



Mémoire de fin d'études

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE : Master

Filière: Physique
Option : Physique des Matériaux

THÈME

Systemes non hermitiques dépendants du temps: particule
excité avec champ électrique complexe

Préparé par:
SIMOHAMED HOUDA
Soutenu le: 28/06/2025

Devant le jury:

Président	REDAOUI Djaida	M.C.B	Université de BBA
Rapporteur	KOUSSA Walid	M.C.B	Université de BBA
Co-Rapporteur	DJABOU Djamel	M.C.A	Université de BBA
Examinateur	LAMRI Sara	M.C.B	Université de BBA

:

Année Universitaire 2024-2025

Remerciements

Je tiens à adresser mes profonds remerciements à l'égard de mon encadreur de mémoire Dr. **Koussa Walid**, car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cet mémoire.

Je tiens à remercier Dr. **Redaoui Djaida**, d'avoir bien voulu présider mon jury de mémoire.

J'adresse tous mes remerciements au membre de jury Mlle. **Lamri Sara** et l'honneur qu'elle ma fait en étant l'examinatrice de ce travail.

Je remercie sincèrement Dr. **Djabou Djamel**, pour son soutien précieux et son accompagnement professionnel tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants du département de physique qui ont contribué à ma formation par leurs conseils et leurs orientations.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, qui ont été mon soutien et mon appui constants tout au long de cette période, pour leurs encouragements permanents et leur amour inconditionnel.

À mon frère, Nasreddine

Tu as toujours été bien plus qu'un simple frère...

Tu as été mon pilier dans les moments difficiles, mon refuge quand tout semblait sombre, et la lumière qui m'a guidée lorsque les chemins disparaissaient.

Tu as été pour moi un second père par ta tendresse, un ami fidèle dans ton silence, et un frère irremplaçable par ta présence.

À chaque étape de mon parcours, ton ombre m'a protégée, ton soutien m'a portée.

Merci d'avoir été, et d'être encore, la force d'où je puise mon énergie...

Que tu demeures à jamais ma fierté et mon pilier.

À mes frères Adel et Oussama, et à mes chères sœurs, qui ont toujours été ma chaleur et ma sécurité.

Et à toutes mes amies chères, qui ont été pour moi un appui et un soutien à chaque étape.

Merci à vous tous, du fond du cœur.

Table des matières

Introduction	6
1 \mathcal{PT}-symétrie et pseudo-Hermiticité	7
1.1 Symétrie \mathcal{PT} et \mathcal{CPT}	7
1.1.1 \mathcal{PT} -symétrie	7
1.1.2 Hamiltoniens \mathcal{PT} -symétriques	9
1.1.3 Les énergies lorsque la symétrie \mathcal{PT} est brisée	10
1.1.4 \mathcal{PT} -produit scalaire	11
1.1.5 L'opérateur \mathcal{C} et le \mathcal{CPT} produit scalaire	12
1.1.6 Système à deux niveaux	13
1.2 Pseudo-hermiticité	15
1.2.1 Hamiltoniens pseudo-hermitiques	15
1.2.2 Spectre d'un hamiltonien pseudo-hermitique	17
1.2.3 Pseudo produit scalaire $\langle \psi_1 \psi_2 \rangle_\eta$	18
1.2.4 Base bi-orthonormée des Hamiltoniens pseudo-Hermitiques	19
1.2.5 Équivalence de pseudo-Hermiticité et symétries antilinéaires	20
1.2.6 Oscillateur harmonique dans un champ complexe uniforme	21
2 Systèmes quantiques non-hermitiques dépendants du temps	23
2.1 Équation de Schrödinger	23
2.2 Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger	24
2.2.1 Approximation soudain	25

2.2.2	Théorie des invariants de Lewis-Reisenfeld	26
2.2.3	Exemple illustratif 1 : Oscillateur harmonique de fréquence dépendante du temps	28
2.2.4	Exemple illustratif 2 : Système à deux niveaux	29
2.3	Méthode des invariants pseudo-hermitiques	31
3	Particule dans un champs électrique complexe et dépendant du temps excité	33
3.1	Invariant liniaire pseudo-Hermitique de $H(t)$	33
3.2	La fonction d'onde $\psi(x, t)$	35
3.3	Particule avec masse et potentiel constantes	37
	Conclusion	38
	Bibliographie	39

Introduction

La mécanique quantique représente une branche importante de l'étude et de la description des phénomènes fondamentaux des systèmes physiques à l'échelle atomique et subatomique. Le comportement microscopique des objets atomiques, qui composent la matière, permet a conduit à la formulation de la théorie quantique par Schrödinger, Heisenberg et Dirac. La mécanique quantique repose sur un ensemble d'axiomes [1, 2] parmi lesquels : i) les produits scalaires des vecteurs d'état ont une norme positive, ii) l'évolution est unitaire, iii) l'hamiltonien ($h = h^+$) d'un système doit être un opérateur hermitien.

L'hermiticité d'un hamiltonien est une condition suffisante pour la réalité du spectre d'énergie et nécessaire à l'unitarité de l'évolution. En 1998, Bender et Boettcher ont travaillé sur les hamiltoniens non hermitiens ($H \neq H^+$) et ont interprété la réalité du spectre comme étant due à sa symétrie PT , laquelle résulte de l'invariance des hamiltoniens PT -symétriques sous la transformation de parité et de renversement du temps $HPT = PTH$. Le concept plus général que PT est celui de pseudo-hermiticité pour un hamiltonien indépendant du temps ($H = H_0$), introduit par Mostafazadeh en 2002.

Pour les systèmes non hermitiques dépendants du temps, décrits par des hamiltoniens non hermitiens ($H(t) \neq H^+(t)$) en adaptant l'approche de l'opérateur invariant. Notre hypothèse est que la théorie stationnaire dans le concept de pseudo-hermiticité reste valable pour les systèmes dépendants du temps dans lesquels l'opérateur invariant $I(t)$ est généralisé en l'invariant pseudo-hermitique $I^{PH}(t)$. Cependant, pour les hamiltoniens non hermitiques dépendants du temps, un problème a été trouvé pour la conservation de la probabilité de présence ($\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = f(t)$), et les valeurs moyennes des observables, pour résoudre ce problème, il était nécessaire d'introduire la renormalisation de la probabilité en introduisant l'opérateur $\eta = \rho^+ \rho$ appelé la métrique.

Nous commençons le premier chapitre par une introduction aux notions de symétrie PT et de pseudo-hermiticité. Le deuxième chapitre présente la méthode des invariants pseudo-hermitiens pour déduire la solution de l'équation de Shrodinger des systèmes non hermitiques dépendants du temps. Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une particule en intéraction avec champs électrique complexe et dépendent du temps.

Chapitre 1

\mathcal{PT} -symétrie et pseudo-Hermiticité

L'idée des Hamiltoniens complexes avait déjà fait surface dans des domaines divers, tels que la diffusion mécanique quantique conventionnelle [3]. En 1959 Wu Tai Tsun a publié un article [4] dont l'objectif était calculé l'énergie de l'état fondamental des sphères de Bose. Wu avait constaté que cette énergie était divergente, afin de résoudre ce problème il a utilisé un hamiltonien non hermitique et non diagonalisable. Ce qui est impressionnant dans ce travail est que les valeurs propres de ce Hamiltonien sont réelles, quoi que, le papier n'a offert aucune justification pour la représentation de tel Hamiltonien.

En 1967, Jack Wonga publié un article [5] dans lequel il a fait la remarque que les hamiltoniens des systèmes fermés sont décrits par des hamiltoniens hermitiques, cependant, l'hamiltonien perd son Hermiticité lorsqu'une interaction externe est considérée. Ces hamiltoniens peuvent avoir une partie du spectre qui est discrètes, de plus, les valeurs propres qui sont complexes semblent être admis pourtant il n'y a pas d'explication de la façon dont elles pourraient probablement être physiquement raisonnable.

1.1 Symétrie \mathcal{PT} et \mathcal{CPT}

1.1.1 \mathcal{PT} -symétrie

La théorie de \mathcal{PT} – *symétrie* a été introduite pour la première fois en 1998 par Carl Bender et Stefan Boettcher [6, 7, 8] qui ont montré que le spectre de l'hamiltonien non-hermitique

$(H = p^2 + x^2 - ix^3)$ est réel et positif.

La théorie de la \mathcal{PT} symétrie est un concept relativement nouveau où Carl Bender [6] et Stefan Boettcher ont interprété la réalité de ce spectre comme étant indice de sa symétrie \mathcal{PT} . Autrement dit, si nous réfléchissons simultanément dans l'hamiltonien de potentiel cubique ix^3 nous voyons qu'il reste inchangé par une réflexion d'espace et conjugaison du nombre complexe i . Le fait qu'il soit possible de trouver de vraies valeurs propres dans un hamiltonien qui est non-hermitique a suscité un certain intérêt, d'autant plus que le concept de symétrie \mathcal{PT} semble avoir une interprétation plus physique que le concept très mathématique d'hermiticité. par l'introduction de l'opérateur \mathcal{PT} ;

Où \mathcal{P} est l'opérateur de parité (ou réflexion d'espace) et \mathcal{T} est l'opérateur renversement du temps, que nous pouvons définir séparément :

L'opérateur \mathcal{P} est défini comme :

$$\mathcal{P}x\mathcal{P} = -x \quad ; \quad \mathcal{P}p\mathcal{P} = -p \quad (1.1)$$

Tandis que l'opérateur \mathcal{T} est défini comme :

$$\mathcal{T}x\mathcal{T} = x \quad ; \quad \mathcal{T}p\mathcal{T} = -p \quad ; \quad \mathcal{T}i\mathcal{T} = -i \quad (1.2)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= \mathcal{T}^2 = \mathbf{1} \\ [\mathcal{P}, \mathcal{T}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Où l'opérateur \mathcal{PT} briser la relation de commutation habituelle :

$$[x, p] = i\hbar \quad (1.4)$$

1.1.2 Hamiltoniens \mathcal{PT} -symétriques

Un hamiltonien H est dite \mathcal{PT} -symétrique s'il est invariant par la transformation \mathcal{PT} , c'est-à-dire

$$H = (\mathcal{PT}) H (\mathcal{PT})^{-1} \quad (1.5)$$

Qui implique que

$$[H, \mathcal{PT}] = 0 \quad (1.6)$$

Par conséquent la propriété principale des hamiltoniens \mathcal{PT} -symétriques est que leur spectre est réel a cause de la \mathcal{PT} -symétrie de ces hamiltoniens, comme a également été montré par Carl Bender et Stefan Boettcher.

Quand on étudie la \mathcal{PT} -symétrie des hamiltoniens nous distinguons deux types de symétrie : brisée et non brisée, la symétrie est dite non brisée si toutes les fonctions propres de l'hamiltonien \mathcal{PT} -symétrique sont en même temps des fonctions propres de l'opérateur \mathcal{PT} . Par contre, s'il existe des fonctions propres de l'hamiltonien \mathcal{PT} -symétrique qui ne sont pas des fonctions propres de l'opérateur \mathcal{PT} , elle est dite brisée.

maintenant Pour démontrer que les valeurs propres sont réelles, nous exigeons que la symétrie ne soit pas brisée, donc on peut écrire :

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (1.7)$$

Et

$$\mathcal{PT} |\psi_n\rangle = \theta |\psi_n\rangle \quad (1.8)$$

Mais comme

$$(\mathcal{PT})^2 = I \quad (1.9)$$

Il en résulte que :

$$|\theta|^2 = 1 \quad (1.10)$$

La relation (1.7) permet d'écrire :

$$H\mathcal{PT} |\psi_n\rangle = \mathcal{PT} E_n |\psi_n\rangle \quad (1.11)$$

De l'autre côté nous avons

$$\mathcal{PT} E_n \mathcal{PT} = E_n^* \quad (1.12)$$

Et

$$\mathcal{P}^2 = I \quad (1.13)$$

De ces dernières équations on conclue que

$$E_n = E_n^* \quad (1.14)$$

1.1.3 Les énergies lorsque la symétrie \mathcal{PT} est brisée

Dans le cas où H et l'opérateur \mathcal{PT} sont simultanément diagonalisables, nous pouvons également avoir des cas où ce n'est pas vrai. Dans ces cas (1.6) il est toujours valable

$$[H, \mathcal{PT}] = 0 \quad (1.15)$$

car nous avons toujours un hamiltonien \mathcal{PT} -symétrique. Cependant, comme \mathcal{PT} est non linéaire, Le \mathcal{PT} n'a pas besoin d'être diagonalisable simultanément. On écrit $|\psi_n\rangle$ comme vecteur propre avec l'énergie E_n , de sorte que

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (1.16)$$

Si \mathcal{PT} et H ne sont pas diagonalisables simultanément, nous avons la situation

$$\mathcal{PT} |\psi_n\rangle = |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} \quad (1.17)$$

$$|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} \neq \theta |\psi_n\rangle \quad (1.18)$$

pour toute constante θ . c'est-à-dire que les vecteurs propres, $|\psi_n\rangle$, de H ne sont pas des vecteurs propres de \mathcal{PT} . Dans ce cas, nous décrivons la symétrie \mathcal{PT} de l'hamiltonien comme étant spontanément brisée. La notation $|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}}$, ne nous dit pas encore, aucune information sur l'énergie de $|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}}$, elle désigne simplement la fonction dérivée de l'action de \mathcal{PT} sur l'état propre $|\psi_n\rangle$. En effet, jusqu'à présent, nous ne savons pas si $|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}}$ est une fonction propre de H du tout. En utilisant (1.6), nous avons

$$[H, \mathcal{PT}] |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} = H\mathcal{PT} |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} - \mathcal{PT}H |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} = 0 \quad (1.19)$$

donc

$$H |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} = E_n^* |\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} \quad (1.20)$$

Cela nous indique que $|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}}$ est un vecteur propre de H avec la valeur propre E_n^* .

$$|\psi_n\rangle^{\mathcal{PT}} = |\psi_n\rangle^{E_n^*} \quad (1.21)$$

En supposant qu'il n'y a pas de valeurs propres dégénérées, cela signifie que lorsque la \mathcal{PT} symétrie est brisée, les valeurs propres d'énergie viennent en paires conjuguées complexes. L'opérateur \mathcal{PT} échange entre les vecteurs propres avec des valeurs propres conjuguées complexes.

On peut alors dire que pour un hamiltonien \mathcal{PT} -symétrique toutes les valeurs propres d'énergie sont soit réels, soit se produisent dans des paires conjuguées complexes.

1.1.4 \mathcal{PT} -produit scalaire

En mécanique quantique usuelle, la norme d'un vecteur dans l'espace de Hilbert doit être positif.

Carl Bender a introduit un \mathcal{PT} -produit scalaire associé aux hamiltoniens \mathcal{PT} -symétrique, qui le définit comme :

$$(f, g)_{\mathcal{PT}} = \int [\mathcal{PT} f(x)] g(x) dx \quad (1.22)$$

Où

$$\mathcal{PT} f(x) = f^*(-x) \quad (1.23)$$

Désignons par ψ_n et ψ_m les fonctions propres de H qui sont orthogonales dans le sens du \mathcal{PT} -produit scalaire

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}} = \langle \psi_m | \mathcal{P} | \psi_n \rangle = \int [\mathcal{PT} \psi_m(x)] \psi_n(x) dx = (-1)^n \delta_{mn} \quad (1.24)$$

Notons que pour $m = n$ le produit $\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}}$ devient

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}} = (-1)^n \quad (1.25)$$

On voit que le \mathcal{PT} -produit scalaire parfois donne le produit $\langle \psi | \psi \rangle_{\mathcal{PT}} = -1$.

1.1.5 L'opérateur \mathcal{C} et le \mathcal{CPT} produit scalaire

Nous avons un problème de norme avec le \mathcal{PT} -produit scalaire dans la section précédent, pour résoudre le problème de la norme négative, Bender a montré que tous les hamiltoniens \mathcal{PT} -symétrique dont la symétrie n'est pas brisée possèdent une autre symétrie engendrée par un nouvel opérateur linéaire noté \mathcal{C} : les propriétés de l'opérateur \mathcal{C} sont presque identiques à ceux de l'opérateur de la conjugaison de charge \mathcal{C} .

L'opérateur \mathcal{C} est représenté dans l'espace des coordonnées par :

$$\mathcal{C}(x, y) = \sum_n \psi_n(x) \psi_n(y) \quad (1.26)$$

et leur carré est égal à l'unité

$$\int \mathcal{C}(x, y) \mathcal{C}(y, z) = \delta(x - z) \quad (1.27)$$

Qui implique que

$$\mathcal{C}^2 = I \quad (1.28)$$

Par conséquent les valeurs propres de l'opérateur \mathcal{C} sont ± 1 dont l'action sur les fonctions propres est donnée par :

$$\mathcal{C}\psi_n(x) = (-1)^n \psi_n(x) \quad (1.29)$$

Additionnellement à la symétrie de l'hamiltonien H l'opérateur \mathcal{C} vérifie les relations de commutation suivantes :

$$[\mathcal{C}, H] = 0 \quad (1.30)$$

Et

$$[\mathcal{C}, PT] = 0 \quad (1.31)$$

Par contre \mathcal{C} ne commute pas avec les opérateurs P et T séparément :

$$[\mathcal{C}, P] \neq 0; [\mathcal{C}, T] \neq 0 \quad (1.32)$$

La redéfinition du \mathcal{PT} -produit scalaire (1.24) à l'aide de (1.29) rend les états propres énergétiques $|\psi_n\rangle$ orthonormé dans le sens du \mathcal{CPT} -produit scalaire :

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{CPT}} = \int [\mathcal{CPT}\psi_m(x)] \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (1.33)$$

1.1.6 Système à deux niveaux

Le système à deux niveaux est l'un des problèmes les plus importants à l'étude des systèmes \mathcal{PT} -symétrique, et est décrit par l'hamiltonien ;

$$H = \begin{pmatrix} \Omega e^{i\beta} & \Delta \\ \Delta & \Omega e^{-i\beta} \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

où les trois paramètres Ω , Δ et β sont réels. Cet Hamiltonien n'est pas Hermitique, mais il est facile de voir qu'il est \mathcal{PT} -symétrique, où l'on définit l'opérateur parité comme

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

et nous définissons l'opérateur \mathcal{T} pour effectuer une conjugaison complexe ($\mathcal{T} H \mathcal{T} = H^*$).

Comme première étape de l'analyse de l'hamiltonien (1.34), nous calculons ses deux valeurs propres :

$$E_{\pm} = \Omega \cos \beta \pm \sqrt{\Delta^2 - \Omega^2 \sin^2 \beta} \quad (1.36)$$

Il y a clairement deux régions paramétriques à considérer, une pour laquelle la racine carrée $\sqrt{\Delta^2 - \Omega^2 \sin^2 \beta}$ est réel et l'autre pour lequel il est imaginaire. Lorsque $\Delta^2 \prec \Omega^2 \sin^2 \beta$, les valeurs propres forment une paire conjuguée complexe. C'est la région où la symétrie \mathcal{PT} est brisée.

En revanche, lorsque $\Delta^2 \succeq \Omega^2 \sin^2 \beta$, les valeurs propres $E_{\pm} = \Omega \cos \theta \pm \sqrt{\Delta^2 - \Omega^2 \sin^2 \beta}$ sont réels. C'est la région de la symétrie \mathcal{PT} non brisée. Dans la région non brisée, les états propres simultanés des opérateurs H et \mathcal{PT} sont

$$|E_+\rangle = \sqrt{\frac{1}{2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} e^{+\frac{i}{2}\alpha} \\ e^{-\frac{i}{2}\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |E_-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\alpha} \\ -e^{\frac{i}{2}\alpha} \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

Où

$$\sin \alpha = \frac{\Omega}{\Delta} \sin \beta, \quad (1.38)$$

le \mathcal{PT} -produit scalaire donne

$$\langle E_{\pm} | E_{\pm} \rangle_{\mathcal{PT}} = \pm 1 \quad \text{et} \quad \langle E_{\pm} | E_{\mp} \rangle_{\mathcal{PT}} = 0, \quad (1.39)$$

où $\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}} = \langle \psi_m | \mathcal{P} | \psi_n \rangle$. En ce qui concerne le \mathcal{PT} -produit scalaire, l'espace vectoriel étendus par les états propres énergétiques a une métrique de signature $(+, -)$. Si la condition $\Delta^2 \succeq \Omega^2 \sin^2 \beta$ pour une symétrie \mathcal{PT} non brisée est violée, les états (1.37) ne sont plus états propres de \mathcal{PT} parce que α devient imaginaire. Lorsque la symétrie \mathcal{PT} est brisée, La norme \mathcal{PT} de l'état propre énergétique disparaît.

Ensuite, nous construisons l'opérateur \mathcal{C} en utilisant (1.26) :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} i \sin \alpha & 1 \\ 1 & -i \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Notez que \mathcal{C} est a la propriété clé

$$\mathcal{C} |E_{\pm}\rangle = \pm |E_{\pm}\rangle.$$

L'opérateur \mathcal{C} commute avec H et satisfait $\mathcal{C}^2 = 1$. Les valeurs propres de \mathcal{C} sont précisément les signes des normes \mathcal{PT} (1.39) des états propres correspondants. En utilisant l'opérateur \mathcal{C} nous construire la nouvelle structure de \mathcal{PT} -produit scalaire $\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{CPT}}$. Ce produit interne est définie positive car $\langle E_{\pm} | E_{\pm} \rangle_{\mathcal{CPT}} = 1$. Ainsi, l'espace de Hilbert bidimensionnel

étendu par $|E_{\pm}\rangle$, avec le produit $\langle E_{\pm} | E_{\pm} \rangle_{\mathcal{CPT}}$, a la signature $(+, +)$.

1.2 Pseudo-hermiticité

Le concept de pseudo-hermiticité a été introduit dans les années 1940 par Dirac et Pauli [9], et plus tard discuté par Lee [10], Wick et Sudarshan [11], qui essayaient de résoudre les problèmes qui se posent dans la quantification de l'électrodynamique et d'autres théories quantiques des champs dans lesquels la norme négative, les états apparaissent comme une conséquence de la renormalisation [12, 13]. Celles-ci les problèmes sont illustrés très clairement par le modèle de Lee. Un autre concept est la quasi-hermiticité correspond avec le concept de pseudo-Hermiticité a été bien traitée dans [14].

Il y a deux décennies AliMustafazadah a énoncé trois articles [15, 16, 17] dont l'objectif est de définir une classe des hamiltoniens qui ne sont pas hermitiques mais qui possèdent un spectre réel et positif. AliMustafazadah a présenté une alternative à la mécanique quantique conventionnelle, et il a trouvé la condition nécessaire de la réalité du spectre d'un hamiltonien non-hermitique dans laquelle les hamiltoniens sont *pseudo – Hermitiques*. Et par conséquent il a remplacé la condition de \mathcal{PT} -symétrie par une approche physique plus générale connu sous le nom de *pseudo – Hermiticité*.

1.2.1 Hamiltoniens pseudo-hermitiques

L'hamiltonien pseudo-hermitique est l'opérateur qui vérifie les règles de pseudo-Hermiticité ; qui permet de faire passer d'un hamiltonien non-hermitique H à un hamiltonien hermitique h équivalent, autrement dit, tout hamiltonien pseudo-hermitique H est similaire à un hamiltonien auto-adjoint (hermitique) h , l'hamiltonien pseudo-hermitique H est relié avec son hamiltonien hermitique h par la relation

$$h = \rho H \rho^{-1} \quad (1.41)$$

Où ρ est un opérateur linéaire, inversible et borné.

Et les états propres des deux Hamiltoniens sont reliés par

$$|\psi_n\rangle = \rho^{-1} |\varphi_n\rangle \quad (1.42)$$

tel que

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle,$$

et

$$h|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle,$$

comme h est hermitique c'est-à-dire $h = h^+$, on a :

$$h = \rho H \rho^{-1} = (\rho^{-1})^+ H^+ \rho^+ \quad (1.43)$$

donc

$$\rho H \rho^{-1} = (\rho^{-1})^+ H^+ \rho^+$$

Qui implique que l'hamiltonien H est lié avec son adjoint par la relation de pseudo-Hermiticité

$$H^+ = \eta H \eta^{-1} \quad (1.44)$$

Par définition, un opérateur linéaire $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ qui agit sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} est dit pseudo-hermitique, s'il existe un opérateur linéaire, hermitique et inversible $\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tel que : H satisfait la relation de pseudo-hermiticité $H^+ = \eta H \eta^{-1}$.

Avec

$$\eta = \rho^+ \rho ; \eta^{-1} = (\rho^+ \rho)^{-1} \quad (1.45)$$

L'opérateur η est appelée la métrique qui relie les états propres $|\psi_n\rangle$ et $|\chi_n\rangle$ de H et H^+ respectivement comme

$$|\chi_n\rangle = \eta |\psi_n\rangle \quad (1.46)$$

La définition $\eta = \rho^+ \rho$ nous dit que η est invariante par une transformation unitaire de l'opérateur ρ ($\rho \rightarrow U\rho$), avec $U^+U = I$.

1.2.2 Spectre d'un hamiltonien pseudo-hermitique

Pour analyser les propriétés spectrales d'un hamiltonien pseudo-Hermitique on considère que H est un opérateur linéaire agissant dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , et supposons que le spectre de H soit discret. A mon avis, la définition donnée par l'équation (1.44) a des conséquences remarquables. Commençant par (1.44), ensuite multiplions à droite les deux côtés par un vecteur propre $|E_j\rangle$, puis multiplions à gauche les deux côtés par un autre vecteur propre $\langle E_i|$:

$$\begin{aligned} H^+ \eta &= \eta H \\ H^+ \eta |E_j\rangle &= \eta H |E_j\rangle \\ \langle E_i| H^+ \eta |E_j\rangle &= \langle E_i| \eta H |E_j\rangle \end{aligned} \quad (1.47)$$

En Remplaçantn l'hamiltonien par leur valeurs propres ($H |E_j\rangle = E_j |E_j\rangle$, $\langle E_i| H^+ = \langle E_i| E_i^*$), les dernières équations réécrivent en termes de produit η -scalaire [15] comme :

$$\begin{aligned} E_i^* \langle E_i| \eta |E_j\rangle &= E_j \langle E_i| \eta |E_j\rangle \\ E_i^* \langle E_i |E_j\rangle_\eta &= E_j \langle E_i |E_j\rangle_\eta \\ (E_i^* - E_j) \langle E_i |E_j\rangle_\eta &= 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Le résultat de cette équation conduit directement à la deuxième proposition de Mostafazadeh, citée ci-dessous :

Un Hamiltonien η -pseudo-Hermitique a les propriétés suivantes :

(a) Les vecteurs propres avec une valeur propre non réelle ont une semi-norme, c'est-à-dire ;

$$E_i \notin \mathbb{R} \implies \langle E_i |E_i\rangle_\eta = 0 \quad (1.49)$$

(b) Deux vecteurs propres quelconques sont pseudo-orthogonaux à moins que leurs valeurs propres ne soient conjugués complexes,

$$E_i^* \neq E_j \implies \langle E_i |E_j\rangle_\eta = 0 \quad (1.50)$$

Ensuite, Mostafazadeh a présenté une série de propositions pour démontrer les propriétés spectrales d'un Hamiltonien pseudo-Hermitique où les conditions suivantes sont équivalentes :

1. les valeurs propres de H sont réelles ou viennent en paires conjuguées complexes.
2. H est pseudo-Hermitique.

1.2.3 Pseudo produit scalaire $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\eta$

Mostafazadeh a introduit le pseudo produit scalaire (produit η -scalaire) noté $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\eta$ entre deux vecteurs $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ appartenant à l'espace de Hilbert \mathcal{H} , tel que

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\eta := \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle, \quad (1.51)$$

Ce produit ne peut être invariant dans le temps que si son taux de variation avec le temps est nul ;

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle = \left(i \frac{d}{dt} \langle \psi_1 | \right) \eta + \eta \left(i \frac{d}{dt} | \psi_2 \rangle \right) = 0 \quad (1.52)$$

étant donné que $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ obéissent à l'équation de Schrödinger d'évolution ($i \frac{d}{dt} |\psi_{1,2}\rangle = H |\psi_{1,2}\rangle$), la dernière équation devient

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \eta H - H^+ \eta | \psi_2 \rangle_\eta = 0 \quad (1.53)$$

Le pseudo produit scalaire $\langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle$ est invariant sous la translation du temps généré par l'hamiltonien H si et seulement si H est pseudo-Hermitique ($\eta H - H^+ \eta$).

Comme l'hamiltonien pseudo-Hermitique H a un Hamiltonien Hermitique h équivalent, et l'hamiltonien Hermitique h préserve le produit scalaire usuel ($\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{mn}$). à l'aide des équations (1.45) et (1.42), le pseudo produit scalaire (produit η -scalaire) est équivalent avec le produit scalaire standard :

$$\langle \psi_n | \eta | \psi_m \rangle = \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{mn} \quad (1.54)$$

Donc le pseudo produit scalaire est défini positif, et il est conservé.

1.2.4 Base bi-orthonormée des Hamiltoniens pseudo-Hermitiques

Dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , les Hamiltoniens pseudo-Hermitiques possèdent une base des vecteurs propres bi-orthonormée complète $\{|\psi_n\rangle, |\chi_n\rangle\}$ avec spectre discret et non dégénéré. Par définition [17] : une base bi-orthonormée

complète est une base de vecteurs $\{|\psi_n\rangle, |\chi_n\rangle\}$ tel que ;

$$\langle \chi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn} \quad (1.55)$$

et

$$\sum_n |\chi_n\rangle \langle \psi_n| = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \chi_n| = \mathbf{I} \quad (1.56)$$

Où $|\psi_n\rangle$ et $|\chi_m\rangle$ sont les états propres de H et H^+ respectivement qui obeissent aux équations :

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (1.57)$$

$$H^+ |\chi_n\rangle = E_n |\chi_n\rangle \quad (1.58)$$

Par conséquent l'hamiltonien H et son adjoint H^+ s'écrivent dans la base bi-orthonormée comme

$$H = \sum_n E_n |\psi_n\rangle \langle \chi_n| \quad (1.59)$$

$$H^+ = \sum_n E_n |\chi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1.60)$$

afin d'exprimer les opérateurs métriques η et ρ en termes de la base bi-orthonormée, nous utilisons les deux propriétés (1.55) et (1.56) de la base bi-orthonormée, et la relation entre les états $|\psi_n\rangle$, $|\chi_n\rangle$, et $|\varphi_n\rangle$ Eqs. (1.42) et (1.46), les opérateurs η et ρ décomposent dans la base bi-orthonormée sous la forme

$$\eta = \sum_n |\chi_n\rangle \langle \chi_n|, \quad \eta^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1.61)$$

et

$$\rho = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \chi_n|, \quad \rho^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \varphi_n| \quad (1.62)$$

Effectivement l'action des opérateurs métrique η et ρ donne les relations (1.42) et (1.46). La généralisation de ces résultats est bien présentée dans [17] comme :

Théorème.

Soit H un Hamiltonien non-Hermitique avec un spectre discret et un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres $\{|\psi_n\rangle, |\chi_n\rangle\}$, alors H est pseudo-Hermitique si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite [17] :

1. le spectre de H est réel
2. les valeurs propres complexes sont classées en paires de complexes conjuguées avec la même multiplicité.

Une implication directe de ce théorème sont les corollaires suivants :

Corollaire 1

Chaque Hamiltonien non-Hermitique avec un spectre réel et discret qui possède un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres est pseudo-Hermitique.

Corollaire 2

Tout Hamiltonien \mathcal{PT} -symétrique qui possède un spectre discret et un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres est pseudo-Hermitique.

1.2.5 Équivalence de pseudo-Hermiticité et symétries antilinéaires

Une caractéristique très intéressante de la pseudo-Hermiticité est sa connexion avec l'existence de symétries anti-linéaires. Comme il est bien connu des symétries antilinéaires jouer un rôle important en physique (l'inversion du temps est associée à un opérateur anti-linéaire).

La décomposition de l'opérateur métrique η en termes d'opérateurs \mathcal{C} et \mathcal{P} à l'aide de comparaison des relations (1.33) et (1.54) selon

$$\eta = \mathcal{C}\mathcal{P} \tag{1.63}$$

Il existe une équivalence entre les relations suivantes

$$H^+ = \eta H \eta^{-1} \Leftrightarrow [H, \mathcal{C}] = 0 \tag{1.64}$$

De plus, si l'hamiltonien est \mathcal{PT} -symétrique, ce qui signifie $[H, \mathcal{PT}] = 0$, nous avons aussi que l'opérateur \mathcal{C} et l'opérateur métrique η sont \mathcal{PT} -symétriques : $[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = [\eta, \mathcal{PT}] = 0$. Bien

que la réalité du spectre d'un Hamiltonien serait être garantie par l'existence d'une symétrie anti-linéaire de cet opérateur, comme \mathcal{PT} par exemple. Cet résultat obtenu a été généralisé dans [17] :

Théorème. Soit H un opérateur linéaire. Supposons que le spectre de H est discret, que ses valeurs propres ont une multiplicité algébrique nie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Les valeurs propres de H sont réelles ou viennent en paires conjuguées complexes.
2. H a une symétrie (anti-linéaire) générée par un opérateur anti-linéaire, tel que $[H, \tau] = 0$.
3. H est pseudo-Hermitique.

1.2.6 Oscillateur harmonique dans un champ complexe uniforme

Maintenant On va étudier la pseudo-Hermiticité d'un Oscillateur harmonique dans un champs uniforme défini par l'Hamiltonien non-Hermitique suivante

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + iEx \neq H^\dagger \quad (1.65)$$

où m est la masse de la particule, ω est la fréquence, E est le module du champ électrique.

Il est facile de montrer que les niveaux d'énergies de ce système sont

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{E}{m\omega^2}\right)^2 \quad (1.66)$$

qui correspondent aux vecteurs propres suivantes

$$\varphi_n^H(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{E}{m\omega^2}p} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{1}{2\hbar}m\omega x^2} \quad (1.67)$$

Où H_n sont les polynomes d'hermite.

Nous définissons l'opérateur métrique $\eta = \rho^\dagger \rho$ qui relie H avec H^\dagger par la relation de pseudo-Hermiticité ($H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$)

$$\eta = e^{\frac{2E}{m\omega^2}p} \quad (1.68)$$

l'opérateur ρ qui relie l'hamiltonien H avec son Hamiltonien Hermitique h peut être écrit comme

$$\rho = e^{\frac{E}{m\omega^2}p} \quad (1.69)$$

et

$$\rho^{-1} = e^{-\frac{E}{m\omega^2}p} \quad (1.70)$$

Comme nous l'avons bien vu dans les sections précédentes l'opérateur ρ mappe l'hamiltonien H vers un Hamiltonien Hermitique h ;

$$h = \rho H \rho^{-1} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \left(\frac{E}{m\omega^2}\right)^2 \quad (1.71)$$

dont les états propres de l'oscillateur harmonique habituel

$$\varphi_n^h(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{1}{2\hbar}m\omega x^2} \quad (1.72)$$

Par conséquent le pseudo-produit scalaire définie en (1.54) donne

$$\langle \varphi_n^H | \varphi_m^H \rangle_\eta = \langle \varphi_n^H | \eta | \varphi_m^H \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_n^H(x)]^* \eta(x) \varphi_m^H(x) dx \quad (1.73)$$

En remplaçant la métrique $\eta(x)$ par (1.68) et les états propres $[\varphi_n^H(x)]^*$, $\varphi_m^H(x)$ par (1.67), le pseudo-produit scalaire (1.73) devient

$$\langle \varphi_n^H | \eta | \varphi_m^H \rangle = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) H_m \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) dx \quad (1.74)$$

Par changement de variable $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q$, le produit $\langle \varphi_n^H | \eta | \varphi_m^H \rangle$ se simplifie en

$$\langle \varphi_n^H | \eta | \varphi_m^H \rangle = \delta_{mn} \quad (1.75)$$

Chapitre 2

Systèmes quantiques non-hermitiques dépendants du temps

Nous présentons les méthodes systématiques pour traiter la dynamique quantique des systèmes hermitiques ayant des Hamiltoniens dépendants manifestement du temps ; ($H(t) = H(t)^+$), basée sur l'équation de Schrödinger d'évolution ($H(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle$) et la généralisation de ces concepts aux cas non-Hermitique où on introduit une nouvelle approche des systèmes non-Hermitiques dépendants du temps. Une fois cet objectif atteint, nous calculons le vecteur d'onde $|\Psi(t)\rangle$ analytiquement en fonction du temps, afin de généraliser la notion de pseudo-Hermiticité à la théorie des invariants de Lewis Reisenfeld.

2.1 Équation de Schrödinger

La mécanique quantique postule que l'équation de Schrödinger d'évolution [18] est l'équation dynamique des systèmes quantiques Hamiltoniens, et elle est de la forme

$$H(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

avec

$H(t)$: est l'hamiltonien du système qui appelé générateur de l'évolution.

$|\Psi(t)\rangle$: est l'état qui décrit le système à chaque instant.

L'équation de Schrödinger (2.1) est l'une des équations fondamentales de la mécanique

quantique non relativiste, a été formulée en 1926 par le physicien autrichien Erwin Schrödinger. Elle décrit comment les états quantiques $|\Psi(t)\rangle$ d'un système physique changent dans le temps. L'état $|\Psi(t)\rangle$ est également appelé fonction d'onde ou vecteur d'état. En mathématiques pures, l'équation de Schrödinger et ses variantes sont largement utilisées dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Il a une application en géométrie, théorie spectrale et diffusion et aux systèmes intégraux.

L'équation de Schrödinger peut être écrite sous deux formes différentes, l'équation de Schrödinger dépendante du temps ($H(t)|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle$) et l'équation de Schrödinger indépendante du temps ($H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$). En outre l'équation de Schrödinger a la fameuse forme suivante :

$$H(t)U(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t) \quad (2.2)$$

où $U(t)$ est l'opérateur d'évolution qui agit sur un état initial $|\Psi(0)\rangle$ et le porte à l'état $|\Psi(t)\rangle$ comme

$$U(t)|\Psi(0)\rangle = |\Psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

Dans tout ce qui suit nous nous intéressons au cas où les Hamiltoniens ayant une dépendance manifeste du temps c'est à dire nous utilisons l'équation de Schrödinger de type ($H(t)|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle$).

2.2 Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger

Depuis le début de la mécanique quantique, différentes méthodes ont été développées pour résoudre l'équation de Schrödinger, cependant, il existe quelques systèmes dont la solution est exacte où l'hamiltonien H est indépendant du temps, ces systèmes exactement solubles sont utilisés pour construire une solution approximative pour les systèmes non exactement solubles (des systèmes ayant des Hamiltoniens dépendants du temps $H = H(t)$) à l'aide des transformations canoniques ou des méthodes d'approximation, par exemple, de nombreux systèmes dont la solution n'est pas exacte, sont généralement résolus grâce à l'utilisation des méthodes d'approximations. Quoi qu'il en soit, en général lorsque l'hamiltonien est une fonction explicite du temps, la solution est souvent soit une solution approchée analytique, soit une solution numérique.

Dans le cadre des systèmes quantiques qui dépendent dans leur description des Hamiltoniens dépendants du temps, il existe deux situations importantes pour la dépendance temporelle de l'hamiltonien, ce qui dépend des modifications de l'hamiltonien sont soit très rapides, ou très lent, suivant ces deux situations nous avons deux approximations (adiabatique et soudain) qui traitent une sorte d'hamiltoniens dont l'évolution dans le temps est de la forme

$$H(t) = \begin{cases} H_0 & t \prec t_0 \\ H(t) & t_0 \prec t \prec t_1 \\ H_1 & t \succ t_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

où l'hamiltonien $H(t)$ passe de H_0 à H_1 sur un intervalle du temps $T = t_1 - t_0$. Le régime soudain correspond à une intervalle du temps $T \ll$ petit, tandis que le régime adiabatique correspond à une intervalle du temps $T \gg$ grand. Nous discutons chaque cas séparément.

2.2.1 Approximation soudain

Contrairement à la procédure mentionnée ci-dessus l'approximation soudaine est l'approximation la mieux adaptée pour étudier les systèmes dont les Hamiltoniens changent brusquement (sur un intervalle de temps très court T), l'état ne peut pas rattraper le changement et reste essentiellement inchangé. L'approximation soudaine devrait être bonne si l'échelle de temps du le changement T est beaucoup plus petit que les répartitions d'énergie typiques ΔE parmi les niveaux d'énergie. C'est la base de l'approximation soudain $T \ll \frac{\hbar}{\Delta E}$.

Sous cette approximation, l'opérateur d'évolution $U_T(s)$ s'intègre de l'équation (2.2) comme

$$U_T(s) = I + \frac{T}{i\hbar} \int H(s) U_T(s) ds \quad (2.5)$$

dans la limite où $T \rightarrow 0$ le seconde terme $\frac{T}{i\hbar} \int H(s) U_T(s) ds$ tende vers zero où on peut poser que $U_T(s) \simeq I$.

et par conséquent un vecteur d'état $|\phi_n(t_0)\rangle$ reste inchangé sous l'action de l'opérateur d'évolution

$$U_T(s) |\phi_n(t_0)\rangle \simeq |\phi_n(t_0)\rangle \quad (2.6)$$

2.2.2 Théorie des invariants de Lewis-Reisenfeld

La théorie des invariants de Lewis-Reisenfeld (LR) est basée sur la construction d'un opérateur invariant Hermitique explicitement dépendant du temps (constante de mouvement) qui décrit un système quantique modulé par un Hamiltonien Hermitique dépendant du temps ($H = H(t)$). L'utilisation de la théorie des invariants pour résoudre des systèmes quantiques, a l'avantage d'offrir une solution exacte aux problèmes résolu par la théorie traditionnelle de la perturbation dépendante du temps. La théorie a été introduite pour la première fois par Lewis et Riesenfeld [19]. Il y a une classe d'invariants Hermitiques $I(t)$ exacts pour les oscillateurs harmoniques dépendants du temps décrit par l'hamiltonien $H(t) = \frac{p^2}{2m} + m\omega(t)^2 \frac{x^2}{2}$ et celui d'une particule dans un champ électromagnétique dépendant du temps d'hamiltonien $H(t) = \frac{(p-eA(r,t))^2}{2m} + e\Phi(r, t)$ qui ont été rapportés dans. La solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps dans le contexte de cette méthode est obtenue en termes des états propres de l'opérateur invariant Hermitique, où l'opérateur invariant vérifie l'équation de Von-Neumann

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0 \quad (2.7)$$

Ensuite, selon Réf. [19] nous supposons que l'invariant $I(t)$ possède un ensemble complet d'états propres orthonormés et satisfait les équation aux valeurs propres

$$I(t) |\varphi_\lambda(t)\rangle = \lambda |\varphi_\lambda(t)\rangle \quad (2.8)$$

qui lui correspondent des valeurs propres λ .

tans que $I(t)$ est Hermitique les fonctions propres $|\varphi_\lambda(t)\rangle$ sont orthonormées

$$\langle \varphi_{\lambda'}(t) | \varphi_\lambda(t) \rangle = \delta_{\lambda'\lambda} \quad (2.9)$$

maintenant, en suivant les mêmes étapes de réf. [19], on différencie l'équation. (2.8) par rapport au temps

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_\lambda(t)\rangle + I(t) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda(t)\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\varphi_\lambda(t)\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda(t)\rangle \quad (2.10)$$

multiplions ensuite à gauche par $\langle \varphi_\lambda(t) |$ nous obtenons

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \varphi_\lambda(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} | \varphi_\lambda(t) \rangle \quad (2.11)$$

également en fonctionnant avec le côté gauche de l'éq. (2.7) avec l'état $|\varphi_\lambda(t)\rangle$ et en projetant sur l'état $\langle\varphi_{\lambda'}(t)|$, on trouve

$$i\hbar\langle\varphi_{\lambda'}(t)|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\varphi_\lambda(t)\rangle+(\lambda'-\lambda)\langle\varphi_{\lambda'}(t)|H(t)|\varphi_\lambda(t)\rangle=0 \quad (2.12)$$

Ensuite, en prenant $\lambda = \lambda'$, nous trouvons que $\langle\varphi_\lambda(t)|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\varphi_\lambda(t)\rangle = 0$. Donc, en substituant ce résultat dans l'éq. (2.12) on obtient que les valeurs propres de l'invariant sont indépendantes du temps, c'est-à-dire $\partial\lambda/\partial t = 0$.

Afin d'étudier la connexion entre les états propres de $I(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger (2.1) nous procédons comme suit. En utilisant le fait que les valeurs propres de l'invariant sont des constantes, nous combiner éqs. (2.11) et (2.12) pour obtenir

$$i\hbar(\lambda-\lambda')\langle\varphi_{\lambda'}(t)|\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\lambda(t)\rangle=(\lambda-\lambda')\langle\varphi_{\lambda'}(t)|H(t)|\varphi_\lambda(t)\rangle \quad (2.13)$$

Ensuite, pour $\lambda \neq \lambda'$ on déduit que

$$\langle\varphi_{\lambda'}(t)|\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\lambda(t)\rangle=\langle\varphi_{\lambda'}(t)|H(t)|\varphi_\lambda(t)\rangle \quad (2.14)$$

Ici, nous notons que cette équation n'est pas valide pour $\lambda = \lambda'$. Cependant, sur la base de la réf. [19], on peut faire la transformation $|\varphi_\lambda(t)\rangle \rightarrow e^{i\alpha_\lambda(t)}|\varphi_\lambda(t)\rangle$, de sorte que l'éq. (2.13) peut être réécrit comme

$$\frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt}=\langle\varphi_\lambda(t)|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)|\varphi_\lambda(t)\rangle \quad (2.15)$$

où $\alpha_\lambda(t)$ est une fonction réelle du temps, et les nouveaux états $e^{i\alpha_\lambda(t)}|\varphi_\lambda(t)\rangle$ sont toujours des états propres de $I(t)$. De plus, si $\alpha_\lambda(t)$ satisfait à l'équation. (2.15), l'éq. (2.14) est valable pour $\lambda \neq \lambda'$ ainsi que pour $\lambda = \lambda'$. On peut alors déduire que les nouveaux états $e^{i\alpha_\lambda(t)}|\varphi_\lambda(t)\rangle$ satisfont l'équation de Schrödinger dépendante du temps (2.1). Par conséquent, la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps est

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_{\lambda}c_{\lambda}|\Psi_{\lambda}(t)\rangle \quad (2.16)$$

où

$$|\Psi_{\lambda}(t)\rangle=e^{i\alpha_{\lambda}(t)}|\varphi_{\lambda}(t)\rangle \quad (2.17)$$

2.2.3 Exemple illustratif 1 : Oscillateur harmonique de fréquence dépendante du temps

L'oscillateur harmonique unidimensionnel de fréquence dépendante du temps est un système dont l'opérateur Hamiltonien est de la forme [19]

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2 \quad (2.18)$$

où x est une coordonnée canonique, p est son moment conjugué, $\omega(t)$ est la fréquence qui dépendante du temps, et m est la masse du système. Les variables x et p satisfont la relation de commutation canonique

$$[x, p] = i, \quad \hbar = 1 \quad (2.19)$$

et les équations classiques du mouvement sont

$$\dot{x}_c(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial p_c(t)} = \frac{p_c(t)}{m} \quad (2.20)$$

$$\dot{p}_c(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x_c(t)} = -\frac{\omega^2(t)}{m}x_c(t) \quad (2.21)$$

Nous supposons l'existence d'un invariant Hermitique de la forme homogène, quadratique [19]

$$I(t) = \frac{1}{2} [\alpha(t)p^2 + \beta(t)x^2 + \gamma(t)(xp + px)] \quad (2.22)$$

où $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des fonctions réelles du temps. L'équation de Von-Neumann (2.7) pour $I(t)$ donne

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\dot{\alpha}(t) - 2\frac{\omega^2(t)}{m}\gamma(t) \right) x^2 + \left(\dot{\beta}(t) + \frac{2}{m}\gamma(t) \right) p^2 + \left(\dot{\gamma}(t) + \frac{\alpha(t)}{m} - \omega^2(t)\frac{\beta(t)}{m} \right) (xp + px) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

qui implique les contraintes

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= 2\frac{\omega^2(t)}{m}\gamma(t) \\ \dot{\beta}(t) &= -\frac{2}{m}\gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) &= -\frac{\alpha(t)}{m} + \omega^2(t)\frac{\beta(t)}{m} \end{aligned} \quad (2.24)$$

afin de déterminer le facteur de phase de Lewis-Reisenfield ($\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \langle \varphi_n(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \varphi_n(t) \rangle$), nous utilisons les états propres de l'invariant (2.22) qui sont donnés en représentation $\{x\}$ par

$$\varphi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\Omega}{\pi \hbar \alpha(t)} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[i \frac{\gamma(t)}{2\alpha(t)} x^2 \right] e^{-\frac{\Omega}{2\alpha(t)\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{\Omega}{\alpha(t)\hbar}} x \right) \quad (2.25)$$

où H_n sont les polynomes d'Hermite, et Ω est la valeur propre de $I(t)$. En suit, En injectant ces états propres dans la phase de Lewis-Reisenfield $\alpha_n(t)$ défini en (2.15) et on combine avec les contraintes (2.24), la phase $\alpha_n(t)$ devient

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{1}{\beta(t')} dt' \quad (2.26)$$

par conséquent la solution de l'équation de Schrödinger à partir de (2.17) peut être s'écrit comme

$$\Psi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\Omega}{\pi \hbar \alpha(t)} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-i \frac{1}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{1}{\beta(t')} dt' \right] \exp \left[i \frac{\gamma(t)}{2\alpha(t)} x^2 \right] e^{-\frac{\Omega}{2\alpha(t)\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{\Omega}{\alpha(t)\hbar}} x \right) \quad (2.27)$$

qui vérifie la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x, t)|^2 dx = 1 \quad (2.28)$$

2.2.4 Exemple illustratif 2 : Système à deux niveaux

Dans l'étude de la dynamique quantique le système à deux niveaux il présente l'interaction d'un spin \vec{S} avec un champ magnétique dépendant du temps $\vec{B}(t)$, l'interaction peut être décrite par l'hamiltonien

$$H(t) = \mu_B \vec{B}(t) \cdot \vec{S} \quad (2.29)$$

où μ_B est le magnéton de Bohr, $\mathbf{B}(t)$ est le vecteur du champ magnétique ; $\vec{B}(t) = (B_x(t), B_y(t), B_z(t))$, tandis que \vec{S} est le spin quantique représenté par les trois matrices de Pauli ; $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ tel que

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

En remplaçant $\vec{B}(t)$ et \vec{S} dans l'hamiltonien (2.29) on obtient le système à deux niveaux suivant

$$H(t) = \begin{pmatrix} \omega(t) & \varrho(t) \\ \varrho^*(t) & -\omega(t) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où $\omega(t) = \frac{\hbar}{2}\mu_B B_z(t)$ et $\varrho(t) = \frac{\hbar}{2}\mu_B(B_x(t) - iB_y(t))$.

L'invariant $I(t)$ suitable pour cet Hamiltonien est choisie sous la forme

$$I(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t)e^{-i\varphi(t)} \\ \sin \theta(t)e^{i\varphi(t)} & -\cos \theta(t) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

dont ses états propres sont

$$|I_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta(t)}{2} e^{-i\frac{\varphi(t)}{2}} \\ \sin \frac{\theta(t)}{2} e^{i\frac{\varphi(t)}{2}} \end{pmatrix}, \quad |I_-(t)\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta(t)}{2} e^{-i\frac{\varphi(t)}{2}} \\ \cos \frac{\theta(t)}{2} e^{i\frac{\varphi(t)}{2}} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

l'équation de Von-Neumann (2.7) pour $I(t)$ donne

$$\begin{aligned} i\hbar \begin{pmatrix} -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) & (\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - i\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t))e^{-i\varphi(t)} \\ (\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + i\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t))e^{i\varphi(t)} & \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (\varrho(t)e^{i\varphi(t)} - \varrho^*(t)e^{-i\varphi(t)}) \sin \theta(t) & 2\omega(t) \sin \theta(t)e^{-i\varphi(t)} - 2\varrho(t) \cos \theta(t) \\ 2\varrho^*(t) \cos \theta(t) - 2\omega(t) \sin \theta(t)e^{i\varphi(t)} & -(\varrho(t)e^{i\varphi(t)} - \varrho^*(t)e^{-i\varphi(t)}) \sin \theta(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui implique les contraintes

$$-i\hbar\dot{\theta}(t) = (\varrho(t)e^{i\varphi(t)} - \varrho^*(t)e^{-i\varphi(t)}) \quad (2.34)$$

$$i\hbar(\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - i\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t))e^{-i\varphi(t)} = 2\omega(t) \sin \theta(t)e^{-i\varphi(t)} - 2\varrho(t) \cos \theta(t) \quad (2.35)$$

$$i\hbar(\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + i\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t))e^{i\varphi(t)} = 2\varrho^*(t) \cos \theta(t) - 2\omega(t) \sin \theta(t)e^{i\varphi(t)} \quad (2.36)$$

Maintenant calculons la moyenne des dérivés des états propres $|I_{\pm}(t)\rangle$

$$\langle I_{\pm}(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | I_{\pm}(t) \rangle = \pm \hbar \frac{\dot{\varphi}(t)}{2} \cos \theta(t) \quad (2.37)$$

tandis que le terme dynamique $\langle I_{\pm}(t) | H(t) | I_{\pm}(t) \rangle$ de la phase (2.15) est obtenu en remplaçant les états propres (2.33)

$$\langle I_{\pm}(t) | H(t) | I_{\pm}(t) \rangle = \pm \left[\omega(t) \cos \theta(t) + \frac{1}{2} \sin \theta(t) (\varrho(t)e^{i\varphi} + \varrho^*(t)e^{-i\varphi}) \right] \quad (2.38)$$

en injectant les deux termes (2.37) et (2.38) dans la phase (2.15), on obtient

$$\alpha_{\pm}(t) = \mp \int_0^t \frac{(\varrho(t')e^{i\varphi(t')} + \varrho^*(t')e^{-i\varphi(t')})}{2 \sin \theta(t')} dt' \quad (2.39)$$

en suposant $\varrho(t') = |\varrho(t')| e^{-i\varphi_{\varrho}(t')}$ la phase $\alpha_{\pm}(t)$ devient

$$\alpha_{\pm}(t) = \mp \int_0^t \frac{|\varrho(t')| \cos(\varphi(t') - \varphi_{\varrho}(t'))}{\sin \theta(t')} dt' \quad (2.40)$$

finalemt la solution de l'équation de Schrödinger pour le système à deux niveaux est donnée selon (2.17) et (2.40) comme

$$|\Psi_{\pm}(t)\rangle = e^{\mp i \int_0^t \frac{|\varrho(t')| \cos(\varphi(t') - \varphi_{\varrho}(t'))}{\sin \theta(t')} dt'} |I_{\pm}(t)\rangle \quad (2.41)$$

2.3 Méthode des invariants pseudo-hermitiques

On peut également utiliser l'approche standard de Lewis-Riesenfeld du calcul des invariants comme argumenté dans [20, 21, 22, 23]. Cette approche nécessite de construire un opérateur invariant pseudo-Hermitique $I^{PH}(t)$, c'est-à-dire l'invariant $I^{PH}(t)$ est un observable qui obeit à l'équation de pseudo-Hermiticité

$$I^{PH+}(t) = \eta(t)I^{PH}(t)\eta(t)^{-1} \Leftrightarrow I^h(t) = \rho(t)I^{PH}(t)\rho(t)^{-1}, \quad \eta(t) = \rho^+(t)\rho(t) \quad (2.42)$$

Et vérifie l'équation de Von-Neuman

$$\frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t} = i [I^{PH}(t), H(t)], \quad \hbar = 1, \quad (2.43)$$

Son adjoint $I^{PH+}(t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial I^{PH^+}(t)}{\partial t} = i \left[I^{PH^+}(t), \eta(t)H(t)\eta(t)^{-1} + i\frac{\partial\eta(t)}{\partial t}\eta(t)^{-1} \right], \hbar = 1,$$

Cette dernière équation est obtenue en injectant $I^{PH}(t) = \eta(t)^{-1}I^{PH^+}(t)\eta(t)$ dans l'équation (2.43) ce qui implique la relation de pseudo-Hermiticité dépendante du temps entre $H(t)$ et $H(t)^+$

$$H(t)^+ = \eta(t)H(t)\eta(t)^{-1} + i\frac{\partial\eta(t)}{\partial t}\eta(t)^{-1}, \hbar = 1, \quad (2.44)$$

Les états propres $|\Phi_n^{I^{PH}}(t)\rangle$ de l'invariant pseudo-Hermitique $I^{PH}(t)$ obéissent à l'équation aux valeurs propres

$$I^{PH}(t) |\Phi_n^{I^{PH}}(t)\rangle = \lambda_n^{I^{PH}} |\Phi_n^{I^{PH}}(t)\rangle \quad (2.45)$$

qui vérifient la relation d'ortho-normalisation

$$\langle \Phi_m^{I^{PH}}(t) | \eta(t) | \Phi_n^{I^{PH}}(t) \rangle = \delta_{mn} \quad (2.46)$$

où les valeurs propres $\lambda_n^{I^{PH}}$ sont constantes ;

$$\frac{\partial \lambda_n^{I^{PH}}}{\partial t} = 0 \quad (2.47)$$

La phase définit dans (2.15) est reformulée comme

$$\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \langle \Phi_n^{I^{PH}}(t) | \eta(t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right) | \Phi_n^{I^{PH}}(t) \rangle \quad (2.48)$$

et elle est réelle par la relation (2.44) qui relie $H(t)$ à $H(t)^+$.

Plus loin, la solution de l'équation de Schrödinger (2.1) dépendante du temps avec un Hamiltonien non-Hermitique ($H(t) \neq H(t)^+$) est obtenue en termes des états propres de l'invariant pseudo-Hermétique $I^{PH}(t)$ [20, 21, 22, 23] :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp[i\alpha_n(t)] |\Phi_n^{I^{PH}}(t)\rangle \quad (2.49)$$

où nous avons démontré que l'évolution par cette méthode est unitaire tant que les phases (2.48) sont réelles :

$$\langle \Psi(t) | \eta(t) | \Psi(t) \rangle = \text{conste} = 1 \quad (2.50)$$

Chapitre 3

Particule dans un champs électrique complexe et dépendant du temps excité

Le mouvement d'une particule avec une masse dépendante du temps soumise à l'action d'un potentiel linéaire et complexe dépendant du temps excité est décrit par l'hamiltonien non-Hermitique

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + if(t)x + V_0 \cos \omega t \quad (3.1)$$

où $m(t)$ est la masse de la particule, et $f(t)$ est une fonction réelle dépendante du temps qui représente la force externe. Pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$H(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \quad (3.2)$$

avec $H(t)$ donné par (3.1), nous employons la méthode des invariants pseudo-Hermitiques présentée dans la dernière section du deuxième chapitre en suivant les mêmes étapes.

3.1 Invariant liniaire pseudo-Hermitique de $H(t)$

Dans le cas d'une particule soumise à l'action d'un potentiel linéaire complexe dépendant du temps décrit par l'hamiltonien (3.1), nous choisissons l'opérateur invariant pseudo-Hermitique

linéaire $I^{PH}(t)$ sous la forme

$$I^{PH}(t) = a(t) \left(x - \frac{i}{2} \alpha(t) \right) + b(t) \left(p - \frac{i}{2} \beta(t) \right) + c(t) \quad (3.3)$$

où $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des paramètres réels, tandis que $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions complexes dépendantes du temps à déterminer. La condition d'invariance $\frac{dI^{PH}(t)}{dt} = \frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t} - i [I^{PH}(t), H(t)] = 0$ implique que

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= 0 \\ \dot{b}(t) &= -\frac{a}{m(t)} \\ \dot{c}(t) - \frac{i}{2} (\dot{\alpha}a + \dot{\beta}b + \beta\dot{b}) &= ibf(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

après avoir résolu ces équations, nous obtenons

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \\ b(t) &= b_0 - a_0 \int_0^t \frac{1}{m(t')} dt' \\ c(t) &= c_0 \\ f(t) &= -\frac{1}{2b(t)} \left(\dot{\alpha}(t)a_0 + \dot{\beta}(t)b(t) - \beta(t) \frac{a_0}{m(t)} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ainsi que l'opérateur $I^{PH}(t)$ est pseudo-Hermitique, alors il vérifie la condition

$$I^{+PH}(t) = \eta(t) I^{PH}(t) \eta^{-1}(t), \quad (3.6)$$

nous choisissons un opérateur métrique $\eta(t)$ sous la forme

$$\eta(t) = \rho^+(t) \rho(t) = \exp [\beta(t)x - \alpha(t)p], \quad (3.7)$$

où

$$\rho(t) = e^{\frac{\beta(t)}{2}x} e^{-\frac{\alpha(t)}{2}p} \quad \alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

L'action de l'opérateur $\rho(t)$ elle fait déplacer les opérateurs position et impulsion comme

$$\rho(t)x\rho(t)^{-1} = \left(x + \frac{i}{2}\alpha(t) \right). \quad (3.9)$$

$$\rho(t)p\rho(t)^{-1} = \left(p + \frac{i}{2}\beta(t) \right). \quad (3.10)$$

En injectant cette métrique dans la condition (3.6) avec l'invariant (3.3) on obtient les solutions suivantes

$$\begin{aligned} a(t) &= a^*(t) \\ b(t) &= b^*(t) \\ c(t) &= c^*(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2 La fonction d'onde $\psi(x, t)$

Dans le cadre de la méthode des invariants pseudo-Hermitiques, la solution de l'équation de Schrödinger ;

$$H(t)\psi_\lambda(x, t) = i\partial_t\psi_\lambda(x, t), \tag{3.12}$$

où l'hamiltonien (3.1), s'écrit en termes des états propres de l'invariant (3.3) comme ;

$$\psi_\lambda(x, t) = e^{i\mu_\lambda(t)}\varphi_\lambda^{IPH}(x, t) \tag{3.13}$$

où $\mu_\lambda(t)$ est la phase de Lewis-Reisenfeld généralisée [23]. Nous devons d'abord résoudre l'équation aux valeurs propres de l'invariant $I^{PH}(t)$

$$I^{PH}(t)\varphi_\lambda^{IPH}(x, t) = \lambda\varphi_\lambda^{IPH}(x, t) \tag{3.14}$$

où λ est un paramètre continu et indépendant du temps. Après quelques calculs de base, nous obtenons que les solutions de l'équation aux valeurs propres (3.14) sont données par

$$\varphi_\lambda^{IPH}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp \frac{i}{2b} \left[(2(\lambda - c) + i\beta b(t)) \left(x - \frac{i}{2}\alpha \right) - a_0 \left(x - \frac{i}{2}\alpha \right)^2 \right] \tag{3.15}$$

en remplaçant $\varphi_\lambda^{IPH}(x, t)$ (3.15) multipliée par un facteur de phase $e^{i\mu_\lambda(t)}$ dans l'équation de Schrödinger $H(t)\psi_\lambda(x, t) = i\partial_t\psi_\lambda(x, t)$, on a

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_\lambda\varphi_\lambda^{IPH}(x, t) &= \left[-\frac{1}{2m(t)b^2} (\lambda - c)^2 + \frac{1}{2} \left(\alpha f - \frac{\dot{\alpha}}{2}\beta + \frac{\beta^2}{4m(t)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2b} \left(\frac{\beta}{m(t)} - \dot{\alpha} \right) (\lambda - c) \right] \varphi_\lambda^{IPH}(x, t), \end{aligned} \tag{3.16}$$

cette phase devant être réelle, ce qui implique que $m\dot{\alpha} = \beta$, cela équivaut à $f(t) = -\dot{\beta}(t)/2$. La phase (3.16) se simplifiée en

$$\dot{\mu}_\lambda = \left[-\frac{1}{2m(t)b^2} (\lambda - c)^2 - \frac{1}{4} \left(\dot{\beta}\alpha + \frac{\beta^2}{2m(t)} \right) - V_0 \cos \omega t \right]. \quad (3.17)$$

La solution générale $\Psi^H(x, t)$ s'écrit en combinant des solutions particulières (3.13) comme

$$\Psi^H(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\mu_\lambda} \varphi_\lambda^{IPH}(x, t) d\lambda \quad (3.18)$$

nous choisissons la fonction de poids $g(\lambda)$ sous la forme

$$g(\lambda) = \sqrt{\frac{\sqrt{d}}{\pi\sqrt{2\pi}b_0}} \exp[-d(\lambda - I_0)^2] \exp\left[-i\frac{d_0}{b_0}\left(\lambda - \frac{I_0}{2}\right)\right] \quad (3.19)$$

où d, d_0 , et I_0 sont des constantes réelles positives.

Après un calcul direct, nous obtenons la solution d'expression générale sous la forme du paquet d'onde gaussien

$$\begin{aligned} \Psi^H(x, t) = & \sqrt{\frac{\sqrt{d} \exp\{-2i\frac{V_0}{\omega} \sin \omega t\}}{\sqrt{2\pi}b(t) \left(i \int \frac{1}{2m(t')b(t')^2} dt' + d\right)}} \exp\left\{-i \int_0^t \frac{(c_0 - I_0)^2}{2m(t')b(t')^2} dt'\right\} \\ & \exp\left\{-i\frac{I_0 d_0}{2 b_0}\right\} \exp\left\{-\frac{i}{4} \int_0^t \left(\dot{\beta}(t')\alpha(t') + \frac{\beta(t')^2}{2m(t')}\right) dt'\right\} \\ & \exp\left\{\frac{i}{2b(t)} \left[(-2(c_0 - I_0) + i\beta b(t))(x - \frac{i}{2}\alpha) - a_0(x - \frac{i}{2}\alpha)^2\right]\right\} \\ & \exp\left\{-\frac{\left[(x - \frac{i}{2}\alpha) - b(t) \left(\frac{d_0}{b_0} - \int_0^t \frac{(c_0 - I_0)}{m(t')b(t')^2} dt'\right)\right]^2}{4b(t)^2 \left(i \int_0^t \frac{1}{2m(t')b(t')^2} dt' + d\right)}\right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

effectivement en injectant le pseudo produit scalaire $(\rho\Psi^H(x, t), \rho\Psi^H(x, t))$ est conservé.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\rho\Psi^H(x, t)|^2 dx = 1 \quad (3.21)$$

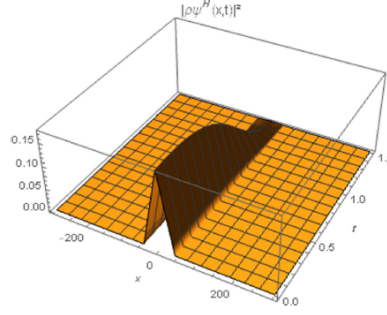


FIG. 3.1 – Densité de probabilité en fonction de l'espace et du temps

3.3 Particule avec masse et potentiel constantes

Comme un cas particulier, lorsque les paramètres $f(t)$ et $m(t)$ de l'hamiltonien (3.1) sont constants, i.e. $f(t) = f_0$, $m(t) = m_0$, et $V_0 = 0$, on obtient les paramètres de la métrique

$$\alpha(t) = -\frac{f_0}{m_0}t^2 \quad (3.22)$$

$$\beta(t) = -2f_0t \quad (3.23)$$

et la solution générale de l'équation de Schrödinger

$$\begin{aligned} \Psi^H(x, t) = & \sqrt{\frac{\sqrt{d}}{2\pi \left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right) \left(i\frac{1}{2a_0} \left(\frac{1}{b_0 - \frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right) + d\right)}} \exp \left\{ -i\frac{(c - I_0)^2}{2a_0} \left(\frac{1}{b_0 - \frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right) \right\} \\ & \exp \left\{ -i\frac{I_0 d_0}{2 b_0} \right\} \exp \left\{ -i\frac{f_0^2}{3m_0}t^3 \right\} \\ & \exp \left\{ \frac{i}{2(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t)} \left[-2((c - I_0) + i(f_0t)(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t))(x + \frac{if_0}{2m_0}t^2) - a_0^2(x + \frac{if_0}{2m_0}t^2) \right] \right\} \\ & \exp \left\{ -\frac{\left[\left(x + \frac{if_0}{2m_0}t^2\right) - (b_0 - \frac{a_0}{m_0}t) \left(\frac{d_0}{b_0} - (c - I_0) \left(\frac{1}{b_0 - \frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right)\right) \right]^2}{4(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t)^2 \left(i\frac{1}{2a_0} \left(\frac{1}{b_0 - \frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right) + d\right)} \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Conclusion

Au cours de ce mémoire :

- Nous avons examiné la notion des systèmes quantiques non-hermitiques : pseudo-hermitiques et \mathcal{PT} symétriques.
- Nous avons introduit la méthode d'invariants pseudo-hermitiques pour résoudre des systèmes quantiques non-hermitiques, et nous avons constaté que cette méthode est efficace pour l'étude des systèmes non-hermitiques dépendants du temps et qui préserve les postulats de la mécanique quantique.
- La théorie des pseudo-invariants a été illustrée par l'étude des systèmes physiques concrets comme : une particule dans un champ complexe dépendant du temps avec excitation périodique.
- La fonction d'onde pour notre problème représente un paquet d'onde gaussienne, et sa densité de probabilité est convergée.

Bibliographie

- [1] L. D. Landau, Lifchiz, Mécanique Quantique, (Editions Mir, Moscou 1967).
- [2] A. Messiah, Mécanique Quantique Tome1, Tome2, (Dunod, Paris, 1995).
- [3] H. Teshbach , C. E. Porter and V. F. Weisskopf , Model for Nuclear Reactions with Neutrons, Phys. Rev. **96**, 448 (1954).
- [4] Wu Tai Tsun, Ground State of a Bose System of Hard Spheres, Phys. Rev. **115**, 1390 (1959).
- [5] Wong Jack, Results on Certain Non-Hermitian Hamiltonians, J. Math. Phys. **8**, 2039 (1967).
- [6] Carl M. Bender and Stefan Boettcher, Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having \mathcal{PT} symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243–5246 (1998).
- [7] Carl M. Bender, Dorje C. Brody, and Hugh F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics, Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002).
- [8] Carl M. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
- [9] W. Pauli, On Dirac's New Method of Field Quantization, Rev. Mod. Phys. **15**, 175-207 (1943).
- [10] T. D. Lee, G. C. Wick, Negative metric and the unitarity of the S-matrix, Nucl. Phys. B **9**, 209-243 (1969).
- [11] E. C. G. Sudarshan, Quantum Mechanical Systems with Indefinite Metric, Phys. Rev. **123**, 2183-2193 (1961).
- [12] S. N. Gupta, On the Calculation of Self-Energy of Particles, Phys. Rev. **77**, 294-295 (1950).

-
- [13] K. Bleuler, Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen, *Helv. Phys. Act.* **23**, 567 (1950).
- [14] F. G. Scholz, H. B. Geyer, F. J. Hahne, Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, *Ann. Phys.* **213**, 74 (1992).
- [15] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **43**, 205-214 (2002).
- [16] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, *J. Math. Phys.* **43**, 2814-2816 (2002).
- [17] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.III. Equivalence of Pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, *J. Math. Phys.* **43**, 3944-3951 (2002).
- [18] E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik, *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).
- [19] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, An exact quantum theory of the time dependent harmonic oscillator and of a charged particle time dependent electromagnetic field, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
- [20] B. Khantoul, A. Bounames and M. Maamache, On the invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians, *Eur. Phys. J. Plus* **132** : 258 (2017).
- [21] M. Maamache, O-K. Djeghiour, N. Mana and W. Koussa, Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 383 (2017).
- [22] W. Koussa, N. Mana, O- K. Djeghiour, and M. Maamache, The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a SU(1,1) and SU(2) dynamical symmetry, *J. Math. Phys.* **59**, 072103 (2018).
- [23] W. Koussa, M. Maamache, Pseudo-Invariant Approach for a Particle in a Complex Time-Dependent Linear Potential, *Int. J. Theor. Phys.* **59**, 1490–1503 (2020).
- [24] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, (Ungar, New York 1961).

-
- [25] T. D. Lee, Some Special Examples in Renormalizable Field Theory, *Phys. Rev.* **95**, 1329, (1954).
- [26] M. Froissart, Covariant formalism of a field with indefinite metric, *Il Nuovo Cimento*, **14**, 197-204, (1959).
- [27] J. Dieudonné, Quasi-Hermitian operators, *Proc. International Symposium on Linear Spaces*, 115-122, Jerusalem 1960, Pergamon, Oxford (1961).
- [28] I. H. Sheth, On hyponormal operators, *Proc. American. Math. Soc.* **17**, 998-1000 (1966).
- [29] J. P. Williams, Operators similar to their adjoints, *Proc. American. Math. Soc.* **20**, 121-123 (1969).
- [30] J. Perina, *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena* (Kluwer, Dordrecht, 1991).

Résumé

Dans ce travail, nous rappelons les concepts de PT-symétrie, pseudo-Hermécticité, et de produits scalaires PT et CPT. Nous étudions les systèmes quantiques non Hermétiques décrits par l'hamiltonien non Hermétique en examinant la méthode des invariants pseudo-hermétique. Nous utilisons un opérateur invariant pseudo hermétique pour résoudre analytiquement l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour une particule en interaction avec un champ électrique complexe excité. Il a été déduit que la fonction d'onde de cette particule est une gaussienne convergente par le pseudo produit scalaire.

Mots-clés : PT-symétrie, pseudo-Hermécticité, invariants pseudo-hermétique, onde gaussienne.

Abstract

In this work, we recall the concepts of PT-symmetry, the pseudo-Hermiticity, PT and CPT inner products. We study the non-Hermitian quantum systems described by the non-Hermitian Hamiltonian with an examination of the pseudo-invariant theory. We use a pseudo-Hermitian invariant operator to solve analytically time-dependent Schrodinger equation for a particle interacting with an excited complex electric field. It was deduced that the wave function of this particle is a convergent Gaussian by the pseudo-inner product.

Keywords: PT-symmetry, pseudo-Hermiticity, pseudo-Hermitian invariant, Gaussian wave.

ملخص

في هذا العمل، نذكر بمفاهيم التناظر PT، الشبه هرميتية، والجداء السلمي PT و CPT. ندرس الأنظمة الكمومية غير الهرميتية التي تعتمد في وصفها على هاملتون غير الهرميتي مع التركيز على نظرية اللا متغير الشبه هرميتي. نستعمل متغير الشبه هرميتي لايجاد الحل التحليلي لمعادلة شرودنجر المتعلقة بالزمن في حالة جسيم يتفاعل مع حقل كهربائي مركب. وأخيراً، تم ايجاد ان الدالة الموجية لهذا الجسيم عبارة عن دالة غاوصية متقاربة بالجداء الشبه هرميتي.

الكلمات المفتاحية: التناظر PT. الشبه هرميتية، اللا متغير الشبه هرميتي، الدالة الغاوصية،