats Unis) était un professeur à l'université de Chicago. Dans son mémoire de Master, il a publié des conditions nécessaires d'optimalité pour un problème d'optimisation avec des contraintes d'inégalité. Son Ph.D qu'il a obtenu à l'université de Chicago en 1947 avait comme thème "isoperimetric problems and index theorems". Il est mort le 22 février 1997 à Los Angeles à l'âge de 80 ans.

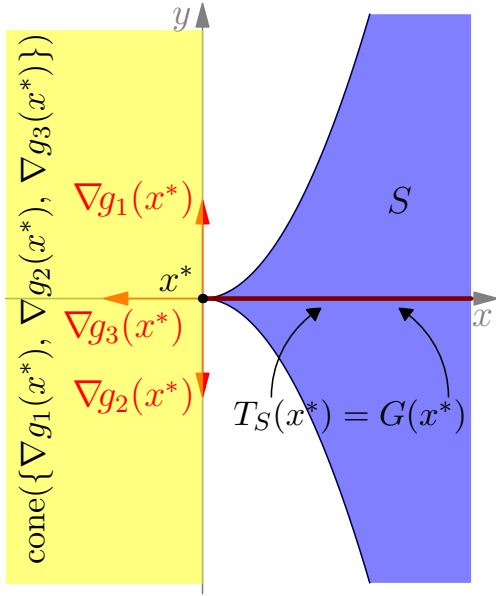


FIGURE 3.25 – La condition d’Abadie est satisfaite au point $x^* = (0,0)$: $T_S(x^*) = G(x^*)$ est égal à la partie positive de l’axe Ox . On remarque que la condition de Cottle n’est pas vérifiée en x^* puisque $\overset{\circ}{G}(x^*) = \emptyset$. La condition d’Abadie est plus faible que celle de Cottle.

Définition 3.3

Soit S l’ensemble de \mathbb{R}^n défini par $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction différentiable. Soit x^* un point de S , on dit que le point x^* vérifie les conditions de qualification des contraintes d’Abadie si $G(x^*) = T_S(x^*)$.

Exemple 3.6

1. On considère l’ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) \leq 0, g_2(x, y) \leq 0, g_3(x, y) \leq 0\},$$

où $g_1(x, y) = -x^2 + y$, $g_2(x, y) = -x^2 - y$ et $g_3(x, y) = -x$.

Au point $x^* = (0,0)$, les trois contraintes sont saturées, le cône tangent à S en x^* est la partie positive de l’axe Ox (voir Figure 3.25). On a aussi :

$$\nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x^*) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} G(x^*) &= \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2 \leq 0, -d_2 \leq 0, -d_1 \leq 0\} \\ &= \{(d_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 0\}. \end{aligned}$$

La condition d’Abadie est vérifiée ($T_S(x^*) = G(x^*)$) par contre celle de Cottle ne l’est pas ($\overset{\circ}{G}(x^*) = \emptyset$).

Si on considère le problème de minimiser la fonction $f(x, y) = y$ sur S , on remarque que le point x^* n’est pas une solution locale de ce problème par contre c’est un point de KKT puisque le vecteur $-\nabla f(x^*) = (0, -1)$ appartient au cône engendré par les vecteurs $\nabla g_1(x^*)$, $\nabla g_2(x^*)$ et $\nabla g_3(x^*)$ qui correspond au demi-espace $\{(d_1, d_2) : d_1 \leq 0\}$. Ce qu’on vient de dire est-il contradictoire avec le théorème 3.5?

Théorème 3.5

Si le point $x^* \in S$ est une solution locale du problème (P) et s’il vérifie la condition d’Abadie alors il est un point de KKT.

Démonstration. Comme $T_S(x^*) = G(x^*)$ on obtient d'après la Proposition 3.3 que $\overset{\circ}{F}(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$ et par suite le système

$$\begin{aligned} \langle -\nabla f(x^*), x \rangle &> 0 \\ \langle \nabla g_i(x^*), x \rangle &\leq 0 \quad \text{pour } i \in I(x^*) \end{aligned}$$

n'admet pas de solution. D'après le Théorème de Farkas (Théorème 1.10) il existe $(u_i)_{i \in I(x^*)} \geq 0$ tel que

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} u_i \nabla g_i(x^*).$$

Le résultat s'obtient en affectant la valeur nulle aux multiplicateurs associés aux contraintes non saturées. ■

On remarque que la condition de Cottle entraîne celle d'Abadie. En effet, on a $\overset{\circ}{G}(x^*) \subset T_S(x^*) \subset G(x^*)$ (voir Proposition 3.5). Comme $T_S(x^*)$ est fermé on a $T_S(x^*) = G(x^*)$ dès que $\text{cl}(\overset{\circ}{G}(x^*)) = G(x^*)$. La Proposition 3.6 est donc, une conséquence directe du Théorème 3.5.

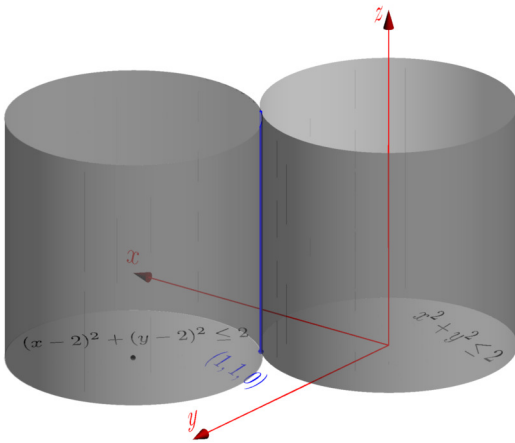


FIGURE 3.26 – L'ensemble S (en bleu) de l'exemple 3.7.

Exemple 3.7

Considérons le problème d'optimisation suivant (adapté de [13])

$$\begin{cases} \text{Minimiser } y + z \\ \text{s.c.} \\ x^2 + y^2 \leq 2 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2 \\ -z \leq 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

L'ensemble des points admissibles du problème (3.32) est $S = \{(1, 1, z) : z \geq 0\}$ (voir FIGURE 3.26). Il est clair que la solution du problème est l'unique point $(1, 1, 0)$, cependant tous les points admissibles sont des points de FJ et aucun point ne satisfait les conditions de KKT. On constate que le cône tangent à S au point $\mathbf{x}^* = (1, 1, 0)$ coïncide avec la partie positive de l'axe Oz . Un simple calcul donne

$$G(\mathbf{x}^*) = \{(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3 : d_2 = -d_1, d_3 \geq 0\}.$$

On voit bien que la condition d'Abadie n'est pas vérifiée en ce point (voir FIGURE 3.27).

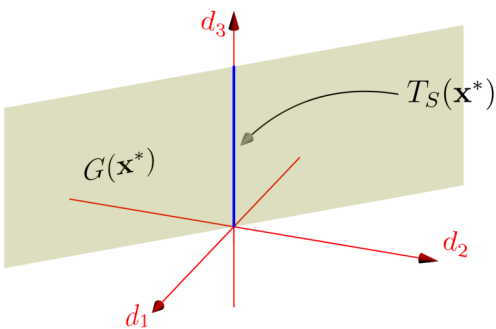


FIGURE 3.27 – Le cône tangent $T_S(\mathbf{x}^*)$ en bleu correspondant à l'ensemble S de l'exemple 3.7 est strictement inclus dans le cône $G(\mathbf{x}^*)$.

EXERCICE 3.4

Considérons l'ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ défini par

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m\}.$$

Soit \bar{x} un élément de S , on suppose que les fonctions $\{g_i : i \in I(\bar{x})\}$ sont différentiables en \bar{x} et que $\{g_i : i \notin I(\bar{x})\}$ sont continues en \bar{x} .

On rappelle qu'on a toujours $\overset{\circ}{G}(\bar{x}) \subset R_S(\bar{x}) \subset G(\bar{x})$.

1. Montrer que si les fonctions $\{g_i : i \in I(\bar{x})\}$ sont strictement pseudoconvexes en \bar{x} , on obtient alors $\overset{\circ}{G}(\bar{x}) = R_S(\bar{x})$.
2. Montrer que si les fonctions $\{g_i : i \in I(\bar{x})\}$ sont pseudoconcaves en \bar{x} alors $G(\bar{x}) = R_S(\bar{x})$.
3. En déduire que, dans ce dernier cas, la condition d'Abadie est vérifiée en \bar{x} .

Dans ce qui suit on va considérer d'autres conditions de qualification des contraintes, en général plus facile à vérifier que celle d'Abadie et de Cottle. On discutera aussi le lien entre ces conditions ainsi que leur influence sur l'ensemble des multiplicateurs associés³.

Contraintes affines Si toutes les contraintes g_i sont affines alors on a vu que l'égalité $T_S(x^*) = G(x^*)$ a lieu pour tout $x^* \in S$ (voir Proposition 3.2). Donc la condition d'Abadie est automatiquement vérifiée.

Indépendance linéaire LICQ⁴ Cette condition se résume en l'indépendance linéaire des gradients des contraintes saturées. Donc, LICQ est vérifiée en un point x^* si les vecteurs $\{\nabla g_i(x^*) : i \in I(x^*)\}$ sont linéairement indépendants. En effet, puisque le système

$$\sum_{i \in I(x^*)} u_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

n'admet aucune solution non nulle alors le système

$$\langle \nabla g_i(x^*), d \rangle < 0 \quad \text{pour } i \in I(x^*)$$

admet au moins une solution (Théorème de Gordan) et par suite l'ensemble $\overset{\circ}{G}(x^*)$ est non vide. On remarque, dans ce cas, que le multiplicateur (u_1, \dots, u_m) est unique (pourquoi?).

3. On discutera notamment la question de l'unicité et le bornage de l'ensemble des multiplicateurs.

4. C'est l'acronyme du mot anglais Linear Independance Constraint Qualification.

Condition de Slater On suppose que les fonctions g_i sont pseudo-convexes et qu'il existe un point $x_0 \in S$ tel que $g(x_0) < 0$. La condition de Slater entraîne celle de Cottle, en effet soit $x^* \in S$ et $i \in I(x^*)$. On a $0 = g_i(x^*) > g_i(x_0)$ et la pseudoconvexité de la fonction g_i nous donne

$$\langle \nabla g_i(x^*), x_0 - x^* \rangle < 0.$$

Par conséquent $x_0 - x^* \in \overset{\circ}{G}(x^*) \neq \emptyset$.

Pour finir, on remarque que les conditions de qualification des contraintes de Slater et celle de l'indépendance linéaire entraînent celle de Cottle et ces dernières lorsqu'elles sont vérifiées en un minimum local x^* alors x^* est un point de Fritz John avec des multiplicateurs λ_0 associés à la fonction objectif strictement positifs. Cependant, pour la condition d'Abadie il peut exister des solutions aux conditions de Fritz John avec $\lambda_0 = 0$ mais aussi des solutions avec $\lambda_0 > 0$.

Cas général

Dans cette section on généralise les résultats obtenus précédemment aux cas plus général où des contraintes d'inégalité et d'égalité sont présentes. Considérons le problème de minimiser une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur un ensemble S donné par

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}.$$

Les fonctions f , g et h sont supposées différentiables.

Comme dans la section précédente, on dit qu'un point x^* vérifie la condition d'Abadie si $T_S(x^*) = G(x^*) \cap H(x^*)$.

Théorème 3.6

Soit x^* un point de S . Supposons que les fonctions f , g et h soient différentiable en x^* . Si x^* est un minimum local de f sur S et si la conditions d'Abadie est vérifiée en x^* alors il existe des scalaires $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_\ell$ tels que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} v_i \nabla h_i(x^*) = 0 \quad (3.33a)$$

$$u_i g_i(x^*) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m \quad (3.33b)$$

$$u_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m. \quad (3.33c)$$

Démonstration. On sait d'après la Proposition 3.3 que le point x^* vérifie $\mathring{F}(x^*) \cap T_S(x^*) = \emptyset$. L'hypothèse de qualification des contraintes d'Abadie entraîne la vacuité de l'ensemble $\mathring{F}(x^*) \cap G(x^*) \cap H(x^*)$, ce qui se traduit par la non consistance du système suivant

$$\begin{aligned} \langle c, d \rangle &> 0, \\ Ad &\leq 0, \end{aligned}$$

où $c = -\nabla f(x^*)$ et A est la matrice de taille $(|I(x^*)| + 2m) \times n$ donnée par

$$A = \begin{bmatrix} A_{I(x^*)}(g) \\ \nabla h(x^*) \\ -\nabla h(x^*) \end{bmatrix}.$$

Donc d'après le théorème de Farkas il existe des scalaires positifs $\{u_i : i \in I(x^*)\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et β_1, \dots, β_m tels que

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} u_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla h_i(x^*) - \sum_{i=1}^m \beta_i \nabla h_i(x^*). \quad (3.34)$$

On obtient le résultat en posant $v_i = \alpha_i - \beta_i$ et en affectant la valeur nulle aux coefficient u_i correspondant aux contraintes non saturées. ■

On présente quelques conditions de qualification des contraintes nous permettant d'avoir des conditions de KKT. Toutes ces conditions entraînent de façon directe ou indirecte la condition d'Abadie.

La condition de Cottle Cette condition est vérifiée en un point $x^* \in S$ si la fonction h est continûment différentiable en x^* , les vecteurs $\{\nabla h_i(x^*) : i = \dots, \ell\}$ sont linéairement indépendants et $\text{cl}(\mathring{G}(x^*) \cap H(x^*)) = G(x^*) \cap H(x^*)$. La condition de Cottle entraîne celle d'Abadie puisqu'on a $\mathring{G}(x^*) \cap H(x^*) \subset T_S(x^*) \subset G(x^*) \cap H(x^*)$ (voir Proposition 3.5 et Théorème 3.2).

EXERCICE 3.5

Montrer que la condition de Cottle est équivalente à la condition suivante :

La fonction h est continûment différentiable en x^* , les vecteurs $\{\nabla h_i(x^*) : i = 1, \dots, \ell\}$ sont linéairement indépendants et $\mathring{G}(x^*) \cap H(x^*) \neq \emptyset$.

Cette dernière est appelée condition de qualification des contraintes de Mangasarian-Fromovitz et sera abrégée en MFCQ^a.

^a. Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification.

Indépendance linéaire La condition d'indépendance linéaire est satisfaite au point x^* si la fonction h est continûment différentiable en x^* et les vecteurs $\{\nabla g_i(x^*) : i \in I(x^*)\} \cup \{\nabla h_i(x^*) : i = 1, \dots, \ell\}$ sont linéairement indépendants. Cette condition entraîne celle de Mangasarian-Fromovitz. En effet, si $\overset{\circ}{G}(x^*) \cap H(x^*) = \emptyset$ alors il existe (voir Exercice ??) un vecteur $(u_i)_{i \in I(x^*)} \geq 0$ non nul et un vecteur $v \in \mathbb{R}^\ell$ tels que

$$\sum_{i \in I(x^*)} u_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} v_i \nabla h_i(x^*) = 0.$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de l'indépendance linéaire. Elle entraîne l'unicité du multiplicateur.

Condition de Slater La condition de Slater est vérifiée en un point $x^* \in S$ si :

- ▷ les fonctions $\{g_i : i \in I(x^*)\}$ sont pseudoconvexes en x^* ,
- ▷ les fonctions $\{g_i : i \notin I(x^*)\}$ sont continues en x^* ,
- ▷ les fonctions h_i sont quasi-linéaires et continûment différentiables en x^*
- ▷ Les vecteurs $\{\nabla h_i(x^*) : i = 1, \dots, \ell\}$ sont linéairement indépendants,
- ▷ il existe x_0 tel que $g_i(x_0) < 0$ pour tout $i \in I(x^*)$ et $h(x_0) = 0$.

La condition de Slater entraîne celle de Mangasarian-Fromovitz qui est équivalente à celle de Cottle. En effet, pour $i \in I(x^*)$ on a $g_i(x_0) < 0 = g_i(x^*)$, comme g_i est pseudoconvexe en x^* on obtient $\langle \nabla g_i(x^*), x_0 - x^* \rangle < 0$. D'autre part, pour $1 \leq i \leq \ell$, on a $h_i(x_0) = h_i(x^*) = 0$. La quasi-linéarité de h_i en x^* nous donne $\langle \nabla h_i(x^*), x_0 - x^* \rangle = 0$. Le vecteur $d = x_0 - x^* \in \overset{\circ}{G}(x^*) \cap H(x^*) \neq \emptyset$.

Remarque 3.4

Si

- ▷ les fonctions $g_i, i = 1, \dots, m$ sont convexes et différentiables,
 - ▷ les fonctions $h_i, i = 1, \dots, \ell$ sont affines, c'est à dire $h_i(x) = \langle a_i, x \rangle + \alpha_i$ où $a_i \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}$,
 - ▷ les vecteurs $\{a_i : i = 1, \dots, \ell\}$ sont linéairement indépendants,
 - ▷ il existe un point $x_0 \in S$ tel que $\max_{1 \leq i \leq m} g_i(x_0) < 0$.
- alors la condition de Slater sera satisfaite en tout point $x \in S$.

EXERCICE 3.6

Considéons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \underset{x}{\text{Minimiser}} f(x) := \frac{1}{2}\langle x, Qx \rangle - \langle c, x \rangle \\ \text{s.c.} \\ Ax = b, \end{cases} \quad (3.35)$$

où Q est une matrice $n \times n$ symétrique, A une matrice $m \times n$ de rang m ($m < n$) et $(c, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

On suppose que la fonction f est bornée inférieurement sur l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ (aucune hypothèse de convexité n'est considérée).

1. Dites pourquoi les conditions de KKT sont nécessaires pour ce problème.
2. On se propose de montrer que les conditions de KKT sont aussi suffisantes. Soit x^* un point de KKT, il existe alors $v^* \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla f(x^*) + A^\top v^* = 0 \quad (3.36)$$

$$Ax^* = b. \quad (3.37)$$

Soit x un point admissible distinct de x^* .

- (a) Montrer qu'on a $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle = 0$. En déduire l'identité suivante

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}\langle x - x^*, Q(x - x^*) \rangle. \quad (3.38)$$

- (b) Montrer que la quantité $\langle x - x^*, Q(x - x^*) \rangle$ est positive.

Indication. Utiliser un raisonnement par l'absurde et le fait que $x^* + \alpha(x - x^*)$ est dans S pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (c) Déduire que x^* est un minimum global de f sur S .
3. On se propose maintenant de montrer que le problème (3.35) admet au moins une solution. Pour cela, considérons la matrice $H \in (n+m) \times (n+m)$ et le vecteur $h \in \mathbb{R}^{n+m}$ donnés par

$$H = \begin{bmatrix} Q & A^\top \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h = \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix}.$$

On sait que le vecteur h s'écrit de façon unique comme la somme d'un vecteur de $\text{im}(H)$ et d'un vecteur de $\text{ker } H$,

On remarque que si la projection orthogonale du vecteur (c, b) sur $\ker H$ est nulle alors le problème (3.35) admet au moins une solution sinon il existe une direction non nulle s telle que $x + \alpha s \in S$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x + \alpha s)$ tend vers $-\infty$ quand $\alpha \rightarrow \infty$.

Ce résultat sera utilisé dans la démonstration du Lemme 4.2.

on a alors

$$\begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} \hat{x} \\ v \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

avec $(s, u) \in \ker H$ et $(\hat{x}, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

(a) Prouver les identités suivantes

$$\begin{aligned} \langle s, Qs \rangle &= 0, \\ \langle \nabla f(x), s \rangle &= -(\langle c, s \rangle + \langle b, u \rangle), \quad \text{pour tout } x \in S. \end{aligned}$$

En déduire l'égalité suivante

$$\langle \nabla f(x), s \rangle = -[\|s\|^2 + \|u\|^2] \quad \text{pour tout } x \in S.$$

En supposant que le vecteur $(s, u) \neq 0$ montrer que $x + \alpha s \in S$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $f(x + \alpha s)$ tend vers $-\infty$ quand $\alpha \rightarrow \infty$. En déduire la nullité du vecteur (s, u) .

(b) En utilisant l'égalité (3.39) montrer que \hat{x} est une solution optimale du problème (3.35).

Conditions d'optimalité suffisantes

On considère le problème d'optimisation avec contrainte d'inégalité suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in S \\ g_i(x) \leq 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.40)$$

où

$$S := \{x \in X : g(x) \leq 0\}$$

avec X un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions différentiables.

Théorème 3.7 (Conditions suffisantes de type Fritz John)

Soit \bar{x} un point de Fritz John. Supposons que f est pseudoconvexe en \bar{x} et que les fonctions $\{g_i : i \in I(\bar{x})\}$ sont strictement pseudoconvexes en \bar{x} alors \bar{x} est un minimum global de f sur S .

Démonstration. D'après le Théorème de Gordan on obtient que l'ensemble $\overset{\circ}{F}(\bar{x}) \cap \overset{\circ}{G}(\bar{x})$ est vide. Supposons que \bar{x} n'est pas un mini-

mum global de f sur S . Il existe alors $x^* \in S$ tel que $f(x^*) < f(\bar{x})$. La pseudoconvexité de f en \bar{x} nous permet d'écrire

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x^* - \bar{x} \rangle < 0. \quad (3.41)$$

D'autre part, on a $g_i(x^*) \leq 0 = g_i(\bar{x})$ pour $i \in I(\bar{x})$. En utilisant la stricte pseudoconvexité de g_i en \bar{x} on obtient

$$\langle \nabla g_i(\bar{x}), x^* - \bar{x} \rangle < 0 \text{ pour tout } i \in I(\bar{x}). \quad (3.42)$$

Les relations (3.41) et (3.42) impliquent la non vacuité de l'ensemble $\overset{\circ}{F}(\bar{x}) \cap \overset{\circ}{G}(\bar{x})$. D'où le résultat. ■

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{s.c.} \\ g_i(x) \leq 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \\ h_i(x) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, \ell \end{cases} \quad (3.43)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ sont des fonctions différentiables.

Théorème 3.8 (Conditions suffisantes de type Fritz John)

Soit x^* un point de Fritz John pour le problème (3.77), c'est à dire x^* est admissible et il existe des scalaires $u_0, (u_i)_{i \in I(x^*)}$ et $(v_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ non tous nuls tels que

$$u_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} u_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} v_i \nabla h_i(x^*) = 0, \quad (3.44)$$

$$u_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in I(x^*),$$

$$u_0 \geq 0.$$

Si les vecteurs

$$u_0 \nabla f(x^*), \{u_i \nabla g_i(x^*) : i \in \tilde{I}\}, \{\nabla h_i(x^*) : i = 1, \dots, \ell\}$$

où $\tilde{I} = \{i \in I(x^*) : u_i > 0\}$ engendrent \mathbb{R}^n alors x^* est un minimum local de f sur S .

Démonstration. Supposons que x^* n'est pas un minimum local de f sur S . Alors il existe une suite de points admissibles (x_n) convergeant vers x^* vérifiant $f(x_n) < f(x^*)$. En posant $d_n = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}$, alors la suite (d_n) converge vers un vecteur d non nul ($\|d\| = 1$) (passer à une sous suite si nécessaire). On a $x_n = x^* + t_n d_n$ avec t_n une suite de nombres

réels strictement positifs convergeant vers 0. Un développement de Taylor au voisinage de x^* donne

$$\begin{aligned} 0 &> f(x^* + t_n d_n) - f(x^*) = t_n \langle \nabla f(x^*), d_n \rangle + t_n \|d_n\| \epsilon_n \\ 0 &\geq g_i(x^* + t_n d_n) = t_n \langle \nabla g_i(x^*), d_n \rangle + t_n \|d_n\| \beta_n^i, \quad \forall i \in I(x^*) \\ 0 &= h_j(x^* + t_n d_n) = t_n \langle \nabla h_j(x^*), d_n \rangle + t_n \|d_n\| \gamma_n^j, \quad \forall j = 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

En divisant les inégalités précédentes par t_n et en faisant tendre n vers l'infini on obtient

$$\langle \nabla f(x^*), d \rangle \leq 0 \quad (3.45a)$$

$$\langle \nabla g_i(x^*), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in I(x^*) \quad (3.45b)$$

$$\langle \nabla h_i(x^*), d \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell. \quad (3.45c)$$

L'égalité (3.44) entraîne

$$\langle u_0 \nabla f(x^*), d \rangle + \sum_{i \in I(x^*)} \langle u_i \nabla g_i(x^*), d \rangle + \sum_{i=1}^{\ell} \langle v_i \nabla h_i(x^*), d \rangle = 0.$$

En combinant les relations (3.45) avec l'égalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} \langle u_0 \nabla f(x^*), d \rangle &= 0 \\ \langle u_i \nabla g_i(x^*), d \rangle &= 0 \quad \forall i \in I(x^*) \\ \langle \nabla h_i(x^*), d \rangle &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Donc le vecteur d est orthogonal à tout vecteur de \mathbb{R}^n . Par conséquent on doit avoir $d = 0$, on obtient ainsi une contradiction qui confirme le résultat. ■

Exemple 3.8

Considérons le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x, y) = -(x+1)^2 - (y+1)^2 \\ \text{s.c} \\ (x, y) \in S, \end{cases} \quad (3.46)$$

où $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) \leq 0, g_2(x, y) \leq 0\}$ avec $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ et $g_2(x, y) = -x^2 + 2y$.

On note que le problème (3.46) admet au moins une solution (la fonction f est continue sur S qui est compact).

Les points admissibles admettant deux contraintes actives doivent vérifier $x^2 + y^2 = 3$ et $x^2 = 2y$, on obtient $y = 1$ et $x = \pm\sqrt{2}$.

Les gradients $\nabla g_1(x, y) = (2x, 2y)$ et $\nabla g_2(x, y) = (-2x, 2)$. Noter

que le premier vecteur ne s'annule qu'en $(0,0)$ où la contrainte est inactive, le deuxième vecteur n'est jamais nul. Aux points $(\sqrt{2},1)$ et $(-\sqrt{2},1)$, les deux vecteurs sont linéairement indépendants. Donc les contraintes sont qualifiées en tout point admissible. Les conditions de KKT sont donc nécessaires pour ce problème. Les conditions de KKT s'écrivent

$$(-1 + u_1 - u_2)x = 1, \quad (3.47a)$$

$$(-1 + u_1)y + u_2 = 1, \quad (3.47b)$$

$$u_1(x^2 + y^2 - 3) = 0, \quad (3.47c)$$

$$u_2(-x^2 + 2y) = 0. \quad (3.47d)$$

On va déterminer les points de KKT en discutant le signe des multiplicateurs u_1 et u_2 .

1. $u_1 > 0$ et $u_2 > 0$ on trouve $y = 1$ et $x = \pm\sqrt{2}$.

Pour le point $(\sqrt{2},1)$, les équations (3.47a) et (3.47b) deviennent

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \\ u_1 + u_2 &= 2. \end{aligned}$$

Ce dernier système admet $u_1 = \frac{6+\sqrt{2}}{4} > 0$ et $u_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} > 0$, donc $(\sqrt{2},1)$ est un point de KKT.

Concernant le point $(-\sqrt{2},1)$ on obtient le système suivant

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \\ u_1 + u_2 &= 2, \end{aligned}$$

dont la solution est $u_1 = \frac{6-\sqrt{2}}{4} > 0$ et $u_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} > 0$. Le point $(-\sqrt{2},1)$ est aussi un point de KKT.

2. $u_1 > 0$ et $u_2 = 0$ on obtient des équations (3.47a), (3.47b) et (3.47c), l'équation en u_1 suivante

$$(u_1 - 1)^2 = \frac{2}{3},$$

ce qui donne comme solutions $u_1 = \sqrt{2/3} + 1 > 0$ et $u_1 = 1 - \sqrt{2/3}$. Ainsi, le point correspondant au premier multiplicateur est $(x,y) = (\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2})$ n'est pas un point de KKT car il ne vérifie pas la deuxième contrainte. Le second point qui correspond au deuxième multiplicateur est $(x,y) = (-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2})$. C'est un point de KKT car il est admissible.

3. $u_1 = 0$ et $u_2 > 0$ Dans ce cas, les équations (3.47a), (3.47b)

et (3.47d) impliquent $x = -\frac{1}{1+u_2}$, $y = u_2 - 1$ et

$$\frac{1}{(1+u_2)^2} = 2(u_2 - 1) \Leftrightarrow 2u_2^3 + 2u_2^2 - 2u_2 - 3 = 0.$$

L'équation précédente admet une solution unique

$$u_2 \approx 1.11208,$$

avec $(x, y) \approx (-0.473465, 0.1120849)$ comme point de KKT car il est admissible.

4. $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$ On obtient $x = -1$ et $y = -1$ qui est admissible. Donc le point $(-1, -1)$, le maximum global de f sur S (car il présente un maximum global de f sur \mathbb{R}^2) est un point de KKT.

Le tableau suivant résume le tout en spécifiant si on peut appliquer le Théorème 3.8 ou non pour confirmer l'optimalité locale du point.

\mathbf{x}^*	$\{\nabla f(\mathbf{x}^*), \nabla g_i(\mathbf{x}^*) : i \in \tilde{\mathbf{I}}\}$	Théorème 3 applicable
$(\sqrt{2}, 1)$	$\begin{pmatrix} -2\sqrt{2}-2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$	oui
$(-\sqrt{2}, 1)$	$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$	oui
$(-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2})$	$\begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{3}{2}}+2 \\ 2\sqrt{\frac{3}{2}}-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -2\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$	non
$(-\frac{1}{1+u}, u-1)^a$	$\begin{pmatrix} -\frac{2u}{1+u} \\ -2u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{1+u} \\ 2 \end{pmatrix}$	non
$(-1, -1)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	non

Pour étudier l'optimalité des points $(-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2})$ et $(-0.47, 0.11)$ il faut faire appel aux conditions du second ordre qu'on va voir dans la section suivante.

a. avec u vérifiant l'équation $2u^3 + 2u^2 - 2u - 3 = 0$.

Théorème 3.9 (Conditions suffisantes de type KKT)

Soit \bar{x} un point de KKT du problème (3.43) et (\bar{u}, \bar{v}) les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'inégalité et d'égalité. Posons

$$I = \{i : \bar{v}_i > 0\} \text{ et } J = \{i : \bar{v}_i < 0\}.$$

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

- ▷ la fonction f est pseudoconvexe en \bar{x} ,
- ▷ les fonctions $\{g_i : i \in I(\bar{x})\}$ sont quasi-convexes en \bar{x} ,
- ▷ les fonctions $\{h_i : i \in I\}$ sont quasi-convexes en \bar{x} ,
- ▷ les fonctions $\{h_i : i \in J\}$ sont quasi-concaves en \bar{x} .

Alors, \bar{x} est un minimum global de f sur S .

Démonstration. Soit x un point admissible du problème (3.43). Les fonctions $\{g_i : i \in I(\bar{x})\}$ étant quasi-convexes en \bar{x} on a alors

$$g_i(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \leq \max\{g_i(x), g_i(\bar{x})\} = g_i(\bar{x}) \quad \text{pour tout } t \in]0, 1].$$

Donc,

$$\frac{g_i(\bar{x} + t(x - \bar{x})) - g_i(\bar{x})}{t} \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in]0, 1]. \quad (3.48)$$

En faisant tendre t vers 0 dans l'inégalité (3.48) on obtient

$$\langle \nabla g_i(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } i \in I(\bar{x}). \quad (3.49)$$

De même, on obtient

$$\langle \nabla h_i(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } i \in I. \quad (3.50)$$

et

$$\langle \nabla h_i(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } i \in J. \quad (3.51)$$

En multipliant l'inégalité (3.49) par \bar{u}_i ($i \in I(\bar{x})$), l'inégalité (3.50) par \bar{v}_i ($i \in I$) et l'inégalité (3.51) par \bar{v}_i ($i \in J$) et en additionnant le tout, on obtient

$$\left\langle \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{u}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{\ell} \bar{v}_i \nabla h_i(\bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle \leq 0. \quad (3.52)$$

Ce qui donne

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0. \quad (3.53)$$

Comme f est pseudoconvexe en \bar{x} alors l'inégalité (3.53) nous permet d'écrire $f(x) \geq f(\bar{x})$. Le point x étant un élément admissible quelconque alors \bar{x} est un minimum global de f sur S . ■

3.3 Conditions d'optimalité du second ordre

Rappels

Soit x^* un minimum local du problème d'optimisation sans contraintes qui consiste à minimiser une fonction f , définie et différentiable sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , sur tout \mathbb{R}^n . Alors, on sait que le point x^* vérifie l'égalité $\nabla f(x^*) = 0$ qui constitue une condition nécessaire du premier ordre. Si la fonction f est deux fois différentiable alors la matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ doit être semi-définie positive. Les points qui vérifient les conditions du second ordre ne peuvent pas être des maxima locaux, par contre ils restent toujours des candidats pour être des points selles.

Pour les problèmes avec contraintes, les conditions d'optimalité du premier ordre se résument dans les conditions de KKT. Pour introduire des conditions d'optimalité du second ordre on doit faire appel à la dérivée seconde de la fonction objectif et celle des fonctions contraintes. Pour cela on doit introduire la fonction lagrangienne, plus précisément, soit le problème d'optimisation suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser}_x f(x) \\ \text{s.c} \\ x \in S, \end{cases}$$

où S est la partie de \mathbb{R}^n définie par

$$S := \{x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \quad (3.54)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ sont des fonctions deux fois différentiables. L'ensemble X est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Avant d'énoncer quelques résultats concernant les conditions d'optimalité du second ordre, on aura besoin du Lemme suivant

Lemme 3.2

Soit \bar{x} un élément de S vérifiant $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Supposons que la matrice $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in S$. Si S est étoilé en \bar{x} alors ce dernier est une solution optimale globale du

problème (P).

Démonstration. Soit $x \in S$, il existe, d'après le théorème de la valeur moyenne, \hat{x} un point appartenant au segment $] \bar{x}, x[$ tel que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \underbrace{\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle x - \bar{x}, \nabla^2 f(\hat{x})(x - \bar{x}) \rangle. \quad (3.55)$$

La relation (3.55) et le fait que $\hat{x} \in S$ (S est étoilé en \bar{x}) nous permettent de déduire que $f(x) \geq f(\bar{x})$. ■

Il faut noter que si l'ensemble S est convexe alors il sera étoilé en chacun de ses points, par conséquent, la conclusion du Lemme 3.2 sera toujours valide. Aussi, si l'ensemble S n'est pas étoilé en \bar{x} alors la conclusion du Lemme 3.2 n'est plus assurée comme le montre l'exemple suivant.

Le point $x^* = (1.6, 1.9) \in S$
vérifie $f(x^*) \approx -1.059 < f(\bar{x}) = 0$

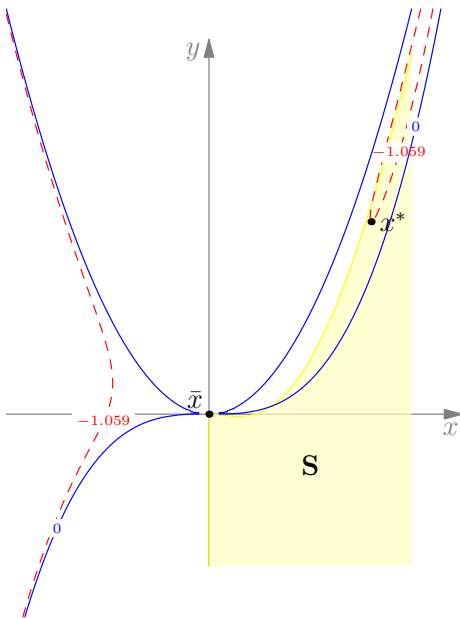


FIGURE 3.28 – L'ensemble S (en jaune) donné par (3.56). On remarque que le point $x^* \in S$ vérifie $f(x^*) < f(\bar{x})$. Par suite \bar{x} n'est pas un minimum global de f sur S . On constate que S n'est pas étoilé en \bar{x} . Deux courbes de niveaux de la fonction f sont dessinées (en bleu pour $f(x, y) = 0$ et en rouge pour $f(x, y) = -1.059$).

Exemple 3.9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 - y)(x^3 - 3y)$ et S l'ensemble défini par

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) \geq 0, x \geq 0\}, \quad (3.56)$$

avec

$$g_1(x, y) = -9x^4 + 84x^3 - 36x^2 - 36(x+1)y.$$

Il est facile de vérifier que $g_1(x, y) = \det(\nabla^2 f(x, y))$. La trace de cette matrice est donnée par

$$\text{trace}(\nabla^2 f(x, y)) = 20x^3 - 6(x+1)y + 6.$$

Soit $(x, y) \in S$, montrons que $\text{trace}(\nabla^2 f(x, y)) \geq 0$. La relation $g_1(x, y) \geq 0$ nous permet d'écrire

$$y \leq \frac{-3x^4 + 28x^3 - 12x^2}{12(x+1)}.$$

Donc

$$6(x+1)y \leq \frac{-3x^4 + 28x^3 - 12x^2}{2}.$$

On en déduit

$$20x^3 - 6(x+1)y + 6 \geq \frac{3}{2}(x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4) > 0^a.$$

Par conséquent $\nabla^2 f(x, y)$ est s.d.p pour tout $(x, y) \in S$. On remarque que le point $\bar{x} = (0, 0)$ est dans S , il vérifie $\nabla f(\bar{x}) = 0$ mais il ne présente pas un minimum global de f sur S (voir

FIGURE 3.28).

a. Voir FIGURE 3.29

Au problème (P) on associe la fonction lagrangienne $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$L(x, u, v) := f(x) + u^\top g(x) + v^\top h(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{\ell} v_i h_i(x).$$

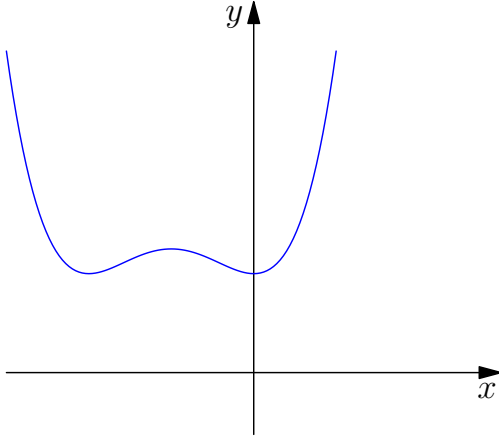


FIGURE 3.29 – Graphe de la fonction $x \mapsto x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4$. Les points 0 et -2 présentent des minima globaux de cette fonction.

Proposition 3.7

Soit \bar{x} un point de KKT pour le problème (P) avec \bar{u} et \bar{v} les multiplicateurs de Lagrange associés. Alors on a :

1. si S est étoilé en \bar{x} et $\nabla_x^2 L(x, \bar{u}, \bar{v})$ est semi-définie positive pour tout $x \in S$ alors \bar{x} est un minimum global de f sur S .
2. si $\nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ est définie positive alors \bar{x} est un minimum local strict de f sur S .

Démonstration. Le point $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ vérifie

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad (3.57a)$$

$$\bar{u}^\top g(\bar{x}) = 0 \quad (3.57b)$$

1. D'après le Lemme 3.2 on a

$$\bar{x} \in \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} L(x, \bar{u}, \bar{v}). \quad (3.58)$$

Par suite, on obtient pour $x \in S$

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\bar{x}) + \bar{u}^\top g(\bar{x}) && \text{(d'après (3.57b))} \\ &= L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) && (h(\bar{x}) = 0) \\ &\leq L(x, \bar{u}, \bar{v}) && \text{(d'après (3.58))} \\ &\leq f(x) && (\bar{u}^\top g(x) \leq 0 \text{ et } h(x) = 0). \end{aligned}$$

2. Le gradient de la fonction $x \mapsto L(x, \bar{u}, \bar{v})$ est nul au point \bar{x} , de plus sa matrice hessienne est définie positive en ce point alors ce dernier présente un minimum local strict de $L(\cdot, \bar{u}, \bar{v})$ sur X (voir [1, Théorème 3.3]). Donc, il existe $r > 0$ tel que

$$L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) < L(x, \bar{u}, \bar{v}), \quad \text{pour tout } x \in B_r(\bar{x}) \cap X \text{ (} x \neq \bar{x}\text{)}.$$

Le premier point de la Proposition 3.7 est identique au point a. du [4, Lemma 4.4.1]. Pour démontrer ce point, les auteurs utilisent le fait que $\nabla_x^2 L(x, \bar{u}, \bar{v})$ est s.d.p pour tout $x \in S$ pour déduire que la fonction $x \mapsto L(x, \bar{u}, \bar{v})$ est convexe sur S (sans supposer que ce dernier est convexe). Ensuite, ils obtiennent que \bar{x} est un minimum global de L (et par suite de f) sur S . L'exemple 3.9 montre que ce résultat est faux sans l'hypothèse de convexité de S . Il montre aussi qu'on peut obtenir l'optimalité globale de \bar{x} en supposant seulement S étoilé en \bar{x} .

On en déduit

$$f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) < L(x, \bar{u}, \bar{v}) \leq f(x), \quad \forall x \in B_r(\bar{x}) \cap S \ (x \neq \bar{x}).$$

En reprenant l'exemple 3.9 et en posant

$$g_1(x, y) = 9x^4 - 84x^3 + 36x^2 + 36(x+1)y \text{ et } g_2(x, y) = -x,$$

on obtient que le point $\bar{x} = (0, 0)$ est régulier (les vecteurs $\nabla g_1(\bar{x})$ et $\nabla g_2(\bar{x})$ sont linéairement indépendants), c'est un point de KKT car il existe $\bar{u}_1 = 0$ et $\bar{u}_2 = 0$ tels que $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$. La matrice hessienne du Lagrangien en ce point est donnée par

$$\nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

On remarque que le point 2) de la Proposition 3.7 ne nous permet pas de déduire que \bar{x} est un minimum local de f sur S , par contre le Théorème 3.10 assure l'optimalité locale de ce point (laissé à titre d'exercice pour le lecteur).

Le théorème suivant nous fournit une condition suffisante d'optimalité plus fine que celle établie dans la Proposition 3.7. La condition de définie positivité du Lagrangien sera remplacée par une similaire sur un ensemble plus petit que \mathbb{R}^n .

Soit \bar{x} un point de KKT avec \bar{u} un multiplicateur de Lagrange correspondant aux contraintes d'inégalité. Considérons l'ensemble \mathcal{C} défini par

$$\mathcal{C} := \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(\bar{x})^\top d = 0 \text{ pour } i \in I^+, \nabla g_i(\bar{x})^\top d \leq 0 \text{ pour } i \in I^0, \\ \nabla h_i(\bar{x})^\top d = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, \ell\}, \quad (3.59)$$

où $I^+ := \{i \in I(\bar{x}) : \bar{u}_i > 0\}$ et $I^0 := \{i \in I(\bar{x}) : \bar{u}_i = 0\}$.

Théorème 3.10

Avec les mêmes hypothèses de la Proposition 3.7, si $\nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ est définie positive sur l'ensemble \mathcal{C} défini plus haut, c'est à dire

$$d^\top \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) d > 0 \quad \text{pour tout } d \in \mathcal{C} \setminus \{0\}, \quad (3.60)$$

alors \bar{x} est un minimum local strict de f sur S .

Démonstration. Si \bar{x} n'est pas un minimum local strict de f sur S alors il existe une suite (x_n) d'éléments de S (distincts de \bar{x}) convergent vers \bar{x} telle que $f(x_n) \leq f(\bar{x})$ pour tout n . En posant $d_n = \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|}$,

la suite (d_n) admet une sous-suite convergente vers un vecteur $d \neq 0$ ($\|d\| = 1$). Donc, $x_n = \bar{x} + t_n d_n$ avec $t_n = \|x_n - \bar{x}\|$, un développement de Taylor d'ordre deux au voisinage de \bar{x} donne

$$f(x_n) = f(\bar{x}) + t_n \nabla f(\bar{x})^\top d_n + \frac{1}{2} t_n^2 d_n^\top \nabla^2 f(\bar{x}) d_n + t_n^2 \|d_n\|^2 \varepsilon_n, \quad (3.61)$$

$$g_i(x_n) = g_i(\bar{x}) + t_n \nabla g_i(\bar{x})^\top d_n + \frac{1}{2} t_n^2 d_n^\top \nabla^2 g_i(\bar{x}) d_n + t_n^2 \|d_n\|^2 \beta_n, \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (3.62)$$

$$h_i(x_n) = h_i(\bar{x}) + t_n \nabla h_i(\bar{x})^\top d_n + \frac{1}{2} t_n^2 d_n^\top \nabla^2 h_i(\bar{x}) d_n + t_n^2 \|d_n\|^2 \gamma_n, \quad \text{pour } i = 1, \dots, \ell. \quad (3.63)$$

Les suites (ε_n) , (β_n) et (γ_n) tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. L'égalité (3.61) et l'inégalité $f(x_n) \leq f(\bar{x})$ entraînent

$$t_n \nabla f(\bar{x})^\top d_n + \frac{1}{2} t_n^2 d_n^\top \nabla^2 f(\bar{x}) d_n + t_n^2 \|d_n\|^2 \varepsilon_n \leq 0. \quad (3.64)$$

En ne considérant que les contraintes actives en \bar{x} dans l'égalité (3.62), on obtient (pour $i \in I(\bar{x})$)

$$t_n \nabla g_i(\bar{x})^\top d_n + \frac{1}{2} t_n^2 d_n^\top \nabla^2 g_i(\bar{x}) d_n + t_n^2 \|d_n\|^2 \beta_n \leq 0. \quad (3.65)$$

De même, l'égalité (3.63) nous permet d'écrire (pour $i = 1, \dots, \ell$)

$$t_n \nabla h_i(\bar{x})^\top d_n + \frac{1}{2} t_n^2 d_n^\top \nabla^2 h_i(\bar{x}) d_n + t_n^2 \|d_n\|^2 \gamma_n = 0. \quad (3.66)$$

En multipliant l'inégalité (3.65) par \bar{u}_i , l'égalité (3.66) par \bar{v}_i et en sommant le tout avec l'inégalité (3.64), tout en rappelant que $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = 0$, on obtient

$$t_n^2 \frac{1}{2} d_n^\top \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) d_n + t_n^2 \|d_n\|^2 \alpha_n \leq 0, \quad (3.67)$$

avec $\alpha_n = \varepsilon_n + \beta_n + \gamma_n$.

En divisant l'inégalité (3.67) par t_n^2 on obtient

$$\frac{1}{2} d_n^\top \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) d_n + \alpha_n \|d_n\|^2 \leq 0, \quad \text{pour tout } n. \quad (3.68)$$

Un passage à la limite dans (3.68) nous fournit l'inégalité

$$d^\top \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) d \leq 0 \quad (3.69)$$

D'autre part, en divisant les inégalités (3.64), (3.65) et (3.66) par t_n

et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\nabla f(\bar{x})^\top d \leq 0 \quad (3.70)$$

$$\nabla g_i(\bar{x})^\top d \leq 0 \quad \text{pour tout } i \in I(\bar{x}) \quad (3.71)$$

$$\nabla h_i(\bar{x})^\top d = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, \ell. \quad (3.72)$$

Or

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})^\top d \\ &= \nabla f(\bar{x})^\top d + \sum_{i \in I^+} \bar{u}_i \nabla g_i(\bar{x})^\top d. \end{aligned} \quad (3.73)$$

D'après (3.70) et (3.71), tous les termes figurant dans la somme (3.73) sont négatifs. On en déduit que $\nabla f(\bar{x})^\top d = 0$ et $\nabla g_i(\bar{x})^\top d = 0$ pour tout $i \in I^+$. Par suite le vecteur d appartient à $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ et l'inégalité (3.69) nous permet de conclure que la matrice $\nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ n'est pas définie positive sur $\mathcal{C} \setminus \{0\}$. Ce qui achève la démonstration. ■

Le résultat qui suit représente une condition d'optimalité nécessaire du second ordre. Il nous permet d'éliminer davantage de points critiques candidats pour être des minima locaux.

Théorème 3.11

Avec les mêmes hypothèses de la Proposition 3.7, supposons que \bar{x} est un minimum local de f sur S et que les vecteurs

$$\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, \ell\} \cup \{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\}$$

sont linéairement indépendants. Alors \bar{x} est un point de KKT avec un unique multiplicateur de Lagrange (\bar{u}, \bar{v}) . De plus, la matrice hessienne $\nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ est semi-définie positive sur le cône \mathcal{C} défini par (3.59).

Démonstration. On sait que \bar{x} est un point de KKT (voir Théorème 3.6). L'unicité du multiplicateur découle de l'hypothèse de l'indépendance linéaire des gradients aux contraintes actives.

Il nous reste à montrer le deuxième point, soit $d \in \mathcal{C}$ (qu'on suppose non vide). Définissons l'ensemble $\bar{I} = \{i \in I(\bar{x}) : \nabla g_i(\bar{x})^\top d = 0\}$.

D'après le Lemme 3.1, il existe $\epsilon > 0$ et une fonction $\theta :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $\theta(0) = \bar{x}$, $\theta'(0) = d$ et pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$

$$h(\theta(t)) = 0 \text{ et } g_i(\theta(t)) = 0 \text{ pour tout } i \in \bar{I}. \quad (3.74)$$

Soit (t_k) une suite de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0. Posons $x_k = \theta(t_k)$, il est clair que $x_k \rightarrow \bar{x}$. Aussi, on obtient en

utilisant un développement de Taylor du second ordre de la fonction $x \mapsto L(x, \bar{u}, \bar{v})$ au voisinage de \bar{x}

$$L(x_k, \bar{u}, \bar{v}) = L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) + \underbrace{\nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})^\top}_{=0} (x_k - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x_k - \bar{x})^\top \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) (x_k - \bar{x}) + \|x_k - \bar{x}\|^2 \varepsilon_k, \quad (3.75)$$

avec $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Comme $h(x_k) = 0$ et $g_i(x_k) = 0$ pour tout $i \in \bar{I} \supset I^+$ alors $L(x_k, \bar{u}, \bar{v}) = f(x_k)$. De même, $L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{x})$.

Montrons que x_k est admissible à partir d'un certain rang. En effet, $h(x_k) = 0$ et $g_i(x_k) = 0$ pour $i \in \bar{I}$ (d'après (3.74)). Pour $i \notin I(\bar{x})$, on a $g_i(\bar{x}) < 0$. Par suite $g_i(x_k) \leq 0$ puisque g_i est continue et $x_k \rightarrow \bar{x}$. Pour $i \in I(\bar{x}) \setminus \bar{I}$ on a $\nabla g_i(\bar{x})^\top d < 0$.

Si $g_i(x_k) > 0$ pour une infinité de $k \in K$ alors on obtient

$$\frac{g_i(\theta(t_k)) - g_i(\theta(0))}{t_k} = \frac{g_i(x_k) - g_i(\bar{x})}{t_k} > 0 \quad \text{pour tout } k \in K. \quad (3.76)$$

Un passage à la limite dans (3.76) nous donne $\nabla g_i(\bar{x})^\top d \geq 0$. On obtient ainsi une contradiction qui confirme que $g_i(x_k) \leq 0$ à partir d'un certain rang. La suite (x_k) est admissible et converge vers \bar{x} qui est un minimum local de f sur S alors on obtient $f(x_k) \geq f(\bar{x})$ pour tout $k \geq k_0$. En remplaçant dans la relation (3.75) on obtient

$$0 \leq \frac{f(x_k) - f(\bar{x})}{t_k^2} = \frac{1}{2} \frac{(x_k - \bar{x})^\top}{t_k} \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \frac{x_k - \bar{x}}{t_k} + \left\| \frac{x_k - \bar{x}}{t_k} \right\|^2 \varepsilon_k$$

Un passage à la limite dans l'inégalité précédente tout en notant que $(x_k - \bar{x})/t_k \rightarrow \theta'(0) = d$ achève la démonstration. ■

Exemple 3.10 ([14])

Reprenons l'exemple 3.8, il nous reste à vérifier l'optimalité des deux points $(-\frac{1}{1+u}, u-1)$ où u est une racine réelle de l'équation $2u^3 + 2u^2 - 2u - 3 = 0$ et $(-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2})$.

Pour le premier point $\bar{x} = (-\frac{1}{1+u}, u-1)$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 L(\bar{x}, u) &= \nabla^2 f(\bar{x}) + u \nabla^2 g_2(\bar{x}) \\ &= \begin{bmatrix} -2u-2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice hessienne du Lagrangien, dans ce cas, est définie négative, donc le point $(-\frac{1}{1+u}, u-1)$ n'est pas un minimum local.

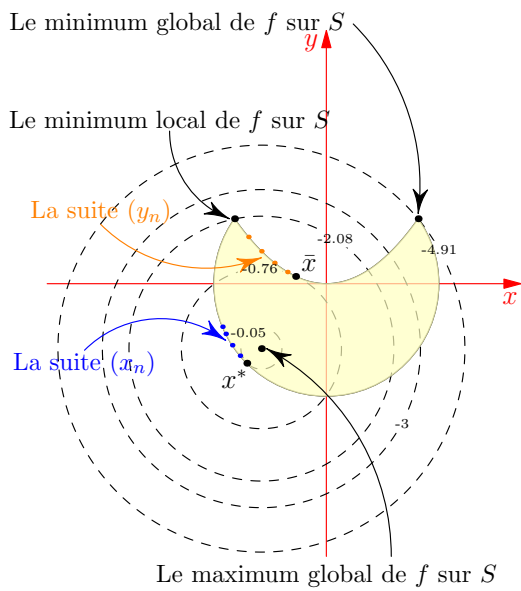


FIGURE 3.30 – L'ensemble S (en jaune) ainsi que les contours de la fonction objectif de l'exemple 3.10. Les points x^* et \bar{x} vérifient la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre par contre les conditions nécessaires du second ne sont pas satisfaites en ces points. On note que la suite (x_n) est admissible, elle converge vers x^* et vérifie $f(x_n) < f(x^*)$. De même, la suite (y_n) qui converge vers \bar{x} est admissible et satisfait $f(y_n) < f(\bar{x})$.

Pour le second point $x^* = (-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2})$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 L(x^*, 1 - \sqrt{2/3}) &= \nabla^2 f(x^*) + (1 - \sqrt{2/3}) \nabla^2 g_1(x^*) \\ &= \begin{bmatrix} -2\sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2/3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le second point x^* n'est pas un minimum local, il ne vérifie pas la condition d'optimalité du Théorème 3.11.

Une autre manière de démontrer la non optimalité de ces deux points est illustrée dans la FIGURE 3.30.

Exemple 3.11

Considérons le problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser}_{(x,y)} & -\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(y+1)^2 \\ \text{s.c.} & x^2 + y^2 \leq 2, \\ & y \leq 1. \end{cases} \quad (3.77)$$

Le problème (3.77) n'est pas convexe car il s'agit de minimiser une fonction concave sur un ensemble convexe. Il admet au moins une solution car l'ensemble des contraintes est compact. D'autre part, les fonctions définissant les contraintes sont convexes et il existe un point strictement admissible (l'origine par exemple), par conséquent les conditions de KKT sont, dans ce cas, nécessaires. Pour déterminer les points de KKT, on doit résoudre le système d'équations suivant

$$-(x+1) + u_1 x = 0, \quad (3.78a)$$

$$-(y+1) + u_1 y + u_2 = 0, \quad (3.78b)$$

$$u_1(x^2 + y^2 - 2) = 0, \quad (3.78c)$$

$$u_2(y-1) = 0. \quad (3.78d)$$

Pour cela, on discutera les solutions en fonction du signe des multiplicateurs u_1 et u_2 :

Cas 1) $u_1 > 0$ et $u_2 > 0$, les équations (3.78c) et (3.78d) donnent $y = 1$ et $x = \pm 1$. En remplaçant dans (3.78a) x par -1 on obtient $u_1 = 0$, ce qui est impossible. En substituant x par 1 dans (3.78a), on trouve $u_1 = 2$ et l'équation (3.78b) nous donne $u_2 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $u_2 > 0$.

Cas 2) $u_1 > 0$ et $u_2 = 0$, on doit avoir $x^2 + y^2 = 2$. Les équations

tions (3.78a) et (3.78b) donnent $x = y = \frac{1}{u_1 - 1}$. On obtient donc $(u_1 - 1)^2 = 1$. Par suite $u_1 = 2$ est la seule solution possible. Le point $(1, 1)$ est admissible, par conséquent c'est un point de KKT avec $(u_1, u_2) = (2, 0)$ comme multiplicateur de Lagrange.

Cas 3) $u_1 = 0$ et $u_2 > 0$, on a $y = 1$. Les équations (3.78a) et (3.78b) impliquent $x = -1$ et $u_2 = 2$. Le point $(-1, 1)$ étant admissible, c'est aussi un point de KKT avec $(0, 2)$ comme multiplicateur de Lagrange.

Cas 4) $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$, on obtient facilement des deux premières équations $x = -1$ et $y = -1$. Le point $(-1, -1)$ est admissible, c'est un point de KKT avec $(0, 0)$ comme multiplicateurs de Lagrange.

On obtient ainsi trois points de KKT, à savoir

$(1, 1)$	avec $(2, 0)$ comme multiplicateur de Lagrange
$(-1, 1)$	avec $(0, 2)$ comme multiplicateur de Lagrange
$(-1, -1)$	avec $(0, 0)$ comme multiplicateur de Lagrange

En examinant la FIGURE 3.31, on s'aperçoit que le point $(-1, -1)$ est le maximum global de f sur S (d'ailleurs c'est le maximum global de f sur tout \mathbb{R}^2). Le point $(1, 1)$ est un minimum global de f sur S . Par contre le point $(-1, 1)$ n'est pas un minimum local (la suite $(x_n, y_n) = (-1 + \frac{1}{n}, 1)$) est admissible, elle converge vers $(-1, 1)$ et vérifie $f(x_n, y_n) < f(-1, 1)$.

Sans utiliser le dessin, on peut vérifier la non optimalité des points $(-1, -1)$ et $(-1, 1)$ en utilisant les conditions du second ordre.

▷ Pour le point $(-1, -1)$, le Lagrangien vérifie $L(x, y) = f(x, y)$ car la seule contrainte active est g_1 avec $u_1 = 0$. Aussi, l'ensemble \mathcal{C} est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(d_1, d_2) : \langle \nabla g_1(-1, -1), (d_1, d_2) \rangle \leq 0\} \\ &= \{(d_1, d_2) : -2d_1 - 2d_2 \leq 0\} \\ &= \{(d_1, d_2) : d_1 + d_2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

La matrice hessienne du Lagrangien au point $(-1, -1)$ est

$$\nabla^2 L(-1, -1) = \nabla^2 f(-1, -1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donc pour $d = (d_1, d_2) \in \mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$d^\top \nabla^2 L(-1, -1) d = -d_1^2 - d_2^2 < 0.$$

D'où $(-1, -1)$ ne vérifie la condition nécessaire du second ordre. D'après le Théorème 3.11 $(-1, -1)$ n'est pas un minimum local.

▷ Pour le point $(-1, 1)$ les deux contraintes sont actives mais $u_1 = 0$, on obtient alors

$$L(x, y) = f(x, y) + 2g_2(x, y).$$

Par suite

$$\nabla^2 L(-1, 1) = \nabla^2 f(-1, 1) + 2\nabla^2 g_2(-1, 1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, l'ensemble \mathcal{C} sera donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(d_1, d_2) : \langle \nabla g_1(-1, 1), (d_1, d_2) \rangle \leq 0, \\ &\quad \langle \nabla g_2(-1, 1), (d_1, d_2) \rangle = 0\} \\ &= \{(d_1, d_2) : -2d_1 + 2d_2 \leq 0, d_2 = 0\} \\ &= \{(d_1, 0) : d_1 \geq 0\}. \end{aligned}$$

On s'aperçoit, de la même façon que la condition du second ordre n'est pas satisfaite en ce point. Par suite, ce point ne présente pas un minimum local.

On déduit, enfin, que le point $(1, 1)$ est le minimum global du problème (3.77).

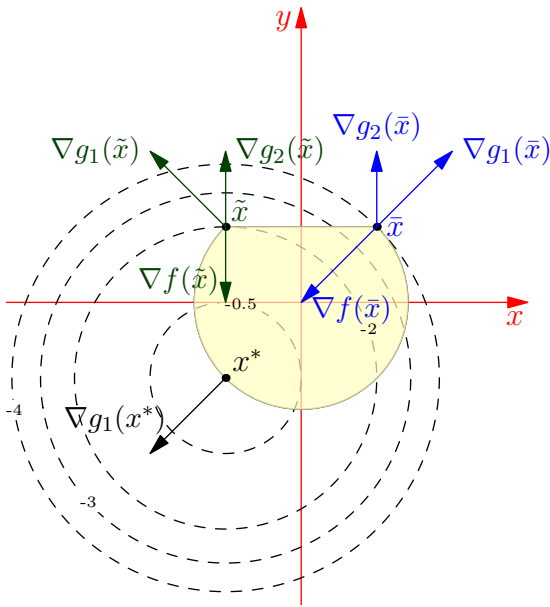


FIGURE 3.31 – L'ensemble S (en jaune) ainsi que les contours de la fonction objectif de l'exemple 3.11. Les trois points x^* , \tilde{x} et \bar{x} vérifient la condition que le vecteur opposé du gradient de la fonction objectif en ces points appartient au cône convexe engendré par les vecteurs gradients des contraintes actives en ces points. Ce sont des points de KKT. On remarque aussi que le point \bar{x} est le seul minimum global de f sur S .

Dualité Lagrangienne

4.1 Introduction

La notion de dualité intervient dans de nombreux domaines des mathématiques, tels que la théorie des groupes, la théorie des nombres, les processus stochastiques, les mathématiques financières et physiques, la théorie du contrôle ou encore l'analyse fonctionnelle. Dans ce chapitre, nous étudions ce concept dans le cadre de l'optimisation, en nous concentrant plus spécifiquement sur la dualité lagrangienne. De manière informelle, le principe de dualité consiste à déduire la validité de certaines propriétés à partir d'autres, par un échange systématique de deux notions fondamentales. En optimisation, ces notions sont le *minimum* et le *maximum*.

Plus rigoureusement, à tout problème de minimisation, appelé *problème primal*, on associe un problème de maximisation, appelé *problème dual*. L'étude conjointe de ces deux problèmes met en évidence des relations structurelles entre leurs ensembles de solutions et leurs valeurs optimales. La construction du problème dual associé au problème primal présente plusieurs intérêts majeurs :

1. elle permet d'établir l'existence de solutions au problème primal ;
2. elle offre un moyen d'obtenir ces solutions à partir de celles du problème dual, lorsque ce dernier est plus facile à résoudre ;
3. elle fournit des bornes sur la valeur optimale du problème primal, facilite l'analyse de sensibilité (en étudiant l'impact des perturbations des données) et permet d'énoncer des conditions d'optimalité ;
4. elle constitue un outil essentiel pour la conception d'algorithmes performants de résolution du problème primal.

4.2 Principe de relaxation

Considérons le problème de minimisation suivant

$$(Q) \quad \begin{cases} \text{Minimiser}_x f(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in S, \end{cases}$$

où S est une partie de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Au problème (Q) on associe un autre problème qu'on note (Q_r) et qu'on appelle un problème relaxé de (Q) :

$$(Q_r) \quad \begin{cases} \text{Minimiser}_x f_r(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in S_r, \end{cases}$$

où l'ensemble S_r est une partie de \mathbb{R}^n contenant S et $f_r : S_r \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant $f_r(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in S$.

Le résultat suivant montre la relation qui existe entre les solutions du problème initial et son problème relaxé.

Proposition 4.1

Si (Q) et (Q_r) désigne les problèmes cités précédemment alors on a

1. $f_r^* := \inf_{S_r} f_r \leq f^* := \inf_S f$.
2. si le point x_r^* est une solution du problème (Q_r) qui vérifie $x_r^* \in S$ et $f_r(x_r^*) = f(x_r^*)$ alors il est aussi solution du problème (Q) .

Démonstration. Pour montrer le premier point, il suffit de montrer que f_r^* est un minorant de $f(S)$. Soit x un élément de S , il appartient aussi à S_r ($S \subset S_r$), donc $f_r^* \leq f(x)$.

La démonstration de la seconde affirmation est facile (il suffit d'utiliser la définition de l'optimalité). ■

Ce résultat sera utilisé dans la suite pour motiver l'utilisation de la relaxation lagrangienne et les pénalisations pour établir des conditions d'optimalité et l'élaboration de certains algorithmes pour déterminer des points qui vérifient ces conditions.

4.3 Dualité Lagrangienne

Dans cette section on considère la dualité lagrangienne en introduisant le problème dual associé à un problème qu'on appelle primal. On établit un théorème de dualité faible, la définition d'un multiplicateur de Lagrange ainsi que le saut de dualité seront donnés.

Considérons le problème de minimisation suivant qu'on appellera par la suite *problème primal*

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in X, \\ g(x) \leq 0, \\ h(x) = 0. \end{cases}$$

L'ensemble X est une partie non vide de \mathbb{R}^n . Les fonctions f , g et h sont définies sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^ℓ respectivement.

On associe au problème (P) la fonction $L : \mathbb{R}^{n+m+\ell} \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on définit comme suit

$$L(x, u, v) := f(x) + u^\top g(x) + v^\top h(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{\ell} v_i h_i(x).$$

La fonction L est appelée *Lagrangien* ou *fonction lagrangienne* associé au problème (P).

L'ensemble X est généralement égal à l'espace \mathbb{R}^n tout entier et parfois il contient des contraintes faciles à gérer. On remarque aussi que le Lagrangien dépend du choix de l'ensemble X , si on décide de mettre quelques unes des fonctions g_i ou h_i dans l'ensemble X on obtient des fonctions lagrangienne différentes comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.1

Soit le problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } 3x + 2y + z \\ \text{s.c.} \\ 2x + y - z \leq 2 \\ x + 2y \leq 4 \\ z \leq 3 \\ x, y, z \geq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Si on prend $X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z \leq 2, x, y, z \geq 0\}$ on

obtient

$$\begin{aligned}L_1(x, y, z, u) &= 3x + 2y + z + u_1(x + 2y - 4) + u_2(z - 3) \\ &= (3 + u_1)x + (2 + 2u_1)y + (1 + u_2)z - 4u_1 - 3u_2.\end{aligned}$$

Par contre si l'ensemble X est défini par

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y \leq 4, x, y, z \geq 0\},$$

alors la fonction lagrangienne L devient

$$\begin{aligned}L_2(x, y, z, u) &= 3x + 2y + z + u_1(2x + y - z - 2) + u_2(z - 3) \\ &= (3 + 2u_1)x + (2 + u_1)y + (1 - u_1 + u_2)z - 2u_1 - 3u_2.\end{aligned}$$

Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^ℓ respectivement tels que $u \geq 0$. Considérons le problème de minimisation suivant

$$(P_{u,v}) \quad \begin{cases} \underset{x}{\text{Minimiser}} L(x, u, v) \\ \text{s.c.} \\ x \in X. \end{cases}$$

En posant $S = \{x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$, $f_r(x) = L(x, u, v)$ et $S_r = X$, le lecteur peut vérifier sans peine que le problème $P_{u,v}$ est une relaxation du problème (P) d'où le nom de relaxation lagrangienne. Donc, d'après la Proposition 4.1 on obtient que si x^* est une solution du problème $P_{u,v}$ vérifiant $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$ et $f(x^*) = L(x^*, u, v)$ alors x^* sera aussi une solution du problème (P) . Ceci motive la définition suivante.

Définition 4.1

Un vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$ est appelé *multiplicateur de Lagrange* si $u \geq 0$ et

$$f^* := \inf_{x \in S} f(x) = \inf_{x \in X} L(x, u, v).$$

La proposition suivante est une conséquence directe de la Définition 4.1.

Proposition 4.2

Soit (\bar{u}, \bar{v}) un multiplicateur de Lagrange. Le point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est une solution optimale du problème (P) si et seulement s'il est

admissible pour (P) ($\bar{x} \in S$), il représente une solution optimale du problème $(P_{\bar{u}, \bar{v}})$ et il vérifie $\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$ pour i allant de 1 à m .

Démonstration. Supposons que \bar{x} soit une solution du problème (P) , c'est à dire $\bar{x} \in S$ et

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in S} f(x) = \inf_{x \in X} L(x, \bar{u}, \bar{v}). \quad (4.2)$$

La deuxième égalité dans la relation précédente correspond au fait que (\bar{u}, \bar{v}) est un multiplicateur de Lagrange.

Commençons par montrer que $\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in X} L(x, \bar{u}, \bar{v})$. Il est clair que $\bar{x} \in X$, d'autre part on a

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) &= f(\bar{x}) + \bar{u}^\top g(\bar{x}) + \bar{v}^\top h(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \bar{u}^\top g(\bar{x}) && (\text{car } h(\bar{x}) = 0) \\ &\leq f(\bar{x}) && (\text{car } \bar{u}^\top g(\bar{x}) \leq 0) \\ &= \inf_{x \in X} L(x, \bar{u}, \bar{v}). && (\text{voir (4.2)}) \end{aligned}$$

On vient de démontrer que $f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$, ce qui nous permet de déduire que $\bar{u}^\top g(\bar{x}) = 0$, cette dernière égalité est équivalente à $\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

Réciproquement, soit \bar{x} un élément de S tel que

$$\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in X} L(x, \bar{u}, \bar{v}) \text{ et } \bar{u}^\top g(\bar{x}) = 0.$$

Montrons que \bar{x} est une solution de (P) , soit x un élément de S on a alors

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), && [\text{car } \bar{u}^\top g(\bar{x}) = 0 \text{ et } h(\bar{x}) = 0] \\ &\leq L(x, \bar{u}, \bar{v}), && [\text{car } \bar{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in X} L(x, \bar{u}, \bar{v})] \\ &\leq f(x). && [\text{car } \bar{u}^\top g(x) \leq 0 \text{ et } h(x) = 0] \end{aligned}$$

■

D'après la proposition précédente, pour résoudre le problème (P) il suffit de déterminer un multiplicateur de Lagrange (u, v) puis résoudre le problème $(P_{u, v})$ qui est supposé plus facile que (P) , pour enfin déduire que si cette solution vérifie les contraintes et la condition de complémentarité $u^\top g(x) = 0$ alors elle sera une solution de notre problème de départ. Remarquons toutefois que si les contraintes d'inégalité sont absentes alors toute solution du problème (P_v) (admissible pour (P)) sera solution du problème initial pourvu que v soit un multiplicateur de Lagrange.

La question qui se pose maintenant est comment déterminer un multiplicateur de Lagrange ?

Pour pouvoir donner des éléments de réponse à la question précédente considérons la fonction $\theta : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ qu'on définit par

$$\theta(u, v) := \inf_{x \in X} L(x, u, v).$$

La fonction θ est appelée *fonction duale* associée à la fonction lagrangienne L . On définit le domaine effectif de θ comme étant l'ensemble des vecteurs $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$ tels que $\theta(u, v) > -\infty$.

Le problème dual, qu'on note (D) , associé au problème primal (P) s'écrit alors

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Maximiser } \theta(u, v) \\ \text{s.c.} \\ u \geq 0. \end{cases}$$

On dit que le problème dual (D) est non admissible si le domaine effectif de θ est vide, c'est à dire la fonction θ est identiquement égale à $-\infty$.

On remarque que le problème (D) admet des contraintes de positivité très facile à gérer. De plus, c'est un problème convexe¹ puisque la fonction θ est concave, comme on va le voir par la suite. Cependant, la fonction θ n'est pas définie explicitement et elle n'est pas en général différentiable. Pour déterminer une solution du problème (D) on doit faire recours à des méthodes d'optimisation non différentiable.

Exemple 4.2

1. Considérons le problème de minimisation unidimensionnel suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) := x \\ \text{s.c.} \\ g(x) = e^x - 1 \leq 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Le problème ci-dessus est non borné, sa valeur minimale vaut $-\infty$. Un calcul simple donne $\theta(u) = -\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Le fait que la fonction θ prend la valeur $-\infty$ pour $u \geq 0$ découle du Théorème de dualité faible (Théorème 4.3).

2. Soit le problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) := \ln(|x|) \\ \text{s.c.} \\ g(x) = 1 - x^2 \leq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Le problème (4.4) admet deux solutions $x = 1$ et $x = -1$ (voir FIGURE 4.1) avec $\inf(P) = 0$. Bien que le problème

1. Le problème (D) est convexe même si le problème (P) ne l'est pas. Par contre les problèmes $(P_{u,v})$ ne seront convexes que si le problème (P) l'est.

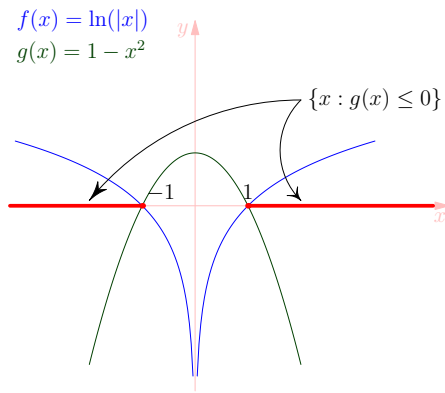


FIGURE 4.1 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln|x|$ ainsi que l'ensemble $\{x : 1 - x^2 \leq 0\}$.

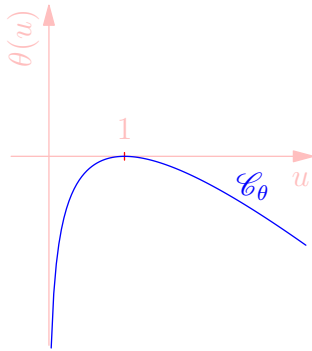


FIGURE 4.2 – Graphe de la fonction $\theta(u) = \ln u - u + 1$.

primal admet une solution, la fonction duale θ est identiquement égale à $-\infty$ ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + ug(x) = -\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}$).

3. Si, dans le problème (4.3), on prend $f(x) = -x$ alors la valeur minimale du nouveau problème sera égale à 0. On a

$$\theta(u) = \inf_{x \in \mathbb{R}} -x + u(e^x - 1). \quad (4.5)$$

Pour les valeurs négatives de u on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + u(e^x - 1) = -\infty,$$

Donc $\theta(u) = -\infty$ pour $u \leq 0$. Pour les valeurs de u strictement positives, la fonction $x \mapsto -x + u(e^x - 1)$ est convexe, elle admet un unique point critique en $x = -\ln u$, par suite $\theta(u) = \ln u - u + 1$. Au final, on a

$$\theta(u) = \begin{cases} -\infty & \text{si } u \leq 0 \\ \ln u - u + 1 & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

La résolution du problème dual consiste à maximiser la fonction θ sur l'ensemble $]0, +\infty[$, ce dernier admet une solution unique $\bar{u} = 1$ et 0 comme valeur maximale (voir Figure 4.2). On remarque ici qu'on a $\inf(P) = \sup(D)$, il s'agit d'une conséquence d'un résultat plus général appelé «théorème de la dualité forte» comme on le verra plus tard.

Exemple 4.3

On reprend l'exemple 4.1, pour simplifier les calculs, on se limite à déterminer la fonction θ pour les valeurs positives de u_1 et u_2 puisque le problème dual consiste à maximiser cette fonction sur l'ensemble $u \geq 0$.

Pour θ_1 on a

$$\theta_1(u_1, u_2) = \inf_{(x,y,z) \in X_1} L_1(x, y, z, u_1, u_2).$$

Comme la fonction L_1 est linéaire en (x, y, z) alors le min est atteint en $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ (remarquer que les coefficients de la fonction linéaires sont positifs et le point $(0, 0, 0)$ est admissible), donc on obtient

$$\theta_1(u_1, u_2) = -4u_1 - 3u_2, \quad \text{pour } u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$$

Le problème dual associé consiste à maximiser $\theta_1(u_1, u_2)$ sous les contraintes $u_1 \geq 0$ et $u_2 \geq 0$. La solution est bien sûr $(u_1, u_2) = (0, 0)$.

Pour θ_2 on a

$$\theta_2(u_1, u_2) = \inf_{(x,y,z) \in X_2} L_2(x, y, z, u_1, u_2).$$

La fonction L_2 est aussi linéaire en (x, y, z) , cependant le coefficient correspondant à la variable z peut prendre des valeurs négatives. De ce fait, on obtient

$$\theta_2(u_1, u_2) = \begin{cases} -2u_1 - 3u_2 & \text{si } u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1 \\ -\infty & \text{si } u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 > 1. \end{cases}$$

Dans ce cas, la formulation du problème dual devient

$$\begin{cases} \text{Maximiser } -2u_1 - 3u_2 \\ \quad \quad \quad (u_1, u_2) \\ \text{s.c} \\ u_1 + u_2 \leq 1 \\ u_1, u_2 \geq 0, \end{cases}$$

dont la solution est évidemment $(0, 0)$.

La proposition suivante montre que le problème dual (D) est toujours convexe, il s'agit de maximiser une fonction concave sur un ensemble convexe.

Proposition 4.3

La fonction $\theta : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est concave.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la fonction θ est l'enveloppe inférieure de la famille de fonctions affines $\ell_x : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\ell_x(u, v) = f(x) + u^\top g(x) + v^\top h(x) \text{ pour } x \in X. \quad \blacksquare$$

4.4 Interprétation géométrique de la dualité

Pour pouvoir interpréter géométriquement la dualité, on considère un problème de minimisation avec une seule contrainte d'inégalité.

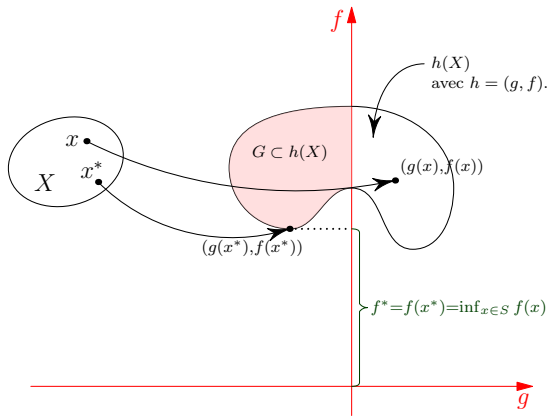


FIGURE 4.3 – Interprétation géométrique de la notion de dualité lagrangienne. Calcul de la valeur optimale du problème primal f^* .

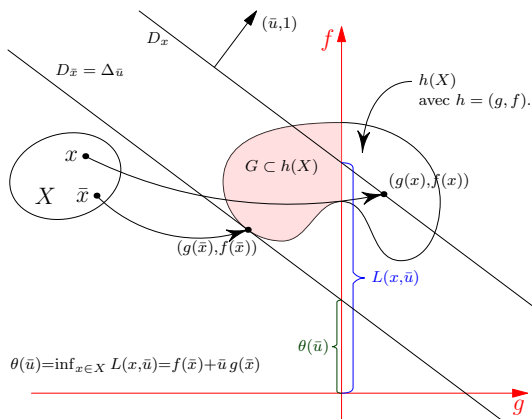


FIGURE 4.4 – Interprétation géométrique de la notion de dualité lagrangienne. Calcul de la valeur de $\theta(\bar{u})$ pour un \bar{u} donné.

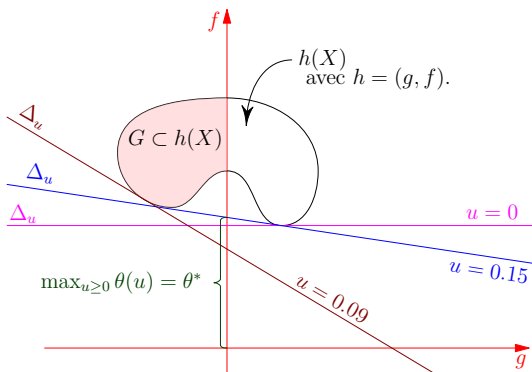


FIGURE 4.5 – Calcul de la valeur optimale duale.

Soit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $h(x) = (g(x), f(x))$. L'image directe de l'ensemble X par l'application h est représenté graphiquement dans la FIGURE 4.3. L'ensemble G représenté en rouge sur la FIGURE 4.3 est donné par

$$G = \{(g(x), f(x)) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} : \}$$

Le problème primal consiste à trouver $x^* \in X$ tel que $(g(x^*), f(x^*)) \in G$ et $f(x^*)$ ayant la valeur la plus petite possible, c'est à dire qu'il n'existe pas de $\bar{x} \in X$ tel que $(g(\bar{x}), f(\bar{x})) \in G$ et $f(\bar{x}) < f(x^*)$. La valeur f^* correspondant à la valeur optimale du primal se calcule facilement comme indiqué sur la FIGURE 4.3.

Pour déterminer $\theta(\bar{u})$ graphiquement pour $\bar{u} \geq 0$ donné, on commence d'abord par calculer $L(x, \bar{u})$ où x est un élément de X fixé. Pour cela on considère la droite qui passe par le point $(g(x), f(x))$ et orthogonale au vecteur $(\bar{u}, 1)$, qu'on note par la suite (D_x) (voir FIGURE 4.4). Le nombre $L(x, \bar{u})$ coïncide avec l'ordonnée du point de l'intersection de la droite (D_x) avec l'axe vertical. En effet, si $(0, y_x)$ est ce point alors les vecteurs $(g(x), f(x)) - (0, y_x)$ et $(\bar{u}, 1)$ sont orthogonaux. Par suite, leur produit scalaire est nul, ce qui se traduit par $y_x = f(x) + \bar{u}g(x) = L(x, \bar{u})$. Pour déterminer $\theta(\bar{u})$, il faut choisir les points x qui rendent la valeur y_x minimale. Pour se faire, on considère toutes les droites parallèles à (D_x) intersectant l'ensemble $h(X)$ et choisir celle rendant la valeur y_x la plus petite possible. On remarque, en regardant la FIGURE 4.4, que la droite qu'on a noté $\Delta_{\bar{u}}$ correspondant à la solution optimale du problème de minimiser $L(x, \bar{u})$ pour $x \in X$ coïncide avec l'hyperplan d'appui inférieur à l'ensemble $h(X)$, c'est à dire l'hyperplan qui laisse l'ensemble $h(X)$ dans son demi-espace supérieur.

Pour déterminer la solution du problème dual, il faut remarquer qu'à chaque fois qu'on change la valeur de u , c'est la pente de la droite qui change (voir FIGURE 4.5). Pour chaque droite Δ_u , la valeur de $\theta(u)$ est l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe Ow . Je vous laisse deviner comment trouver la solution du dual. La question qu'on se pose maintenant est comment peut-on dessiner l'ensemble $h(X)$ qui est une partie de \mathbb{R}^2 . Si l'ensemble X est une partie de \mathbb{R} , c'est à dire si le problème d'optimisation est unidimensionnel alors l'ensemble $h(X)$ est une courbe de \mathbb{R}^2 qu'on peut dessiner en utilisant un logiciel de dessin. Par contre si l'ensemble X est une partie de \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$ alors si l'ensemble $A_\alpha = \{(g(x), f(x)) : x \in X, g(x) = \alpha\}$ est convexe dans \mathbb{R}^2 pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ alors en calculant les fonction $\alpha \mapsto v(\alpha)$ et $\alpha \mapsto w(\alpha)$ définies par

$$v(\alpha) = \inf_{x \in X_\alpha} f(x), \quad w(\alpha) = \sup_{x \in X_\alpha} f(x)$$

où $X_\alpha = \{x \in X : g(x) = \alpha\}$, on s'aperçoit que $v(\alpha) \leq w(\alpha)$ pour tout

α tel que $X_\alpha \neq \emptyset$. Dans ces conditions, l'ensemble $h(X)$ s'écrit alors

$$h(X) = \{(\alpha, \beta) \in D \times \mathbb{R} : v(\alpha) \leq \beta \leq w(\alpha)\},$$

où $D = \{\alpha \in \mathbb{R} : X_\alpha \neq \emptyset\}$.

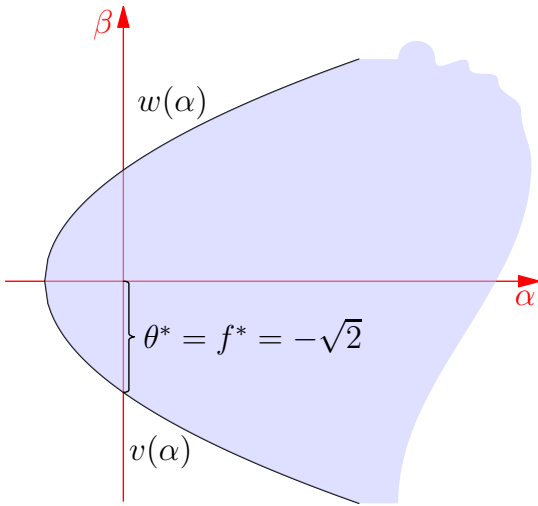


FIGURE 4.6 – Interprétation géométrique de la notion de dualité lagrangienne. Calcul de la valeur optimale θ^* .

Exemple 4.4

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } x + y \\ \text{s.c} \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Le problème (4.6) admet le point $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ comme solution optimale (voir FIGURE 4.6) et $f^* = -\sqrt{2}$ comme valeur optimale. Pour ce problème on a $X = \mathbb{R}^2$, en posant $h(x, y) = (x^2 + y^2 - 1, x + y)$ on se propose de déterminer l'image de \mathbb{R}^2 par h , c'est à dire l'ensemble

$$h(\mathbb{R}^2) = \{(x^2 + y^2 - 1, x + y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble A_α est donné par

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{(\alpha, x + y) : x^2 + y^2 = 1 + \alpha\} \\ &= \{(\alpha, x + \sqrt{1 + \alpha - x^2}) : -\sqrt{1 + \alpha} \leq x \leq \sqrt{1 + \alpha}\} \end{aligned}$$

Calcul de $v(\alpha)$ et $w(\alpha)$:

pour $\alpha < -1$ on a $X_\alpha = \emptyset$, donc $v(\alpha) = +\infty$ et $w(\alpha) = -\infty$.

Pour $\alpha \geq -1$, X_α est un cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt{1 + \alpha}$. Par suite

$$v(\alpha) = -\sqrt{2(1 + \alpha)},$$

$$w(\alpha) = \sqrt{2(1 + \alpha)}.$$

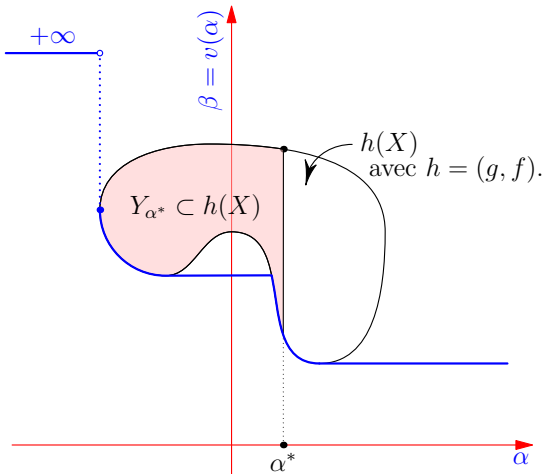


FIGURE 4.7 – Graphe de la fonction $\alpha \mapsto v(\alpha)$. On voit bien que cette fonction est décroissante, elle vaut $+\infty$ pour les valeurs de α telles que $Y_\alpha = \emptyset$. La valeur $v(0)$ coïncide avec f^* .

On peut donner une autre interprétation qui fournit un outils assez important pour analyser ce concept de dualité. Au problème considéré plus haut on associe la fonction définie par

$$v(\alpha) = \inf \{f(x) : g(x) \leq \alpha, x \in X\}.$$

Cette fonction est appelée *fonction de perturbation*, elle représente la valeur optimale d'un problème d'optimisation issu du problème

d'origine en perturbant le second membre de la contrainte $g(x) \leq 0$. Notons que cette fonction est décroissante. En effet, en posant $Y_\alpha = \{x \in X : g(x) \leq \alpha\}$ on s'aperçoit que l'ensemble Y_α devient plus grand dès que α croît. Par suite, la valeur minimale de f sur cet ensemble devient plus petite. L'illustration graphique 4.9 montre que cette fonction est l'enveloppe inférieure de l'ensemble $h(X)$ pour les valeurs de α telles que $Y_\alpha \neq \emptyset$.

4.5 Dualité et points selles du Lagrangien

Dans cette section on examine de près les différentes relations qui lient les solutions et les valeurs optimales des problèmes primal et dual. Le théorème suivant nous dit que chaque valeur d'un point admissible du dual est un minorant de la valeur optimale du primal et vice versa.

Certains algorithmes nécessitent la connaissance au préalable d'un minorant de la valeur optimale pour pouvoir fonctionner. Toute valeur prise par la fonction duale présente un tel minorant. Le corollaire 4.1 nous permet de conclure, sous certaines hypothèses de régularité, que si (u_k, v_k) est une suite telle que $u_k \geq 0$ et (x_k) une suite telle que $|f(x_k) - \theta(u_k, v_k)|$ tend vers 0. Alors tout points d'accumulation (\bar{u}, \bar{v}) et \bar{x} des suites (u_k, v_k) et (x_k) respectivement sont solutions du dual et du primal dès que $\bar{x} \in S$.

Théorème 4.1 (Théorème de dualité faible)

Soit \bar{x} un point admissible pour le problème primal (P), c'est à dire $\bar{x} \in X$, $g(\bar{x}) \leq 0$ et $h(\bar{x}) = 0$ et (\bar{u}, \bar{v}) un point admissible pour le problème dual (D), c'est à dire $\bar{u} \geq 0$. Alors on a

$$\theta(\bar{u}, \bar{v}) \leq f(\bar{x}).$$

On obtient en particulier

$$\theta(\bar{u}, \bar{v}) \leq \inf_{x \in S} f(x)$$

et

$$\theta^* = \sup_{\substack{(u,v) \\ u \geq 0}} \theta(u, v) \leq \inf_{x \in S} f(x) = f^* \quad (4.7)$$

où $S = \{x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$.

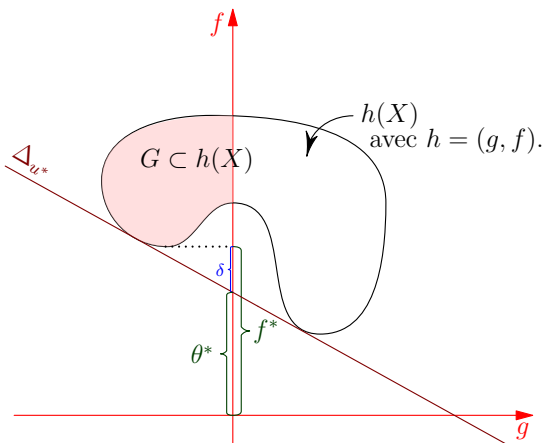


FIGURE 4.8 – Saut de dualité $\delta = f^* - \theta^*$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \theta(\bar{u}, \bar{v}) &= \inf_{x \in X} L(x, \bar{u}, \bar{v}) \\ &\leq L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \\ &= f(\bar{x}) + \underbrace{\bar{u}^\top g(\bar{x})}_{\leq 0} + \underbrace{\bar{v}^\top h(\bar{x})}_{=0} \\ &\leq f(\bar{x}). \end{aligned}$$

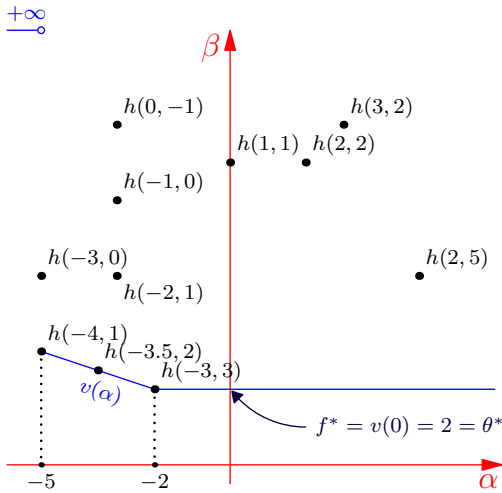


FIGURE 4.9 – Représentation graphique du problème 4.8.

La fonction $v(\alpha)$ est donnée par

$$v(\alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < -5 \\ -\frac{\alpha}{3} + \frac{4}{3} & \text{si } -5 \leq \alpha \leq -2 \\ 2 & \text{si } \alpha > -2. \end{cases}$$

On remarque que, pour ce problème, il n’y a pas de saut de dualité. Les points $(3, 2)$, $(2, 2)$ et $(2, 5)$ ne sont pas admissibles. La solution optimale du primal est $(-3, 3)$. La solution du dual est $u^* = 0$, elle correspond à la pente de la droite $\beta = 2$.

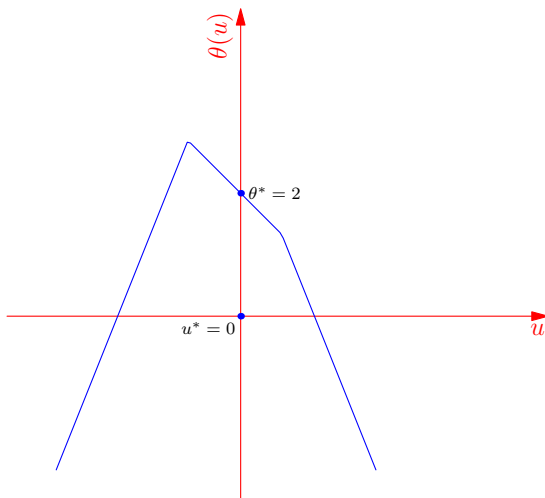


FIGURE 4.10 – Graphique de la fonction duale de l’exemple 4.5. Le maximum est atteint en $u^* = 0$ et la valeur optimale $\theta^* = 2$.

Corollaire 4.1

Soient $\bar{x} \in S$ et (\bar{u}, \bar{v}) deux points admissibles pour le primal et le dual respectivement tels que $f(\bar{x}) = \theta(\bar{u}, \bar{v})$ alors \bar{x} est une solution optimale du problème primal (P) et (\bar{u}, \bar{v}) est une solution optimale du dual (D) .

Corollaire 4.2

Si le problème primal (P) est non borné, c’est à dire $\inf_{x \in S} f(x) = -\infty$ alors $\theta(u, v) = -\infty$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^\ell$.

Corollaire 4.3

Si le problème dual (D) est non borné, c’est à dire $\sup \{ \theta(u, v) : u \geq 0 \} = +\infty$ alors le problème primal est non admissible, c’est à dire $S = \emptyset$.

Exemple 4.5

Soit le problème d’optimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x, y) = x - y + 8 \\ \text{s.c.} \\ (x, y) \in X \\ g(x, y) = x + y - 2 \leq 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

où

$$X = \{(-3, 0), (-3.5, 2), (-4, 1), (-3, 3), (-2, 1), (-1, 0), (0, -1), (2, 5), (3, 2), (1, 1), (2, 2)\}.$$

Il est facile, dans ce cas, de déterminer la solution optimale du problème 4.8. L’ensemble $S = \{(x, y) \in X : g(x, y) \leq 0\}$ est donné par

$$S = \{(-3, 0), (-3.5, 2), (-4, 1), (-3, 3), (-2, 1), (-1, 0), (1, -1), (3, -1)\}.$$

Par suite le calcul de $f(S)$ dans le même ordre donne

$$f(S) = \{5, 2.5, 3, 2, 5, 7, 9, 8\}.$$

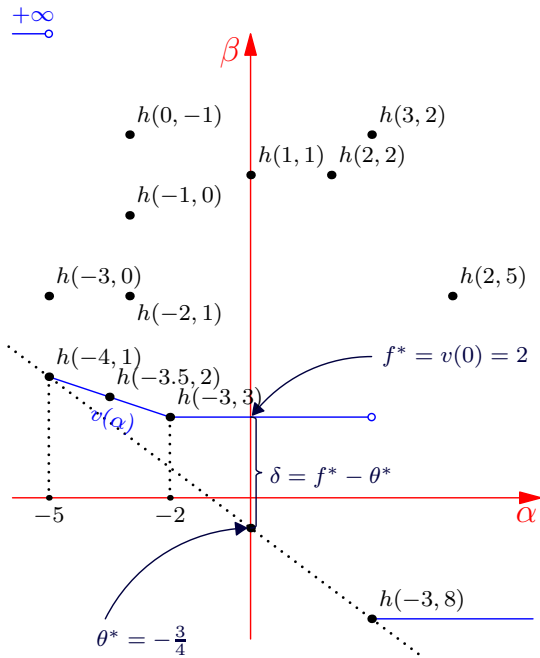


FIGURE 4.11 – Le rajout du point $(-3, 8)$ à l'ensemble X n'a eu aucun effet sur la solution du problème primal, ce qui est tout à fait normal car ce point n'est pas admissible. Par contre le problème dual a complètement changé : la fonction duale ainsi que la solution du problème dual ne sont plus les mêmes.

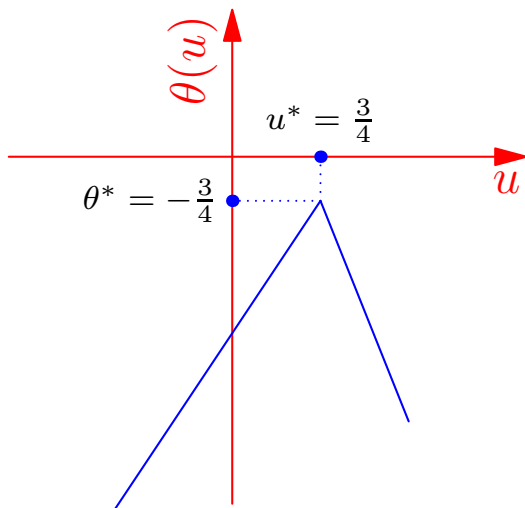


FIGURE 4.12 – Graphique de la fonction duale de l'exemple 4.5. Le maximum est atteint en $u^* = 0$ et la valeur optimale $\theta^* = 2$.

On remarque que la valeur optimale vaut 2. La solution optimale correspondante est $\mathbf{x}^* = (-3, 3)$.

L'interprétation graphique du problème (4.8) est illustrée dans la FIGURE 4.9. Pour déterminer le problème dual, on doit calculer la fonction θ . La fonction de Lagrange L est égale à $L(x, u) = (1 + u)x + (-1 + u)y + 8 - 2u$ et

$$\theta(u) = \begin{cases} 5u + 3 & \text{si } u \leq -\frac{3}{7} \\ -2u + 2 & \text{si } -\frac{3}{7} \leq u \leq \frac{1}{3} \\ -3u + 5 & \text{si } u \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Reconsidérons le problème (4.8) en rajoutant le point $(-3, 8)$ à l'ensemble X . La FIGURE 4.11 montre que pour ce nouveau problème la solution du problème primal est toujours égale à $(3, -3)$ avec une valeur optimale égale à 2. La fonction $\alpha \mapsto v(\alpha)$ a changé "un peu". La solution optimale du problème dual, quand à elle, a changé, est devenue $u^* = \frac{3}{4}$ avec une valeur optimale égale à $-\frac{3}{4}$. Un saut de dualité $\delta = \frac{11}{4}$ est apparu.

La fonction duale devient

$$\theta(u) = \begin{cases} 3u - 3 & \text{si } u \leq \frac{3}{4} \\ -5u + 3 & \text{si } u \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Elle est représentée graphiquement dans la FIGURE 4.12

Remarque 4.1

Il existe plusieurs façons de définir le dual d'un problème d'optimisation en considérant certaines contraintes comme faisant partie intégrante de l'ensemble X et d'autres intervenant explicitement dans la relaxation lagrangienne. Il n'y a pas de règles générales qui nous permettent de dire si une telle contrainte doit intégrer l'ensemble X ou faire partie du Lagrangien. Cependant, on remarque que rajouter plus de contraintes dans l'ensemble X nous permet d'avoir un saut de dualité plus faible et un nombre de multiplicateurs assez réduits. Mais, on se trouve confronté à des problèmes auxiliaires plus compliqués et plus difficiles à résoudre. L'intérêt de la relaxation Lagrangienne est d'avoir des problèmes auxiliaires plus simples et faciles à résoudre que le problème initial puisque l'idée de départ est de remplacer un problème avec contraintes par une suite de problèmes sans contraintes.

Le théorème suivant nous fournit une caractérisation d'une solution primale et duale. Le système est consistant si et seulement s'il existe

un multiplicateur de Lagrange et en absence de saut de dualité.

On peut déduire du Théorème 4.2 que si (u_k, v_k) est une suite telle que $u_k \geq 0$ et $x_k \in \operatorname{argmin}_{x \in X} L(x, u_k, v_k)$. En supposant que la suite $(u_k^\top g(x_k))$ converge vers 0, alors tout point d'accumulation (x^*, u^*, v^*) de la suite (x_k, u_k, v_k) est une solution primale-duale pourvu que $x^* \in S$.

Par exemple, si on prend $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$ alors le problème primal admet $x^* = 0$ comme solution optimale avec $f^* = 0$ comme valeur optimale. Le Lagrangien vaut $L(x, u) = x^2 - ux$, donc si (u_k) désigne une suite de nombres réels strictement positifs alors $x_k \in \operatorname{argmin}_x L(x, u_k)$ vérifie $x_k = \frac{u_k}{2}$. La quantité $g(x_k)u_k = \frac{u_k^2}{2}$ tend vers 0 si et seulement si $u_k \rightarrow 0$. Par suite la suite x_k tend aussi vers $x^* = 0$ la solution optimale du primal.

Théorème 4.2

Soit $(x^*, u^*, v^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$, alors x^* est une solution optimale de (P) et (u^*, v^*) est un multiplicateur de Lagrange si et seulement si

$$u^* \geq 0 \quad (\text{Admissibilité du dual}) \quad (4.9a)$$

$$x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in X} L(x, u^*, v^*) \quad (4.9b)$$

$$x^* \in S \quad (\text{Admissibilité du primal}) \quad (4.9c)$$

$$u^{*\top} g(x^*) = 0 \quad (\text{Conditions de complémentarité}). \quad (4.9d)$$

Démonstration.

(\Rightarrow) Il suffit de montrer les relations (4.9b) et (4.9d). On a alors

$$\begin{aligned} L(x^*, u^*, v^*) &= f(x^*) + u^{*\top} g(x^*) + v^{*\top} h(x^*) \\ &= f^* + u^{*\top} g(x^*) && (h(x^*) = 0) \\ &\leq f^* && (u^* \geq 0, g(x^*) \leq 0) \\ &= \inf_{x \in X} L(x, u^*, v^*). \end{aligned}$$

Ce qui montre la relation (4.9b).

Pour montrer l'égalité (4.9d), il suffit de remarquer qu'on a

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \inf_{x \in X} L(x, u^*, v^*) \\ &= L(x^*, u^*, v^*) \\ &= f(x^*) + u^{*\top} g(x^*) \quad (\text{car } h(x^*) = 0) \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Notons que les relations (4.9b), (4.9c) et (4.9d) entraînent l'égalité $L(x^*, u^*, v^*) = f(x^*)$. Par suite, si x^* est une solution optimale du primal alors d'après les relations (4.9a) et (4.9b) le vecteur (u^*, v^*) serait un multiplicateur de Lagrange.

Montrons que x^* est une solution optimale du problème primal

(P). Soit $x \in S$, On obtient alors

$$\begin{aligned}
 f(x^*) &= L(x^*, u^*, v^*) \\
 &\leq L(x, u^*, v^*) && (4.9b) \\
 &= f(x) + u^{*\top} g(x) + v^{*\top} h(x) \\
 &= f(x) + u^{*\top} g(x) && (h(x) = 0) \\
 &\leq f(x) && (u^{*\top} g(x) \leq 0).
 \end{aligned}$$

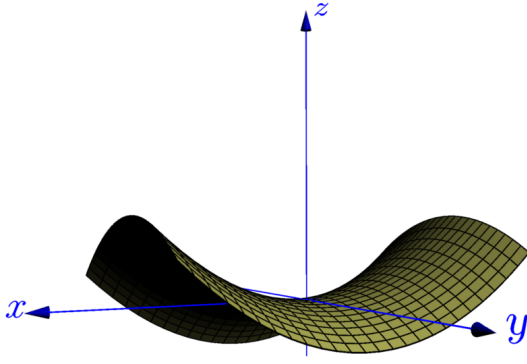


FIGURE 4.13 – Graphique de la fonction $F(x, y) = x^2 - y^2$, il ressemble à une selle d'un cheval. Le point $(0, 0)$ est un point selle pour cette fonction. On a $F(0, y) = -y^2 \leq F(0, 0) = 0 \leq x^2 = F(x, 0)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Maintenant, on va introduire la notion de point-selle, on dit qu'un vecteur (x^*, u^*, v^*) est un point-selle du Lagrangien L sur l'ensemble $X \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^\ell$ si et seulement si $x^* \in X$, $\mathbb{R}^m \ni u^* \geq 0$ et $v^* \in \mathbb{R}^\ell$ et la double inégalité suivante est vraie pour tout $x \in X$ et $(u, v) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^\ell$

$$L(x^*, u, v) \leq L(x^*, u^*, v^*) \leq L(x, u^*, v^*). \quad (4.10)$$

Dans le Théorème 4.3 on établit que les points selles du Lagrangien correspondent exactement aux solutions primales-duales.

Théorème 4.3

Un point (x^*, u^*, v^*) est un point selle du Lagrangien L si et seulement si les conditions (4.9) sont vérifiées.

Démonstration.

(\Rightarrow) Les conditions (4.9a) et (4.9b) sont vérifiées par définition du point selle.

Pour montrer la condition (4.9c), on utilise l'inégalité

$$f(x^*) + u^\top g(x^*) + v^\top h(x^*) \leq L(x^*, u^*, v^*) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^\ell.$$

Si $h(x^*) \neq 0$ alors il existe i tel que $h_i(x^*) \neq 0$ (disons que $h_i(x^*) < 0$). On obtient une contradiction en fixant u et toutes les composantes de v sauf v_i et en faisant tendre v_i vers $-\infty$ dans l'inégalité précédente.

De même, si $g(x^*) \not\leq 0$ alors il existe i tel que $g_i(x^*) > 0$ alors on obtient la même contradiction en fixant v et toutes les composantes du vecteur u sauf la $i^{\text{ème}}$ qu'on fait tendre vers $+\infty$. Donc $x^* \in S$.

Pour vérifier l'égalité (4.9d), l'inégalité de gauche de la relation (4.10) donne

$$u^\top g(x^*) \leq u^{*\top} g(x^*) \quad \text{pour tout } u \geq 0. \quad (4.11)$$

En choisissant $u = 0$ dans (4.11) on obtient $u^{*\top} g(x^*) \geq 0$. L'éga-

lité s'obtient en remarquant que $u^* \geq 0$ et $g(x^*) \leq 0$.

(\Leftarrow) Il suffit de montrer l'inégalité de gauche de la relation (62). Soit $u \in \mathbb{R}_+^m$ et $v \in \mathbb{R}^\ell$, on a

$$\begin{aligned}
 L(x^*, u^*, v^*) &= f(x^*) + u^{*\top} g(x^*) + v^{*\top} h(x^*) \\
 &= f(x^*) + u^{*\top} g(x^*) && (h(x^*) = 0) \\
 &= f(x^*) && (u^{*\top} g(x^*) = 0) \\
 &\geq f(x^*) + u^\top g(x^*) && (u^\top g(x^*) \leq 0) \\
 &= f(x^*) + u^\top g(x^*) + u^\top h(x^*) && (h(x^*) = 0) \\
 &= L(x^*, u, v).
 \end{aligned}$$

Corollaire 4.4

Un point (x^*, u^*, v^*) est un point selle du Lagrangien L si et seulement si x^* est une solution optimale du problème primal (P) et (u^*, v^*) est une solution du problème dual (D) .

Démonstration. C'est une application directe des Théorèmes 4.2 et 4.3. ■

4.5.1 Dualité en programmation convexe

Dans cette section on s'intéresse à étudier les conditions qui nous permettent d'obtenir un saut de dualité nul et nous garantissent l'existence de multiplicateurs de Lagrange. Nous allons établir dans le Théorème 4.4 que ceci est vrai dans le cas où le problème (P) est convexe et vérifie certaines conditions de régularité (conditions de qualification des contraintes).

Théorème 4.4

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées

- ▷ la quantité f^* est finie, c'est à dire $-\infty < f^* < +\infty^a$
- ▷ les fonctions f et g sont convexes,
- ▷ la fonction h est affine,
- ▷ l'ensemble X est convexe,
- ▷ $0 \in \text{int}(h(X))$ et

$$\text{il existe } \bar{x} \in X \text{ tel que } g(\bar{x}) < 0 \text{ et } h(\bar{x}) = 0. \quad (4.12)$$

alors on obtient :

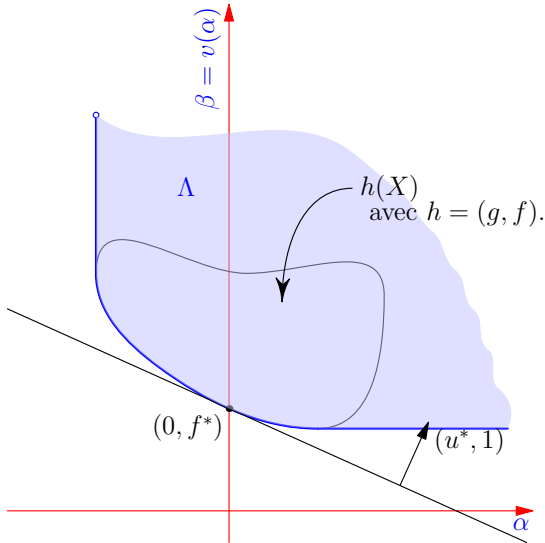


FIGURE 4.14 – L'ensemble Λ introduit dans la démonstration du Théorème 4.4 ainsi que son hyperplan d'appui au point $(0, f^*)$. Il correspond à l'épigraphe de la fonction $\alpha \mapsto v(\alpha)$ introduite précédemment.

1. il existe au moins un multiplicateur de Lagrange (u^*, v^*) (le saut de dualité est donc nul). De plus, l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange est convexe, sa projection sur \mathbb{R}^m est bornée.
2. s'il existe $x^* \in S$ tel que $f(x^*) = f^*$ alors le point (x^*, u^*, v^*) vérifie les conditions (4.9).
3. si les fonctions f et g sont différentiables alors la condition (4.9b) sera équivalente à l'inégalité variationnelle suivante

$$\nabla_x L(x^*, u^*, v^*)^\top (x - x^*) \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in X. \quad (4.13)$$

Si, de plus X est ouvert ($X = \mathbb{R}^n$ par exemple) alors la condition (4.13) s'écrit

$$\nabla_x L(x^*, u^*, v^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{\ell} v_i^* \nabla h_i(x^*) = 0,$$

et les conditions (4.9) se réduisent, tout simplement, aux conditions de KKT (3.33).

a. Cette hypothèse est équivalente au fait que l'ensemble S est non vide et la fonction f est bornée inférieurement sur ce dernier.

Démonstration.

1. On commence, dans un premier temps, par établir l'existence d'un multiplicateur de Lagrange. On considère l'ensemble

$$\Lambda := \{ (\alpha, \gamma, \beta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} : \exists x \in X \text{ vérifiant } g(x) \leq \alpha, \\ h(x) = \gamma \text{ et } f(x) \leq \beta \}.$$

L'ensemble Λ est convexe (facile à vérifier) et le point $(0, 0, f^*)$ se trouve sur sa frontière. En effet, on a $(0, 0, f^*) \in \text{cl}(\Lambda)$ car il existe une suite (x_n) d'éléments de S telle que $f(x_n) \rightarrow f^*$. On conclut que la suite $(0, 0, f(x_n))$ appartient à Λ et converge vers $(0, 0, f^*)$. Supposons que $(0, 0, f^*) \in \text{int}(\Lambda)$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(0, 0, f^*) \subset \Lambda$. On en déduit que le point $(0, 0, f^* - \frac{\varepsilon}{2}) \in \Lambda$, ce qui entraîne l'existence d'un point $x \in S$ tel que $f(x) \leq f^* - \frac{\varepsilon}{2} < f^*$. On obtient ainsi une contradiction qui confirme l'affirmation. Il existe d'après le Théorème 3.2 un hyperplan d'appui à Λ en $(0, 0, f^*)$, c'est à dire il existe un vecteur $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\mu})$ non nul tel que

$$\bar{\mu} f^* \leq \bar{\mu} \beta + \bar{u}^\top \alpha + \bar{v}^\top \gamma, \quad \forall (\alpha, \gamma, \beta) \in \Lambda. \quad (4.14)$$

On en déduit que

$$\bar{\mu} \geq 0, \quad \bar{u} \geq 0, \quad (4.15)$$

puisque si $(\alpha, \gamma, \beta) \in \Lambda$ alors $(\alpha, \gamma, \beta + \delta) \in \Lambda$ et $(\alpha + \delta e_i, \gamma, \beta) \in \Lambda$ pour tout $\delta \geq 0$ et i allant de 1 à m .

Le nombre réel $\bar{\mu}$ est strictement positif car sinon l'inégalité (4.14) nous donne

$$\bar{u}^\top \alpha + \bar{v}^\top \gamma \geq 0, \quad \forall (\alpha, \gamma, \beta) \in \Lambda. \quad (4.16)$$

Or, $(g(\bar{x}), h(\bar{x}), f(\bar{x})) \in \Lambda$ où \bar{x} est le point qui vérifie la condition (4.12). On obtient alors $\bar{u}^\top g(\bar{x}) \geq 0$ ce qui entraîne $\bar{u} = 0$. L'inégalité (4.16) devient

$$\bar{v}^\top \gamma \geq 0, \quad \forall (\alpha, \gamma, \beta) \in \Lambda. \quad (4.17)$$

Comme il existe une boule B_ϵ incluse dans $h(X)$ alors on peut multiplier le vecteur $-\bar{v}$ par un coefficient $\lambda > 0$ assez petit afin que le vecteur $-\lambda \bar{v} \in B_\epsilon$. Par suite, il existe $x \in X$ tel que $-\lambda \bar{v} = h(x)$ et l'inégalité (4.17) nous donne $\|\bar{v}\|^2 \leq 0$, c'est à dire $\bar{v} = 0$. En résumé, en supposant $\bar{\mu} = 0$ on a démontré que les vecteurs \bar{u} et \bar{v} sont aussi nuls, ce qui est impossible. Donc, $\bar{\mu} > 0$. En divisant l'inégalité (4.14) par $\bar{\mu}$ et en posant $u^* = \bar{u}/\bar{\mu}$ et $v^* = \bar{v}/\bar{\mu}$ on obtient

$$f^* \leq f(x) + u^{*\top} g(x) + v^{*\top} h(x), \quad \text{pour tout } x \in X, \quad (4.18)$$

ou bien

$$f^* \leq \theta(u^*, v^*).$$

Par conséquent, (u^*, v^*) est un multiplicateur de Lagrange.

Soit

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell : u \geq 0 \text{ et } f^* \leq \theta(u, v)\}$$

l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange. On sait que cet ensemble n'est pas vide, il est aussi convexe comme intersection de deux ensemble convexes à savoir $\{(u, v) : u \geq 0\}$ et l'ensemble de sur-niveau de la fonction concave θ .

Soit $\pi_1(U)$ la projection de U sur \mathbb{R}^m . Montrons que $\pi_1(U)$ est borné, soit $u \in \pi_1(U)$ il existe alors $v \in \mathbb{R}^\ell$ tel que $(u, v) \in U$, on a alors

$$\begin{aligned} f^* &\leq \theta(u, v) \\ &\leq L(\bar{x}, u, v) \\ &= f(\bar{x}) + u^\top g(\bar{x}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

D'où (en posant $q = \min\{-g_i(\bar{x}) : i = 1, \dots, m\} > 0$)

$$\begin{aligned} q \|u\|_1 &= q \sum_{i=1}^m u_i && (u \geq 0) \\ &\leq -\sum_{i=1}^m u_i g_i(\bar{x}) \\ &\leq f(\bar{x}) - f^*, && \text{(d'après (4.19)).} \end{aligned}$$

Donc

$$\pi_1(U) \subset B_r \text{ où } r = \frac{f(\bar{x}) - f^*}{q}.$$

2. Ceci découle directement du Théorème 4.2.
3. Pour $u \geq 0$, la fonction $x \mapsto L(x, u, v)$ est convexe sur X qui est lui même un ensemble convexe, on peut alors appliquer la relation (2.37) et les commentaires qui la suivent. ■

Remarque 4.2

1. Si l'ensemble X est un polyèdre, on obtient les mêmes résultats du Théorème 4.4 en omettant la condition $0 \in \text{int}(h(X))$.
2. Si l'ensemble X est un polyèdre et la fonction g est affine alors les résultats du Théorème 4.4 restent vraies sans aucune hypothèse de régularité (voir [5, Proposition 5.2.1]).

Les résultats du Théorème 4.4 garantissent l'existence d'au moins une solution optimale du problème dual (D) mais pas celle du problème primal (P). Cependant, on peut obtenir davantage de résultats dans le cas linéaire et quadratique.

4.5.2 Dualité forte en programmation linéaire

Considérons le programme linéaire suivant :

$$(PL) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } c^\top x \\ \text{s.c.} \\ Ax \geq b, \end{cases}$$

où A est une matrice $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

En posant $h(x) = b - Ax$, $X = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = c^\top x$, on obtient que le problème (PL) est un cas particulier du problème (P) où les contraintes d'égalité sont absentes. Dans ce cas la fonction lagrangienne L s'écrit

$$L(x, v) = c^\top x + u^\top (b - Ax) = (c - A^\top u)^\top x + b^\top u.$$

2. B_r est la boule de centre 0 et de rayon r par rapport à la norme 1.

Dans ce cas, la fonction duale θ peut être déterminée explicitement, en effet

$$\begin{aligned}\theta(u) &= \inf_x ((c - A^\top u)^\top x + b^\top u) \\ &= \inf_x (c - A^\top u)^\top x + b^\top u.\end{aligned}$$

Or

$$\inf_x (c - A^\top u)^\top x = \begin{cases} 0 & \text{si } c - A^\top u = 0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent

$$\theta(u) = \begin{cases} b^\top u & \text{si } c - A^\top u = 0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, le problème dual (DL) associé au problème (PL) s'écrit

$$(DL) \quad \begin{cases} \text{Maximiser } b^\top u \\ \text{s.c.} \\ A^\top u = c, \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Le théorème de dualité faible nous dit que $b^\top u \leq c^\top x$ pour tout couple (x, u) vérifiant $Ax \geq b$, $A^\top u = c$ et $u \geq 0$. Dans le cas linéaire, la finitude de la quantité f^* entraîne l'existence d'une solution optimale primale et duale avec un saut de dualité nulle contrairement au cas convexe où on a montré moyennant quelques hypothèses de régularité l'existence seulement d'une solution optimale duale. On commence par énoncer le Lemme suivant

Lemme 4.1

Supposons que la valeur infimale correspondant au problème (PL) soit finie alors ce dernier admet une solution optimale.

Démonstration. Supposons que le problème (PL) n'admet pas de solution optimale. On obtient alors qu'il n'existe pas de x vérifiant $Ax \geq b$ et $c^\top x = f^*$. En écrivant $x = x^+ - x^-$ où x^+ et x^- sont la partie positive et négative respectivement de x et en introduisant une variable d'écart qu'on notera z on s'aperçoit que le système suivant

$$\begin{bmatrix} c^\top & -c^\top & 0 \\ A & -A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^* \\ b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.20)$$

n'admet pas de solution. D'après le Théorème de Farkas il existe $(\alpha, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ tel que

$$\begin{bmatrix} c & A^\top \\ -c & -A^\top \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ y \end{bmatrix} \leq 0, \quad \left\langle \begin{bmatrix} f^* \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ y \end{bmatrix} \right\rangle > 0 \quad (4.21)$$

Les inégalités (4.21) sont équivalentes à

$$\alpha c + A^\top y = 0 \quad (4.22)$$

$$y \geq 0 \quad (4.23)$$

$$\alpha f^* + b^\top y > 0 \quad (4.24)$$

Soit x un point admissible pour (PL), il vérifie $Ax \geq b$. En multipliant cette dernière inégalité par $y \geq 0$ on obtient $x^\top A^\top y \geq b^\top y$. Ce qui donne, en utilisant l'identité (4.22) $-\alpha c^\top x \geq b^\top y$. L'inégalité (4.24) nous permet enfin d'écrire

$$\alpha(c^\top x - f^*) < 0. \quad (4.25)$$

Comme $c^\top x > f^*$ (x est admissible pour (PL) qui n'admet pas de solution optimale) alors l'inégalité (4.25) nous dit que le réel α doit être strictement négatif.

En divisant les relations (4.22) et (4.24) par α et en posant $\bar{y} = -y/\alpha$ on obtient

$$A^\top \bar{y} = c \quad (4.26)$$

$$\bar{y} \geq 0 \quad (4.27)$$

$$f^* < b^\top \bar{y} \quad (4.28)$$

D'après les relations (4.26) et (4.27), le point \bar{y} est admissible pour le dual. Par suite, l'inégalité (4.28) est en contradiction avec le Théorème de dualité faible. Donc le problème (PL) admet au moins une solution optimale. ■

Théorème 4.5

Si la valeur infimale du problème (PL) est finie alors les deux problèmes (PL) et (DL) admettent tous les deux des solutions optimales et le saut de dualité est nul.

Démonstration. D'après le Lemme 4.1 le problème (PL) admet au moins une solution optimale x^* . On sait que, pour ce problème, les conditions de KKT sont nécessaires et suffisantes, il existe alors un

vecteur $u^* \geq 0$ tel que

$$c - A^T u^* = 0 \quad (4.29)$$

$$u^{*\top}(b - Ax^*) = 0. \quad (4.30)$$

(PL) optimal	\Leftrightarrow	(DL) optimal
(PL) non borné	\Rightarrow	(DL) non admissible
(DL) non borné	\Rightarrow	(PL) non admissible
(PL) non admissible	\Rightarrow	(DL) non borné ou non admissible
(DL) non admissible	\Rightarrow	(PL) non borné ou non admissible

L'égalité (4.29) avec la positivité de u^* entraînent l'admissibilité du point u^* pour le dual et l'égalité (4.30) nous permet de conclure que $b^T u^* = c^T x^*$. Donc u^* est une solution optimale du dual d'après le Corollaire 4.1. ■

La table 4.1 résume la relation qui existe entre le primal et le dual dans le cas linéaire.

Il faut remarquer que le Théorème 4.5 permet de conclure que si le primal et le dual sont admissibles alors chacun deux admet une solution optimale. En effet, l'admissibilité du primal entraîne que $f^* < +\infty$, l'admissibilité du dual entraîne que $\theta^* > -\infty$. Mais comme $\theta^* \leq f^*$ alors on obtient $-\infty < f^* < +\infty$.

TABLE 4.1 – Relations entre le primal et le dual (cas linéaire).

4.5.3 Dualité forte en programmation quadratique

Considérons le programme quadratique suivant

$$(PQ) \quad \begin{cases} \text{Minimiser}_x & \frac{1}{2}x^T Qx - c^T x \\ \text{s.c.} & \\ Ax \geq b, & \end{cases}$$

où Q est une matrice $n \times n$ symétrique, A une matrice $m \times n$ et les vecteurs c et b sont dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m respectivement.

Le Lagrangien associé à ce problème s'écrit

$$\begin{aligned} L(x, u) &= \frac{1}{2}x^T Qx - c^T x + u^T(b - Ax) \\ &= \frac{1}{2}x^T Qx - (c + A^T u)^T x + b^T u. \end{aligned} \quad (4.31)$$

On peut calculer explicitement la fonction duale dans le cas où la matrice Q est définie positive. En effet le problème auxiliaire (P_u) est convexe et admet une solution unique correspondant au point critique du Lagrangien, c'est la solution de l'équation

$$Qx - (c + A^T u) = 0.$$

L'unique solution optimale $x(u)$ du problème (P_u) est donnée par

$x(u) = Q^{-1}(c + A^T u)$. En remplaçant dans l'égalité (4.31), on obtient

$$\begin{aligned}\theta(u) &= L(x(u), u) \\ &= -\frac{1}{2}u^T A Q^{-1} A^T u - (A Q^{-1} c - b)^T u - \frac{1}{2}c^T Q^{-1} c.\end{aligned}$$

La fonction θ est concave mais elle n'est pas en général strictement concave. La matrice $A Q^{-1} A^T$ est semi-définie positive, elle est définie positive si et seulement si les lignes de la matrice A sont linéairement indépendantes. Le problème dual peut s'écrire alors

$$(DQ) \quad \begin{cases} \text{Maximiser}_u & -\frac{1}{2}u^T A Q^{-1} A^T u - (A Q^{-1} c - b)^T u - \frac{1}{2}c^T Q^{-1} c \\ \text{s.c.} & \\ u \geq 0. & \end{cases}$$

Si on suppose que la matrice Q est seulement semi-définie positive alors la formulation (DQ) ne peut représenter le dual de (PQ) car la matrice Q ne sera pas inversible. Cependant, dans ce cas on peut écrire le dual sous la forme suivante

$$(DQ') \quad \begin{cases} \text{Maximiser}_{(x,u)} & \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x + u^T (A x - b) \\ \text{s.c.} & \\ Q x + A^T u = c & \\ u \geq 0. & \end{cases}$$

Si (x, u) est un point admissible du problème (DQ') alors on a

$$\begin{aligned}\theta(u) &= \inf_z f(z) + u^T (A z - b) \\ &= f(x) + u^T (A x - b),\end{aligned}\tag{4.32}$$

puisque la fonction $z \mapsto g(z) := f(z) + u^T (A z - b)$ est convexe et le point x vérifie $\nabla g(x) = 0$.

Définition 4.2 ([6])

On dit qu'un point x^* admissible du problème (PQ) est *quasi-stationnaire* s'il est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser}_x & \frac{1}{2}\langle x, Q x \rangle - \langle c, x \rangle \\ \text{s.c.} & \\ \langle a_i, x \rangle = b_i, & \text{pour } i \in I(x^*).\end{cases}\tag{4.33}$$

On rappelle que $I(x^*)$ est l'ensemble des indices des contraintes actives en x^* .

On note que tout point extrémal du polyèdre S est quasi-stationnaire. En effet, l'ensemble des points admissibles du problème (4.33) est réduit au singleton $\{x^*\}$.

Lemme 4.2

Supposons que la fonction quadratique f est convexe et qu'elle est bornée inférieurement sur S . Alors pour tout $x_0 \in S$ il existe un point quasi-stationnaire \bar{x} tel que $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$.

Démonstration. Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \text{Minimiser}_x f(x) := \frac{1}{2} \langle x, Qx \rangle - \langle c, x \rangle \\ \text{s.c.} \\ \langle a_i, x \rangle = b_i, \quad \text{pour } i \in I(x_0). \end{cases} \quad (4.34)$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que les vecteurs $\{a_i : i \in I(x_0)\}$ sont linéairement indépendants. On obtient alors (voir Exercice 3.6)

- (i) soit le problème (4.34) admet une solution optimale \hat{x} ,
- (ii) soit il existe une direction s vérifiant $\langle a_i, s \rangle = 0$ pour $i \in I(x_0)$ et $f(x_0 + \alpha s) \rightarrow -\infty$ quand $\alpha \rightarrow \infty$.

Dans le premier cas on aura $\bar{x} = \hat{x}$ si $\hat{x} \in S$. Sinon, on pose $d = \hat{x} - x_0$ et on considère les points $x_0 + \alpha d$ avec $\alpha > 0$. Soit $\tilde{\alpha}$ le nombre réel défini par

$$\tilde{\alpha} = \min \left\{ \frac{b_i - \langle a_i, x_0 \rangle}{\langle a_i, d \rangle} : i \notin I(x_0) \text{ et } \langle a_i, d \rangle > 0 \right\}.$$

Il est facile de vérifier que $x_0 + \alpha d \in S$ pour tout $0 \leq \alpha \leq \tilde{\alpha}$. Si $\tilde{\alpha} \geq 1$ alors $\hat{x} \in S$ et le point $\bar{x} = \hat{x}$ répond à la question. Si $\tilde{\alpha} < 1$ alors

$$\tilde{\alpha} = \frac{b_r - \langle a_r, x_0 \rangle}{\langle a_r, d \rangle}, \quad \text{avec } r \notin I(x_0) \text{ et } \langle a_r, d \rangle > 0. \quad (4.35)$$

En posant $x_1 = x_0 + \tilde{\alpha} d$ on obtient que le nombre des contraintes actives linéairement indépendantes en x_1 est strictement supérieur à celui de x_0 . En effet les vecteurs $\{a_i : i \in I(x_0)\} \cup \{a_r\}$ correspondent à des contraintes actives en x_1 et ils sont linéairement indépendants car si $a_r = \sum_{i \in I(x_0)} \alpha_i a_i$ alors on obtient $\langle a_r, d \rangle = 0$, ce qui contredit la condition (4.35). Puisque f est convexe on a aussi $f(x_1) \leq f(x_0)$.

Le raisonnement ci-dessus s'applique au deuxième cas car $x_0 + \alpha s$ doit quitter S pour des valeurs de α assez grandes sinon on obtient une contradiction avec le fait que f est bornée inférieurement sur S . Donc on construit, de même, un point $x_1 = x_0 + \tilde{\alpha} s$ dont l'ensemble des contraintes actives linéairement indépendantes est plus large

que celui de x_0 et $f(x_1) \leq f(x_0)$

En appliquant la procédure décrite précédemment on aboutit à un point quasi-stationnaire \bar{x} avec $f(\bar{x}) \leq f(x_1) \leq f(x_0)$ ou on construit un point x_2 dont le nombre des contraintes actives linéairement indépendantes est strictement supérieur à celui de x_1 et vérifie $f(x_2) \leq f(x_1)$.

En procédant ainsi, ou bien on atteint un point \bar{x} qui répond à notre question ou bien on construit un point x_k dont le nombre des contraintes linéairement indépendantes est égale à n . On sait que dans ce cas x_k est un sommet de S et par conséquent c'est un point quasi-stationnaire qui vérifie $f(x_k) \leq f(x_0)$. ■

Soit x_0 un point quasi-stationnaire pour le problème (PQ). On note $S(x_0)$ l'ensemble de toutes les solution optimales du problème (4.34) appartenant à S , c'est à dire

$$\begin{aligned} S(x_0) &= \operatorname{argmin}_{x \in S} \{ f(x) : \langle a_i, x \rangle = b_i, i \in I(x_0) \} \\ &= \{ x \in S : f(x) = f(x_0) \text{ et } \langle a_i, x \rangle = b_i, i \in I(x_0) \}. \end{aligned}$$

$S(x_0)$ est appelé ensemble quasi-stationnaire. Bien que l'ensemble des points quasi-stationnaires peut être infini, celui des ensembles quasi-stationnaires est fini. En effet, à chaque partie I de l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$ est associé un ensemble quasi-stationnaire (qui peut être vide). Par suite le nombre des ensembles quasi-stationnaires non vides ne peut dépasser 2^m .

Maintenant, on ait en mesure d'énoncer le Théorème 4.6.

Théorème 4.6

Supposons que la fonction quadratique f soit convexe et bornée inférieurement sur le polyèdre non vide S alors le problème (PQ) admet au moins une solution optimale.

Démonstration. D'après la remarque précédant le Théorème 4.6, les ensembles quasi-stationnaires sont en nombre fini. Soit $S(x_1), \dots, S(x_p)$ ces ensembles et k l'entier défini par

$$f(x_k) = \min_{1 \leq i \leq p} f(x_i).$$

Soit x un point quelconque de S . Le Lemme 4.2 nous dit qu'il existe un point quasi-stationnaire \bar{x} tel que $f(\bar{x}) \leq f(x)$. Le point \bar{x} doit appartenir à un certain $S(x_i)$ de sorte que $f(\bar{x}) = f(x_i)$. On obtient alors

$$f(x_k) \leq f(x_i) = f(\bar{x}) \leq f(x).$$

Donc x_k est une solution optimale du problème (PQ). ■

Le résultat suivant permet de conclure la relation qui existe entre les deux problèmes (PQ) et (DQ') lorsque la fonction f est convexe.

Corollaire 4.5

Supposons que la fonction quadratique f est convexe et que les problèmes (PQ) et (DQ') sont admissibles. Alors le problème (PQ) admet au moins une solution x^* et il existe u^* tel que (x^*, u^*) soit une solution optimale de (DQ') .

Démonstration. Soit (\bar{x}, \bar{u}) un point admissible du problème (DQ') et x un point admissible du problème (PQ) , on obtient alors (voir l'égalité (4.32))

$$f(\bar{x}) + \bar{u}^\top (A\bar{x} - c) \leq f(x) + \bar{u}^\top (Ax - b) \leq f(x) \quad (\bar{u}^\top (Ax - b) \leq 0).$$

Donc, la fonction f est bornée inférieurement sur S . D'après le Théorème 4.6 le problème (PQ) admet au moins une solution optimale x^* .

En utilisant les conditions de KKT qui sont, dans ce cas, nécessaires et suffisantes on obtient l'existence de $u^* \geq 0$ tel que

$$\nabla f(x^*) + A^\top u^* = 0 \tag{4.36}$$

$$u^{*\top} (Ax^* - b) = 0. \tag{4.37}$$

Le point (x^*, u^*) est une solution optimale du problème (DQ') . En effet, (x^*, u^*) est admissible et si (x, u) désigne un point admissible quelconque du problème (DQ') , on a

$$\begin{aligned} f(x) + u^\top (Ax - b) &\leq f(x^*) + u^\top (Ax^* - b) && \text{(d'après (4.32))} \\ &\leq f(x^*) && (u^\top (Ax^* - b) \leq 0) \\ &= f(x^*) + (u^*)^\top (Ax^* - b) && \text{(d'après (4.37)).} \end{aligned}$$

■

Bibliographie

- [1] S. ADDOUNE. *Introduction à l'optimisation sans contraintes*. Poly-copié de cours. Université de BBA, 2017.
- [2] Kenneth J. ARROW et Alain C. ENTHOVEN. "Quasi-Concave Programming". In : *Econometrica* 1961-oct vol. 29 iss. 4 29 (4 oct. 1961). DOI : [10.2307/1911819](https://doi.org/10.2307/1911819).
- [3] et al. AVRIEL M. *Generalized concavity*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, 2010. ISBN : 0898718961 ; 9780898718966.
- [4] Mokhtar S. BAZARAA, Hanif D. SHERALI et C. M. SHETTY. *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*. third. Wiley Interscience, 2006.
- [5] D. P. BERTSEKAS. *Nonlinear programming*. second. Athena Scientific, Belmont, MA, 1999.
- [6] Michael J. BEST. *Quadratic programming with computer programs*. 1^{re} éd. Advances in applied mathematics. Chapman et Hall/CRC ; Taylor & Francis, 2017.
- [7] Alberto CAMBINI et Laura MARTEIN. *Generalized Convexity and Optimization : Theory and Applications*. 1^{re} éd. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 2009.
- [8] Jean-Pierre CROUZEIX. "On second order conditions for quasi-convexity". In : *Mathematical Programming* 1980-dec vol. 18 iss. 1 18 (1 déc. 1980). DOI : [10.1007/bf01588330](https://doi.org/10.1007/bf01588330).
- [9] R. A. DANAÖ. "Some properties of explicitly quasiconcave functions". In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 1992-sep vol. 74 iss. 3 74 (3 sept. 1992). DOI : [10.1007/bf00940321](https://doi.org/10.1007/bf00940321).
- [10] Gerard DEBREU. "Definite and Semidefinite Quadratic Forms". In : *Econometrica* 1952-apr vol. 20 iss. 2 20 (2 avr. 1952). DOI : [10.2307/1907852](https://doi.org/10.2307/1907852).
- [11] Jacques A. FERLAND. "Matrix-theoretic criteria for the quasiconvexity of twice continuously differentiable functions". In : *Linear Algebra and its Applications* 38 (1981), p. 51-63. ISSN : 0024-3795. DOI : [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(81\)90007-0](https://doi.org/10.1016/0024-3795(81)90007-0).

- [12] Jean-Pierre Crouzeix ; Jacques A. FERLAND. “Criteria for quasi-convexity and pseudo-convexity : Relationships and comparisons”. In : *Mathematical Programming* 23 (1 déc. 1982). DOI : [10.1007/bf01583788](https://doi.org/10.1007/bf01583788).
- [13] M. GUIGNARD. *Optimality and stability in mathematical programming*. Mathematical programming study 19. North-Holland, 1982.
- [14] Osman GÜLER. *Foundations of optimization*. 1^{re} éd. Graduate texts in mathematics 258. Springer-Verlag New York, 2010.
- [15] T. S. MOTZKIN. “Two Consequences of the Transposition Theorem on Linear Inequalities”. In : *Econometrica* 19 (2 1951), p. 184-185. DOI : [10.2307/1905733](https://doi.org/10.2307/1905733). URL : <http://doi.org/10.2307/1905733>.
- [16] J. PONSTEIN. “Seven Kinds of Convexity”. In : *SIAM Review* 9 (1 jan. 1967). DOI : [10.1137/1009007](https://doi.org/10.1137/1009007).
- [17] Richard E. Stone RICHARD W. COTTLE Jong-Shi Pang. *The Linear Complementarity Problem (Classics in Applied Mathematics)*. Classics in Applied Mathematics 60. Society for Industrial & Applied Mathematics, 2009.
- [18] Erich STIEMKE. “Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen”. In : *Mathematische Annalen* 76 (2-3 1915), p. 340-342. ISSN : 0025-5831,1432-1807. DOI : [10.1007/bf01458147](https://doi.org/10.1007/bf01458147). URL : <http://doi.org/10.1007/bf01458147>.
- [19] W.E Diewert ; M Avriel ; I ZANG. “Nine kinds of quasiconcavity and concavity”. In : *Journal of Economic Theory* 1981-dec vol. 25 iss. 3 25 (3 déc. 1981). DOI : [10.1016/0022-0531\(81\)90039-9](https://doi.org/10.1016/0022-0531(81)90039-9).