Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques





Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathémathiques

Spécialité : Système dynamique

Sur quelques problèmes d'évolution paraboliques

Présenté par :
ILEAM HEDDADJI

Devant le jury :

Dr. Ghermoul Bilal	Université	BBA	- Président
Dr. Berrah Abdelmalek	Université	BBA	- Encadreur
Dr. Belkacem Naziheddine	Université	BBA	- Examinateur

Année universitaire
2023/2024

Remerciements

- Premièrement et avant tout, je voudrais remercier Dieu Tout-Puissant de m'avoir accordé la force et la patience pour accomplir ce travail.

- Je voudrais remercier mon superviseur, le **Dr Abdelmalek Berrah**, pour sa patience et son encadrement depuis le début de ce travail jusqu'à sa fin, ainsi que pour ses encouragements, son soutien et ses précieux conseils tout au long de la réalisation de ce projet.

- Je remercie sincèrement le jury d'avoir accepté d'étudier et d'évaluer ce travail.

- A tous mes professeurs de la Faculté de Mathématiques, l'Université Mohammed Bashir Brahimi, qui ont contribué à nous transférer le précieux trésor de la connaissance.

- Je tiens à exprimer ma gratitude à tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de cette recherche.

Que Dieu les bénisse tous



Dédicace

 Je dédie ce travail à

- À mes chers parents, mon père "Abdelwahab" et ma mère "Zahia", pour les sacrifices qu'ils ont faits, leur soutien et la profondeur de leur patience tout au long de mes études.
- À mes chers frères, "Islam et Rabbah et Zakaria", qui m'ont soutenu.
- À mon fiancé "Yacoub".
- À toute ma famille.
- À mes meilleures amies "Farah et Karima et Meriem et Imene et Khawla et Maissa " qui ont partagé avec moi tous les bons souvenirs.

Merci à tous ♡

Ilham Haddadji

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **5**

1 Préliminaires **7**
1.1 Quelques espaces fonctionnels . . . 7
1.1.1 Espaces L^p . . . 7
1.1.2 Espaces de Sobolev . . . 8
1.2 Quelques rappels sur les opérateurs . . . 9
1.2.1 Opérateurs linéaires, bornés, inversés . . . 9
1.2.2 Opérateur fermé . . . 11
1.2.3 Résolvante, Commutateur et Spectre . . . 12
1.2.4 Opérateurs sectoriels . . . 12
1.2.5 Les formules intégrales de Cauchy . . . 13
1.2.6 Intégrale de Dunford . . . 13
1.2.7 Espaces d'interpolation . . . 13

2 Méthode de somme d'opérateurs linéaires **15**
2.1 Le cas somme d'opérateurs commutatifs . . . 15
2.1.1 Hypothèses sur A et B . . . 16
2.1.2 Représentation de la solution . . . 18
2.1.3 Théorèmes principaux . . . 19
2.1.4 Exemple (l'équation de la chaleur) . . . 22
2.2 Le cas somme d'opérateurs non-commutatifs . . . 28
2.2.1 hypothèses . . . 28
2.2.2 Représentation de la solution . . . 31
2.2.3 Théorèmes principaux . . . 33
2.2.4 Exemple (l'équation de la chaleur) . . . 34

3 Méthode de la semi-groupes d'opérateurs linéaires **37**
3.1 $\mathcal{C}_0$-semi-groupe . . . 37
3.2 Générateurs . . . 38

72 3.3 Théorème de Hille Yosida 40
73 3.4 Exemple (l'équation de la chaleur) 41

74 **Conclusion** **44**

75 **Bibliographie** **46**

INTRODUCTION

De nombreux phénomènes en physique, en ingénierie, en biologie et dans d'autres domaines sont modélisés par des équations d'évolution. L'objectif principal de ce mémoire est d'analyser certaines de ces équations d'évolution. Les théories des sommes d'opérateurs linéaires et des semi-groupes sont cruciales, fournissant des méthodes efficaces pour traiter et résoudre des équations telles que des équations différentielles abstraites et des équations aux dérivées partielles, y compris les équations de la chaleur, des ondes, d'advection, de Schrödinger, de Korteweg-de Vries, etc.

La théorie des sommes d'opérateurs linéaires fermés dans l'espace de Banach a été élargie et développée par Grisvard (1967) [8], Da Prato (1969) [3], Da Prato-Grisvard (1975) [2]. Cette théorie s'applique à la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} Lu - \lambda u = f, \\ u \in D(L). \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} Lu = Au + Bu, \\ u \in D(L) = D(A) \cap D(B). \end{cases}$$

Donc

$$Au + Bu - \lambda u = f, \lambda > 0. \tag{1}$$

On distingue deux cas :

1. Le cas commutatif.
2. Le cas non-commutatif.

Dans le premier cas, de nombreuses recherches ont été menées dans ce domaine par plusieurs mathématiciens. Citons. Da Prato et Grisvard (1975) [3], qui ont établi certaines hypothèses sur les opérateurs linéaires A et B, permettant au problème (1) d'avoir une solution unique pour tout f dans l'espace intermédiaire entre le domaine D_A et X (ou entre D_B et X).

Pour le deuxième cas Les résultats de Dore et Venni [4], ont été généralisés dans le cas non commutatif. Pour cela, certaines hypothèses ont été imposées sur les opérateurs linéaires A et B.

La théorie des semi-groupes a vu le jour en 1821 grâce à Augustin Louis Cauchy (1789-1857), qui a cherché à déterminer toutes les fonctions complexes continues non nulles vérifiant :

$$f(t+s) = f(t)f(s), \quad \forall t, s > 0.$$

Par la suite, Henri K. Abel (1802-1829) a prouvé ce résultat et défini le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t)x)_{t\geqslant 0}$ par :

$$Af = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Étant donné que la fonction exponentielle $t \to e^{at}$ (où $a \in \mathbb{R}$) est une solution réelle de l'équation fonctionnelle $f(t+s) = f(t)f(s)$ telle que $f(0) = 1$, elle est solution de l'équation différentielle $u' = au$ sous des conditions initiales. $u(0) = 1$, cette idée a été généralisée par Giuseppe Peano au XIXe siècle pour résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u' = Au, \\ u(0) = Id. \end{cases}$$

Où A est une matrice sous la forme exponentielle, cette approche a été étendue aux équations différentielles opératorielles, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X.

Au début du XXe siècle, Einar Hille (1894-1980) et Kosaku Yosida ont développé la théorie en résolvant le problème de Cauchy abstrait :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach X. Ils ont caractérisé le générateur infinitésimal des semi-groupes fortement continus par la condition :

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

Ce document contient trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on a présenté quelques concepts de base en analyse fonctionnelle et quelques espaces fonctionnels [5]. Ces concepts englobent les opérateurs linéaires fermés, l'intégrale de Dunford et l'intégrale de Cauchy.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié la méthode des sommes d'opérateurs linéaires dans le cas commutatif et non commutatif, avec deux exemples d'application

Dans le dernier chapitre, nous présenterons quelques-uns des principaux résultats de la théorie des semi-groupes, en terminant par une application illustrative de cette théorie au problème du transport (l'équation d'advection).

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre abordera plusieurs définitions et résultats généraux liés aux opérateurs linéaires, ainsi quelques espaces fonctionnels. Pour plus de détails, il est prié de voir les références.

1.1 Quelques espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces L^p

Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.1.1. *:*

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$, nous définissons :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit aussi l'espace pour $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)| \leqslant C, \quad \exists C \geqslant 0\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\{C, |f(x)| \leqslant C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.1.1. ***(Fischer-Riesz)***

L^P est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Proposition 1.1.1.

Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. ***Inégalité de Young** : Soient $a, b \geqslant 0$; alors*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. ***Inégalité de Hölder*** *: Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors $fg \in L^1$ et*

$$\int_\Omega |fg| dx \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Dans le cas particulier où $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de ***Cauchy-Schwarz****.*

3. ***Inégalité de Minkowski*** *: Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ pour f, g mesurable.*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

4. *L^2 avec un produit scalaire*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) dx$$

est le seul espace L^p avec l'espace Hilbert.

5. *Si $f \in L^\infty$ alors nous avons*

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p. le } \Omega.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Espace de Sobolev $W^{m,p}$

Soit $m \geqslant \mathbb{N}$ un entier.

Définition 1.1.2. *L'espace de Sobolev, noté $W^{m,p}(\Omega)$ et l'ensemble des fonctions f définies sur Ω telles que toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m de f appartiennent à l'espace $L^p(\Omega)$. Cela s'exprime par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant m\}$$

Où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ donc $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leqslant p < \infty$$

et

$$\|f\|_{W^{m,\infty}} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} \quad \text{pour } p = \infty$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_{L^2} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \int_\Omega \partial^\alpha f \partial^\alpha g dx$$

la norme associée :

$$\|f\|_{H^m} = (\sum_{|\alpha| \leqslant 0}^{m} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.1.2. *(Quelques propriétés de l'espace Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$)*

1. *L'espace $W^{m,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$,*
2. *H^m est unique l'espace de Hilbert parmi tous les espaces $W^{m,p}$.*

Remarque 1.1. **(Plongement continu /Plongement compact)**
Soit X et Y être deux espaces vectoriels normés, avec des normes respectivement $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$, tels que $X \subseteq Y$.

1. Nous disons que X est un plongement continu dans Y si la fonction d'identité
$$\begin{aligned} i : X &\to Y, \\ x &\to x, \end{aligned}$$
est continu, c.-à-d. s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que
$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$
2. Nous disons que X est un plongement compact dans Y si
   (a) X est plongement continu dans Y.
   (b) La fonction d'identité i de X dans Y est un opérateur compact, c'est-à-dire que tout sous-ensemble borné dans X est relativement compact dans Y (ou, en d'autres termes, pour toute séquence bornée (x_n) dans X, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge dans Y).

L'espace $W_0^{m,p}$

Soient $1 \leqslant p < \infty$ et $m \geqslant 2$ un entier.

Définition 1.1.3. *$W_0^{m,p}$ est défini comme la fermeture de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, c'est-à-dire,*
$$\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$$

Nous fixons $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Remarque 1.2. Nous pouvons également définir $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme suit
$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{f \in W^{m,p}(\Omega) : \partial^\alpha f = 0 \text{ sur } \partial\Omega, |\alpha| < m\}.$$

On a quelques propriétés des espaces $W_0^{m,p}(\Omega)$:

1. L'espace $W_0^{m,p}$ est un espace Banach pour $1 \leqslant p < \infty$,
2. H_0^m est un espace Hilbert.

1.2 Quelques rappels sur les opérateurs

1.2.1 Opérateurs linéaires, bornés, inversés

Soit E et F deux espaces de Banach sur le même corps (réel ou complexe) $\mathbb{K}$ muni respectivement des normes $\|.\|_E$, $\|.\|_F$.

Définition 1.2.1. *(**Opérateur linéaire**). Soient E et F deux espaces vectoriels normés, l'opérateur linéaire $A : E \to F$ est une application linéaire définie d'un espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeur dans F, i.e. $\forall a, b \in D(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:*

i) ***Additivité :*** $T(a+b) = T(a) + T(b)$

ii) ***Homogénéité :*** $T(\alpha.a) = \alpha T(a)$

1. *$D(A)$, appelé domaine de A, on écrit $A(x) = Ax$ pour tout $x \in D(A)$.*
2. *On utilise la notation $(A, D(A))$ pour désigner l'opérateur A avec le domaine $D(A)$.*
3. *L'espace des opérateurs de E à F est noté $L(E, F)$.*
4. *Lorsque $E = F$, on écrit $L(E)$ au lieu de $L(E, E)$.*

Définition 1.2.2. *Soient $A : D(A) \subset E \to F$ est opérateur linéaire :*

1. *On appelle le graphe de A le sous-espace de $E \times F$, noté $G(A)$, défini par :*
$$G(A) = \{(x, y) \in E \times F / x \in D(A), y = Ax\} = \{(x, Ax) \in E \times F / x \in D(A)\}$$
2. *On appelle l'image de A le sous-espace vectoriel de F, noté $Im(A)$, défini par*
$$Im(A) = \{y \in F / \exists x \in D(A), y = Ax\} = \{Ax \in F / x \in D(A)\},$$
3. *On définit le noyau de A le sous-espace vectoriel de E, noté $Ker(A)$, défini par*
$$Ker(A) = \{x \in D(A) / Ax = 0\},$$
4. *On dit que A est un domaine dense si $\overline{D(A)} = E$.*

Définition 1.2.3. *(**Opérateur borné**).Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \|Ax\|_F \leqslant M\|x\|_E, \forall x \in E.$$

Par example l'opérateur identité :

$$I_x : E \to E$$
$$x \to I_E(x) = x$$

On a $\|Ix\| = \|x\|$. D'ou il existe $M > 0$ tels que $\|Ix\| \leqslant M\|x\|$ $(M = 1)$
donc $I_E(x)$ est borné

Proposition 1.2.1. *Soit A un opérateur linéaire de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$A \in \mathcal{L}(E, F)$.*
2. *$\forall x_0 \in E, \lim\limits_{x \to x_0} \|Ax - Ax_0\|_F = 0$.*
3. *$\lim\limits_{x \to 0} \|Ax\|_F = 0$.*
4. *$\exists M \geqslant 0, \forall x \in E, \|Ax\|_F \leqslant M\|x\|_E$.*

Définition 1.2.4. ***(Norme d'opérateur)**. Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, la norme de A est définie comme suit :*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf\{c > 0, \|Ax\|_F \leqslant c\|x\|_E, \forall x \in E\}.$$

Remarque 1.3.

1. L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est un espace de Banach.
2. Un opérateur est borné, si et seulement si sa norme est finie.

Définition 1.2.5. ***(Inverse d'un opérateur)***. *Soit $A : E \to E$ un opérateur linéaire. On dit que A est inversible s'il existe $A' \in L(E)$ tel que*

$$AA' = A'A = I,$$

où I est l'opérateur d'identité sur E. Cet opérateur A' s'il existe est unique et noté par A^{-1}.

Les conditions d'inversibilité d'un opérateur sont énoncées dans la proposition suivante

Proposition 1.2.2. . *Soit E et F les espaces de Banach et $A \in L(E,F)$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *A est inversible,*
2. *$Im(A) = F$ et il existe $m > 0$ tel que $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$ pour tous $x \in D(A)$,*
3. *A est fermé, $\overline{Im(A)} = F$ et il existe $m > 0$ tel que $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$ pour tous $x \in D(A)$,*
4. *A est fermé, $Im(A) = F$ et $KerA = \{0\}$.*

Proposition 1.2.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. si $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, alors $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.*

1.2.2 Opérateur fermé

Définition 1.2.6. *Soient E et F deux espaces de Banach, on dit que A est un opérateur fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$, on note $\mathcal{F}(E,F)$, l'espace des opérateurs fermés de E dans F.*

La proposition suivante donne les caractérisation des fermés par les suites

Proposition 1.2.4. *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ opérateur linéaire, A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de $D(A)$ tel que*

$$\begin{cases} x_n \to x \in E, \\ Ax_n \to y \in F. \end{cases}$$

alors, $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Remarque 1.4. Pour tout opérateur A, la norme de graphe sur $D(A)$ est donnée par :

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_F, \forall x \in D(A)$$

L'opérateur $A : D(A) \to F$ est borné par rapport à la norme de graphe , et A est fermé si et seulement si $D(A)$ est un espace de Banach sous la norme de graphe.

Proposition 1.2.5. *Soit A et B deux opérateurs linéaires sur E. On a*

1. *Si B est borné, alors B est fermé.*
2. *Si A est fermé et B est borné, alors $A+B$ est fermé.*
3. *Si A est fermé et B est borné, alors AB est fermé.*

Théorème 1.2.1. ***(Théorème du graphe fermé)***
Soit E et F espaces de Banach, soit A opérateur linéaire fermé, si $D(A) = E$, alors A borné.

1.2.3 Résolvante, Commutateur et Spectre

Définition 1.2.7. *Soient A et B deux opérateurs linéaires sur E.*

- *L'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$, est défini par :*
$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\}.$$
- *Si $\lambda \in \rho(A)$, le résolvant $R(\lambda, A)$ de A au point λ défini par :*
$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$
- *Le commutateur de résolvant $R(\lambda, A), R(\mu, B)$ est défini par :*
$$[(A-\lambda I)^{-1}, (B-\mu I)^{-1}] = (A-\lambda I)^{-1}(B-\mu I)^{-1} - (B-\mu I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1}.$$
- *Le spectre de A, noté $\sigma(A)$, est défini par :*
$$\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A).$$

Proposition 1.2.6.

1. *Soit $A : D(A) \in E \to F$ un opérateur linéaire. Alors,*
$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A), \text{ pour tous } \lambda, \mu \in \rho(A).$$
2. *$R(., A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$.*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$.*
4. *Pour $\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \rho(A)$.*

1.2.4 Opérateurs sectoriels

Il est important de souligner qu'il existe plusieurs définitions équivalentes pour les opérateurs sectoriels. Dans notre cas, nous utilisera la définition suivante :

Définition 1.2.8. *Soit E un espace de Banach complexe et A un opérateur linéaire fermé dans E, on de que A sectoriel si*

i) *$D(A)$ et $Im(A)$ sont denses en E,*

ii) *$Ker(A) = \{0\}$,*

iii) *$]-\infty, 0[\subset \rho(A)$ et il existe $K \geq 1$, telle que $\|t(A+tI)^{-1}\|_{L(E)} \leqslant K$, $\forall t \geqslant 0$.*

Remarque 1.5. Lorsque A est sectoriel, il existe un angle $\theta \in]0, \pi[$ tel que le secteur
$$\sum_{\theta} = \{z \in \mathbb{C}/\{0\} : |arg z| < \theta\},$$
soit contenu dans $\rho(-A)$.

1.2.5 Les formules intégrales de Cauchy

Théorème 1.2.2. ***(Formule intégrale de Cauchy)***
Soit f une fonction holomorphe dans un domaine ouvert U de $\mathbb{C}$ et γ une courbe fermée simple dans U, alors pour tout z_0 situé à l'intérieur de γ, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Remarque 1.6. **(Formule intégrale de Cauchy pour les dérivées)**
Cette formule permet de calculer les dérivées d'ordre supérieur de f en z_0, et on a :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}} \frac{f(z_0)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

1.2.6 Intégrale de Dunford

Théorème 1.2.3. *Soit E un espace de Banach complexe et A un opérateur linéaire fermé. On note $H(A)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. La formule intégrale de Dunford se présente de manière analogue à la formule de Cauchy comme suit :*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z - A)^{-1} dz$$

Où γ est une courbe simple entourant $\sigma(A)$ et $f \in H(A)$, l'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(E)$ et ne dépend pas de γ.

1.2.7 Espaces d'interpolation

Par la suite, il seura necessaire d'un troduire certaines espaces intermédiaires entre D_A et X (ou D_B et X), appelés espaces d'interpolation, lorsque A ou B vérifie certaines propriétés spectrales.

Définition 1.2.9. *Pour $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, on note $D_A(\theta, p)$ le sous espace de X suivant :*

$$D_A(\theta, p) = \{x \in E : \|t^\theta A(A - tI)^{-1} x\| \in L^p_*\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta,p)} = \|x\|_X + \left(\int_0^{+\infty} \|t^\theta A(A - tI)^{-1} x\|^p_X dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

ou L^p_* est l'espace des fonctions de puissance p intégrables pour la mesure $\frac{dt}{t}$,
Pour $p = +\infty$, on a

$$D_A(\theta, \infty) = \{x \in E, \sup_{t>0} \|t^\theta A(A - t^{-1} x\| < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta,+\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t>0} \|t^\theta A(A - t)^{-1} x\|_X$$

Exemple 1.2.1. 1. Soit $E = C([0,1], \|.\|_\infty)$ et l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in C^2([0,1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \\ A\varphi = \varphi''. \end{cases}$$

Donc pour $p = +\infty$

$$D_A(\theta, +\infty) = \begin{cases} C^{2\theta}([0,1]) \ \text{ et } \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \ \text{ si } \ 2\theta < 1, \\ C^{1,*}([0,1]) \ \text{ et } \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \\ C^{1,2\theta-1}([0,1]) \ \text{ et } \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

où $C^{1,*}([0,1])$ est l'espace de Zygmund des fonctions continues φ sur $[0,1]$ telles que :

$$\sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|\varphi(x) - 2\varphi(\frac{x+y}{2}) + \varphi(y)|}{|x-y|} < +\infty$$

2. Soit $E = L^p(]0,1[), p[1, +\infty[$ et l'opérateur B défini par

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in W^{1,p}(]0,1[)/u(0) = 0\}, \\ Bu = u'. \end{cases}$$

Alors

$$D_B(\theta, p) = \begin{cases} W^{\theta,p}(]0,1[) \ \ si \ \ 0 < \theta < \frac{1}{p}, \\ W^{\theta,p}_{0,0}(]0,1[) \ \ si \ \ \theta = \frac{1}{p}, \\ W^{\theta,p}_{0}(]0,1[) \ \ si \ \ \frac{1}{p} < \theta < 1. \end{cases}$$

Nous notons que

- Pour $\theta \in]0,1[$, $W^{\theta,p}(]0,1[)$ est le sous-espace de $L^p(]0,1[)$ des fonctions u telles que
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|u(t) - u(s)|^p}{|t-s|^{1+\theta p}} dtds < +\infty.$$
Pour $p = 2, \theta = \frac{1}{2}$, on trouve l'espace célèbre $H^{\frac{1}{2}}(]0,1[)$.
- L'espace de Sobolev (plutôt appelé espace de Besov) $W^{\theta,p}_{0,0}(]0,1[)$ est le sous-espace des fonctions u de $L^p(]0,1[)$ telles que
$$\int_0^1 \frac{|u(t)|^p}{t} dt < +\infty.$$
- D'une manière générale, on peut donner :
$$(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega))_{\theta,q} = \mathcal{B}^{m(1-\theta)}_{p,q}(\Omega).$$
où Ω est un ensemble ouvert avec une frontière de classe C^m, $p \in]1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty[$, et $\mathcal{B}^s_{p,q}$ sont les espaces de Besov.

Lemme 1.2.1. ***(lemme de Schurs)***

Soit $k : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

$$\begin{cases} i) \quad \exists a > 0, \forall x_2 \in \Omega_2 : \int_{\Omega_1} |k(x_1, x_2)| dx_1 \leqslant a, \\ ii) \quad \exists b > 0, \forall x_1 \in \Omega_1 : \int_{\Omega_2} |k(x_1, x_2)| dx_2 \leqslant b. \end{cases}$$

L'opérateur K défini par

$$(Kf)(x_2) = \int_{\Omega_1} k(x_1, x_2) f(x_1) dx_1; \quad \forall x_2 \in \Omega_2.$$

Vérifie

$$K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2)).$$

CHAPITRE 2

MÉTHODE DE SOMME D'OPÉRATEURS LINÉAIRES

2.1 Le cas somme d'opérateurs commutatifs

Introduction

Dans ce qui suit, X désigne un espace de Banach complexe. Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X avec des domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$; on s'intéresse ensuite à la résolution de l'équation suivante :

$$Au + Bu = f, \tag{2.1}$$

Où f est un vecteur donné de X et u est l'inconnu. L'opérateur de sommes $L = A + B$ est défini par

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lu = Au + Bu \quad \text{si} \quad u \in D(L). \end{cases}$$

Et l'équation (2.1) devient

$$Lu = f.$$

Une solution stricte de l'équation (2.1) est un élément $u \in D(L)$ que satisfait l'équation (2.1). L'objectif est de trouver une telle solution lorsque f est un élément arbitraire dans X, mais ce n'est pas toujours possible. Nous introduisons donc une nouvelle notion de solution. À savoir, u est une solution forte de l'équation (2.1) si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(L)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \quad et \lim_{n\to+\infty} Lu_n = f. \tag{2.2}$$

Évidemment, une solution stricte de l'équation (2.1) est une solution forte de l'équation (2.1). La notion de solution forte est donc plus faible (mais le terme solution faible ne sera pas utilisé ici, il est généralement réservé aux solutions variationnelles).

Notez que si L est fermé, les deux notions de solution stricte et forte sont équivalentes, mais la somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermée.

Si nous supposons que L est fermable, alors (2.1) est équivalent à

$$u \in D(\overline{L}) \text{ et } \overline{L}u = f.$$

Enfin, dans le cas où L est fermable, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour chaque f de X, il existe une solution forte de (2.1).
2. $0 \in \rho(\overline{L})$.

Et si L est fermé, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tous f de X, il existe une solution stricte de (2.1).
2. $0 \in \rho(L)$.

Dans ce contexte, il est important de trouver des conditions sur les opérateurs A et B qui garantissent la fermabilité des opérateurs L et que $0 \in \rho(\overline{L})$. Sinon, nous pouvons introduire un paramètre spectral λ et considérer l'équation.

$$Au + Bu - \lambda u = f.$$

Les théorèmes de G. Da Prato et P. Grisvard, énoncés plus loin, donnent des réponses positives à ces problèmes sur la somme des opérateurs.

2.1.1 Hypothèses sur A et B

Soitent A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X avec les domaines $D(A)$ et $D(B)$, on s'intéresse à résoudre l'équation suivante, pour $\lambda > 0$:

$$Au + Bu - \lambda u = f \tag{2.3}$$

Il s'agit de l'équation (2.1) où A est remplacé par $A - \lambda I$.

Nous rappelons que arg indique l'argument principal de la fonction suivante :

$$arg(z) = \varphi \text{ si } z = re^{i\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in]-\pi, \pi[.$$

Pour $\theta \in]0, \pi[$, on définit le secteur $\Sigma_{\pi-\theta}$ pour :

$$\Sigma_{\pi-\theta} = \{z \in \mathbb{C}^* : |arg(z)| < \pi - \theta\},$$

On dit qu'un opérateur linéaire fermé P défini sur X satisfait l'hypothèse (H_θ) si et seulement si

$$\begin{cases} \rho(P) \supset \Sigma_{\pi-\theta}, \\ \forall z \in \Sigma_{\pi-\theta};\ \ \|(P - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C_P(\phi)}{|z|} \ \text{ tels que } \ arg z = \phi. \\ C_p :]-\pi + \theta, \pi - \theta[\to \mathbb{R} \ \ \text{ est une fonction pair convexe} \end{cases} \tag{H_θ}$$

Les deux hypothèses fondamentales sur les opérateurs A et B sont les suivantes :

$$\begin{cases} \exists \theta_A, \theta_B \in]0, \pi[: \\ 1) A \ \text{ vérifie } \ (H_{\theta_A}), B \ \text{ vérifie } \ (H_{\theta_B}) \\ 2) \theta_A + \theta_B < \pi \end{cases} \tag{DP1}$$

et

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(A), \forall \mu \in \rho(B) \\ (A - \lambda I)^{-1}(B - \mu I)^{-1} = (B - \mu I)^{-1}(A - \lambda I)^{-1} \end{cases} \tag{DP2}$$

Remarque 2.1.

1. Puisque $\theta_A + \theta_B < \pi$, l'un des deux angles est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$ et l'opérateur correspondant est alors le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique (pas nécessairement continu à 0 , les domaines $D(A)$ et $D(B)$ n'ayant pas été supposés denses).
2. Selon les hypothèses (DP2), si $y \in X$, $\lambda \in \rho(A)$ et $\mu \in \rho(B)$, alors

$$(A-\lambda I)^{-1}(B-\mu I)^{-1}y = (B-\mu I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1}y \in D(A)\cap D(B)\ .$$

De plus, si $x \in D(B)$, en prenant $y = (B-\mu I)x$, on obtient :

$$\begin{cases} (A-\lambda I)^{-1}x \in D(B), \\ (B-\mu I)(A-\lambda I)^{-1}x = (A-\lambda I)^{-1}(B-\mu I)x. \end{cases}$$

L'hypothèse (DP2) nous permettra de commuter les produits dans toute expression fonctionnelle contenant A, B et I. Dans la suite, les commutations suivantes seront utilisées :

Dans l'hypothèse (DP2), nous considérons $\lambda + z \in \rho(A)$ et $-z \in \rho(B)$.

1. Si $f \in X$, alors

$$(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}f \in D(B),$$

et

$$B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}f = (A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}f.$$

2. Si de plus $f \in D(B)$, alors :

$$B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}f = (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bf.$$

La courbe sectorielle γ_λ

Les hypothèses (DP1) et (DP2) nous permettront de construire une courbe sectorielle γ_λ séparant $\sigma(A-\lambda I)$ et $\sigma(-B)$ et restant dans $\rho(A-\lambda I)\cap\rho(-B)$. Il existe donc $\theta_0 > 0$ tel que $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$. Notez que sous l'hypothèse (DP1), l'un des angles θ_A, θ_B est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, dans la suite, nous supposerons que

$$\theta_A < \tfrac{\pi}{2} \text{ et } \theta_0 > \tfrac{\pi}{2}.$$

Pour tous $\lambda > 0$, nous construisons une courbe sectorielle γ_λ qui est la frontière orientée positivement du domaine situé à gauche des lignes.

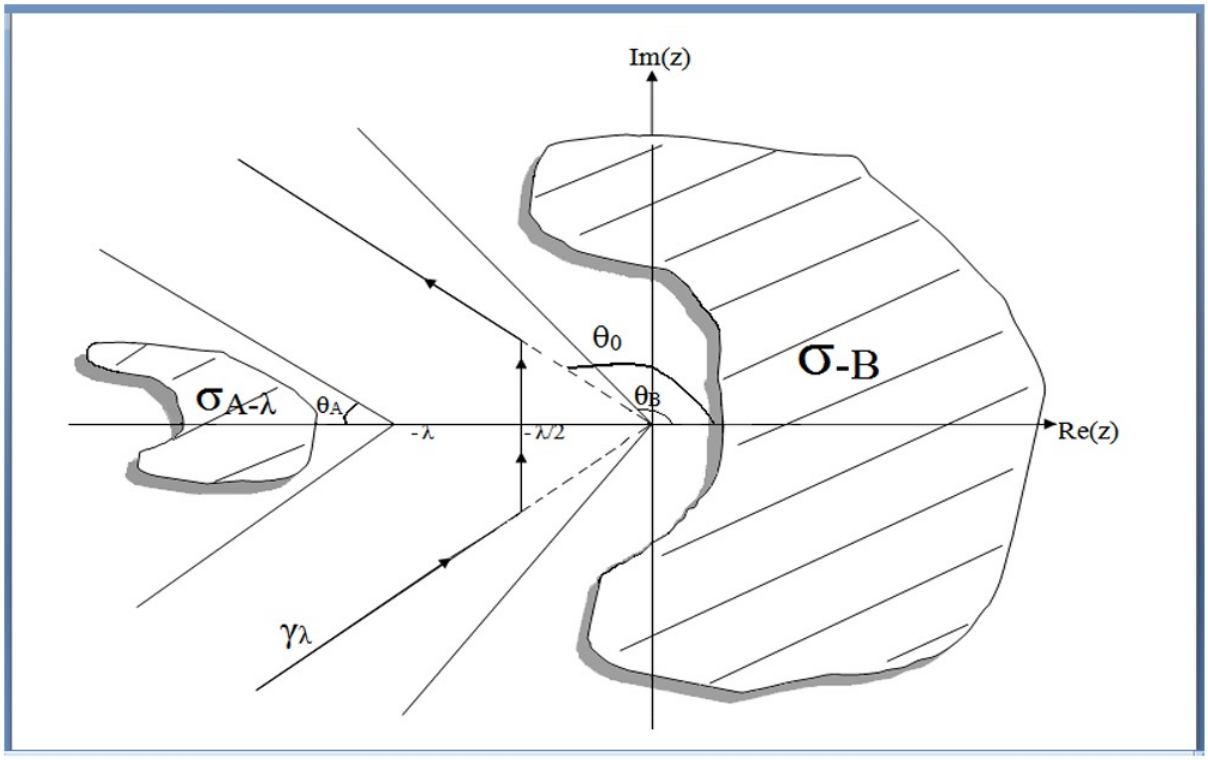
$$\{te^{i\theta_0} : t \geqslant \tfrac{\lambda}{2|\cos\theta|}\}\ ,\ \{te^{-i\theta_0} : t \geqslant \tfrac{\lambda}{2|\cos\theta|}\}\ ,\ \{z = -\tfrac{\lambda}{2} + yi; |z| < \tfrac{\lambda}{2|\cos\theta|}\}.$$

et qui se trouve dans $\rho(A-\lambda I)\cap\rho(-B)$.

Cette courbe est orientée, laissant le spectre $\sigma(A-\lambda I)$ sur la gauche (voir la figure ci-dessous).

Il est possible de remarquer que $z \to (A-\lambda-z)^{-1}$ est défini et analytique à droite de γ_λ, et que $z \to (B+z)^{-1}$ est défini et analytique à gauche de γ_λ. Notons que :

$$\rho(A-\lambda I)\cup\rho(-B) = \mathbb{C}$$



2.1.2 Représentation de la solution

Notre objectif est de résoudre l'équation.

$$Au + Bu - \lambda u = f,\ \lambda > 0.$$

Sous les hypothèses (DP1) et (DP2). Il s'agit de voir quand il est possible de définir $(A + B - \lambda I)^{-1}$ ou, à défaut, $(\overline{A+B} - \lambda I)^{-1}$.

Notons que l'hypothèse d'ellipticité-parabolicité (DP1) est suffisante pour garantir la fermabilité de la somme $A + B$. Cependant, même si les deux hypothèses (DP1) et (DP2) sont vérifiées, cela ne garantit pas que $A + B$ est fermé. D'autre part, il est suffisant d'avoir la fermabilité de la somme même si aucun des deux domaines $D(A)$, $D(B)$ n'est dense dans X, voir [12]. Il existe d'autres hypothèses permettant d'obtenir la fermabilité de la somme $A + B$, [4].

Quel est donc le "candidat" pour être $(\overline{A+B} - \lambda I)^{-1}$ ou $(A + B - \lambda I)^{-1}$?

Nous allons le construire en utilisant l'intégrale de Dunford (cf. chapitre 1) :

$$g(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma g(z)(zI - T)^{-1} dz.$$

Ici, posone l'exemple.

$$\begin{cases} g(z) = (B + zI)^{-1} \\ T = A - \lambda I = c^{ste} \quad opérateur, \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} g(A - \lambda I) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma g(z)(zI - (A - \lambda I))^{-1} dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (A - \lambda I - zI)^{-1}(B + zI)^{-1} dz \end{aligned}$$

où Γ serait une courbe de Jordan entourant le spectre de $A - \lambda I$. Cela conduit à considérer, dans ce qui suit, l'opérateur.

$$f \in X \mapsto S_\lambda f = -\tfrac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda I - zI)^{-1}(B + zI)^{-1} f dz.$$

Notez que pour $z \in \gamma_\lambda$, les deux résolvantes écrites ci-dessus, existent grâce à (DP1). La proposition suivante montre que S_λ est un opérateur linéaire borné sur X.

Proposition 2.1.1. *Soit A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X satisfaisant (DP1) et (DP2). Donc, pour tous $\lambda > 0$, $S_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ et il existe $C > 0$:*

$$\|S_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \tfrac{C}{\lambda}.$$

La proposition suivante représente un résultat fondamental dans la théorie des sommes.

Proposition 2.1.2. *Soit $\lambda > 0$*

1. *si $u \in D(A + B) = D(A) \cap D(B)$, alors*

$$S_\lambda(Au + Bu - \lambda u) = u,$$

(S_λ est l'inverse à gauche de $(A + B - \lambda I)$ sur $D(A + B)$).

2. *si $f \in D(A) + D(B)$, alors*

$$S_\lambda f \in D(A) \cap D(B) \text{ et } (A + B - \lambda I) S_\lambda f = f,$$

(S_λ est l'inverse à droit de $(A + B - \lambda I)$).

on voit si $f \in D(A) + D(B)$ alors $u = S_\lambda f$ est une solution de (2.3).

Peut-on obtenir un inverse de la somme avec moins de régularité sur f ? L'idéal est de résoudre l'équation (2.3) pour $f \in X$. Cela nécessite l'utilisation d'espaces d'interpolation (cf. chapitre 1).

2.1.3 Théorèmes principaux

Nous revenons à notre équation (2.3) : $Au + Bu - \lambda I = f, \lambda > 0$.

Théorème 2.1.1. ***(Solution stricte)***

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés sur X vérifiant (DP1) et (DP2). Pour tout $f \in D_B(\theta, +\infty) + D_A(\theta, +\infty)$ où $\theta \in]0, 1[$, il existe une solution stricte et unique u de

$$Au + Bu - \lambda u = f.$$

De plus, u est donnée par l'intégrale de Dunford.

$$u = S_\lambda f = -\tfrac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - zI)^{-1}(B + zI)^{-1} f dz.$$

Démonstration. On suppose que $f \in D_B(\theta, +\infty)$. Montrons que $u + S_\lambda f \in D(B)$, on a

$$(A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1} f = (B + z)^{-1}(A - \lambda - z)^{-1} f \ ,$$
$$B(A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1} f = (A - \lambda - z)^{-1} B(B + z)^{-1} f,$$

et

$$\|B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}f\|_X \leqslant \frac{Cste}{|z+\lambda||z|^{\theta}}\|f\|_{D_B(\theta,+\infty)}.$$

donc

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}fdz$$

est absolument converge et $u \in D(B)$ avec

$$Bu = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}fdz$$

De même, on peut montrer que $u \in D(A)$ ainsi que

$$Au + Bu - \lambda u = f.$$

□

Nous venons de voir que pour obtenir une solution stricte u de (2.3), on duit imposé une certaine régularité sur f, à savoir

$$f \in D_B(\theta,+\infty) + D_A(\theta,+\infty)$$

Il est donc évident que bloc $Au+Bu-\lambda u$ est aussi dans $D_B(\theta,+\infty)+D_A(\theta,+\infty)$. La question que se pose est de savoir si, on trouve pour chacun des termes du bloc, la régularité que l'on a donnée au départ sur f. La réponse à cette question est positive, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 2.1.2. ***(Régularité maximale)***
Soit A et B deux opérateurs linéaires fermés en X satisfaisant (DP1) et (DP2). Pour tout $f \in D_A(\theta,+\infty)$, la solution stricte u de

$$Au + Bu - \lambda u = f,$$

vérifie

1. $(A-\lambda)u \in D_A(\theta,+\infty)$,
2. $Bu \in D_A(\theta,+\infty)$,
3. $(A-\lambda)u \in D_B(\theta,+\infty)$

Théorème 2.1.3. ***(Régularité maximale)***
Soit A et B deux opérateurs linéaires fermés en X satisfaisant (DP1) et (DP2). Pour tout $f \in D_B(\theta,+\infty)$, la solution stricte u de

$$Au + Bu - \lambda u = f,$$

vérifie

1. $(A-\lambda)u \in D_B(\theta,+\infty)$,
2. $Bu \in D_B(\theta,+\infty)$,
3. $Bu \in D_A(\theta,+\infty)$

Démonstration. On démontre le premier théorème et pour le deuxième, la démonstration est analogue.

Soit $t > 0$ suffisamment grand pour que $-t$ soit à gauche du point $-\frac{\lambda}{2}$. Donc,

$$(-B-(-t))^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

i.e.

$$(B-t)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Montrons la régularité $Bu \in D_B(\theta, +\infty)$: on doit calculer $(B-t)^{-1}u$. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} (B-t)^{-1}u & = & (B-t)^{-1}(S_\lambda f) \\ & = & \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B-t)^{-1}(B+z)^{-1}f dz. \end{array}$$

Nous utilisons la $2^{ème}$ identité du résolvant :

$$(B-t)^{-1}(B+z)^{-1}f = \frac{1}{t+z}((B-t)^{-1}-(B+z)^{-1}),$$

(semblable à une décomposition en éléments simples). Il en résulte :

$$(B-t)^{-1}u = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B-t)^{-1}f\frac{dz}{t+z} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}f\frac{dz}{t+z}.$$

La première intégrale est nulle (intégrée à droite de γ_λ, $t+z \neq 0$). D'où

$$\begin{array}{rcl} & & B(B-t)^{-1}u \\ & = & u + t(B-t)^{-1}u \\ & = & \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}f dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}\frac{(tf)}{t+z}dz \\ & = & \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}\{(B+z)^{-1}f - \frac{t}{t+z}(B+z)^{-1}f\}dz \\ & = & \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}(\frac{z}{t+z})f dz. \end{array}$$

En faisant le même travail pour $Bu = B(S_\lambda f)$, on a pour t suffisamment grand.

$$\begin{array}{rcl} B(B-t)^{-1}Bu & = & \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}\frac{zf}{t+z}dz \\ & = & \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{z}{t+z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}f dz, \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \|B(B-t)^{-1}Bu\|_X & = & (Cste)\int_{\gamma_\lambda}|\frac{z}{\lambda+z}|\frac{1}{|t+z|}\frac{1}{|z|^\theta}|dz|\|f\|_{D_B(\theta,+\infty)} \\ & \leqslant & (Cste)\int_{\gamma_\lambda}\frac{1}{|t+z|}\frac{1}{|z|^\theta}|dz|\|f\|_{D_B(\theta,+\infty)}, \end{array}$$

alors $z \to tz$

$$\|B(B-t)^{-1}Bu\|_X \leqslant (Cste)[\int_{\gamma_\lambda}\frac{1}{|1+z|}\frac{1}{|z|^\theta}|dz|]\frac{\|f\|_{D_B(\theta,+\infty)}}{t^\theta}.$$

d'où

$$t^\theta\|B(B-t)^{-1}Bu\|_X \leqslant (Cste)\|f\|_{D_B(\theta,+\infty)},$$

i.e. $Bu \in D_B(\theta, +\infty)$. Puisque

$$u \in D(B) \subset D_B(\theta, +\infty),$$

On déduit de l'équation $Au + Bu - \lambda u = f$, que

$$Au \in D_B(\theta, +\infty)$$

□

Finalement, les résultats obtenus ici s'étendent au cas $f \in D_B(\theta, p)$ avec $p \in [0, +\infty[$ grâce à la propriété fondamentale de l'interpolation et aux inclusions suivantes :

$$\begin{cases} D_A(\theta', q) \hookrightarrow D_A(\theta, p) \\ si \quad \theta' > \theta, p, q \quad tout \\ ou \quad si \quad \theta' = \theta, q \leqslant p. \end{cases}$$

Proposition 2.1.3. *Soit A et B deux opérateurs linéaires fermés en X versifiant (DP1) et (DP2). Si $f \in D_B(\theta, p), \theta \in]0,1[, p \in [1, +\infty[$, alors l'équation $Au + Bu - \lambda u = f$ admet une solution stricte unique $u(u = S_\lambda f)$ satisfaisante :*

1. $(A - \lambda)u \in D_B(\theta, +\infty)$
2. $Bu \in D_B(\theta, +\infty)$
3. $Bu \in D_A(\theta, +\infty)$

2.1.4 Exemple (l'équation de la chaleur)

L'objectif est de résoudre et d'étudier la régularité des solutions de l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \lambda u(t,x) = f(t,x), \\ u(0,x) = 0, \quad x \in [0,1], \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.4}$$

dans le carré $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. Ou t correspond au temps, $\lambda > 0$ fixe, f est une fonction donnée dans un espace de Banach X.

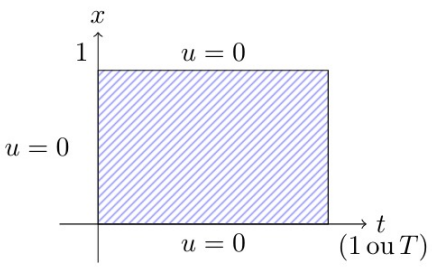


FIGURE 2.1 – Problème parabolique sur Ω

- **Ècriture abstraite du problème**

  En posant $X = C(]0,1[; L^p(0,1))$, on définit la fonction u comme suit :

$$\begin{array}{rcl} u : [0,1] & \to & L^P(0,1) \\ t & \to & (u(t))(x) = u(t,x) \end{array}$$

muni de la norme

$$\|u\|_X = \max_{t \in [0,1]} \|u(t)\|_{L^p(0,1)}$$

Et (2.4) devient le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} -u'(t) + \Lambda u(t) - \lambda u(t) = f(t), \\ u(0) = 0, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

Où Λ est l'opérateur linéaire sur X donné par :

$$\begin{cases} D_\Lambda = \{\varphi \in W^{2,p}(]0,1[) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ \Lambda\varphi = \varphi'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{cases}$$

On définit les opérateurs A et B sur X par :

$$\begin{cases} D_A = \{u \in C^1([0,1]; X)/u(0) = 0\} \\ Au = -u', \quad u \in D_A. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D_B = \{u \in X/\forall t \in [0,1] : u(t) \in D_\Lambda\} \\ (Bu)(.) = \Lambda(u(.)), \quad u \in D_B. \end{cases}$$

Alors le problème (2.4) s'écrit dans X sous la forme :

$$Au + Bu - \lambda u = f \in X.$$

Nous allons appliquer la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Da Prato et Grisvard dans le cadre commutatif pour examiner l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème (2.4).

- **Application des sommes**

Résolvante de Λ :

Λ est un opérateur linéaire fermé et son domaine est dense dans $L^p(]0,1[)$, $p \in [0, +\infty[$. ($\overline{D_\Lambda} = L^p(]0,1[)$)

Il est prouvé que

$$\rho(\Lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |arg(\lambda)| < \pi\} \cup \{0\}$$

Vérifiez l'hypothèse (DP1). Examinons tout d'abord le problème suivant (i.e. : Λ est inversible).

$$\begin{cases} \Lambda\varphi - z\varphi = g \in L^p(]0,1[), \\ \varphi \in D_\Lambda. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \varphi''(x) - z\varphi(x) = g(x) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

La solution du problème (2.5) s'écrit de manière unique à l'aide de la fonction de Green $K\sqrt{z}$:

$$\varphi(x) = \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,s)g(s)ds = (\Lambda - zI)^{-1}g(x), \quad x \in [0,1],$$

Le noyau de Green est déterminé de la manière suivante :

$$K_{\sqrt{z}}(x,s)=\begin{cases}\frac{\Phi_1(x)\Phi_2(x)}{(\Phi_1,\Phi_2)(x)}, & si \quad 0\leqslant x\leqslant s,\\ \frac{\Phi_1(s)\Phi_2(s)}{(\Phi_1,\Phi_2)(s)}, & si \quad s\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

où

$$(\Phi_1,\Phi_2)(x)=\begin{vmatrix}\Phi_1(x) & \Phi_2(x)\\ \Phi_1'(x) & \Phi_2'(x)\end{vmatrix}$$

$$=\Phi_1(x)\Phi_2'(x)-\Phi_1'(x)\Phi_2(x)$$

Φ_1 et Φ_2 sont deux fonctions satisfaisant les deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases}\Phi_1''(x)-z\Phi_1(x)=0,\\ \Phi_1(0)=0, \quad \Phi_1'(0)=-1.\end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases}\Phi_2''(x)-z\Phi_2(x)=0,\\ \Phi_2(1)=0, \quad \Phi_2'(1)=1.\end{cases} \tag{2.7}$$

La solution du problème de Cauchy (2.6) s'écrit sous la forme suivante :

$$\Phi_1(x)=a_1e^{\sqrt{z}x}+a_2e^{-\sqrt{z}x} \tag{2.8}$$

En utilisant les conditions initiales, on trouve :

$$a_1=\tfrac{-1}{2\sqrt{z}},\ a_2=\tfrac{1}{2\sqrt{z}}$$

alors

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= \tfrac{-1}{2\sqrt{z}}e^{\sqrt{z}x}+\tfrac{1}{2\sqrt{z}}e^{-\sqrt{z}x},\\ &= \tfrac{-1}{\sqrt{z}}\tfrac{e^{\sqrt{z}x}-e^{-\sqrt{z}x}}{2},\\ &= \tfrac{-1}{\sqrt{z}}\sinh\sqrt{z}x.\end{aligned}$$

De la même façon, on trouve la solution (2.7) :

$$\begin{aligned}\Phi_2(x) &= \tfrac{e^{-\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}e^{\sqrt{z}x}-\tfrac{-e^{\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}e^{-\sqrt{z}x},\\ &= \tfrac{-1}{\sqrt{z}}\tfrac{e^{\sqrt{z}(1-x)}-e^{-\sqrt{z}(1-x)}}{2},\\ &= \tfrac{-1}{\sqrt{z}}\sinh\sqrt{z}(1-x).\end{aligned}$$

Finalement, on aura

$$K_{\sqrt{z}}(x,s)=\tfrac{1}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}}\begin{cases}\sinh\sqrt{z}(1-x)\sinh\sqrt{z}s, & 0\leqslant s\leqslant x\\ \sinh\sqrt{z}x\sinh\sqrt{z}(1-s), & x\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

La majoration de la résolvante $\|(\Lambda-zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1))}$, est obtenue grâce au lemme de Schur (cf. chapitre 1).

Comme $K_{\sqrt{z}}(.,.)$ est symétrique, il suffit de vérifier une seule condition,

$$\begin{aligned}\|(\Lambda-zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(]0,1[))} &\leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1|K_{\sqrt{z}}(x,s)|ds\\ &\leqslant \tfrac{1}{|z|\cos\frac{\theta}{2}} \quad \text{où} \quad \theta=arg(z) \quad \text{et pour tout} \quad z\notin]-\infty,0]\end{aligned}$$

Résolvante de B :

L'opérateur B est déterminé par

$$\begin{cases} D_B = \{u \in X / \forall t \in [0,1] : u(t) \in D_\Lambda\} \\ (Bu)(.) = \Lambda(u(.)), \quad u \in D_B. \end{cases}$$

et B est un opérateur linéaire fermé (car Λ l'est), pour la résolvante de B, on procède comme suit :

$$\begin{cases} Bu - zu = f \in X \\ u \in D_B. \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \Lambda u(t) - zu(t) = f(t) \in L^p(0,1) \\ \Lambda(t) \in D_\Lambda. \end{cases}$$

D'où

$$((B-z)^{-1}f)(t) = (\Lambda - z)^{-1} f(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,1]$$

Et pour tout z dans $\rho(\Lambda)$, on a

$$\begin{aligned} \|(B-z)^{-1}f\|_X &= \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|\{(B-z)^{-1}f\}t\|_{L^p(0,1)} \\ &= \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|(\Lambda - z)^{-1} f(t)\|_{L^p(0,1)} \\ &\leqslant \frac{1}{|z| \cos \frac{\theta}{2}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|f(t)\|_{L^p(0,1)} \\ &\leqslant \frac{1}{|z| \cos \frac{\theta}{2}} \|f(t)\|_X \end{aligned}$$

D'où

$$\rho(B) \supset \{z \in \mathbb{C} : |arg(z)| < \pi\}$$

alors

$$\theta_B = 0.$$

Résolvante de A :

L'opérateur A est déterminé par

$$\begin{cases} D_A = \{u \in C^1([0,1]; L^p(0,1)) / u(0) = 0\} \\ Au = -u', \quad u \in D_A. \end{cases}$$

A est linéaire fermé, sa résolvante découle de la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} Au - zu = f, \\ u \in D_A. \end{cases}$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} -u'(t) - zu(t) = f(t), \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Il s'agit d'une équation différentielle de premier ordre, et son équation homogène est :

$$-u'(t) - zu(t) = 0, \tag{2.10}$$

Cherchons une solution particulière de (2.10) sous la forme $u(t) = ke^{-zt}$.

alors

$$u'(t) = k'(t)e^{-zt} - k(t)ze^{-zt}.$$

On remplace le $u'(t)$ dans (2.9), on obtient :

$$-k'(t)e^{-zt} + k(t)ze^{-zt} - k(t)ze^{-zt} = f(t),$$

alors

$$-k'(t)e^{-zt} = f(t),$$

Donc

$$k(t) = -\int_0^t f(s)e^{zs}ds.$$

D'où :

$$u(t) = -(\int_0^t f(s)e^{zs}ds)e^{-zt}.$$

Ainsi, la solution générale du problème (2.9) est donnée par :

$$u(t) = -\int_0^t e^{-z(t-s)}f(s)ds. \tag{2.11}$$

Remarque 2.2. La formule (2.11) est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors $\rho(A) = \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \|u(t)\|_{L^p(0,1)} & = & \| - \int_0^t e^{-Rez(t-s)}f(s)ds\|_{L^p(0,1)} \\ & \leqslant & \int_0^t e^{-Rez(t-s)}\|f(s)\|_X ds \\ & \leqslant & [\frac{e^{-Rez(t-s)}}{Rez}]_0^t\|f\|_X \\ & \leqslant & \frac{1-e^{-(Rez)t}}{Rez}\|f\|_E \\ & \leqslant & \frac{1}{Rez}\|f\|_X \quad si \quad Rez > 0. \end{array}$$

Et donc $\rho(A)$ contient tout secteur de la forme :

$$\Sigma_{\pi-\theta_A} = \{z \in \mathbb{C} : |argz| < \pi - \theta_A\}$$

Avec $\frac{\pi}{2} < \theta_A < \pi$ et sur ce secteur, on a (DP1).

Pour $z \in \Sigma_{\pi-\theta_A}$, $argz = \theta$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|(A-z)^{-1}\|_{L(E)} & \leqslant & \frac{1}{Rez} = \frac{1}{|z|\cos\theta} \\ & \Rightarrow & \theta_A + \theta_B = \theta_A + 0 = \theta_A < \pi. \end{array}$$

Donc l'hypothèse (DP1) est vérifiée.

Commutativité de srésolvantes (Hypothèse (DP2))

Soient $z \in \rho(A)$, $z' \in \rho(B)$. On a

$$(A-z)^{-1}(B-z')^{-1}f = (A-z)^{-1}(\{(B-z')^{-1}f\})$$

et

$$\begin{aligned}
\{(A-z)^{-1}(B-z')^{-1}f\}(t) &= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\{(B-z')^{-1}f(s)\}(x)ds, \\
&= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\{(\Lambda-z')^{-1}f(s)\}(x)ds, \\
&= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,\tau)[f(x)](\tau)d\tau ds, \quad \text{où} \quad [f(x)](\tau) = f(x,\tau) \\
&= \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,\tau)(-\int_0^t e^{-z(t-s)}(f(s))(\tau)ds)d\tau, \\
&= \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,\tau)(-\int_0^t e^{-z(t-s)}(f(s))ds)(\tau)d\tau, \\
&= \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,\tau)(\{(A-z)^{-1}f\}(t))(\tau)d\tau, \\
&= \{(B-z')^{-1}(\{(A-z)^{-1}f\})(t)\}(x).
\end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (DP2) est vérifiée.

Les résultats :

Soit $\theta \in]0;1[$; on précise par exemple $D_B(\theta;p)$:

$$D_B(\theta;p) = C([0,1], D_\Lambda(\theta,p))$$

$$= \begin{cases} C([0,1], W^{2\theta,1}(0,1)) & si \quad 2\theta > \frac{1}{p} \\ C([0,1], W^{2\theta,1}_{0,0}(0,p)) & si \quad 2\theta = \frac{1}{p} \\ C([0,1], W^{2\theta,1}_{0,0}(0,p)) & si \quad 2\theta < \frac{1}{p}. \end{cases}$$

De même,

$$D_A(\theta,+\infty) = C^\theta([0,1], L^p(0,1)) \text{ avec } u(0) = 0$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.1.4.

Soit

$$f \in C^\theta([0,1], L^p(0,1)) \text{ avec } f(0) = 0$$

Alors le problème (2.4) admet une unique solution $u(.;.)$ vérifiant :

$$u \in C^1([0,1], L^p(0,1)) \cap C([0,1], W^{2,p}(0,1))$$

Et de plus

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C^\theta([0,1], L^p(0,1))$$

Et on a la régularité croisée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C^0([0,1], W^{2\theta,p}(0,1))$$

2.2 Le cas somme d'opérateurs non-commutatifs

Introduction

La méthode, comme nous l'avons dit mentionné, est basée sur une construction explicite de la solution sous la forme d'une intégrale de Dunford et sur l'utilisation des espaces d'interpolation caractérisés par Grisvard [9] (voir chapitre 1). Plus précisément, soit X un espace de Banach complexe et A et B deux opérateurs linéaires fermés définis respectivement sur les domaines D_A et D_B , qui ne sont pas nécessairement denses ; nous considérons alors l'équation :

$$Ax + Bx - \lambda x = y, \tag{2.12}$$

On dira que l'équation (2.12) est de type parabolique si

$$\begin{cases} (A-z)^{-1} \text{ et } (B-z)^{-1} \text{ existent pour } z \in \Sigma_A \; et \; z \in \Sigma_B, \; o\grave{u} \\ \Sigma_A \text{ et } \Sigma_B \text{ sont deux secteurs de la forme } \{z \in \mathbb{C}/|argz| < \pi - \varphi\} \\ \text{avec } \varphi = \theta_A \text{ respectivement } \varphi = \theta_B \text{ et } \theta_A + \theta_B < \pi \; et \\ \|(A-z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0\left(\frac{1}{|z|}\right) \; et \; \|(B-z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0\left(\frac{1}{|z|}\right) \\ pour \; z \in \Sigma_A \text{ respectivement } z \in \Sigma_B. \end{cases} \tag{H.1}$$

Le cas commutatif correspondant à $[(A-\lambda)^{-1}; (B-\mu)^{-1}] = 0$ a été traité dans la section précédente. En effet, la solution x a été construite sous la forme

$$x = S_\lambda y = -\tfrac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1}(B+z)^{-1} y dz$$

L'idée fondamentale de cette section est de construire la solution sous forme d'un " inverse à gauche " pour $(A+B-\lambda)$, plus précisément, nous cherchons x sous la forme $x = (1+T_\lambda)^{-1} S_\lambda y$ où T_λ est "suffisamment petit" et nul dans le cas commutatif. On impose l'hypothèse :

$$\begin{cases} \exists \lambda_0 > 0, \; \psi \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \|z'(A-\lambda_0)(A-z)^{-1}[(A-\lambda_0)^{-1}; (B+z')^{-1}]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leqslant \psi(|z|, |z'|) \\ \forall z \in \Sigma_A, \forall z' \in \Sigma_{-B} \text{ et } \int_{\gamma_\lambda} \psi(|z+\lambda|, |z|)|dz| \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{H.2}$$

Les hypothèses (H.1) et (H.2) permettent de construire une solution unique pour le problème (2.12) pour un second membre y dans un espace d'interpolation entre D_A et X ou D_B et X. Pour étudier la régularité maximale de la solution, nous devons expliciter la fonction ψ de (H.2) ; nous montrerons ensuite que si les données y appartiennent à un espace d'interpolation $D_A(\theta, p)$, alors Ax et Bx sont dans $D_A(min(\delta, \theta), p)$ où δ sera donnée dans le paragraphe suivant. La partie de la théorie des sommes traitée dans cette section est applicable à l'étude des équations de type parabolique. Les principaux théorèmes de cette partie se trouvent dans [11] et [12].

2.2.1 hypothèses

Soient X un espace de Banach complexe, A et B deux opérateurs linéaires fermés avec domaines respectifs D_A et D_B, qui ne sont pas nécessairement denses dans X. L'opérateur

$A+B$ sera noté L et sera défini par $Lx = Ax + Bx$ pour x dans $D_L = D_A \cap D_B$.Pour $y \in X$, nous proposons de résoudre l'équation abstraite :

$$\begin{cases} Lx - \lambda x = y, \quad \lambda > 0, \\ x \in D(A) \cap D(B). \end{cases} \tag{2.13}$$

On dit que l'opérateur linéaire P du domaine $D_P \subset X$ vérifie $H(\varphi)$ s'il existe $\varphi \in [0, \pi[$ tel que :

1. $\rho_p \subset \Sigma_p = \{z \in \mathbb{C} / |arg(z)| < \pi - \varphi\}$,
2. Il existe une fonction numérique paire et convexe C_P, définie sur $]-\pi+\varphi; \pi+\varphi[$, telle que :

$$\|(P-z)^{-1}\| \leqslant \frac{C_p(\theta)}{|z|}, \quad \forall z \in \rho_p, \text{ avec } argz = \theta.$$

On pose les hypothèses suivantes :

1. **Hypothèse (H.1) :** $\exists \theta_A \geqslant 0$, $\exists \theta_B \geqslant 0$, tels que A vérifie $H(\theta_A)$, B vérifie $H(\theta_B)$,

$$\theta_A + \theta_B < \pi.$$

2. **Hypothèse (H.2) :** Les opérateurs A et B vérifient (H.1) et de plus :

$$\exists \lambda_0 > 0, \quad \psi \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$$

telles que

$$\begin{cases} i) \|z'(A-\lambda_0)(A-z)^{-1}[(A-\lambda_0)^{-1}; (B+z')^{-1}]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \\ \leqslant \psi(|z|, |z'|), \quad \forall z \in \Sigma_A, \forall z' \in \Sigma_{-B}, \\ ii) \int_{\gamma_\lambda} \psi(|z+\lambda|, |z|)|dz| \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

3. **Hypothèse (H.3) :** A et B satisfont (H.2) où ψ vérifie les conditions suivantes :

$$\exists C > 0, \quad h \in \mathbb{N}, \quad (\alpha_i)_{i=1,\dots,h} \quad \text{et} \quad (\beta_i)_{i=1,\dots,h} \subset \mathbb{R}$$

telle que

$$\begin{cases} i) \quad \psi(|z|, |z'|) \leqslant C \sum_1^n \dfrac{1}{|z|^{\alpha_i}.|z|^{\beta_i}}, \ \forall z \in \Sigma_A, \forall z' \in \Sigma_{-B} \\ ii) \quad 0 \leqslant 1 - \alpha_i < \beta_i \leqslant 2, \quad \forall i = 1, \dots, h. \end{cases} \tag{2.15}$$

On posera

$$\delta = \min_i(\alpha_i + \beta_i - 1)$$

Remarque 2.3. Si A vérifie les conditions i) et ii) de (H.3), alors la condition ii) de l'hypothèse (H.2) est vérifiée. En effet,

$$\int_{\gamma_\lambda} \psi(|z+\lambda|, |z|)|dz| \leqslant C \int_{\gamma_\lambda} \sum_1^h \frac{1}{|z+\lambda|^{\alpha_i}.|z'|^{\beta_i}}$$

$$\leqslant C \int_{\gamma_\lambda} \sum_1^n \frac{1}{|\mu\lambda + \lambda|^{\alpha_i}.|\mu\lambda|^{\beta_i}} \mu |d\lambda| = \left(\frac{1}{\lambda^\delta}\right).$$

On a les deux lemmes suivants :

Lemme 2.2.1. *$\forall \mu, z \in \rho(A)$ et $\forall z' \in \rho(-B)$ on a*

i) $[(A-z)^{-1};(B+z')^{-1}] = (A-\mu)(A-z)^{-1}[(A-\mu)^{-1};(B+z')^{-1}](A-\mu)(A-z)^{-1}$.

ii) $[A(A-z)^{-1};(B+z')^{-1}] = z[(A-z)^{-1};(B+z')^{-1}]$.

iii) $[(A-z)^{-1};B(B+z')^{-1}] = z'[(A-z)^{-1};(B+z')^{-1}]$.

Démonstration. Il suffit de développer les commutateurs. □

Lemme 2.2.2. *si A et B vérifient (H.2) alors on a :*

$$\|z'(A-\lambda)(A-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$$

$$\leqslant \psi(|z|,|z'|)\left(1+\tfrac{C_A|\lambda-\lambda_0|}{\lambda}\right), \quad \forall \lambda>0, \forall z \in \Sigma_A, \forall z' \in \Sigma_{-B}.$$

Démonstration.

$$z'(A-\lambda)(A-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}] =$$

$$= z'(A-\lambda)(A-z)^{-1}(A-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1}[(A-\lambda_))^{-1};(B+z')^{-1}](A-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1}$$

$$= z'(A-\lambda_0)(A-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}](I+(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1}).$$

alors

$$\|z'(A-\lambda)(A-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}]\| =$$

$$= \|z'(A-\lambda_0)(A-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}](I+(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1})\|$$

$$\leqslant \|z'(A-\lambda_0)(A-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}]\|\|(I+|\lambda-\lambda_0|(A-\lambda)^{-1})\|$$

$$\leqslant \psi(|z|,|z'|)\,(1+|\lambda-\lambda_0|\|(A-\lambda)^{-1}\|)$$

$$\leqslant \psi(|z|,|z'|)\left(1+\tfrac{|\lambda-\lambda_0|C_A}{\lambda}\right)$$

□

Lemme 2.2.3. *Si A et B vérifient (H.2) alors $\forall \lambda > \lambda_0, \exists \varphi_\lambda :]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$, telle que*

i) $\displaystyle\int_{\gamma_\lambda} \varphi_\lambda(|z|)|dz| < +\infty, \forall \lambda > \lambda_0$

ii) $\|[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}]\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \varphi_\lambda(|z|), \forall z \in \Sigma_{-B}$.

Démonstration. Soit $\lambda > \lambda_0$, en utilisant le lemme (2.2.1), alors :
$[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}] =$
$= (A-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1}[(A-\lambda_0);(B+z)^{-1}](A-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1} =$
$= (A-\lambda)^{-1}(A-\lambda-z)(A-\lambda_0)(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda_0)^{-1};(B+z')^{-1}](A-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1} =$
$= (A-\lambda_0)(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}](A-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1} - z(A-\lambda)^{-1}(A-\lambda_0)(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}](A-\lambda_0)(A-\lambda)^{-1}$.
et utilisant (H.2) il résulte

$$\|[(A-\lambda)^{-1};(B+z')^{-1}]\| \leqslant \tfrac{\psi(|z+\lambda|,|z|)}{|z|} + \tfrac{K}{|\lambda|}\psi(|z+\lambda|,|\lambda|)$$

$$\leqslant K_{\lambda_0}\psi(|z+\lambda|,|z|) = \varphi_\lambda(|z|).$$

□

2.2.2 Représentation de la solution

Sous les hypothèses précédentes, nous cherchons à obtenir une formule représentant la solution possible x de l'équation (2.13) en utilisant l'opérateur S_λ et la régularité du second membre y.

Proposition 2.2.1. *On suppose que les hypothèses (H.1) et (H.2) sont vérifiées. Pour $y \in X$, $\lambda > 0$, soit $x \in D_A \cap D_B$ une solution de (2.13), alors*

$$x + I_\lambda(x) = S_\lambda y \tag{2.16}$$

où

$$I_\lambda(x) = -\tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} z(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x dz.$$

Démonstration. Comme présenté, la solution (2.13) est représentée par une intégrale Dunford sous la forme suivante :

$$x = S_\lambda y = -\tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y dz$$

- Soit $x \in D_A \cap D_B$; alors on a :
$(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}\{Ax-\lambda x+Bx\} =$
$= (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}(A-\lambda)x + (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx =$
$= [(A-\lambda-z)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x + (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x + (A-\lambda-z)^{-1}x +$
$z(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x =$
$= [(A-\lambda-z)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x + z(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1} + (B+z)^{-1}x + (A-\lambda-z)^{-1}x +$
$z(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x =$
$= [(A-\lambda-z)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda-z)x + (B+z)^{-1}x + (A-\lambda-z)^{-1}x =$
$= [(A-\lambda-z)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda-z)x + \tfrac{1}{z}\{-(B+z)^{-1}Bx + (A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x\} =$
$= (A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x + \tfrac{1}{z}\{-(B+z)^{-1}Bx + (A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x\}.$
En passant aux intégrales :
$S_\lambda(Ax+Bx-\lambda x) = \tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(B+z)^{-1}Bx\frac{dz}{z} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x\frac{dz}{z} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x dz$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

$I_1 = 0$ Car la fonction $(((B+z)^{-1}Bx)/z)$ est holomorphe et décroît comme $\frac{1}{|z|^2}$ à gouche de γ_λ, $I_2 = x$, le résidu en $z=0$ de la fonction $(((A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x)(1/z))$ qui est holomorphe sauf en $z=0$ et décroît comme $\frac{1}{|z|^2}$ à déroite de γ_λ. Pour I_3, on a :

$$I_3 = -\tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} z(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x dz$$

en effet :

1. L'intégrale écrite est convergente grâce au lemme (2.2.3).
2. $(A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x - z(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x = [(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x$ et cette dernière fonction est holomorphe et décroit comme $\varphi_A(|z|)$ à gauche de γ_λ. Donc,

$$S_\lambda y = x - \tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} z(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}](A-\lambda)x dz$$

□

Proposition 2.2.2. *Sous les hypothèses (H.1) et (H.2), on a*

i) *si* $y \in D_A(\sigma,+\infty)$ *alors* $S_\lambda y \in D_A$ *et*

$$(A-\lambda)S_\lambda y = -\tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} z[(A-\lambda-z)^{-1};(B+z)^{-1}]y dz - \\ -\tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(B+z)^{-1}(A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}y dz.$$

ii) *si* $y \in D_B(\sigma,+\infty)$ *alors* $S_\lambda y \in D_A$ *et*

$$(A-\lambda)S_\lambda y = \tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y dz + y$$

Démonstration. Voir [10]. □

Grâce à l'hypothèse (H.2) et pour $y \in D_A(\sigma,+\infty)$ (ou $D_B(\sigma,+\infty)$), on peut appliquer $(A-\lambda)$ aux deux membres de (2.16), on a :

Proposition 2.2.3. *On suppose que (H.2) est vérifiée et que* $y \in D_A(\sigma,+\infty)$ *(ou* $D_B(\sigma,+\infty)$*) ; alors si* x *est solution de (2.13) on a*

$$(A-\lambda)x + J_\lambda(A-\lambda)x = (A-\lambda)S_\lambda y. \tag{2.17}$$

où

$$J_\lambda(v) = -\tfrac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} z(A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}[(A-\lambda)^{-1};(B+z)^{-1}]v dz$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que (H.2) permet de donner un sens à $(A-\lambda)I_\lambda x$ et la proposition (2.2.2) permet de faire $(A-\lambda)S_\lambda y$. □

L'équation (2.17) est de la forme $v + J_\lambda(v) = h$, h donné ; on a besoin donc d'inverser l'opérateur continu $(1+J_\lambda)$ pour certains λ.

Proposition 2.2.4. *On suppose que (H.2) est vérifié ; alors il existe* $\overline{\lambda} > 0$ *tel que* $\forall \lambda \geqslant \overline{\lambda}$ *: l'opérateur* $(1+J_\lambda)$ *est inversible et* $(1+J_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$*, en plus si* $y \in D_A(\sigma,+\infty)$ *(ou* $y \in D_B(\sigma,+\infty)$*) alors :*

$$x = (A-\lambda)^{-1}(1+J_\lambda)^{-1}(A-\lambda)y. \tag{2.18}$$

Démonstration. Grâce à ii) de l'hypothèse (H.2), $\exists \overline{\lambda} > 0$ tel que

$$\int_{\gamma_\lambda} \psi(|z+\lambda|,|z|)|dz| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall \lambda \geqslant \overline{\lambda}.$$

et donc $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall \lambda \geqslant \overline{\lambda}$, d'où l'inversibilité et la continuité de $(1+J_\lambda)^{-1}$. En appliquant $(1+J_\lambda)^{-1}$ à (2.17), on obtient (2.18). □

Corollaire 2.2.1. ***(Unicité)*** *– on suppose les hypothèses de la proposition (2.2.4) ; alors si* x *est solution du problème (2.13)* x *est unique.*

Démonstration. – En effet, si x_1 et x_2 sont deux solutions de (2.13), en posant $x = x_1 - x_2$, on a : $Ax + Bx - \lambda x = 0$ et d'après la proposition (2.2.4) on a :

$$x = x_1 - x_2 = (A-\lambda)^{-1}\{(1+J_\lambda)^{-1}(A-\lambda)(0)\} = 0.$$

□

2.2.3 Théorèmes principaux

Solution stricte

Maintenant, on va énoncer les théorèmes d'existence et de régularité de la solution du problème (2.13).

Théorème 2.2.1. *Supposons que A et B vérifient (H.1), (H.2) ; alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\forall \lambda \geqslant \lambda^*$ et $y \in D_A(\sigma, +\infty)$ (ou $y \in D_B(\sigma, +\infty)$) l'équation $Ax + Bx - \lambda x = y$ admet une solution unique $x \in DA \cap DB$.*

Démonstration. Voir [10]. □

Corollaire 2.2.2. *Supposons que A et B satisfent (H.1), (H.2), alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\lambda \geqslant \lambda^*$ et $y \in D_A(\sigma, p)(1 \leqslant p < +\infty)$ (ou $y \in D_B(\sigma, p)$), l'équation $Ax + Bx + \lambda x = y$ admet une solution unique $x \in DA \cap DB$.*

Démonstration. Voir [10]. □

Régularité de la solution

Théorème 2.2.2. *Supposons que (H.1), (H.2) et (H.3) soit vérifiées et $y \in D_A(\theta, +\infty)$; soit x la solution unique de (2.13). Alors :*

i) $(A - \lambda)x \in D_A(\sigma, +\infty), \quad \forall \sigma \leqslant \delta \wedge \theta,$

ii) $Bx \in D_A(\sigma, +\infty), \quad \forall \sigma \leqslant \delta \wedge \theta,$

iii) $(A - \lambda)x \in D_B(\sigma, +\infty), \quad \forall \sigma \leqslant \delta \wedge \theta.$

Démonstration. Voir [10]. □

Théorème 2.2.3. *Supposons que (H.1), (H.2) et (H.3) soit vérifiées et $y \in D_B(\theta, +\infty)$; soit x a solution unique de (2.13). Alors :*

i) $(A - \lambda)x \in D_B(\sigma, +\infty), \quad \forall \sigma \leqslant \delta \wedge \theta,$

ii) $Bx \in D_B(\sigma, +\infty), \quad \forall \sigma \leqslant \delta \wedge \theta,$

iii) $Bx \in D_A(\sigma, +\infty), \quad \forall \sigma \leqslant \delta \wedge \theta.$

Démonstration. Voir [10]. □

Théorème 2.2.4. *On supposons (H.1), (H.2) et(H.3) soit vérifiées et $y \in D_A(\theta, p)(\theta \in]0, 1[; 1 \leqslant p < +\infty)$, alors l'unique solution x de (2.13) pour $\lambda \geqslant \lambda^*$, vérifie :*

i) $(A - \lambda)x \in D_A(\sigma, p), \quad \forall \sigma \in]0, \delta[\cap]0, \theta[,$

ii) $Bx \in D_A(\sigma, p), \quad \forall \sigma \in]0, \delta[\cap]0, \theta[,$

iii) $(A - \lambda)x \in D_B(\sigma, p), \quad \forall \sigma \in]0, \delta[\cap]0, \theta[.$

Démonstration. Voir[10]. □

2.2.4 Exemple (l'équation de la chaleur)

On s'intéresse à l'étude de l'existence et de la régularité des solutions de l'équation de la chaleur suivante dans l'espace anisotrope $H_p^{1,2}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x), \\ u_{|\partial T - \Gamma_0} = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

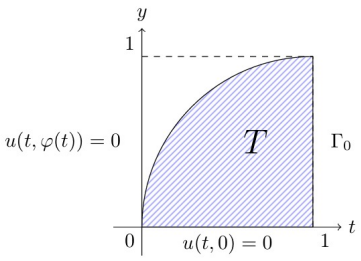
Ce problème est dans un domaine non rectangulaire noté T :

$$T = \{(t,x) \in \mathbb{R} : t \in [0,1], 0 < x < t^\alpha = \varphi(t)\},$$

où $\Gamma_0 = \{1\}\times]0,1[$, $H_p^{1,2} = \{u \in L^p(T) : D_t u, D_x^j u \in L^p(T), j = 1,2\}$, et $f \in L^p(T)$.

Avec

$$\alpha > \frac{1}{2}, \quad p \geqslant \frac{3}{2}, \quad p > \frac{\alpha}{2\alpha - 1}. \tag{2.20}$$

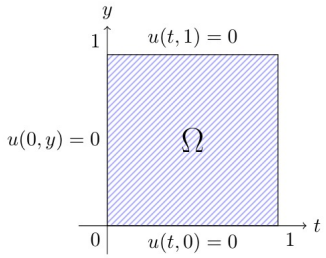


Le changement de variables

$$(t,x) \to (t,y) = (t, \tfrac{x}{t^\alpha}) = (t, \tfrac{x}{\varphi(t)})$$

transforme T en carré $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. En posant $u(t,x) = v(t,y)$ et $f(t,x) = g(t,y)$, on aura :

$$\begin{cases} \varphi(t)^2 \frac{\partial v}{\partial t} - \varphi'(t)\varphi(t) y \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \varphi(t)^2 g(t,y) = h(t,y), \\ v(0,y) = 0, \quad y \in [0,1] \\ v(t,0) = v(t,1) = 0, \quad t \in [0,1] \end{cases} \tag{2.21}$$



On a $f \in L^p(T) \Leftrightarrow \varphi^{-2+\frac{1}{p}} h \in L^p(\Omega)$. En effet :

$$\begin{aligned} f \in L^p(T) &\Leftrightarrow \int_0^1 \left(\int_0^{\varphi(t)} |f(t,x)|^p dx \right) dt < \infty, \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \left(\int_0^1 |g(t,x)|^p \varphi(t) dy \right) dt < \infty, \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 |\varphi^{\frac{1}{p}} g| dy dt < \infty, \\ &\Leftrightarrow \varphi^{-2+\frac{1}{p}} h \in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

où $h \in E$, défini par :

$$E = \{h \in L^p(]0,1[, L^p(]0,1[)) : \varphi^{-2+\frac{1}{p}} h \in L^p(]0,1[, L^p(]0,1[))\}$$

muni de la norme :

$$\|h\|_E = \|\varphi^{-2+\frac{1}{p}} h\|_{L^p(]0,1[,L^p(]0,1[))}$$

Théorème 2.2.5. *Sous les hypothèses (H.1) et (H.3), il existe λ^* tel que $\forall \lambda \geqslant \lambda^*$ et $\forall h \in D_A(\sigma, p)$ l'équation $Aw+Bw+\lambda w = h$ admet une solution unique $w \in D(A) \cap D(B)$ satisfaisant*

i) $Aw \in D_A(\theta, p) \quad \forall \theta \leqslant \min(\sigma, (\rho - \tau))$

ii) $Bw \in D_A(\theta, p) \quad \forall \theta \leqslant \min(\sigma, (\rho - \tau))$

iii) $Aw \in D_B(\theta, p) \quad \forall \theta \leqslant \min(\sigma, (\rho - \tau))$

Formulation abstraite du problème

L'équation (2.21) est équivalente au problème de Cauchy abstrait suivant dans l'espace $X = L^p(0,1)$:

$$\begin{cases} \varphi(t)^2 v'(t) + L(t)v(t) = h(t), \quad t \in [0,1] \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Où la famille $(L(t))_{t\in[0,1]}$ est définie par

$$\begin{cases} D(L(t)) = \{\psi \in W^{2,p}(0,1)/\psi(0) = \psi(1) = 0\}, \\ ([L(t)]\psi)(y) = -\psi''(y) - \varphi'(t)\varphi(t) y \psi'(y). \end{cases} \tag{2.23}$$

En utilisant les changements suivants :

$$\begin{cases} v(t) \leftrightarrow e^{\lambda \frac{t^{(1-2\alpha)}}{1-2\alpha}} v(t) \\ h(t) \leftrightarrow e^{\lambda \frac{t^{(1-2\alpha)}}{1-2\alpha}} h(t) \end{cases}$$

Le problème (2.22) s'écrit :

$$\begin{cases} \varphi(t)^2 v'(t) + L(t)v(t) + \lambda v(t) = h(t), \quad t \in [0,1] \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$Bv + Av + \lambda v = h$$

Où

$$\begin{cases} D(A) = \{v \in E : \varphi^{-2+\frac{1}{p}} v \in L^p(0,1; W^{2,p}(0,1) \cap W^{1,p}(0,1))\}, \\ (Av)(t) = L(t)v(t), \quad t \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.25}$$

et

$$\begin{cases} D(B) = \{v \in E : \varphi^{\frac{1}{p}} v' \in L^p(0,1;X), \quad v(0) = 0\}, \\ (Bv)(t) = \varphi(t)^2 v'(t), \quad t \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.26}$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer le Théorème (2.2.5).

Proposition 2.2.5. *A et B sont des opérateurs linéaires fermés avec des domaines denses dans E. De plus, ils satisfont à l'hypothèse (H.1) et (H.3).*

Théorème 2.2.6. *Il existe λ^* tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda^*$ et $h \in D_A(\sigma, p)$, le problème (2.24) a une solution unique $v \in D(A) \cap D(B)$ telle que*

i) $L(.)v \in D_A(\theta, p) \quad \forall \theta \leqslant \min(\sigma, 2\alpha - 1)$,

ii) $\varphi(t)v' \in D_A(\theta, p) \quad \forall \theta \leqslant \min(\sigma, 2\alpha - 1)$,

i) $L(.)v \in D_B(\theta, p) \quad \forall \theta \leqslant \min(\sigma, 2\alpha - 1)$.

Proposition 2.2.6. *Pour tout h avec $\varphi^{-2+\frac{1}{p}}h \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1))$, le problème (2.22) admet une solution unique v satisfaisant les propriétés de régularité suivantes :*

$$\begin{cases} i)v \in L^p(\Omega), \quad \varphi^{-2+\frac{1}{p}}v \in L^p(\Omega), \quad v(0) = 0, \\ ii)\varphi^{-2+\frac{1}{p}}D_y^2 v \in L^p(\Omega), \\ iii)\varphi^{\frac{1}{p}}D_t v \in L^p(\Omega), \\ iv)\varphi^{-2+\frac{1}{p}}D_y^2 v \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)), \\ v)\varphi^{\frac{1}{p}}D_t v \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)), \end{cases}$$

En effet, le Problème (2.22) est équivalent au Problème (2.24).

Retour au triangle

Rappelons que $h(t,y) = \varphi^2(t)g(t,y)$, $g(t,y) = f(t,x)$ et $v(t,y) = u(t,x)$, on résultat suivant :

Proposition 2.2.7.

i) $\varphi^{-2+\frac{1}{p}}h \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)) \Leftrightarrow f \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi})$

ii) $\varphi^{-2+\frac{1}{p}}v \in L^p(0,1;L^p(0,1)) \Leftrightarrow u \in L^p(T)$

iii) $\varphi^{-2+\frac{1}{p}}D_y^2 v \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)) \Leftrightarrow D_x^2 u \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi})$

iv) $\varphi^{\frac{1}{p}}D_t v \in L^p(0,1;W^{2\sigma,p}(0,1)) \Leftrightarrow D_t u \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi})$

Régularité de la solution

Maintenant, on peut déduire notre résultat principal dans le triangle à partir des propositions précédentes.

Théorème 2.2.7. *Supposons que $0 < \sigma < \frac{1}{2p}$,$\sigma \leqslant 2\alpha - 1$ et (2.20) soient vraies. Alors pour tout $f \in L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi})$, le problème (2.19) a une solution unique $u \in H^{1,2}_p(T)$ satisfaisant les propriétés de régularité suivantes : $u, D_t u, D_x u$ et $D_x^2 u$ appartiennent à $L^p_{\varphi^{2\sigma}}(0,1;W^{2\sigma,p}_{\varphi})$.*

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE LA SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES

3.1 $\mathcal{C}_0$-semi-groupe

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach complexe.

Définition 3.1.1. *La famille des opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geqslant 0}$ dans X est dite un semi-groupe si elle vérifie*

1. $T(0) = I$,
2. $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geqslant 0.$

Définition 3.1.2. *Un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est dit fortement continu si, pour tout $f \in X$,*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)f - f\| = 0.$$

Un semi-groupe fortement continu est appelé un $\mathcal{C}_0$ semi-groupe.

Exemple 3.1.1. On considère l'espace.

$$E = \{f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : f \text{ est uniformément continu et borné }\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_E = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f(x)|.$$

E un espace de Banach. Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ la famille d'opérateurs définie sur E par

$$(T(t)f)(x) = f(t + x), \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall f \in E, \quad x \in [0, +\infty[.$$

on a

1. $(T(0)f)(x) = f(0 + x) = f(x)$.
   Donc
   $$T(0) = Id.$$

2. $(T(t_1+t_2)f)(x) = f(t_1+t_2+x) = (T(t_1)f)(t_2+x) = (T(t_1)T(t_2)f)(x), \quad \forall f \in E.$
Donc

$$T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geqslant 0.$$

3. $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t)f - f\|_E = \lim\limits_{t\to 0^+} \{ \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f(t+x) - f(x)|\} = 0, \quad \forall f \in E.$
De plus, on a

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_E &= \sup_{x\in[0,+\infty[} |(T(t)f)(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f(t+x)| \\ &= \sup_{y\in[t,+\infty[} |f(y)| \leqslant \sup_{y\in[0,+\infty[} |f(y)| = \|f\|_E, \quad \forall t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\|T(t)\| = 1, \quad \forall t \geqslant 0$$

$(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E appelé $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de translation à droite.

Proposition 3.1.1. *Si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X, alors il y a des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geqslant 1$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}.$$

Remarque 3.1.
1. Si $\omega = 0$, le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est appelé uniformément borné. Dans ce cas, nous avons

$$\|T(t)\| \leqslant M.$$

2. Si $\omega = 0$ et $M = 1$, $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est appelé $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contraction. Dans ce cas, nous avons

$$\|T(t)\| \leqslant 1.$$

3. Si $M = 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$, le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est appelé quasi-continu. Dans ce cas, nous avons

$$\|T(t)\| \leqslant e^{\omega t}.$$

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la proposition ci-dessus.

Corollaire 3.1.1. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X. Alors, pour tous les $x \in X$, la fonction $t \to T(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ à X.*

3.2 Générateurs

On a déjà défini les $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ; nous allons maintenant lui associer un élément très important qui est le générateur (infinitésimal) dont la définition est la suivante :

Définition 3.2.1. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X, on a un générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$, l'opérateur A défini sur l'ensemble*

$$D(A) = \{f \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existe dans } X\},$$

par

$$Af = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)f - f}{t}, \quad \forall f \in D(A).$$

Exemple 3.2.1. Dans l'exemple ci-dessus, on a montré que la famille d'opérateurs $(T(t))_{t\geqslant 0}$ définie sur $E = \{f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : f \text{ f est uniformément continu et borné }\}$, par

$$(T(t)f)(x) = f(t + x), \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall f \in E, \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe. Son générateur est l'opérateur A défini sur :

$$D(A) = \{f \in E : f' \in E\} \text{ par } Af = f'.$$

Proposition 3.2.1. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X et A son générateur, alors*

1. $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in X.$
2. $\forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in X, \quad \int_0^t T(s)xds \in D(A)$, *et on a :*
$$A(\textstyle\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x.$$
3. $\forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in D(A), \quad T(t)x \in D(A)$*et on a :*
$$\tfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$
4. $\forall t \geqslant 0, \quad \forall s \geqslant 0, \quad \forall x \in D(A)$, *on a :*
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau.$$

Théorème 3.2.1. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ deux $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ayant comme générateur le même opérateur A, alors*

$$T(t) = S(t), \quad t \geqslant 0.$$

En utilisant la définition d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe et celle de son générateur, on peut prouver le résultat suivant :

Théorème 3.2.2. *Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X du générateur $(A, D(A))$, tel que*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}.$$

Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur $(A-\lambda I, D(A))$ est un générateur du $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(e^{-\lambda t}T(t))_{t\geqslant 0}$ sur X.

3.3 Théorème de Hille Yosida

Dans ce paragraphe, nous présenterons le théorème de Hille-Yosida. L'un des résultats le plus puissant concernant les $\mathcal{C}_0$-semi-groupes, ce théorème permet de caractériser les opérateurs qui sont des générateurs infinitésimaux.

Définition 3.3.1. *Pour $\lambda > 0$, nous définissons l'approximation de Yosida d'un opérateur linéaire A comme suit :*

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A)$$

où $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$. On a A_λ est un opérateur borné. En effet,

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda A R(\lambda, A) \\ &= \lambda[\lambda I - (\lambda I - A)]R(\lambda, A) \\ &= \lambda[\lambda R(\lambda, A) - I] \\ &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I. \end{aligned}$$

Lemme 3.3.1. *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X, tel que $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$, on a $\|R(\lambda, A) \leqslant \frac{1}{Re\lambda}\|$. Si A_λ est l'approximation de Yosida de A, alors*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Lemme 3.3.2. *Soit A un opérateur linéaire satisfaisant les conditions du lemme (3.3.1). Si A_λ est l'approximation de Yosida de A, alors A_λ est le générateur de $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contraction $(e^{tA_\lambda})_{t \geqslant 0}$. De plus, pour tous $x \in X$ et λ,$\mu > 0$, nous avons*

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Théorème 3.3.1. ***(théorème de Hille Yosida)***
Soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X, on dit que l'opérateur A (non borné) est un générateur de $(T(t))_{t \geqslant 0}$ si et seulement si

1. *A est fermé,*
2. *$D(A)$ est dense dans X,*
3. *$\rho(A) \supset [0, +\infty[$ et il existe M, $\omega \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n},$$

pour $n = 1, 2, \ldots,$ et $Re\lambda > \omega$.

Proposition 3.3.1. *Soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe tel que*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|T(t)\|_{L(X)} \leqslant M e^{\omega t}, \quad (M \geqslant 1, \omega \geqslant 0).$$

Alors A, le générateur de $(T(t))_{t \geqslant 0}$, vérifie

1. *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}, |Re\lambda| > \omega\}$ et*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, Re\lambda > \omega, \forall n \in \mathbb{N}^* : \|(\lambda I - A)^{-n}\|_{L(X)} \leqslant \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}.$$

2. *La résolvant de A est donnée par*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, Re\lambda > \omega, (\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt.$$

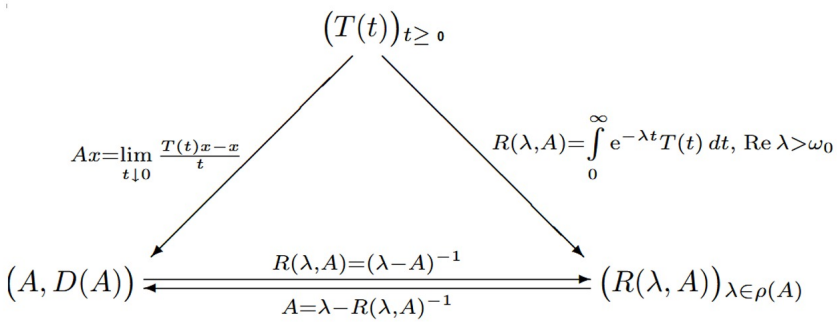
3. *Le semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ peut être trouvé à partir de son générateur A par*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x, \quad t \geqslant 0, \quad x \in X.$$

où $A \in L(X)$ est l'approximation de Yosida de A définie par

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda > \omega.$$

Le diagramme suivant résume la relation entre un semi-groupe, son générateur et sa résolvant.



3.4 Exemple (l'équation de la chaleur)

L'équation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur qui décrit les phénomènes de diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{EC}$$

où $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On va utiliser la transformée de Fourier partielle par rapport à x pour trouver une solution (formelle) de (EC).

Pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^\infty(\mathbb{R})$, nous allons appliquer la transformée de Fourier à l'équation de la chaleur par rapport à la variable spatiale x. Rappelons que la transformée de Fourier de $u(x,t)$, notée $\hat{u}(\xi,t)$, est définie par :

$$\hat{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\xi x}dx.$$

Appliquons la transformée de Fourier à chaque terme de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i\xi\hat{u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\xi^2 \hat{u}$$

On obtient une équation différentielle ordinaire en $\hat{u}(\xi, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\xi^2 \hat{u}, & t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1}$$

Ainsi, nous avons :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t}, \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pour obtenir $u(x, t)$, on doit prendre la transformée de Fourier inverse de $\hat{u}(\xi, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi.$$

En substituant $\hat{u}(\xi, t)$, nous obtenons :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

Expression de $\hat{f}(\xi)$:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy.$$

Substituons $\hat{f}(\xi)$ dans l'expression de $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy \right) e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi$$

et

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi \right) dy. \tag{3.2}$$

Calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi$:

On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t + i\xi(x-y)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi^2 - \frac{i\xi(x-y)}{t})} d\xi \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} -t(\xi^2 - \tfrac{i\xi(x-y)}{t}) &= -t(\xi^2 - \tfrac{i\xi(x-y)}{t} + (\tfrac{i(x-y)}{2t})^2 - (\tfrac{i(x-y)}{2t})^2) \\ &= -t(\xi - \tfrac{i(x-y)}{2t})^2 - \tfrac{(x-y)^2}{4t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi - \frac{i(x-y)}{2t})^2 - \frac{(x-y)^2}{4t}} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi - \frac{i(x-y)}{2t})^2} . e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\xi \\ &= e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi - \frac{i(x-y)}{2t})^2} d\xi \end{aligned}$$

la formule d'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Ainsi, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi-\frac{i(x-y)}{2t})^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

En substituant ce résultat dans (3.2), nous obtenons la solution finale :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy, \quad t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

Pour vérifier que u satisfait la condition initiale du problème (EC), nous calculons la limite suivante :

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

On si le noyau de la chaleur se comporte comme une fonction delta de Dirac $\delta(x-y)$ lorsque t tend vers 0, alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} = \delta(x-y)$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y) dy = f(x)$$

et on note

$$u(x,0) = f(x).$$

Le résultat peut être formulé en termes de semi-groupes de la manière suivante : pour toute fonction $f \in BC(\mathbb{R})$ et tout $t \geqslant 0$, on pose $T(t)f = u(.,t)$, où u est l'unique solution classique de l'équation différentielle partielle donnée par (3.1). Ainsi, on définit le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $BC(\mathbb{R})$, appelé le semi-groupe de Gauss-Weierstrass, par :

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\mathbb{R}}^{-\mathbb{R}} e^{\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ et } T(0) = I.$$

Où ce semi-groupe ne satisfait pas les conditions pour être un C_0-semi-groupe. Cependant, il est prouvé que $T(t)f$ converge vers f dans l'espace des fonctions bornées continues $BC(\mathbb{R})$ si et seulement si f appartient à l'espace des fonctions bornées uniformément continues $BUC(\mathbb{R})$.

CONCLUSION

Dans ce modeste travail, on a étudié deux méthodes efficaces pour résoudre quelques équations d'évolution : la méthode des sommes d'opérateurs linéaires et la méthode des semi-groupes.

Après avoir présenté un intraduit sur les concepts de base et les outils mathématiques essentiels de chaque méthode, nous avons illustré leur à travers l'application par des exemples concrets.

En perspectives, il sera intéressant de :

— Explorer d'autres approches pour ces deux méthodes.

— Évaluer leur efficacité dans d'autres cadres fonctionnels.

— Applique cette méthode à divers problèmes complexes.

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة نظرية مجموع المؤثرات الخطية ونظرية شبه الزمر في فضاء بناخ، وكيفية تطبيقها علي المعادلات التفاضلية ومعادلات التفاضلية الجزئية.

الكلمات المفتاحية

فضاء بناخ . فضاء الاستقطاب . فضاءات سوبلف . مجموع مؤثرات خطية . شبه الزمر .

Abstract :

The aim of this thesis is to study the theory of sums of linear operators and the theory of semigroups in Banach space and how to apply them to differential equations and partial differential equations.

Keywords : Banach space. interpolation spaces. Sublevel spaces. Sum of linear operators. Semigroup.

Résumé :

L'objectif de cette thèse est d'étudier la théorie des sommes d'opérateurs linéaires et la théorie des semi-groupes dans l'espace de Banach, ainsi que leur application aux équations différentielles et aux équations différentielles partielles.

Mots clés : Espace de Banach. Espaces de Sobolev. Espaces d'interpolation. Somme d'opérateurs linéaires. Semi-groupe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Pazy, *Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.

[2] D. Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*, éditions-ellipses, France, 2013.

[3] G. Da Prato and P. Grisvard, *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*, J. Math. Pures et Appl. Ser., 54 :305–387, 1975.

[4] G. Dore and A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Math. Z, 196 :189–201, 1987.

[5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, Pris, New Yourk, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo, 1983.

[6] K. J. Engel and R. Nagel, *One parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer-verlag, New York, 2000.

[7] N. Barrouk, *Semi-groupes et applications aux EDP avec exercices corrigés*, Université Mohamed Cherif Messaadia, Souk Ahras, 2018/2019.

[8] P. Grisvard, *Equations opérationnelles abstraites dans les espaces de banach et problèmes aux limites dans les ouverts cylindriques*, Ann. S.N.S. Pisa, 21 :1–307, 1967.

[9] P. Grisvard, *Caracteristion de quelques espaces d'interpolation*, Arch. Rational Mech. Anal., 25(1) :40–63, 1967.

[10] R. Labbas and B. Terreni, *Somme d'opérateurs linéaires de type parabolique (*$1^{ére}$ *partie)*, Bollettino V. M. I, 7(1-B) :545–569, 1987.

[11] R. Labbas and B. Terreni, *Somme d'opérateurs linéaires de type parabolique (*$2^{ére}$ *partie)*, Bollettino V. M. I, 7(2-B) :141–162, 1988.

[12] R. Labbas, *Some results on the sum of linear operators with non dense domain*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, IV, 154 :91–97, 1989.

[13] R. Labbas, A. Medeghri and B-K. Sadallah, *On a parabolic equation in a triangular domain*, Applied Mathematics and Computation, 130 :511–523, 2002.