



# Mémoire de fin d'études

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE Master

**Filière : Physique**  
**Option : Physique des matériaux**

**THÈME**  
**Modélisation Analytique Et Numérique Des Faisceaux Lasers**

**Préparé par :**  
**AMIRI Nihade**  
Soutenu le :12/06/2025

**Devant le jury :**

**Président :** KEBIR Hadda  
**Rapporteur :** MIHOUBI Karima  
**Co-Rapporteur :** BENECHAIKH Abdelhalim  
**Examineur 1 :** KOUSSA Walid  
**Examineur 2 :** REDAOUI Djaida

**MCA Univ BBA**  
**MCB Univ BBA**  
**Prof Univ BBA**  
**MCB Univ BBA**  
**MCB Univ BBA**

**Année Universitaire 2024-2025**

## *Remerciements*

*Je remercie tout d'abord " Allah" le tout puissant de nous avoir donné la santé, le courage et la patience afin d'arriver à la finalité de ce parcours.*

*Je vous remercie beaucoup et grandement pour ceux qui ont joué le plus grand rôle en me guidant pendant les étapes de l'achèvement de ce travail, mon encadreur Madame" **Mihoubi Karima**" qui a gentiment supervisé mon travail et m'a donné beaucoup de temps et d'efforts. Merci beaucoup et merci à vous mon aimable professeur«**BENCHEIKH Abdelhalim**»*

*Je tiens également à exprimer toute ma gratitude aux membres du jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail, ainsi que pour leurs remarques et suggestions enrichissantes.*

*Enfin, mes remerciements vont à toutes les personnes qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours universitaire : enseignants, camarades et famille*

# *Dédicace*

*À mes chers parents,*

*À ma sœur Ibtissam et à sa fille MiralKhadidja, fleur et  
lumière de la famille,*

*À mes frères Hamoudi et Houcin,*

*À ma chère grand-père,*

*Et à mes amis qui m'ont toujours soutenu et aidé,  
Je dédie ce travail avec tout mon amour et ma gratitude.*

## Résumé :

Ce travail de Master II est destiné à modéliser le comportement des faisceaux lasers de type **Hermite-Gauss** en présence d'aberrations optiques idéalisées. L'objectif principal est de développer un cadre analytique et numérique permettant de décrire l'évolution du facteur de qualité  $M^2$ , et les distributions spatiales de l'intensité, en fonction de différents paramètres géométriques et physiques. À travers des simulations réalisées avec **Mathematica**, nous avons examiné l'effet de l'**astigmatisme**, de l'**aberration sphérique** et de leur **combinaison**, sur la structure du faisceau et sa stabilité. Les résultats obtenus montrent que certaines aberrations peuvent fortement altérer la qualité du faisceau.

**Mots clés :** Faisceau Hermite-Gauss, facteur de qualité  $M^2$ , aberrations optiques.

## Abstract:

This Master II work aims to model the behavior of **Hermite-Gaussian laser beams** in the presence of idealized optical aberrations. The main objective is to develop an analytical and numerical framework to describe the evolution of the beam quality factor  $M^2$  and the spatial intensity distributions, depending on various geometric and physical parameters. Through simulations performed using **Mathematica**, we examined the effects of **astigmatism**, **spherical aberration**, and their **combination** on the beam structure and stability. The results show that certain aberrations can significantly degrade the beam quality.

**Keywords:** Hermite-Gaussian beam, beam quality factor  $M^2$ , optical aberrations.

## المخلص :

يهدف هذا العمل، المنجز في إطار دراسة لنيل شهادة الماستر (السنة الثانية)، إلى نمذجة سلوك الحزم الليزرية من نوع **Hermite-Gauss** عند تعرضها لانحرافات بصرية مثالية. ويتمثل الهدف الرئيسي في تطوير إطار تحليلي و عددي يصف تطور عامل الجودة  $M^2$  والتوزيعات المكانية للشدة الضوئية، حسب معطيات هندسية وفيزيائية مختلفة. من خلال محاكاة عددية باستخدام برنامج **Mathematica**، قمنا بدراسة تأثير كل من **الانحراف اللابوري (Astigmatisme)**، و **الانحراف الكروي (Sphérique)**، و **التركيب بينهما**، على بنية الحزمة واستقرارها. وقد أظهرت النتائج أن بعض هذه الانحرافات تؤدي إلى تدهور كبير في جودة الحزمة.

**الكلمات المفتاحية:** حزمة Hermite-Gauss، عامل الجودة  $M^2$ ، الانحرافات البصرية.

## Sommaire :

### Chapitre I Généralités sur le laser

I.1. Introduction :	3
I.2. Historique :	3
I.3. Définition du laser :	4
I.4. L'origine de mot laser :	5
I.4.1. Milieu amplificateur (milieu actif):	5
I.4.2. Source d'énergie (pompage):	6
I.4.3. Cavité optique (résonateur):	6
I.5. Principe du Laser :	7
I.5.1. L'absorption :	7
I.5.2. L'émission spontanée :	7
I.5.3. L'émission stimulée :	8
I.6. Les propriétés de laser :	8
I.6.1. Monochromatique :	8
I.6.2. Directif :	9
I.6.3. Cohérent :	9
I.7. L'équation de l'onde de Helmholtz :	9
I.8. Les Modes gaussiens :	11
I.9. Modes d'ordre supérieurs :	12
I.10. Le Mode Hermite-Gaussien:	13
I.11. Profils d'intensités d'un faisceau Hermite gaussien :	15
I.12. Les applications des faisceaux lasers d'ordres supérieurs :	17

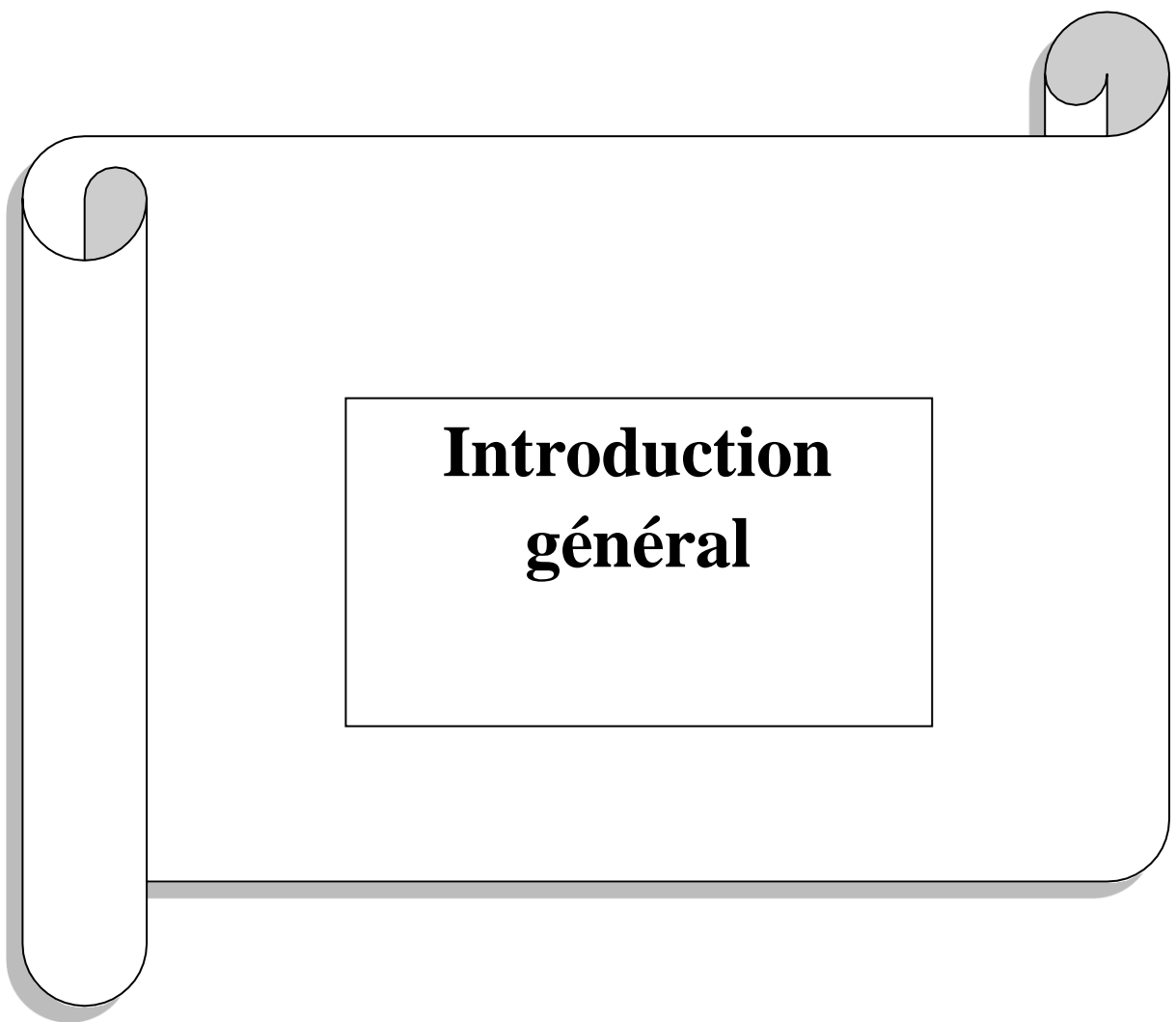
### Chapitre II Notion de facteur de qualité et d'aberration

II.1. Introduction :	18
II. 2. Facteur de qualité $M^2$ d'un faisceau laser :	18
II.2.1. Calcul de $M^2$ :	19
II.2.1.1. Critère d'énergie 86.5% :	19
II.2.1.2. Les moments des faisceaux laser :	19
II.2.1.2.1. Les moments d'ordre un :	20
II.2.1.2.2. Les moments d'ordre deux :	21
II.2. 2. Utilité et l'application du facteur de qualité $M^2$ :	22
II. 2. 3. Détermination théorique du facteur de qualité du faisceau laser :	23
II.3. Abberation Optique :	25
II.3.1. Les aberrations chromatiques :	26

II.3.2.Aberrations géométriques : .....	27
II.3.2.1.Astigmatisme : .....	27
II.3.2.2.Aberration sphérique : .....	29
II.3.2.3.Coma : .....	30
II.3.2.4.Distorsion : .....	30
II.3.2.5.Courbure de champ : .....	31

### **Chapitre III Résultats et simulation**

III.1.Introduction : .....	33
III.2. Méthode des moments : .....	33
III.3. Faisceaux Hermite-Gauss aberrés : .....	35
III.4 Facteur de qualité des faisceaux Hermite-Gauss aberrés : .....	38
III.4.1 Astigmatisme $45^0$ : .....	38
III.4.2 Aberration sphérique : .....	41
III.4.3.Combinaison entre l'Aberration sphérique et $45^0$ astigmatisme : .....	45
III.5.L'effet de l'intensité d'Aberration sur le facteur de qualité : .....	49
III.5.1.L'effet de l'aberration Astigmatism $45^0$ : .....	49
III.5.2.L'effet de l'aberration sphérique : .....	50
III.6.Conclusion : .....	52



**Introduction  
général**

## Introduction général :

---

Depuis l'invention du premier laser en 1960 par Theodore Maiman, le domaine de l'optique a connu une avancée considérable. Le laser est devenu un outil fondamental dans de nombreux secteurs scientifiques et technologiques grâce à ses propriétés physiques uniques telles que la cohérence, la monochromaticité, la directivité élevée et la capacité de focalisation. Ces caractéristiques en font une source lumineuse privilégiée pour des applications de précision telles que les communications optiques, la chirurgie, l'industrie de haute technologie ou encore l'imagerie scientifique.

Malgré ces progrès, certaines problématiques persistent, notamment celles liées à la stabilité et à la qualité du faisceau lors de sa propagation à travers des milieux optiques réels. Dans ce contexte, le contrôle spatial du faisceau ou mise en forme joue un rôle central. Il s'agit d'adapter la distribution d'intensité et de phase du faisceau à une application donnée, en optimisant sa structure.

Dans ce travail, nous nous intéressons à une famille particulière de faisceaux structurés : les faisceaux Hermite-Gauss (HG). Ces faisceaux, solutions analytiques de l'équation paraxiale, se distinguent par leur symétrie cartésienne et leur forme transverse contrôlable par deux indices d'ordre ( $m$ ,  $n$ ). Ils sont utilisés dans des domaines variés nécessitant une propagation stable, une focalisation précise et une répartition énergétique maîtrisée.

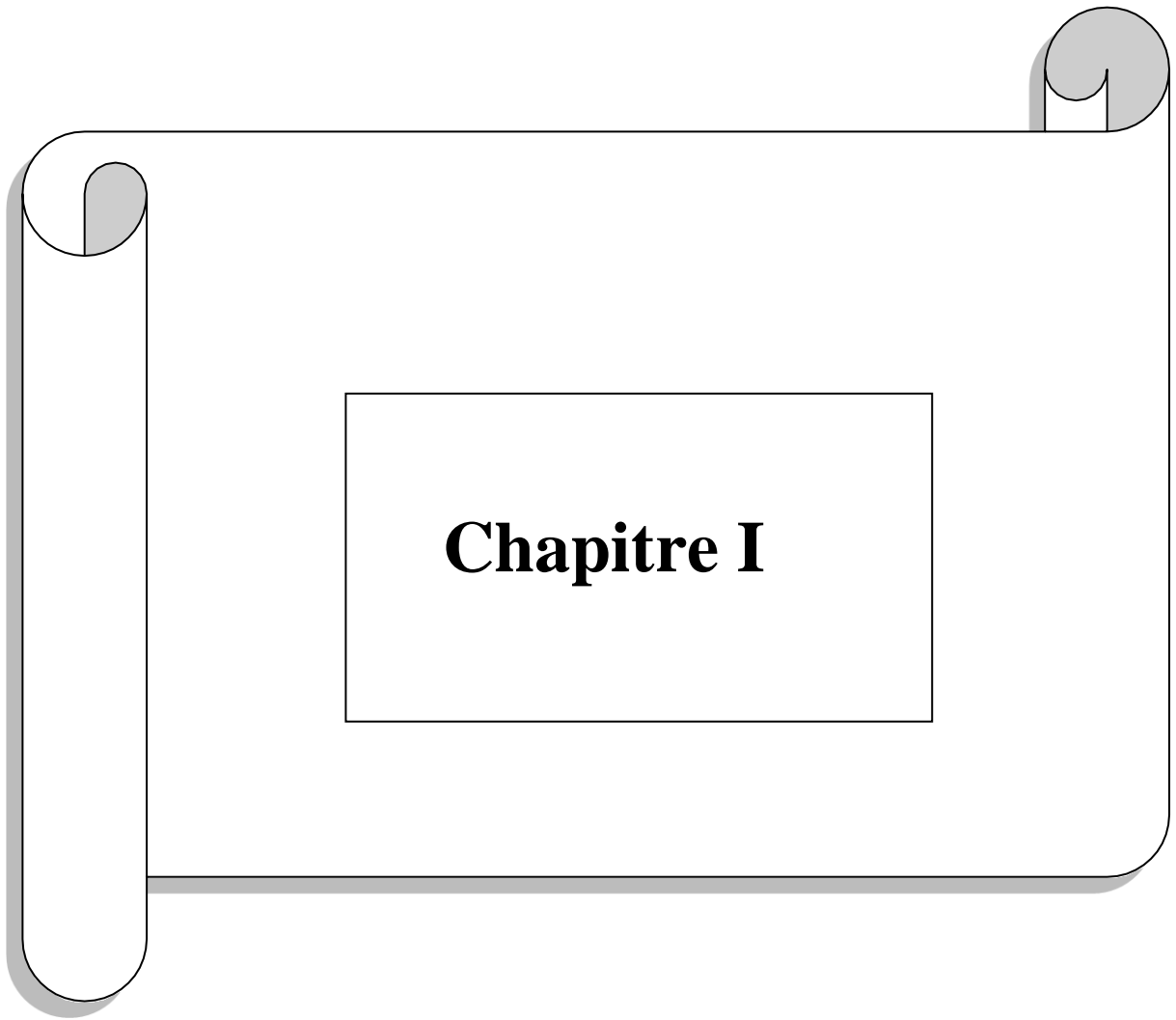
Toutefois, comme tout faisceau réel, les faisceaux HG sont sensibles aux aberrations optiques, résultant de défauts dans les composants optiques ou d'irrégularités dans le milieu de propagation. Ces aberrations entraînent des distorsions du front d'onde qui affectent la forme du faisceau et dégradent sa qualité. Cette dégradation est mesurée par le facteur de qualité  $M^2$ , indicateur essentiel de performance qui reflète l'écart entre un faisceau réel et un faisceau gaussien idéal.

Dans ce cadre, notre mémoire intitulé « **Modélisation analytique et numérique des faisceaux lasers** » a pour objectif d'analyser l'effet de certaines aberrations optiques sur les faisceaux Hermite-Gauss, en s'appuyant sur une approche théorique rigoureuse et une étude numérique menée à l'aide du logiciel Mathematica.

Ce travail est structuré en trois chapitres principaux, organisés comme suit :

- Dans le **premier chapitre**, nous présentons une vue d'ensemble sur le laser et ses principes fondamentaux. Nous décrivons les propriétés physiques du faisceau laser et ses applications, puis nous introduisons les bases théoriques de la propagation des faisceaux lumineux. Une attention particulière est portée à l'équation d'onde paraxiale et à ses solutions de type Hermite-Gauss, ainsi qu'à leurs propriétés géométriques et physiques.
- Le **deuxième chapitre** est consacré à une modélisation analytique de l'effet des aberrations optiques idéalisées sur les faisceaux Hermite-Gauss. Nous y formulons des expressions mathématiques reliant l'évolution du facteur de qualité  $M^2$  à la nature et à la structure du faisceau, en étudiant comment certaines aberrations peuvent influencer la qualité du faisceau en fonction de son ordre.
- Le **troisième et dernier chapitre** est dédié à une étude numérique appliquée, réalisée à l'aide du logiciel Mathematica. Nous y simulons l'effet de trois types d'aberrations optiques sur les faisceaux HG :
  - **l'astigmatisme,**
  - **l'aberration sphérique,**
  - **et une combinaison des deux.**

Dans ce travail, nous dérivons des expressions analytiques du facteur de qualité des faisceaux de Hermite-Gauss en présence des aberrations individuelles mentionnées ci-dessus. Notre approche utilise la fonction génératrice des faisceaux de Hermite-Gauss et est basée sur la méthode des moments. Grâce à ces expressions, nous sommes en mesure d'évaluer quantitativement comment ces aberrations influencent le facteur de qualité du faisceau. Une conclusion clé de notre analyse est le rôle central du rayon des faisceaux de Hermite-Gauss dans la détermination de l'effet de chaque aberration sur le facteur de qualité du faisceau.



# Chapitre I

## I.1. Introduction :

Le laser est un dispositif qui produit ou amplifie un rayonnement cohérent pour des fréquences qui s'étalent dans les domaines de l'infrarouge (100 nm ,500 nm), le visible (400nm,780 nm ) et l'ultraviolet (100nm) du spectre électromagnétique et on a même observé récemment de l'émission cohérente stimulée dans la région XUV ou X mous ( $10^{-15}$ nm). Il est composé de deux éléments essentiels : d'une part, la cavité optique ou résonateur qui est capable de créer les conditions d'une oscillation résonnante et responsable de la mise en forme du faisceaulaser et d'autre part, le milieu amplificateur (atomes, molécules nions, électrons) dans les gaz, les liquides, les solides et le plasma susceptible de donner naissance à ce rayonnement pur.[1]

## I.2.Historique :

Le principe de l'émission stimulée (ou émission induite) est décrit dès 1917 par Albert Einstein. En 1950, Alfred Kastler (Prix Nobel de physique en 1966) propose un procédé de pompage optique, qui est validé expérimentalement par Brossel, Kastler et Winter deux ans plus tard. Mais ce n'est qu'en 1958 que le premier maser (maser au gaz ammoniac) est conçu par J. P. Gordon, H. J. Zeiger et Ch. H. Townes. Au cours des six années suivantes, de nombreux scientifiques tels que N. G. Bassov, A. M. Prokhorov, A. L. Schawlow et Ch. H. Townes contribuent à adapter ces théories aux longueurs d'ondes du visible. Townes, Basov, et Prokhorov partagent le Prix Nobel de Physique en 1964 pour leurs travaux fondamentaux dans le domaine de l'électronique quantique, qui mènent à la construction d'oscillateurs et d'amplificateurs basés sur le principe du Maser-Laser. En 1960, le physicien américain Théodore Maiman obtient pour la première fois une émission laser au moyen d'un cristal de rubis. Un an plus tard, Ali Javan met au point un laser au gaz (hélium et néon) puis en 1966, Peter Sorokin construit le premier laser à liquide.

Les lasers trouvent très tôt des débouchés industriels. La première application fut réalisée en 1965 et consistait à usiner un perçage de 4,7 mm de diamètre et de 2 mm de profondeur dans du diamant avec un laser à rubis. Cette opération était réalisée en 15 min, alors qu'une application classique prenait 24 heures.[2]

En 1967, Peter Houlcroft découpe 2,5 mm d'acier inoxydable à une vitesse de 1m/min, sous di-oxygène avec un laser CO<sub>2</sub> de 300 W et conçoit la première tête de découpe.

Dans la même période en 1963 des chercheurs américains tels que White et Anderholm montrent qu'il est possible de générer une onde de choc à l'intérieur d'un métal suite à une irradiation laser impulsionnelle. Les pressions exercées sont de l'ordre de 1 GPa.

Bien que les procédés soient démontrés, il faut attendre leurs associations à des machines adaptées pour qu'ils soient implantés en milieu industriel. Ces conditions sont remplies à la fin des années 1970. Et les premières plates formes industrielles sont implantées en France dès les années 80. Dès lors le laser s'impose comme un outil de production industriel dans le micro-usinage. Ses principaux avantages sont un usinage à grande vitesse de l'ordre de 10 m/min, sans contact, sans usure d'outil.

Le laser devient un moyen de lecture en 1974, avec l'introduction des lecteurs de codes-barres. En 1978, les LASER discs sont introduits, mais les disques optiques ne deviennent d'usage courant qu'en 1982 avec le disque compact. Le laser permet alors de lire un grand volume de données.[2]

### **I.3. Définition du laser :**

Un **laser** est un système qui produit un rayonnement électromagnétique par **amplification optique** basée sur le phénomène d'**émission stimulée** des photons. les lasers peuvent fonctionner sur une large gamme de longueurs d'onde, allant des micro-ondes à l'infrarouge lointain, en passant par le spectre visible et l'ultraviolet, jusqu'à des zones de rayonnement encore plus extrêmes.

Les lasers existent sous différentes formes et reposent sur divers matériaux, systèmes atomiques et méthodes d'excitation. Le rayonnement qu'ils émettent ou amplifient se distingue par des caractéristiques remarquables, telles qu'une grande directionnalité, une pureté spectrale élevée et une intensité lumineuse importante. Ces propriétés ont permis l'émergence de nombreuses applications dans des domaines variés, et il est certain que de nouvelles utilisations restent encore à explorer et à développer.[3]

### I.4.L'origine de mot laser :

Le mot laser est un acronyme qui signifie (**L**ight **A**mplification **B**y **S**timulated **E**mission **O**f **R**adiation), c'est-à-dire l'amplification de la lumière par émission stimulée du rayonnement. Ce sont des oscillateurs optiques basés sur l'amplification d'un signal lumineux, réalisée par l'émission stimulée de l'atome du milieu actif. C'est un dispositif composé de trois éléments :[1]

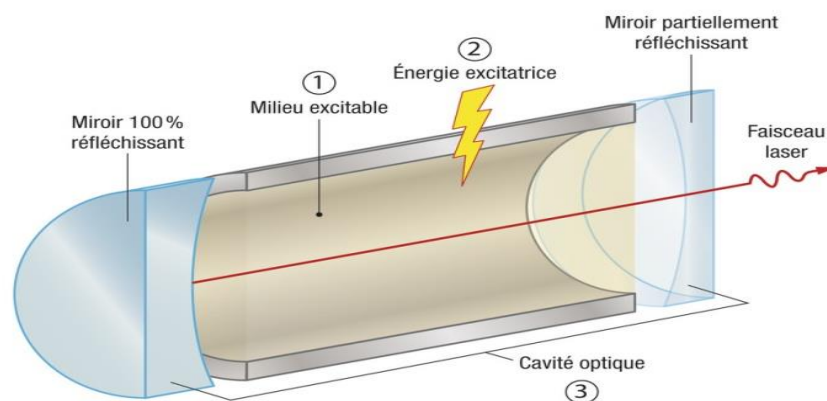


Figure I.1 : Les constituants du laser

#### I.4.1.Milieu amplificateur (milieu actif):

Celui-ci peut être de différents types (gaz, plasma, solide voire liquide). Dans ce milieu, on trouve des atomes, molécules, ions ou électrons dont les niveaux d'énergie sont utilisés pour accroître la puissance d'une onde lumineuse au cours de sa propagation. Le principe physique mis en jeu est l'émission stimulée.[3]

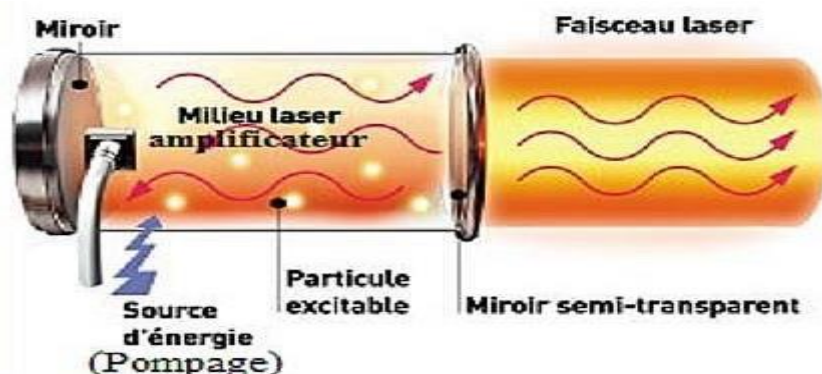


Figure I.2 : Milieu actif d'un laser

### I.4.2. Source d'énergie (pompage):

Il permet de créer les conditions d'une amplification lumineuse en apportant l'énergie nécessaire au milieu. Le système de pompage peut être de différente nature : pompage optique (lampes flash, lampes à arc continues ou lampes à filament de tungstène, diodes laser ou autres lasers ...), électrique (décharges dans des tubes de gaz, courant électrique dans des semi-conducteurs ...) ou même chimique.[3]

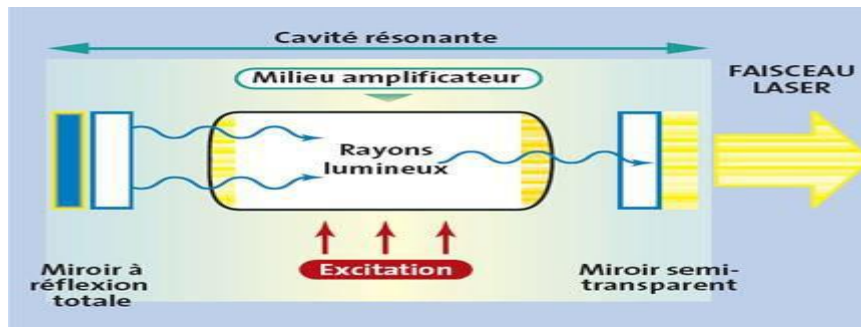


Figure I.3 : Pompage d'un laser

### I.4.3. Cavité optique (résonateur):

Composée de deux miroirs parallèles placés de part et d'autre du milieu actif. L'un des miroirs est totalement réfléchissant, tandis que l'autre est partiellement transparent, permettant à une partie de la lumière amplifiée de s'échapper sous forme de faisceau laser.

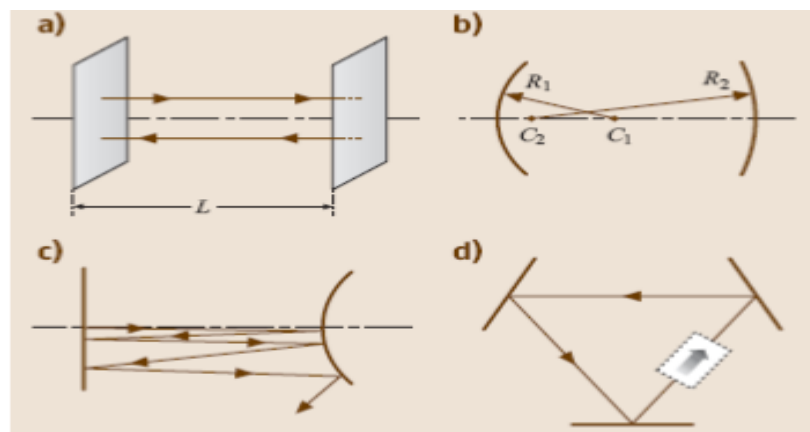


Figure I.4. Type de cavité laser.

- (a) Cavité en miroirs parallèles ;(b) Cavité en miroirs sphériques ;(c) Cavité instable ;  
(d) Cavité en anneau

### I.5.Principe du Laser :

Les lasers sont des résonateurs optiques qui amplifient un signal lumineux via l'émission stimulée. Le **principe de fonctionnement du laser** repose sur trois phénomènes fondamentaux de la physique quantique : **l'absorption**, **l'émission spontanée** et surtout **l'émission stimulée**, qui permet la production d'une lumière **cohérente** et **intense**.

#### I.5.1.L'absorption :

Un atome dans l'état fondamental avec une énergie  $E_1$  absorbe un photon d'énergie  $h\nu$  et passe à l'état excité avec une énergie  $E_2$ , comme illustré dans la figure. Cette transition est appelée **absorption stimulée**, **absorption induite**, ou simplement **absorption**. Ici la différence d'énergie est donnée par :  $(E_2 - E_1) = h\nu$ . [4]

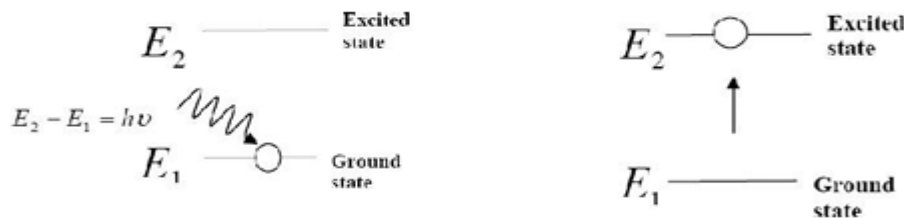


Figure I.5 : L'absorption du laser

#### I.5.2.L'émission spontanée :

La tendance naturelle d'un atome est de rechercher la configuration énergétique la plus basse. Les atomes excités ne restent pas longtemps dans l'état excité, mais ont tendance à revenir à l'état inférieur en libérant l'énergie excédentaire  $h\nu$ , comme illustré dans la figure I.6. L'atome dans l'état excité  $E_2$  retourne à l'état fondamental  $E_1$  en émettant un photon d'énergie  $h\nu$  sans aucune énergie externe. Cette émission de rayonnement non initiée par une influence extérieure est appelée **émission spontanée**. Cette émission est incontrôlable. [4]

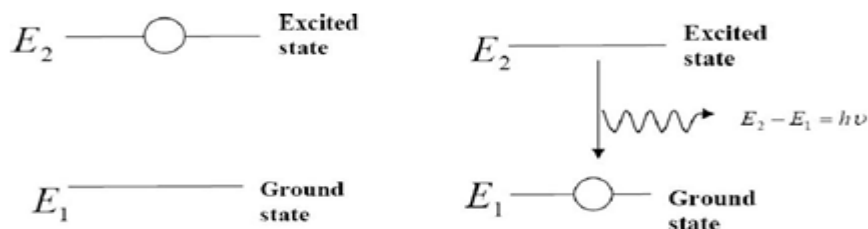
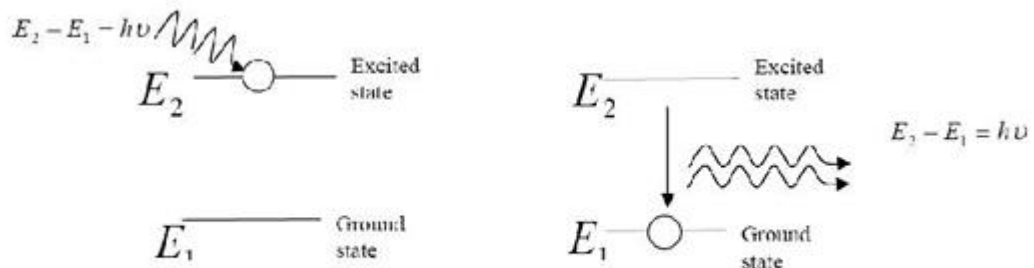


Figure I.6. : L'émission spontanée du laser

### I.5.3. L'émission stimulée :

L'atome dans l'état excité  $E_2$ , comme illustré dans la **figure I.7**, peut être stimulé par un photon d'énergie  $h\nu$  pour revenir à son état fondamental. Au cours de ce processus, l'atome émet un photon supplémentaire dont l'énergie est également  $h\nu$ . Comme cette émission est stimulée par un photon externe, ce processus est appelé **émission stimulée**. [4]



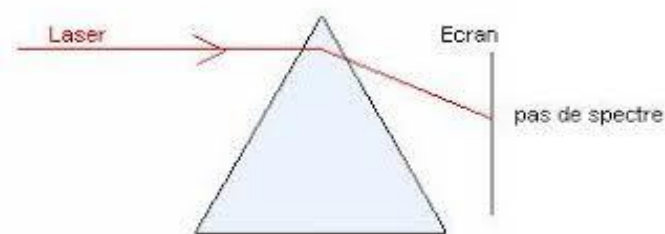
**Figure I.7 :** L'émission stimulée du laser

### I.6. Les propriétés de laser :

Le rayonnement laser est caractérisé par un degré extrêmement élevé de monochromaticité, cohérence, directivité.

#### I.6.1. Monochromatique :

Le faisceau laser est hautement monochromatique. Il émet une seule longueur d'onde (une seule couleur) car les atomes ou les molécules effectuent une transition entre deux états d'énergie. Ainsi, il possède un bon spectre puisque la gamme de longueurs d'onde du faisceau laser ( $\Delta\lambda$ ) est très étroite. En revanche, la lumière ordinaire émet une combinaison d'un large éventail de longueurs d'onde (couleurs) car les atomes ou les molécules effectuent des transitions depuis plusieurs états excités vers l'état fondamental, ce qui entraîne l'émission de différentes énergies. Par conséquent, elle est polychromatique. [4]



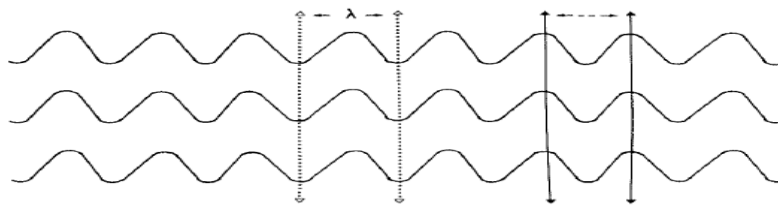
**Figure I.8.** laser monochromatique

**I.6.2. Directif :**

Le faisceau laser apparaît souvent comme un fil lumineux très fin, ce faisceau filiforme prend sa forme à partir de la géométrie des miroirs qui confinent le rayonnement lors des réflexions multiples, ce qui donne un effet de collimation élevée.[1]

**I.6.3. Cohérent :**

La source laser est cohérente par ce qu'elle émet des fronts d'onde dont les amplitudes et les phases sont identiques, en raison du principe de l'émission stimulée associée à la présence de la cavité optique résonante. Il est naturel de définir la cohérence à partir des franges d'interférence observées par les instruments le plus souvent utilisés dans la mesure appelés les interféromètres.[1]



**Figure I.9.**Cohérence du rayonnement laser

**I.7. L'équation de l'onde de Helmholtz :**

La dérivation de l'équation d'onde paraxiale de Helmholtz commence par les équations de Maxwell dans le vide, définies comme suit :[5,6]

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad (\text{I.4})$$

Où  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont les champs électriques et magnétiques,  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  désignent la permittivité et perméabilité de l'espace libre, respectivement. Ces deux derniers paramètres sont liés à la vitesse de la lumière (la vitesse de la lumière) dans le vide comme suit:

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

L'équation d'onde est obtenue en prenant la boucle de la loi d'induction de Faraday équation (I.1) et en utilisant l'identité vectorielle :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (\text{I.5})$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \cdot \nabla \vec{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \quad (\text{I.6})$$

En substituant les équations (I.2) et (I.3) dans l'équation ci-dessus, on obtient l'équation d'onde [7]

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.7})$$

L'équation de Helmholtz, qui représente une forme indépendante du temps de l'équation d'onde résulte en appliquant la séparation des variables sur le champ électrique dans son espace et son temps domaines :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z) T(t) \quad (\text{I.8})$$

En substituant Equation (1.8) en équation (1.7) on trouve [6,8]

$$\frac{\nabla^2 A(x, y, z)}{A(x, y, z)} = \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \quad (\text{I.9})$$

Pour que l'équation ci-dessus soit vérifiée, les deux côtés, gauche et droit, doivent être égaux à la même constante,  $-k^2$

$$\frac{\nabla^2 A(x, y, z)}{A(x, y, z)} = -k^2 \quad (\text{I.10})$$

$$\nabla^2 A(x, y, z) + k^2 A(x, y, z) = 0 \quad (\text{I.11})$$

Eq (I.12) décrit l'équation d'onde de Helmholtz, où  $k$  est le vecteur d'onde défini comme :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{I.12})$$

Dans l'approximation paraxiale, la magnitude complexe du champ électrique devient

$$\vec{E}(x, y, z) = u(x, y) \exp(ikz) \quad (\text{I.13})$$

où  $u(x, y)$  est la valeur complexe de l'amplitude et  $z$  est l'axe de propagation. En remplaçant la formule ci-dessus du champ électrique (équation (I.13)), dans l'équation d'onde de Helmholtz (équation (I.11)), on obtient :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(x, y, z) + 2ik \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.14})$$

L'hypothèse, connue sous le nom d'approximation à variation lente, sous laquelle le paraxial

l'approximation est valide, donnée par :

$$\left| \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial Z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \right| \quad (\text{I.15})$$

L'approximation paraxiale, décrite mathématiquement ci-dessus, indique que la variation longitudinale de l'amplitude  $u(x, y, z)$  est faible par rapport à la longueur d'onde du faisceau ( $k = 2\pi / \lambda$ ). Dont le taux de variation du champ dans la direction  $z$  est faible par rapport à la direction transversale. Par conséquent, le troisième terme de l'équation (I.14) est négligé, ce qui entraîne.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y, z) + 2ik \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.16})$$

Qui s'appelle l'approximation paraxiale de l'équation de Helmholtz[ 8].

L'approximation paraxiale est utilisée pour décrire la propagation du faisceau laser en tant que l'angle de divergence du faisceau est considéré comme petit. Il existe de nombreuses solutions à l'équation paraxiale de l'onde de Helmholtz (équation (I.16)), dont la distribution d'amplitude,  $u(x, y, z)$ , est décrite par un gaussien, LG, Bessel, Airy ou HG....ect.

### I.8. Les Modes gaussiens :

La première solution de l'équation d'onde paraxiale de Helmholtz, est le faisceau gaussien, c'est une solution importante, qui est la plus fondamentale et la plus commune des solutions sélectionnées dans les lasers commerciaux. C'est le mode fondamental que nous utiliserons pour générer des faisceaux dont la distribution d'amplitude est une fonction d'Hermite. L'expression complète de l'amplitude du faisceau gaussien est donnée par la relation :[8,9]

$$E(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) \exp\left(-i \frac{kr^2}{2R(z)} - i\Phi(z)\right) \quad (\text{I.17})$$

$w_0$  : est la largeur minimale du faisceau laser gaussien

Avec :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

$W(z)$  : est la largeur du faisceau gaussien

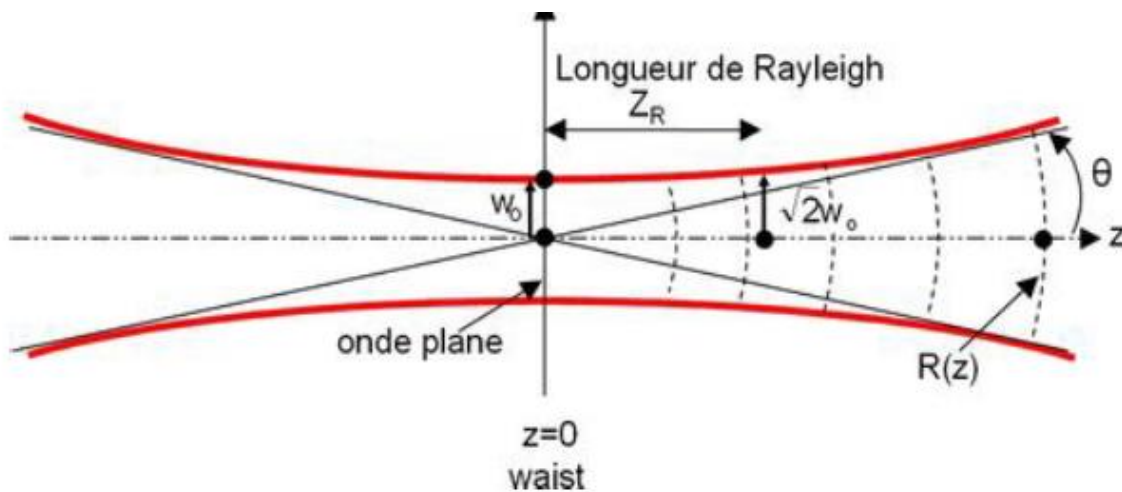
$\phi(z)$  : la phase de gouy, son expression est donnée par [10,11]:

$$\phi(z) = \arctan (z/z_R) \quad (\text{I.18})$$

$r$ : coordonné radiale transversal

Ce déphasage signifie que l'onde gaussienne est déphasée de  $\phi$  sur l'axe  $z$  par rapport à une onde plane de même longueur d'onde « partie » depuis l'origine  $z=0$  au même instant. Ce déphasage sur l'axe spécifique à l'onde gaussienne tend vers  $\pi/2$  lorsque  $z$  tend vers l'infini. Lorsque l'onde passe par  $z=0$ , elle subit un déphasage global de [12].

La gamme Rayleigh, exprimée par  $Z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ , représente une mesure cruciale : la longueur de Rayleigh. Cette valeur indique la distance de propagation requise pour que l'aire du faisceau laser double, décrivant ainsi la profondeur de focalisation du faisceau.



**Figure I.10.** Illustration de la zone de pincement du faisceau gaussien

La distance de Rayleigh  $zR$  est le trajet entre le plan de pincement, le lieu où le faisceau est le plus ajusté (étroit), et le plan où l'aire du faisceau a doublé. L'élargissement du faisceau est donné par l'angle de divergence en fonction de la largeur minimale  $w_0$  et longueur d'onde  $\lambda$  comme suit :

$$\theta = \lambda / \pi w_0 \quad (\text{I.19})$$

L'intensité optique peut être trouvée en utilisant la relation :

$$I(r, z) = |E(r, z)|^2 = \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp\left( \frac{-2r^2}{w^2(z)} \right) \quad (\text{I.20})$$

### I.9. Modes d'ordre supérieurs :

L'équation de Helmholtz admet d'autres solutions que celle de base, connues sous le nom de modes d'ordre supérieur. Ces modes forment une base complète et orthogonale de

fonctions, ce qui signifie que toute oscillation à l'intérieur d'une cavité optique peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces modes. La structure transverse de ces modes dépend théoriquement de la géométrie des miroirs du résonateur, qu'ils soient de forme rectangulaire, cylindrique, ou un mélange des deux. Toutefois, en pratique, de nombreuses perturbations peuvent altérer cette structure idéale.

Pour les deux principales familles de solutions, le mode fondamental correspond à un faisceau gaussien, tandis que les modes d'ordre supérieur représentent les différents *modes transverses* observables dans un résonateur optique. Une caractéristique essentielle de ces modes est que leur distribution d'intensité reste inchangée dans tous les plans perpendiculaires à l'axe optique, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la cavité.

En définitive, c'est principalement la conception de la cavité laser qui détermine quel ensemble de modes est privilégié pour constituer la sortie du laser.

### I.10. Le Mode Hermite-Gaussien:

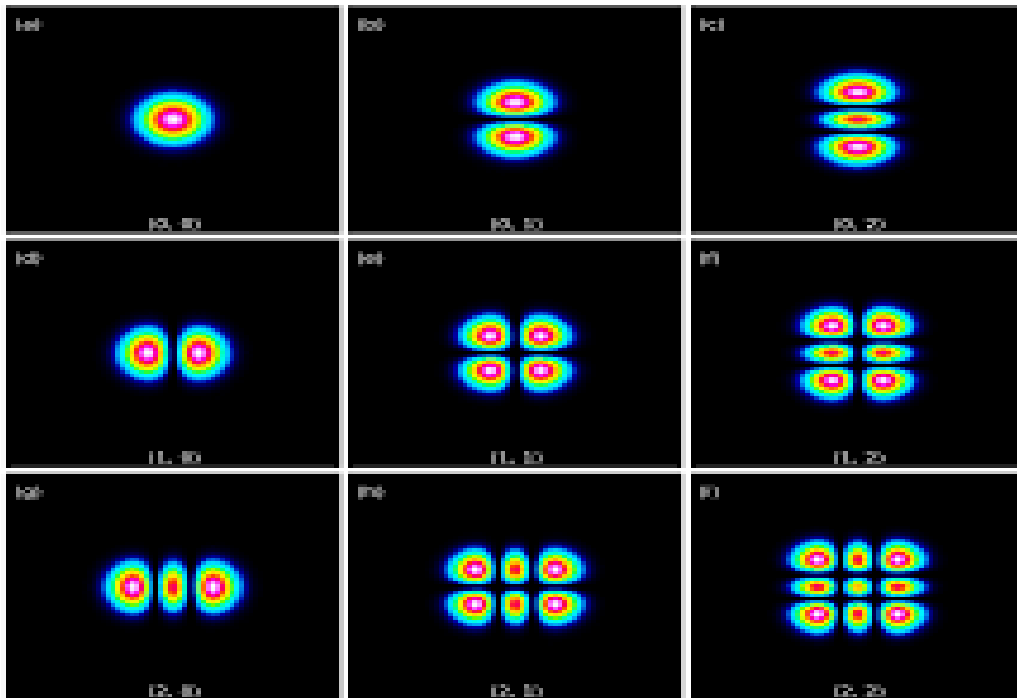
Les faisceaux Hermite-gaussiens sont une famille de modes laser structurellement stables qui ont une symétrie rectangulaire le long de l'axe de propagation. Les polynômes d'Hermite qui interviennent dans les modes d'Hermite-Gauss découlent de la recherche d'une forme de solution adéquate à la résolution de l'équation paraxiale à variables séparées  $x$  et  $y$ . La solution obtenue par ce raisonnement est sous la forme : [13,14]

$$E_{m,n}(x, y, z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} H_m \left( \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) e^{\frac{x^2+y^2}{w(z)}} e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-i[kz - \Phi(m,n,z)]} \quad (\text{I.21})$$

$H_m$  est le polynôme d'Hermite d'ordre  $m$

$w_0$  est la taille minimale du faisceau

$w(z)$  est la largeur du faisceau à la distance de propagation  $z$



**Figure I.11.**Mode Hermite Gauss

Avec :

Les indices n et m déterminent la forme du profil dans la direction x et y, respectivement. Les grandeurs w et R évoluent dans la direction z. Hm est le polynôme d’Hermite d’ordre m il est défini comme suit :

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = 2x \\ H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ H_3(x) = 8x^3 - 12x \end{cases} \quad (I.22)$$

Le polynôme d’Hermite se développe comme suit[15]:

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \quad (I.23)$$

- Pour m = n = 0, on retrouve le mode fondamental gaussien.
- Pour m et n quelconques, la loi de propagation pour R, q et w est inchangée. Seuls le déphasage et la structure transverse du faisceau sont différents.

Le faisceau Hermite-Gauss standard est défini par les polynômes Hermite-Gauss HGm(x), où m représente l'ordre du mode. Le Tableau donne les cinq premiers polynômes de ce faisceau.

m	Faisceau	Le polynôme Hermite $H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}x\right)$
0	HG <sub>00</sub>	1
1	HG <sub>10</sub>	$2\sqrt{2}(x/w_0)$
2	HG <sub>20</sub>	$8(x/w_0)^2 - 2$
3	HG <sub>30</sub>	$16\sqrt{2}(x/w_0)^3 - 12\sqrt{2}(x/w_0)$
4	HG <sub>40</sub>	$64(x/w_0)^4 - 96(x/w_0)^2 + 12$
5	HG <sub>50</sub>	$128\sqrt{2}(x/w_0)^5 - 320\sqrt{2}(x/w_0)^3 + 120\sqrt{2}(x/w_0)$

**Tableau I.1.** -Polynômes de Hermite Standard  $\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)$  d'ordre m.

Dans le Tableau suivant, vous trouverez les racines des polynômes d'Hermite  $H_m(x/w)$  où x représente les positions transversales où l'intensité du faisceau Hermite-Gauss HG<sub>m0</sub> incident est nulle, et w est la largeur du faisceau incident à z=0.

m	Valeurs du rapport (x/w) des zéros d'intensité du mode HG <sub>m0</sub>								
1					0				
2				-0.5		0.5			
3				-0.8660	0	0.8660			
4			-1.1672	-0.3709		0.3709	1.1672		
5			-1.4284	-0.6778	0	0.6778	1.4284		
8	-2.0722	-1.4012	-0.8182	-0.2695		0.2695	0.8182	1.4012	2.0722

**Tableau I.2.** Les Zéros des polynômes d'Hermite.

**I.11. Profils d'intensités d'un faisceau Hermite gaussien :**

En première étape, un code Matlab a été établi pour le calcul des polynômes d'Hermite d'un ordre déterminé. Ceci a permis d'effectuer une simulation permettant d'obtenir la section transversale d'un faisceau Hermite gaussien pour différents modes. Cette section caractérise la variation de l'intensité pour différents modes. A titre d'exemple, La Figure I.12 illustre le profil des intensités ainsi que le contour (projection sur le plan (x,y) des modes TEM<sub>00</sub>, TEM<sub>10</sub>, TEM<sub>11</sub>, TEM<sub>20</sub>. Pour vérifier la fiabilité des résultats, ces profils ont été établis sur Mathematica.

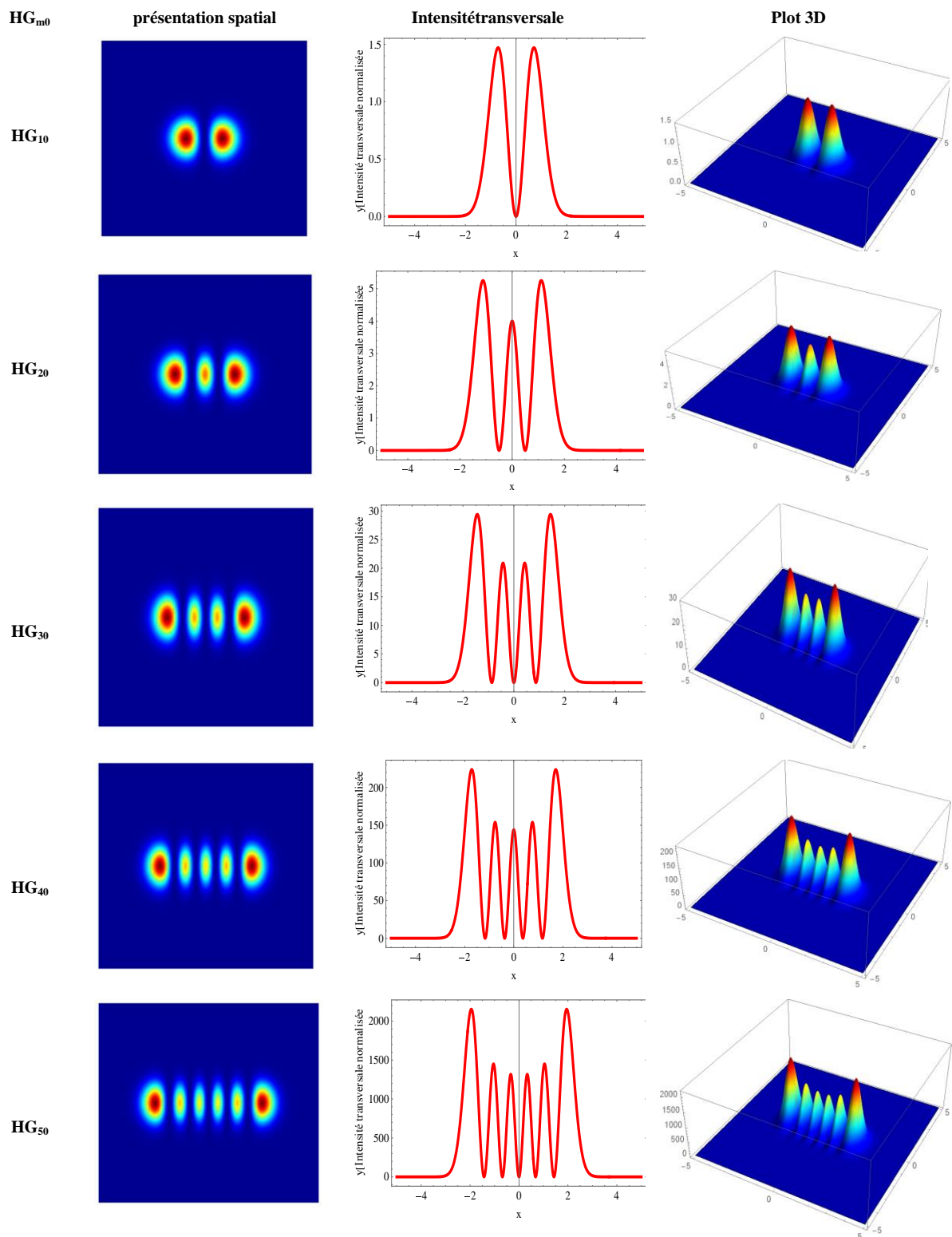


Figure I.12. Les distributions des intensités des faisceaux Hermite-Gauss pour  $m=1,2,3,4,5$ .

### I.12. Les applications des faisceaux lasers d'ordres supérieurs :

Les premières méthodes de mise en forme du faisceau visaient simplement à obtenir un profil de faisceau gaussien, qui est le faisceau de sortie préféré pour de nombreuses applications de traitement de matériaux industriels telles que le découpage et le soudage. Aujourd'hui, de nombreuses applications, nécessitent des faisceaux lasers possédant un profil d'intensité transverse spécifique tel que a) Guidage des atomes ultra-froids, b) Accélération des particules, c) Des pincettes optiques et d) Télécommunication (voir figure I.13)

Ce profil d'intensité transverse a une forme gaussienne ou non gaussienne. Les faisceaux lasers non gaussiens ou les faisceaux d'ordres supérieurs présentent de plus en plus un intérêt majeur dans la technologie moderne. L'une des familles des faisceaux lasers d'ordre supérieur on distingue les fameux faisceaux Hermite-Gauss présentant une symétrie cartésienne.[9,12]

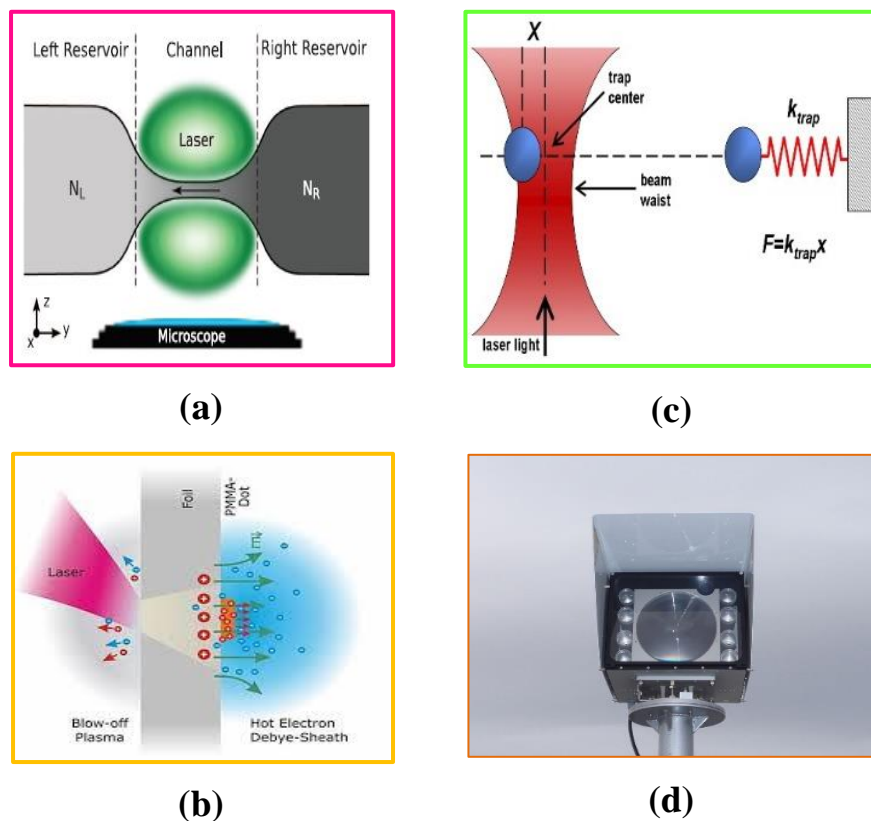
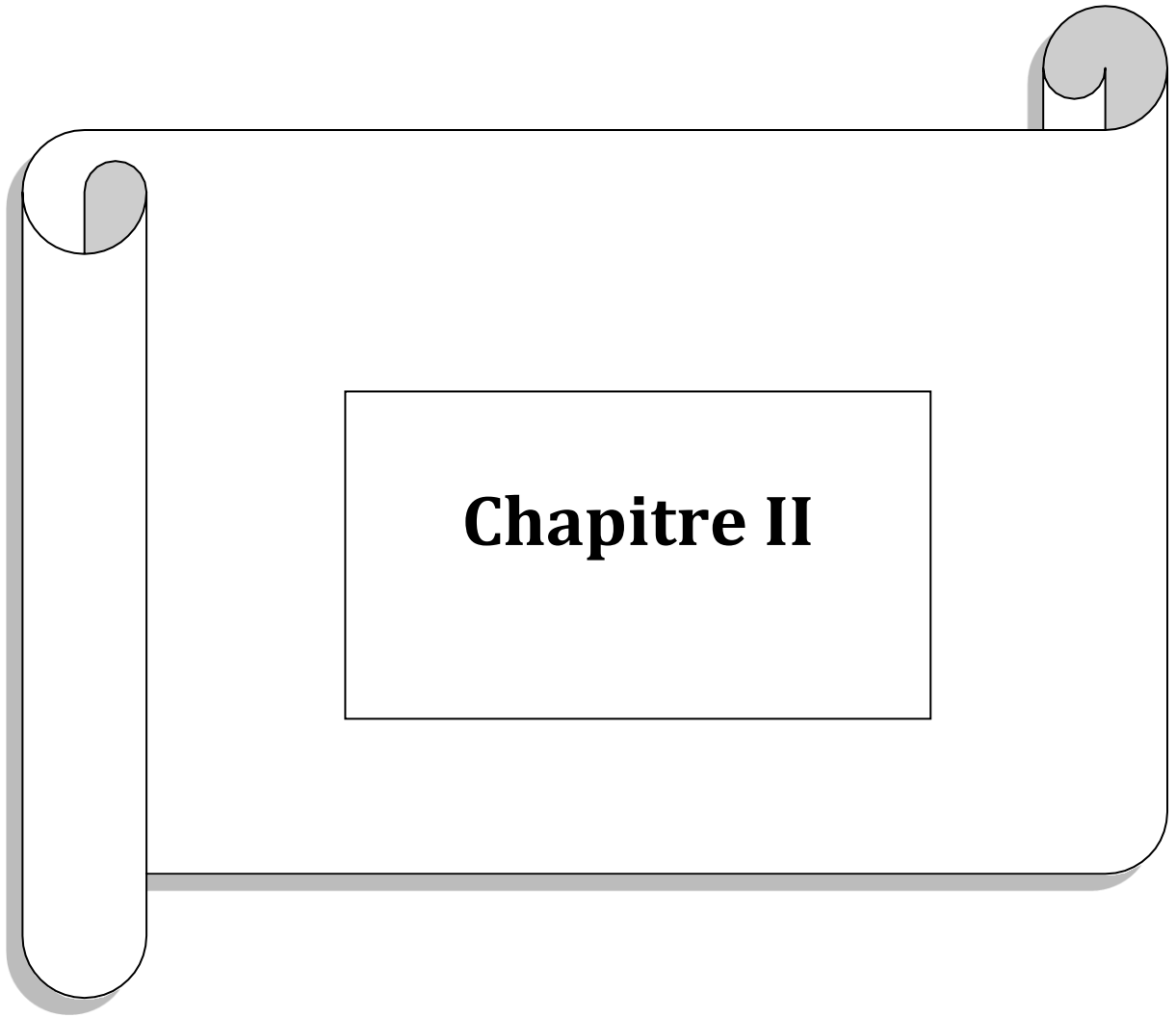


Figure I.13. les applications des faisceaux d'ordres supérieurs.



## Chapitre II

## II.1. Introduction :

Le facteur de qualité  $M^2$  est l'un des critères théoriques les plus importants utilisés pour décrire les performances des faisceaux lasers. Il permet de déterminer dans quelle mesure un faisceau s'écarte du comportement idéal d'un faisceau gaussien fondamental. Ce paramètre est directement lié à la capacité du faisceau à se focaliser en un point très réduit ou à conserver sa forme durant la propagation, ce qui en fait un élément essentiel dans de nombreuses applications optiques avancées.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur une étude **purement théorique** du concept du facteur de qualité  $M^2$ , en nous appuyant sur des outils mathématiques tels que les moments d'ordre un et deux, qui permettent de décrire l'évolution du faisceau lors de sa propagation en espace libre, ainsi que de déterminer avec précision sa largeur angulaire et spatiale.

Par ailleurs, ce chapitre examine, d'un point de vue théorique, l'effet des **aberrations optiques** sur la qualité du faisceau laser. Ces aberrations, qu'elles soient géométriques ou chromatiques, provoquent une déformation du front d'onde, ce qui nuit aux propriétés de focalisation et de propagation, et impacte donc directement la valeur du facteur  $M^2$ .

## II. 2. Facteur de qualité $M^2$ d'un faisceau laser :

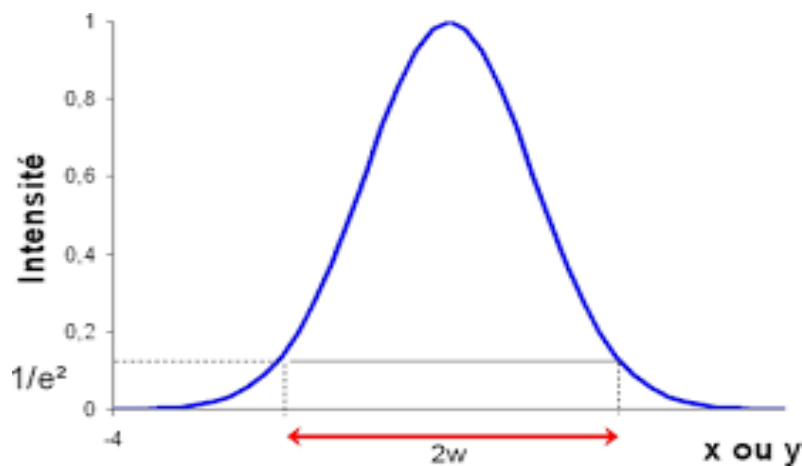
Le terme " **Facteur de qualité** " signifie généralement une certaine mesure de la relation entre la taille du faisceau de champ proche et la propagation du faisceau de champ lointain d'un faisceau laser [16]. Le facteur de qualité  $M^2$  est une grandeur caractéristique d'un faisceau laser, qui quantifie sa capacité à confiner l'énergie, à la focaliser sur un faible diamètre, et limiter le degré de focalisation du faisceau pour un angle de divergence donné, qui est souvent limité par l'ouverture numérique de la lentille de focalisation. Avec la puissance optique, le facteur de qualité du faisceau détermine la luminosité (plus précisément, le rayonnement) d'un faisceau laser. Par exemple, si un faisceau a  $M^2 = 1,6$  (ou plus), il ne peut pas être focalisé sur un point moins de 1,6 fois le diamètre de la tache focale d'un faisceau limité par diffraction avec le  $M^2 = 1$ .

### II.2.1. Calcul de $M^2$ :

Dans le cas générale  $M^2 = \frac{4\pi}{\lambda} w_0 \theta_0$  ou  $w_0$  est le waist et  $\theta_0$  est la divergence. La mesure de  $M^2$  dépend de la définition de la largeur du faisceau laser c-a-d le problème du calcul du  $M^2$  revient au calcul de  $w_0$  et  $\theta_0$ . Deux méthodes sont proposées [17]:

#### II.2.1.1. Critère d'énergie 86.5% :

Cette méthode basée sur le Power content (le contenu de l'énergie), telle que la largeur  $w$  couvre 86.5% de l'énergie totale ; cette largeur correspond a une baisse de l'intensité aux ailes par rapport au centre égale a  $e^2$ [17].



**Figure.II.1.** Diagramme de la distribution de l'intensité d'un faisceau gaussien et le mesurage

#### II.2.1.2. Les moments des faisceaux laser :

La propagation du faisceau laser peut être partiellement caractérisée par la largeur du faisceau et la divergence. Il existe différentes définitions traditionnelles de la largeur du faisceau, qui peuvent ou ne peuvent pas contribuer à savoir ce que le faisceau fera concentré ou propagé dans l'espace. Comme l'a souligné le Professeur A. Siegman[16], il peut y avoir de nombreuses définitions possibles de la largeur du faisceau pour un profil de faisceau arbitraire, telles que, la largeur calculée sur la base du critère  $1/e^2$  du profil d'intensité[18], la largeur qui correspond à 86.5% de l'énergie totale du faisceau [19], et la largeur calculée sur la base des moments d'intensités d'ordre 2.

L'étude de la propagation d'un faisceau quelconque, au moyen du propogateur, se fait généralement par une solution numérique de l'intégrale. L'analyse numérique ne permet pas de dégager des propriétés particulières d'un phénomène, à moins d'être très exhaustive. Ici, nous souhaitons, dans un premier temps, comprendre l'évolution d'un faisceau après un passage au

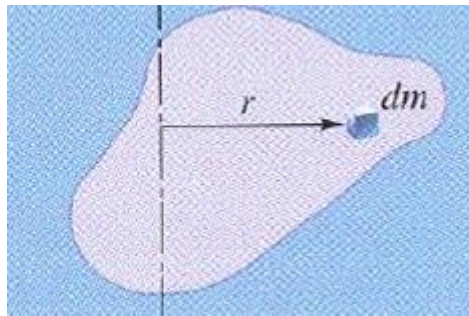
travers un système optique. En particulier, on veut quantifier son étalement spatial et le changement de sa divergence angulaire. Ce type d'information globale peut se définir au moyen des moments mathématiques de la distribution spatiale  $u(x)$  et de la distribution spectrale  $S(q)$ . Nous montrons, dans les deux sous-sections suivantes, qu'il est possible aussi de dériver les lois de propagation des moments importants pour une caractérisation globale d'un faisceau. La signification physique des moments de différents ordres sont donnée par la suite telle que :

Moment d'ordre  $n$

Ordre 0:  $M = \int_D dm$  Masse totale du système

Ordre 1 :  $Mx_G^i = \int_D x^i dm$  Coordonnées du centre de masse

Ordre 2:  $\int_D r^2 dm$  Etude de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe



**Figure.II.2.** Détermination de moment d'un objet de forme quelconque.

### II.2.1.2.1. Les moments d'ordre un :

Les moments d'ordre un jouent un rôle fondamental dans l'analyse du comportement d'un faisceau lumineux lors de son interaction avec un système optique. En effet, ils fournissent des informations précieuses sur le déplacement du faisceau ainsi que sur la modification de sa direction de propagation après avoir traversé un tel système [20,21]. Le moment d'ordre un de l'intensité, tel que défini par la relation (II.1), permet de déterminer la position transverse du centre de masse de la distribution  $u(x)$ , ce qui reflète la localisation du faisceau dans le plan transverse. Quant au moment d'ordre un de la distribution spectrale, exprimé par l'équation (II.2), il renseigne sur l'orientation principale de la propagation du faisceau. La fonction  $S(\theta, z)$  y représente les fréquences spatiales, qui décrivent la composition angulaire du champ lumineux.

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x |u(x, z)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, z)|^2 dx} \quad (\text{II.1})$$

$$\langle \theta \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta |S(\theta, z)|^2 d\theta}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\theta, z)|^2 d\theta} \quad (\text{II.2})$$

En utilisant la loi de propagation pour  $u(x, z)$ , on peut dériver une loi générale pour la , après leur passage au travers un  $\langle x \rangle$  et  $\langle \theta \rangle$  propagation de ces deux caractéristiques globales système optique, dont on peut montrer que les moments d'ordre un d'un faisceau quelconque en espace libre évoluent en fonction de  $z$  suivant la relation (II.3)[11] .

$$\langle x(z) \rangle = \langle x(z_1) \rangle + \lambda \langle S_x \rangle (z - z_1) \quad (\text{II.3})$$

Ceci est le résultat, à savoir que le "centre de gravité" du profil d'intensité se propage exactement en ligne droite, suivant une direction faisant un angle  $\langle \theta_x \rangle = \lambda \langle S_x \rangle$  Avec  $\lambda$  est la longueur d'onde.

#### II.2.1.2.2. Les moments d'ordre deux :

Le moment d'ordre deux de la distribution spatiale, tel que défini par l'équation (II.4), permet de quantifier l'élargissement ou la concentration (pincement) du faisceau au cours de sa propagation. En parallèle, le moment d'ordre deux de la distribution spectrale, donné par l'équation (II.5), est utilisé pour caractériser l'évolution de la divergence moyenne du faisceau. Ces paramètres jouent un rôle essentiel dans l'analyse de la qualité et du comportement du faisceau optique [22].

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |E(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(x)|^2 dx} \quad (\text{II.4})$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2 |S(\theta)|^2 d\theta}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\theta)|^2 d\theta} \quad (\text{II.5})$$

Considérons maintenant un arbitraire, non gaussien, non limité par la diffraction, et faisceau laser réel potentiellement multi mode avec un profil d'intensité moyenne dans le temps  $I(x, y, z)$  et une distribution de fréquence spatiale  $I(s_x, s_y)$ . On peut dans ce cas définir la variance du faisceau réel  $\sigma_x(z)$  et  $\sigma_s$ , par les relations (II.6) et (II.7)[23]

$$\sigma_x^2(z) = \frac{\iint (x - \bar{x})^2 I(x, y, z) dx dy}{\iint I(x, y, z) dx dy} \quad (\text{II.6})$$

$$\sigma_{s_x}^2 = \frac{\iint (s_x - \bar{s}_x)^2 I(s_x, s_y) ds_x ds_y}{\iint I(s_x, s_y) ds_x ds_y} \quad (\text{II.7})$$

Il s'agit de  $\sigma^2$  qui représente la variance et qui est équivalent à une surface, alors que  $\sigma$  est l'écart quadratique moyen (écart type), il est homogène à une longueur. Nous ayons seulement écrit les formules de variance dans la direction  $x$ . Des expressions exactement analogues pourraient bien sûr être écrites pour la variance  $\sigma_y^2(z)$  et  $\sigma_{s_y}^2$  l'autre coordonnée transversale.

En raison de la relation de transformation de Fourier fondamentale qui existe entre le profil d'amplitude transverse  $E(x, y, z)$  pour un faisceau optique arbitraire (où  $I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2$ ), En se basant sur les principes de Fourier et la distribution de fréquence spatiale  $P(s_x, s_y, z)$  (où  $I(x, y, z) = |P(x, y, z)|^2$ ), on peut prouver rigoureusement que pour tout faisceau laser réel arbitraire, la variance spatiale  $\sigma_x^2(z)$  obéit à la règle de propagation en espace libre donné par la relation (II.8) [16].

$$\sigma_x^2(z) = \sigma_{x0}^2(z) + \lambda^2 \sigma_x^2(z - z_{0x})^2 \quad (\text{II.8})$$

Le profil du faisceau  $I(x, y, z)$  peut changer de forme de manière complexe avec la distance de propagation  $z$  en raison d'effets de diffraction ou d'interférence ; mais la variance  $\sigma_x^2(z)$  a néanmoins toujours une valeur minimale  $\sigma_{x0}^2(z)$  à une position de la taille minimale du faisceau  $z = z_{0x}$ , et  $\sigma_x^2(z)$  varie quadratiquement avec  $z$  de part et d'autre de cet endroit, comme dans le cas gaussien idéal.

Le moment d'intensité d'ordre 2 est utile pour définir mathématiquement le rayon d'un profil arbitraire de faisceau laser. Dans le moment d'intensité d'ordre 2, les rayons de faisceau pour les directions  $x$  et  $y$  sont définis par (II.9) [24]:

$$\langle w_x^2 \rangle = 4 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 I(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) dx dy} \text{ et } \langle w_y^2 \rangle = 4 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 I(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) dx dy} \quad (\text{II.9})$$

## II.2. 2. Utilité et l'application du facteur de qualité $M^2$ :

Le paramètre  $M^2$  est essentiel pour évaluer la qualité d'un faisceau laser. Il permet de déterminer jusqu'à quel point un faisceau collimaté peut être focalisé sur une petite zone, ou à

quel point un faisceau divergent peut être collimaté. Ce paramètre est souvent plus pertinent que l'apparence gaussienne du faisceau, car un faisceau peut sembler gaussien tout en ayant une valeur de  $M^2$  éloignée de 1. Inversement, un faisceau avec un profil d'intensité non gaussien peut présenter une valeur de  $M^2$  proche de l'unité, ce qui signifie qu'il est de bonne qualité.

La qualité du faisceau, exprimée par le  $M^2$ , est cruciale dans de nombreuses applications. Par exemple, dans les communications par fibres optiques, des faisceaux avec un  $M^2$  proche de 1 sont indispensables pour assurer un bon couplage avec les fibres monomodes. De même, dans les domaines de l'usinage et du soudage laser, un  $M^2$  faible est recherché, car un faisceau avec un  $M^2$  élevé se focalise sur une zone proportionnellement plus grande ( $M^2$  fois plus grande) qu'un faisceau parfaitement gaussien, ce qui réduit la fluence (énergie par unité de surface) d'un facteur  $1/M^2$ .

En microscopie, seules les parties du faisceau limitées par la diffraction sont réellement exploitables. Ainsi, plus le  $M^2$  est élevé, plus la portion utilisable du faisceau diminue. Par exemple, avec un  $M^2$  de 1,6, moins de 40 % du faisceau est effectivement utilisable. Cela implique qu'un laser avec  $M^2 = 1,6$  doit produire plus du double de la puissance d'un laser avec  $M^2 = 1,1$  pour fournir la même puissance optique utile)[ 25]:

### II. 2. 3. Détermination théorique du facteur de qualité du faisceau laser :

Le facteur de qualité d'un faisceau laser est étroitement lié à sa manière de se propager dans l'espace. Parmi les diverses façons de définir la largeur d'un faisceau, celle basée sur la variance apparaît comme l'une des plus universelles et rigoureusement fondées sur le plan mathématique. C'est d'ailleurs cette approche qui a servi de base au développement de la méthode dite du «  $M^2$  » (M-carré), aujourd'hui largement utilisée pour caractériser les faisceaux laser.

Cette méthode repose sur le calcul du deuxième moment du profil d'intensité du faisceau  $I(x, y)$ , généralement en fonction d'une coordonnée transverse ( $x$  ou  $y$ ), comme le décrivent les équations (II.6)et(II.7)

Il se trouve que, pour un faisceau gaussien décrit par une expression du type (II.10), le paramètre classique de largeur de faisceau  $w$ , très couramment utilisé en optique gaussienne, est simplement le double de l'écart-type du profil d'intensité, autrement dit :  $w_x = 2\sigma_x$

$$I(x) = \exp[-2x^2/w_x^2] \equiv \exp[-x^2/2\sigma_x^2] \quad (\text{II.10})$$

Les largeurs de faisceau basées sur le second moment,  $w_x$  et  $w_y$ , définies ci-dessus, vont ensuite se propager avec la distance dans l'espace libre exactement comme la taille de tache gaussienne ( $w_x$ ) d'un faisceau gaussien idéal, sauf pour l'insertion d'un facteur multiplicatif  $M^2$  dans l'élargissement du faisceau en champ lointain. Ainsi, pour tout faisceau arbitraire (cohérent ou incohérent) et pour tout choix d'axes transverses, on peut écrire en utilisant les définitions de largeur basées sur le second moment :

$$W_x^2(z) = W_{0x}^2 + M_x^4 \left( \frac{\lambda}{\pi W_{0x}} \right)^2 (z - z_{0x})^2 \quad (\text{II.11})$$

Et

$$W_y^2(z) = W_{0y}^2 + M_y^4 \left( \frac{\lambda}{\pi W_{0y}} \right)^2 (z - z_{0y})^2 \quad (\text{II.12})$$

où  $M_x$  et  $M_y$  sont des paramètres caractéristiques du faisceau en question. En conséquence, en utilisant ces définitions, on peut écrire le produit champ proche - champ lointain pour un faisceau arbitraire sous la forme :

$$W_{0x} W_x(z) \approx M_x^2 \frac{z\lambda}{\pi} \quad \text{Et} \quad W_{0y} W_y(z) \approx M_y^2 \frac{z\lambda}{\pi} \quad \text{comme } z \rightarrow \infty \quad (\text{II.13})$$

En d'autres termes, les paramètres  $M_x^2$  et  $M_y^2$  donnent une mesure de la "qualité" d'un faisceau arbitraire, au sens défini dans la Section 1. Les propriétés générales de ces valeurs  $M^2$  incluent :

- Les valeurs de  $M_x^2$  et  $M_y^2$  sont supérieures ou égales à 1 pour tout profil de faisceau arbitraire, avec la limite  $M^2=1$  n'étant atteinte que pour les faisceaux gaussiens monomodes TEM<sub>00</sub>.
- Les valeurs  $M^2$  fournissent manifestement une mesure de combien de fois le faisceau réel dépasse la limite de diffraction dans chaque direction transverse.

Les faisceaux laser réels non torsadés peuvent alors être entièrement caractérisés, du moins dans cette description d'ordre deux, par exactement six paramètres :  $W_{0x}, W_{0y}, z_{0x}, z_{0y}, M_x^2, M_y^2$

Le facteur de qualité pour le cas des modes transverses d'ordres supérieurs est fonction de l'ordre du mode, on peut le calculer dans le cas général en utilisant les moments d'intensité. Dans le cas d'une symétrie cartésienne (faisceaux  $HG_m^n$  purs) [23], le facteur de qualité est égale à:

$$\begin{cases} M_x^2 = \sqrt{2m + 1} \\ M_y^2 = \sqrt{2n + 1} \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Et le facteur de qualité total est égale à  $M^2 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ .

### II.3. Abberation Optique :

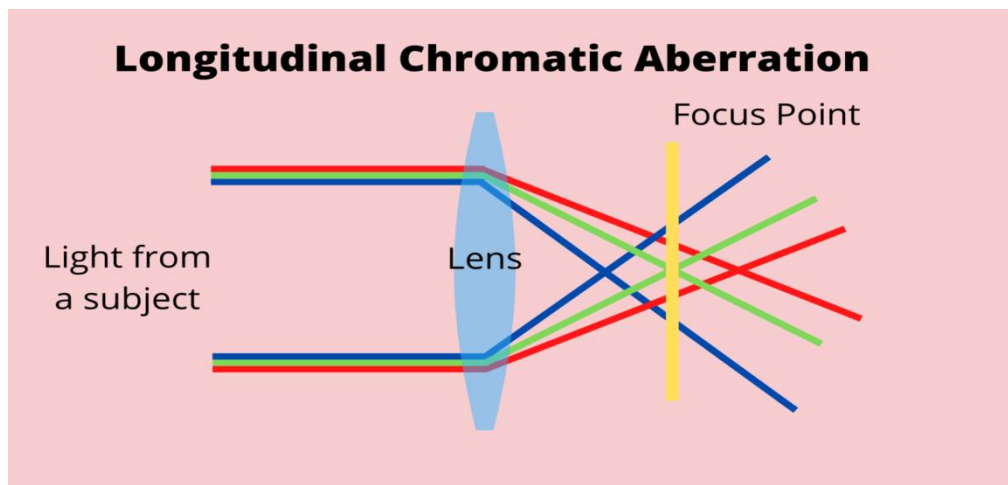
Pour définir l'image donnée par un système optique, on travaille dans les conditions de Gauss, dans ces conditions les rayons considérés sont paraxiaux c'est-à-dire proches de l'axe optique et peu incliné par rapport à celui-ci. Dans le cadre de cette approximation paraxiale, l'image d'un point est un point. Tous les systèmes optiques ont été étudiés dans les conditions de Gauss pour avoir le stigmatisme. En réalité ce stigmatisme n'est pas rigoureux et plus on s'écarte des conditions de Gauss. Dans ce cas les rayons incidents peuvent être relativement éloignés de l'axe optique et/ou fortement incliné, de ce fait, l'image d'un objet sera déformée. On exprime tous les déformations et les défauts de l'image à travers un système optique par le terme aberration. Donc, les aberrations dans une image sont le résultat d'un système optique qui manque de produire une correspondance du point à point exacte entre la source et son image. Elles correspondent aux perturbations du front d'ondes. Les causes des aberrations sont diverses, cela permet de les classer en deux catégories, les aberrations chromatiques, et les aberrations géométriques [26].

Les aberrations se scindent en deux familles :

- ❖ **Les aberrations chromatiques** : qui apparaissent en lumière polychromatique, sont dues aux matériaux des éléments constituant le système optique et ainsi à la dispersion du verre composant l'élément optique [26].
- ❖ **Les aberrations géométriques** : qui sont les écarts à l'optique de Gauss. Elles dépendent uniquement de la structure des rayons lumineux provenant des points objets, concourent à la formation de l'image [26].

### II.3.1. Les aberrations chromatiques :

En optique géométrique, l'aberration chromatique (voir la **Figure.II.3.**) désigne une aberration optique qui produit une image floue et aux contours irisés. Elle résulte de la décomposition de la lumière blanche en plusieurs bandes de couleurs. Le phénomène est mis aisément en évidence avec un verre à forte correction elle est généralement due à la variation de l'indice de réfraction du matériau composant les lentilles en fonction de la longueur d'onde de la lumière qui les traverse. Il en résulte une distance focale variable, de sorte que la mise au point ne peut être effectuée simultanément pour toutes les couleurs du spectre. Si, par exemple, la mise au point est effectuée pour le rouge, le bleu est alors flou : l'image d'un objet blanc présente alors sur ses bords une irisation bleutée. L'aberration chromatique peut être à la fois longitudinale, lorsque les couleurs sont focalisées à des distances différentes ; et transversale ou latérale, lorsque les couleurs sont focalisées à différentes positions dans le plan focal (car le grandissement d'une lentille varie également avec la longueur d'onde)[26].



**Figure.II.3.** Aberration chromatique

La Réduction de l'aberration chromatique se fait par :

- ajout d'un filtre laissant passer une bande spectrale étroite
- utilisation préférentielle de miroirs (téléscope) qui ne présentent pas d'aberration chromatique (mais une aberration de sphéricité ou des aberrations de champ)
- utilisation de verre optique de haute qualité, notamment celui contenant de la fluorine, afin de réduire cette dispersion chromatique.

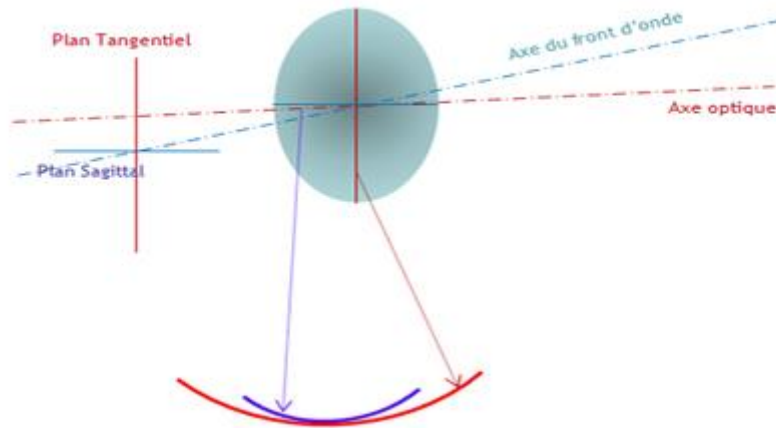
- utilisation d'un montage de lentilles en doublet, l'achromat. utilisation d'un objectif apochromatique, en combinant plus de deux lentilles de différentes compositions.

### II.3.2. Aberrations géométriques :

Elles sont : l'aberration sphérique, le coma, et l'astigmatisme (pour un objet ponctuel), la courbure de champ et la distorsion (pour un objet étendu). Dans ces cinq types d'aberrations, trois sont responsables de la netteté de l'image (aberration sphérique, coma et astigmatisme) et deux sont responsables de la forme et de la position de l'image (courbure de champ et distorsion). D'un autre côté l'aberration sphérique et le coma sont des aberrations monochromatiques des faisceaux larges, et l'astigmatisme, la courbure de champ, et la distorsion sont des aberrations monochromatiques des faisceaux inclinés ou de champ. Les courbes d'aberration sphérique sont des cercles concentriques qui sont centrés dans le plan image Gaussienne, elle donne une diffusion latérale qui a la symétrie de révolution [27].

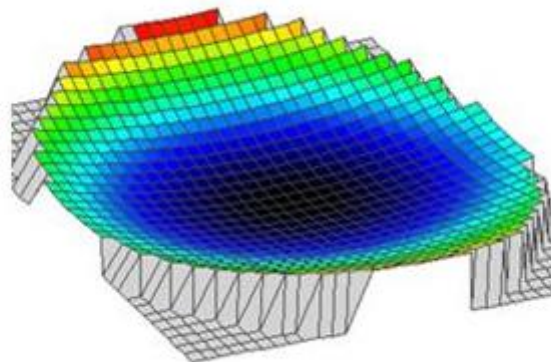
#### II.3.2.1. Astigmatisme :

L'astigmatisme est une aberration de champ qui se manifeste lorsqu'on s'écarte de l'axe optique (voir la **Figure.II.4.**). On l'observe également lorsque les dioptries des lentilles ne sont pas sphériques, mais ellipsoïdaux. L'astigmatisme provient du fait que les rayons contenus dans le plan tangentiel (contenant l'axe optique et le point objet éloigné de l'axe), ne convergent pas à la même distance que ceux contenus dans le plan sagittal (perpendiculaire au plan tangentiel contenant le rayon principal) [28]. Lorsque le front d'onde va être réfracté par le dioptré, il ne sera pas sphérique comme ce serait le cas idéalement sur l'axe, mais il deviendra une surface complexe pour laquelle chaque profil pris individuellement est un arc de cercle, mais où ces arcs de cercle sont de rayon variable.



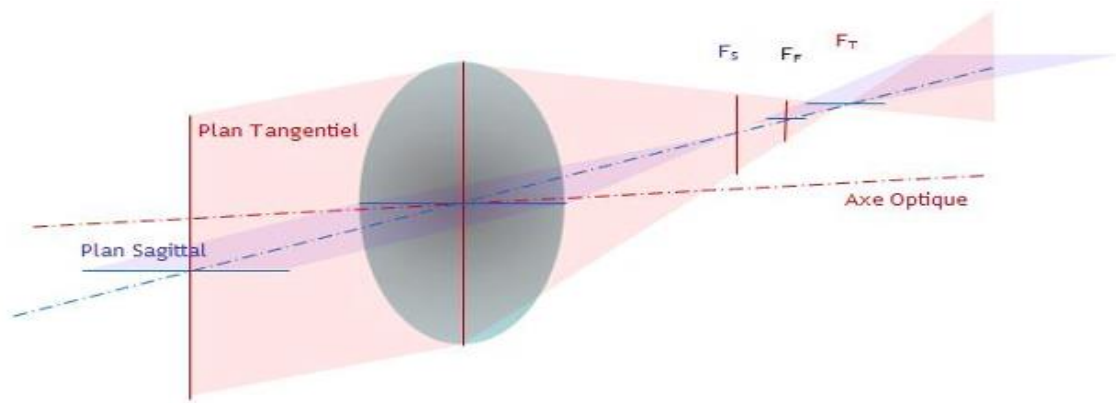
**Figure.II.4.**Représentation l'écart de front d'onde

Si l'on ne retient que la différence entre un front d'onde parfaitement sphérique et l'aberration d'astigmatisme, on obtient la surface de la **Figure.II.5**.



**Figure.II.5.**Représentation l'écart entre le front d'onde et l'aberration d'astigmatisme

Comme chaque profil se trouve donc transmis ou réfléchi par un système optique de focale variable, le point de focalisation sera lui aussi variable, entre deux extrêmes que sont les foci des rayons du plan sagittal qui sera la focale la plus longue (car le plus grand axe de l'ellipse) et la tangentielle la plus courte. Si on simplifie la représentation en ne gardant que ces deux axes, voici les deux points de focalisation présente par la **Figure.II.6**.

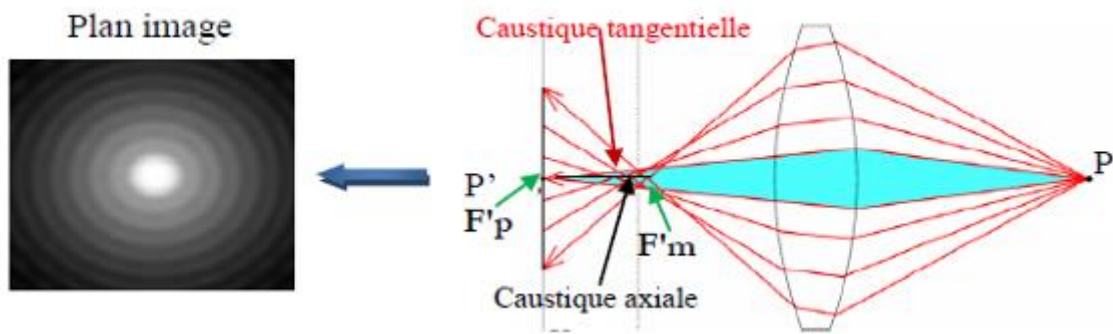


**Figure.II.6.**Plan tangentiel et plan sagittal

Comme mentionné plus haut, on peut rencontrer cette aberration également sur l'axe optique d'un instrument. C'est le cas si l'instrument ne présente pas une focale identique sur tous ses plans suite à un défaut de polissage par exemple. Une contrainte mécanique peut aussi déformer le système optique en le comprimant sur l'un de ses axes. Ce défaut peut aussi mettre en évidence un souci d'alignement d'une lentille au sein d'un objectif, ou un mauvais alignement d'un correcteur additionnel.

### II.3.2.2. Aberration sphérique :

L'aberration sphérique (voir la **Figure.II.7.**) est la plus importante de toutes les aberrations primaires, parce qu'elle affecte le champ entier de la lentille. Le nom de cette aberration vient du fait qu'elle est observée dans la plupart des surfaces sphériques réfractant ou réfléchissantes. Elle est observée quand on recherche l'image d'un point objet située sur l'axe optique donnée par un système de grande ouverture [28]. L'aberration sphérique désigne une aberration dont l'une des conséquences est la disparition du foyer. Les rayons provenant du bord et du centre de l'optique ne se focalisent plus au même point. Par conséquent les rayons marginaux sont plus déviés et convergent plus que les rayons paraxiaux. Les premiers convergent en un point appelé foyer marginal  $F'm$  et les seconds en un autre point appelé foyer paraxial  $F'p$ . On observe alors deux caustiques de focalisation, caustique axiale et caustique sagittale en forme de flèche, dans laquelle le point image attendu sera remplacé par un halo plus ou moins flou.

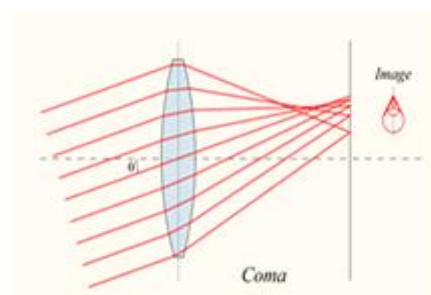


**Figure.II.7.** Aberration sphérique d'une lentille convergente.

Les courbes d'aberration sphérique sont des cercles concentriques qui sont centrés dans le plan image Gaussienne, elle donne une diffusion latérale qui a la symétrie de révolution [27].

### II.3.2.3. Coma :

L'aberration de coma (voir la **Figure.II.8.**) fait référence à une aberration qui est liée tant au champ qu'à l'ouverture. On parle d'« aberration de champ » car elle n'est pas présente sur l'axe optique. L'effet de cette aberration est de produire une tache en forme d'aigrette dans un plan d'observation. Les rayons parallèles qui ne sont pas dans l'axe optique de la lentille ne convergent pas tous en un même point sur le plan focal. Les rayons qui passent sur les bords de la lentille peuvent être focalisés plus loin ou plus près de l'axe optique que ceux passant au centre de la lentille. On parle respectivement de coma positive et de coma négative.

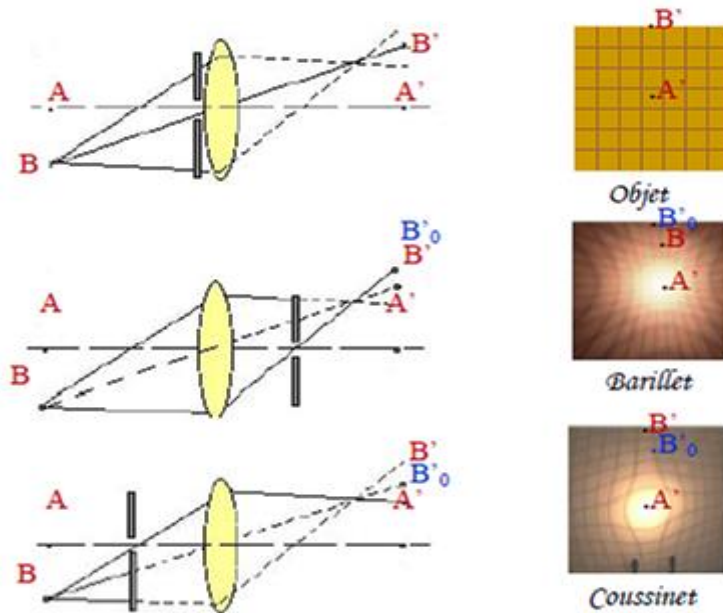


**Figure.II.8.** Représentation du coma d'une lentille.

### II.3.2.4. Distorsion :

Toutes les aberrations étudiées jusqu'à présent se manifestent par des défauts de stigmatisme. Mais dans ce cas, il n'y a plus de défaut de stigmatisme : l'image d'un point source est un point

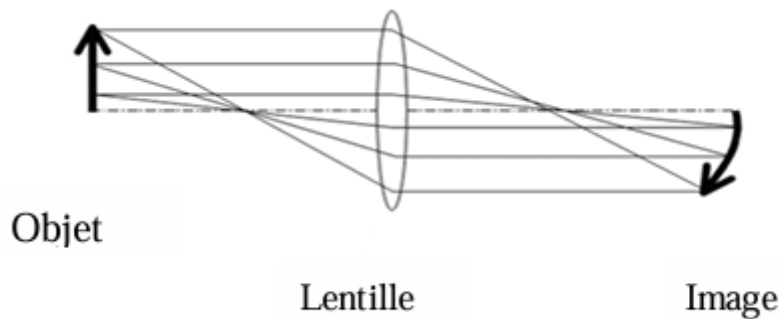
image. Par contre l'image peut ne pas être fidèle à l'objet dans le sens où elle peut être déformée [29], la **Figure.II.9.** montre l'influence de la position de l'ouverture sur la distorsion.



**Figure.II.9.** Influence de la position de l'ouverture sur la distorsion

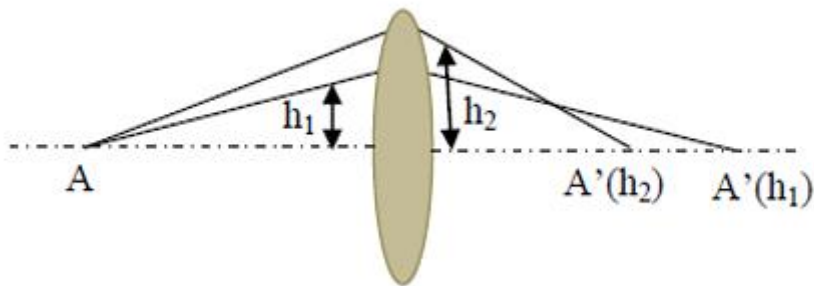
**II.3.2.5. Courbure de champ :**

Un instrument entaché de courbure de champ voir **Figure.II.10.**) forme l'image d'un objet plan de grande dimension sur une surface paraboloidale et non sur un plan, on perd l'aplanétisme. Ce défaut se traduit par des images floues en bord de champ. La courbure de champ est un champ dépendant du changement longitudinal de la focal qui varie comme le carré de l'angle de champ [26].

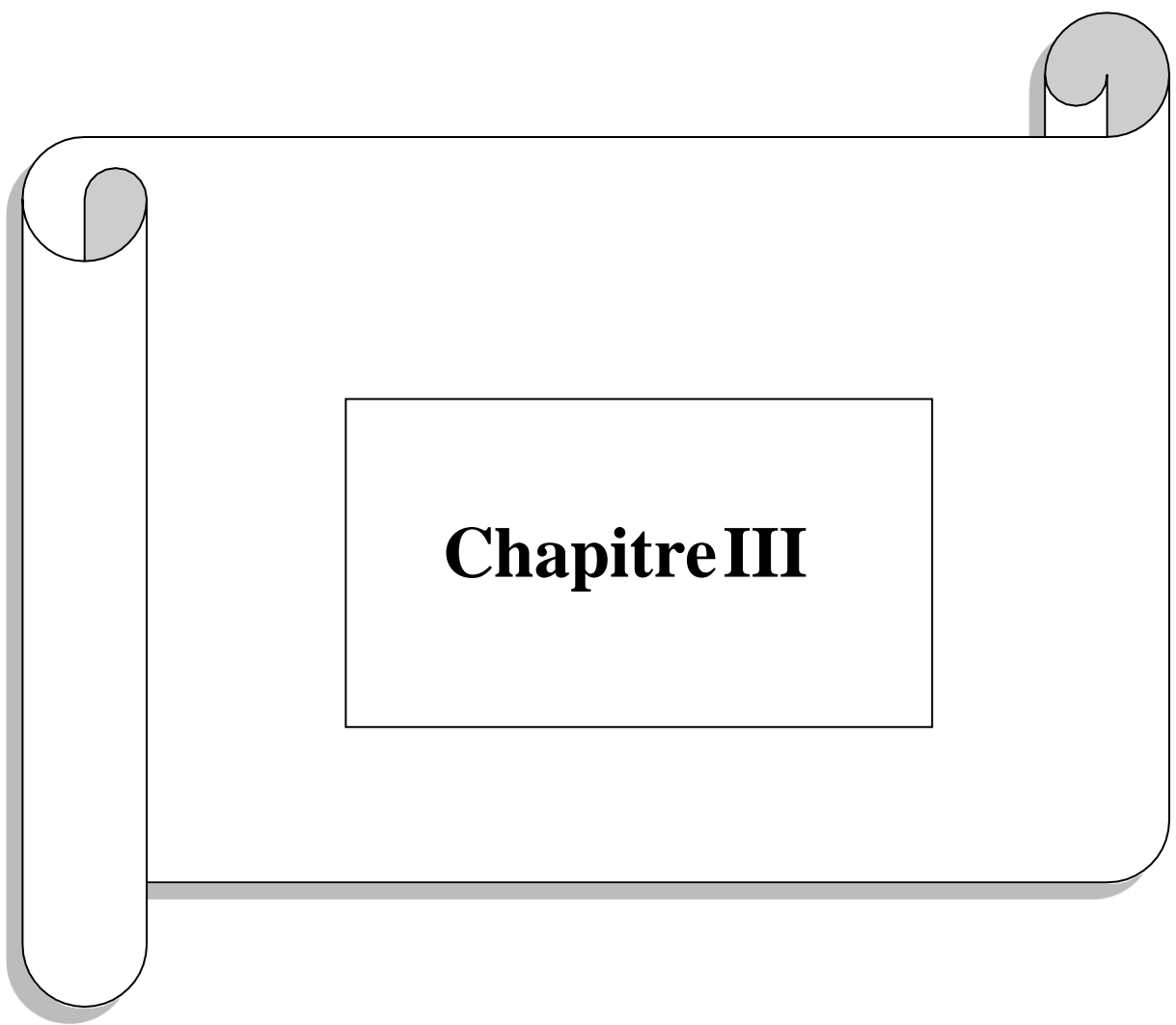


**Figure.II.10.** Courbure de champ.

Toutes les aberrations géométriques proviennent du fait que le stigmatisme des lentilles sphériques est un stigmatisme approché lorsqu'on se place dans les conditions de Gauss. Dès que les faisceaux lumineux s'écartent de ses conditions, le stigmatisme n'est plus réalisé. La **Figure.II.11** montre cet effet : Plus  $h$  est grand, plus le point conjugué  $A'(h)$  est situé près de la lentille. Les rayons marginaux convergent plus près de la lentille parce qu'ils sont plus déviés que les rayons paraxiaux qui convergent plus loin sur l'axe optique [29].



**FIGURE.II.11.** Cause des aberrations géométrique



**Chapitre III**

### III.1.Introduction :

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du **facteur de qualité du faisceau laser**, Le travail porte spécifiquement sur les **faisceaux Hermite-Gauss**, qui constituent des solutions fondamentales de l'équation d'onde paraxiale en coordonnées cartésiennes. Ces faisceaux se distinguent par leurs modes transverses caractérisés par deux indices  $n$  et  $m$ , qui influencent fortement leur sensibilité aux perturbations. Dans ce chapitre, nous étudions l'influence de deux types d'aberrations optiques fréquemment rencontrées dans les systèmes réels : **l'astigmatisme à 45°**, et **l'aberration sphérique**, ainsi que leur effet combiné. Ces aberrations introduisent des modifications du front d'onde, susceptibles de détériorer la qualité du faisceau, notamment dans les régimes de propagation large ouverture. Le facteur de qualité est alors évalué selon les directions transverses  $x$  et  $y$ , à l'aide de la **méthode des moments**, afin de quantifier précisément l'impact des aberrations sur la structure du faisceau. Enfin, une attention particulière est portée à **l'effet de l'intensité des aberrations**, qu'il s'agisse de l'astigmatisme ou de l'aberration sphérique, afin de mieux comprendre leur influence croissante sur le facteur de qualité en fonction des dimensions du.

### III.2. Méthode des moments :

Le champ électrique d'un faisceau laser peut être exprimé comme suit :

$$E(x, y) = u(x, y)e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\varphi(x,y)} \quad (\text{III.1})$$

Où  $u(x, y)$  représente la distribution d'amplitude du faisceau laser, et  $\varphi(x, y)$  désigne la phase du faisceau. Dans cet ouvrage, le terme de phase,  $\varphi(x, y)$  prend spécifiquement en compte les aberrations présentes dans un système optique. Les aberrations considérées ici sont présentées dans le tableau III.1.

Expressions algébriques pour certaines aberrations primaires.	
Description	Expression algébrique
45° Astigmatism	$D_{astxy}$
Aberration sphérique	$D_{sp}(x^2 + y^2)^2$

**Tableau III.1.** Expressions algébriques pour certaines aberrations primaires.

Il est courant dans les expériences de déterminer le facteur de qualité du faisceau le long de, x et y, indépendamment. Par conséquent, ici, nous calculons également le facteur de qualité du faisceau séparément dans le x et y directions utilisant les expressions suivantes :

$$M_x^2 = 4\pi\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle \theta_x^2 \rangle - \langle x\theta_x^2 \rangle} \quad (\text{III.2})$$

Et

$$M_y^2 = 4\pi\sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle \theta_y^2 \rangle - \langle y\theta_y^2 \rangle} \quad (\text{III.3})$$

Ici  $\langle x^2 \rangle$  et  $\langle y^2 \rangle$  représentent les moments spatiaux du second ordre le long du x et y, respectivement. De même  $\langle \theta_x^2 \rangle$  et  $\langle \theta_y^2 \rangle$  désignent les moments angulaires du second ordre dans chaque direction. Enfin  $\langle x\theta_x^2 \rangle$  et  $\langle y\theta_y^2 \rangle$  représentent les moments croisés. Les calculs de ces termes sont donnés par les équations suivantes :

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u^2 dx dy \quad (\text{III.4})$$

$$\langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 u^2 dx dy \quad (\text{III.5})$$

$$\begin{aligned} \langle \theta_x^2 \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

$$\langle \theta_y^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (\text{III.7})$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \right)^2$$

$$\langle x\theta_x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 x \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \quad (\text{III.8})$$

$$\langle y\theta_y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 y \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \quad (\text{III.9})$$

### III.3. Faisceaux Hermite-Gauss aberrés :

Les faisceaux Hermite-Gauss sont des solutions de l'équation d'onde paraxiale en coordonnées cartésiennes et ont une amplitude complexe qui est donnée comme suit :

$$H(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} H_n \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left( \frac{-x^2 + y^2}{w^2(z)} \right) \quad (\text{III.10})$$

$$\times \exp \left( -i \frac{\pi|x^2 + y^2|}{\lambda R(z)} \right) \exp(i\psi(z)) \exp \left( -i \frac{2\pi z}{\lambda} \right)$$

(III.10)

Où  $E_0$  est une constante de normalisation,  $w_0$  est le rayon du faisceau à la waist,  $H_n(\cdot)$  et  $H_m(\cdot)$  représentent les polynômes d'Hermite d'ordre  $n$  et  $m$ , respectivement. Le rayon du faisceau à une position axiale arbitraire  $z$  est donné comme :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (\text{III.11})$$

Le rayon de courbure est exprimé comme :

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad (\text{III.12})$$

La phase de Gouy est donnée par :

$$\psi(z) = (n + m + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad (\text{III.13})$$

Et

$$z_R = \frac{1}{m+n+1} \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{III.14}$$

Est le domaine de Rayleigh. À la taille, l'expression du faisceau d'Hermite-Gauss peut être exprimée en termes de fonction génératrice [30 , 31 ] comme suit :

$$H = \exp \left[ \frac{2\sqrt{2}x\mu}{w_0} + \frac{2\sqrt{2}y\eta}{w_0} - (\mu^2 + \eta^2) \right] \times \exp \left[ -\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \tag{III.15}$$

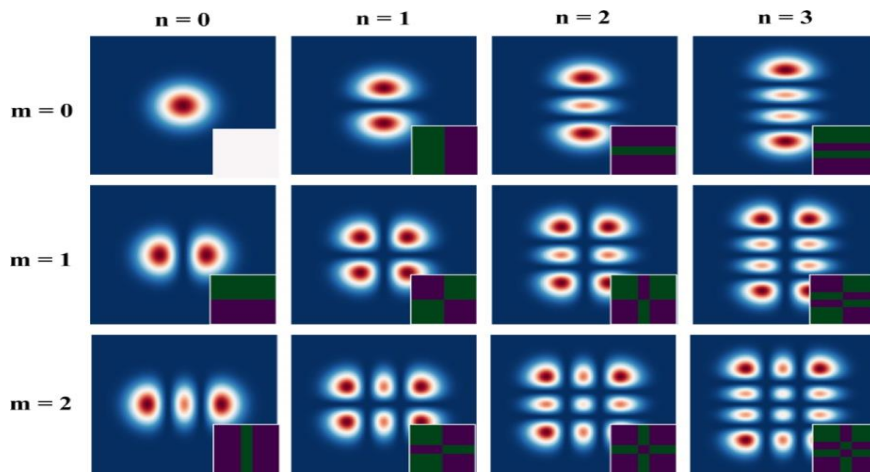
Où  $\mu$  et  $\eta$  sont les paramètres générateurs des polynômes d'Hermite le long de  $x$  et  $y$ , respectivement. Un faisceau Hermite-Gauss spécifique est obtenu par l'opération suivante :

$$HG_{n,m} = N_{HG} \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} H \right]_{\mu,\eta=0} \tag{III.16}$$

Où

$$N_{HG} = \sqrt{\frac{1}{\pi^{2n+m-1} n! m!} \frac{1}{w_0}} \tag{III.17}$$

Des exemples de profils d'intensité de faisceaux Hermite-Gauss sélectionnés, à la taille, avec leurs phases respectives sont présentés dans la Figure.III.1 .



**Figure. III.1.** Profils d'intensité de faisceaux Hermite-Gauss sélectionnés avec indices  $n=0,1,2,3$  et  $m=0,1,2$  au niveau de la taille. Les encarts représentent la phase des faisceaux.

En utilisant la fonction génératrice pour les faisceaux Hermite-Gauss et en la remplaçant dans l'équation ( III.4 ), le moment spatial du second ordre le long de la direction  $x$  est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle_{\mu,\eta} &= N_{HG}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp \left\{ \frac{2\sqrt{2}[(\mu_1 + \mu_2)x + y(\eta_1 + \eta_2)]}{w_0} \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{[-\eta_1^2 - \eta_2^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2]w_0^2 - 2[x^2 + y^2]}{w_0^2} \right\} dx dy \\
&= \frac{N_{HG}^2 w_0^4 \pi [2(\mu_1 + \mu_2)^2 + 1] \exp\{2[\mu_1 \mu_2 + \eta_1 \eta_2]\}}{8}
\end{aligned} \tag{III.18}$$

Où  $\mu_1, \eta_1$  sont les paramètres générateurs du champ électrique complexe et  $\mu_2, \eta_2$  sont les paramètres générateurs de son conjugué complexe. En utilisant la même approche, les résultats pour les moments spatiaux du second ordre le long de  $y$  après substitution dans l'équation ( III.5 ) devient :

$$\langle y^2 \rangle_{\mu,\eta} = \frac{N_{HG}^2 w_0^4 \pi \exp\{2[\mu_1 \mu_2 + \eta_1 \eta_2]\}}{8} \times [2(\eta_1 + \eta_2)^2 + 1] \tag{III.19}$$

Par souci de commodité, nous décomposons l'expression des moments angulaires du second ordre Éq. ( III.6 ) et Éq. ( III.7 ) en trois parties. Nous présentons ici la décomposition uniquement pour l'Éq. ( III.6 )

$$\theta_{1,x} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy \tag{III.20}$$

$$\theta_{2,x} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx dy \tag{III.21}$$

$$\theta_{3,x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \tag{III.22}$$

où le dernier terme est la racine carrée du second terme de l'équation ( III.6 ). Autrement dit, l'expression du moment angulaire du second ordre suivant  $x$  peut être réécrite comme suit :

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \theta_{1,x} + \theta_{2,x} - \theta_{3,x}^2 \tag{III.23}$$

Et l'expression du moment angulaire du second ordre suivant  $y$  peut être réécrite, de la même manière, comme suit :

$$\langle \theta_y^2 \rangle = \theta_{1,y} + \theta_{2,y} - \theta_{3,y}^2 \tag{III.24}$$

Les termes qui ne dépendent pas de l'aberration de phase, Eq. ( III.20 ) et ses y variante, sont données ci-dessous en termes de paramètres de génération, comme suit :

$$\theta_{1,x} = \frac{N_{HG}^2 \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}}{8\pi} \times [2(\mu_1 - \mu_2)^2 - 1] \quad (\text{III.25})$$

Et

$$\theta_{1,y} = \frac{N_{HG}^2 \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}}{8\pi} \times [2(\eta_1 - \eta_2)^2 - 1] \quad (\text{III.25})$$

### III.4 Facteur de qualité des faisceaux Hermite-Gauss aberrés :

#### III.4.1 Astigmatisme 45°:

En utilisant l'expression pour l'astigmatisme 45° trouvé dans le tableau III.1 , nous obtenons les termes dépendants de l'aberration ci-dessous. Nous générons d'abord les expressions du moment angulaire du second ordre, équations ( III.21 ) et ( III.22 ), pour les deux x et y.

$$\theta_{2,x}^{ast45} = \frac{N_{HG}^2 D_{ast45}^2 w_0^4 \pi \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}}{8\lambda^2} \times [2(\eta_1 + \eta_2)^2 + 1] \quad (\text{III.27})$$

Et

$$\theta_{2,y}^{ast45} = \frac{N_{HG}^2 D_{ast45}^2 w_0^4 \pi \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}}{8\lambda^2} \times [2(\mu_1 + \mu_2)^2 + 1] \quad (\text{III.28})$$

Et

$$\theta_{3,x}^{ast45} = \frac{N_{HG}^2 D_{ast45} w_0^3 \pi \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}}{2\sqrt{2}\lambda} \times [\eta_1 + \eta_2] \quad (\text{III.29})$$

Et

$$\theta_{3,y}^{ast45} = \frac{N_{HG}^2 D_{ast45} w_0^3 \pi \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}}{2\sqrt{2}\lambda} \times [\mu_1 + \mu_2] \quad (\text{III.30})$$

Le moment angulaire spatial du premier ordre, le long de l'axe x, est donné comme suit :

$$\langle x\theta_x \rangle^{ast45} = \frac{N_{HG}^2 D_{ast45} w_0^4 \pi \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}}{4\lambda} \times [\mu_1 + \mu_2][\eta_1 + \eta_2] \quad (\text{III.31})$$

Le moment angulaire spatial du premier ordre, dans la direction y, revient à la même expression que pour la direction x

$$\langle y\theta_y \rangle^{\text{ast45}} = \langle x\theta_x \rangle^{\text{ast45}} \quad (\text{III.32})$$

La valeur de  $M_x^4$  pour un faisceau Hermite-Gauss particulier peut être obtenu par l'opération suivante :

$$M_x^4 = \quad (\text{III.33})$$

$$16\pi^2 \left\{ \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle x^2 \rangle_{\mu,\eta}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \left( \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{1,x}^{\text{ast45}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} + \right. \right.$$

$$\left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{2,x}^{\text{ast45}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} - \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{3,x}^{\text{ast45}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0}^2 \right) -$$

$$\left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle x\theta_x \rangle^{\text{ast45}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0}^2 \right\}$$

En utilisant la même approche que ci-dessus,  $M_y^4$ , pour un faisceau Hermite-Gauss particulier est donné comme :

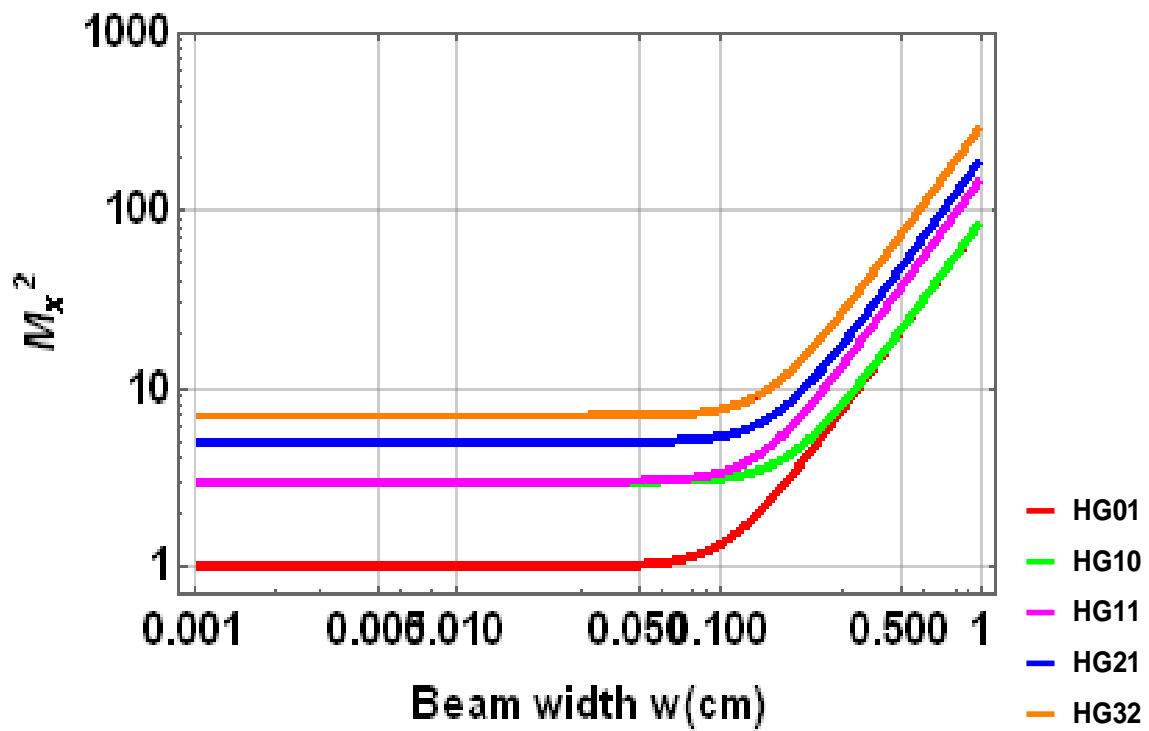
$$M_y^4 = \quad (\text{III.34})$$

$$16\pi^2 \left\{ \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle y^2 \rangle_{\mu,\eta}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \left( \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{1,y}^{\text{ast45}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} + \right. \right.$$

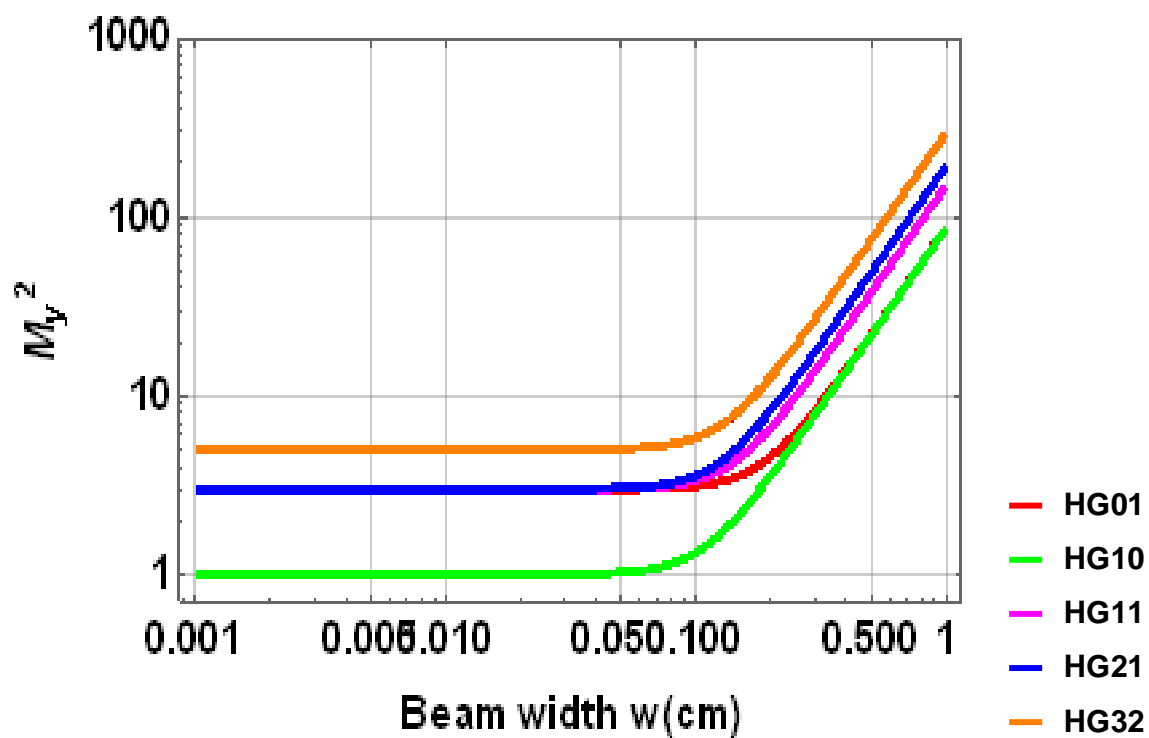
$$\left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{2,y}^{\text{ast45}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} - \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{3,y}^{\text{ast45}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0}^2 \right) -$$

$$\left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle y\theta_y \rangle^{\text{ast45}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0}^2 \right\}$$

En remplaçant les expressions appropriées dans l'équation (III.33) et (III.34) ci-dessus et en les écrivant dans Mathematica, on obtient les courbes suivantes :



(a)



(b)

**Figure. III.2.** Facteur de qualité du faisceau dû à  $45^\circ$  astigmatisme en fonction du rayon du faisceau le long de la x et y direction pour divers faisceaux HGnm. Pour un coefficient d'aberration de 0.1 cm

La **Figure.III. 2** illustre l'effet de l'**astigmatisme à 45°** sur le facteur de qualité  $M_x^2$  et  $M_y^2$ , pour différents modes de faisceaux Hermite-Gauss HGnm . Le graphique (a) représente la direction x, tandis que (b) représente la direction y. On observe que ce type d'aberration a un impact limité lorsque la largeur du faisceau est faible, les valeurs restant proches de l'état idéal. À mesure que le faisceau s'élargit, les facteurs  $M^2$  commencent à augmenter progressivement, en particulier pour les modes d'ordre élevé, ce qui reflète l'apparition de déformations optiques modérées. Toutefois, un astigmatisme faible n'engendre pas de dégradation significative de la qualité du faisceau et induit une déformation relativement symétrique dans les deux directions.

### III.4.2 Aberration sphérique :

L'effet de l'aberration sphérique est évalué ici en considérant la phase. L'expression de cette phase est présentée dans le tableau III.1. Les expressions génératrices des termes dépendants de l'aberration sont très complexes. Cependant, en suivant la même approche que précédemment pour l'astigmatisme 45, on trouve les expressions suivantes :

$$\theta_{2,x}^{sph} = \left( \frac{2N^2 D_{sp}^2 \pi w_0^8}{\sqrt{2}\lambda^2} (6 + F1(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) + F2(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2)) + \right. \quad (III.35)$$

$$\left. F3(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) + F4(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) \right) \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}$$

Ou

$$F1(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) = \eta_1^4 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) + 4\eta_1^3 \eta_2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) + \eta_2^4 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2)$$

$$F2(\eta_2, \mu_1, \mu_2) = (\mu_1 + \mu_2)^2 (6 + (\mu_1 + \mu_2)^2) (5 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2)$$

$$+ 2\eta_2^2 (3 + (\mu_1 + \mu_2)^2) (9 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2)$$

$$F3(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) = 4\eta_1 \eta_2 (3 + \eta_2^2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) + (\mu_1 + \mu_2)^2 (9 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2))$$

$$F4(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) = 2\eta_1^2 (3 + 3\eta_2^2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) + (\mu_1 + \mu_2)^2 (9 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2))$$

Et

$$\theta_{2,y}^{sph} = \left( \frac{2N^2 D_{sp}^2 \pi w_0^8}{\sqrt{2}\lambda^2} (6 + F1(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) + F2(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2)) + \right. \quad (III.36)$$

$$\left. F3(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) + F4(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) \right) \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 F1(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) &= \mu_1^4 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) + 4\mu_1^3 \mu_2 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) + \mu_2^4 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) \\
 F2(\eta_2, \mu_1, \mu_2) &= (\eta_1 + \eta_2)^2 (6 + (\eta_1 + \eta_2)^2) (5 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) \\
 &\quad + 2\mu_2^2 (3 + (\eta_1 + \eta_2)^2 (9 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2)) \\
 F3(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) &= 4\mu_1 \mu_2 (3 + \mu_2^2 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) + (\eta_1 + \eta_2)^2 (9 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2)) \\
 F4(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) &= 2\mu_1^2 (3 + 3\mu_2^2 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) + (\eta_1 + \eta_2)^2 (9 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2))
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \theta_{3,x}^{sph} &= \left( \frac{2N^2 D_{sp} \pi w_0^5}{\sqrt{2}\lambda} (\mu_1 + \mu_2) (2 + (\eta_1 + \eta_2)^2) \right. \\
 &\quad \left. + (\mu_1 + \mu_2)^2 \right) \exp\{2[\mu_1 \mu_2 + \eta_1 \eta_2]\} \quad (III.37)
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \theta_{3,y}^{sph} &= \left( \frac{2N^2 D_{sp} \pi w_0^5}{\sqrt{2}\lambda} (\eta_1 + \eta_2) (2 + (\mu_1 + \mu_2)^2) \right. \\
 &\quad \left. + (\eta_1 + \eta_2)^2 \right) \exp\{2[\mu_1 \mu_2 + \eta_1 \eta_2]\} \quad (III.38)
 \end{aligned}$$

Le moment angulaire spatial du premier ordre, dans ex directions x et y , est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \langle x\theta_x \rangle^{sph} &= \left( \frac{N^2 D_{sp} \pi w_0^6}{4\lambda} (2 + \eta_1^2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) \right. \\
 &\quad + 2\eta_1 \eta_2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) + \eta_2^2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) \\
 &\quad \left. + (\mu_1 + \mu_2)^2 (7 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) \right) \exp\{2[\mu_1 \mu_2 + \eta_1 \eta_2]\} \quad (III.39)
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\langle y\theta_y \rangle^{sph} = & \left( \frac{N^2 D_{sp} \pi W_0^6}{4\lambda} (2 + \mu_1^2 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2)) \right. \\
& + 2\mu_1 \mu_2 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) + \mu_2^2 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) \\
& \left. + (\eta_1 + \eta_2)^2 (7 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2) \right) \exp\{2[\mu_1 \mu_2 + \eta_1 \eta_2]\}
\end{aligned} \tag{III.40}$$

La valeur de  $M_x^4$  pour un faisceau Hermite-Gauss particulier peut être obtenu par l'opération suivante :

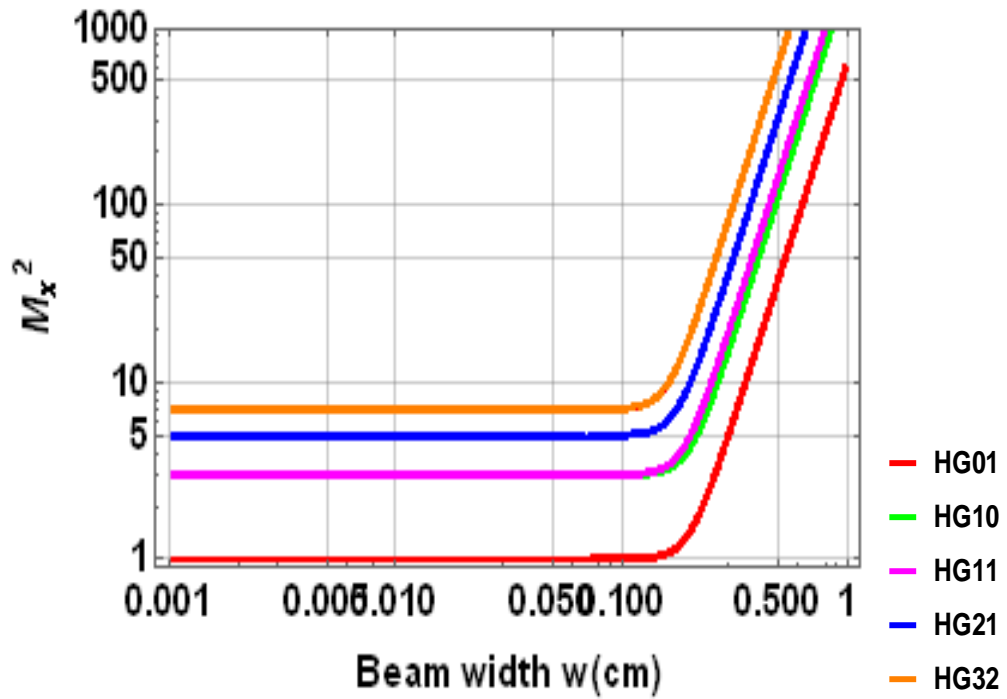
$$\begin{aligned}
& M_x^4 \tag{III.41} \\
= & 16\pi^2 \left\{ \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle x^2 \rangle_{\mu, \eta}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \left( \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{1,x}^{sph}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \right. \right. \\
& + \left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{2,x}^{sph}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} - \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{3,x}^{sph}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0}^2 \right) \\
& \left. - \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle x\theta_x \rangle^{sph}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \right\}
\end{aligned}$$

En utilisant la même approche que ci-dessus,  $M_y^4$ , pour un faisceau Hermite-Gauss particulier est donné comme :

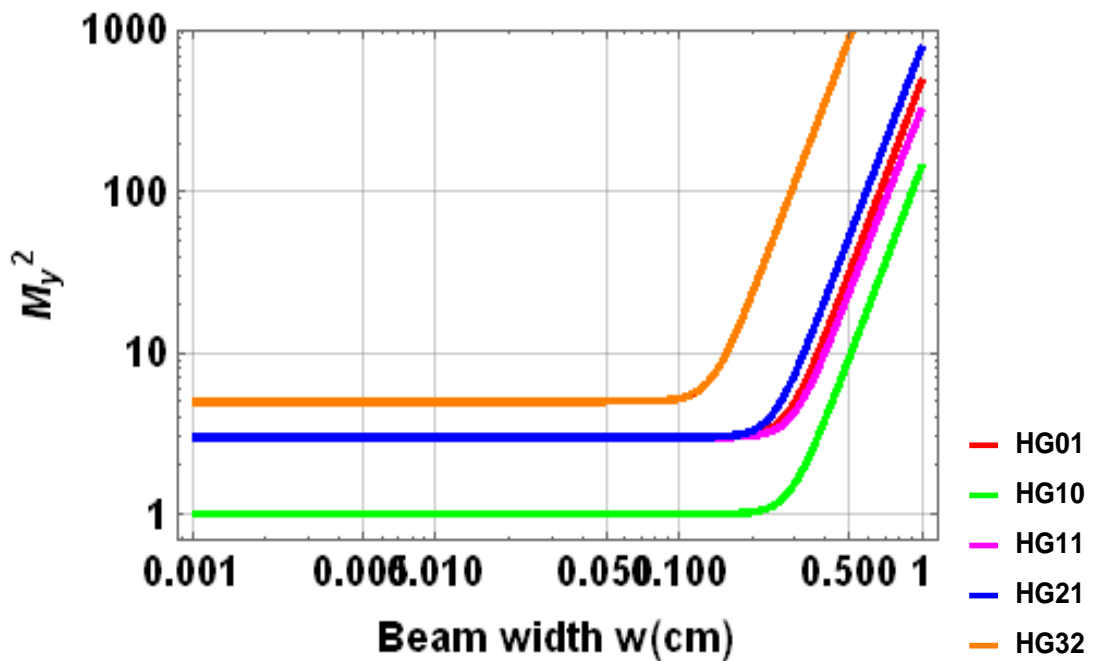
$$\begin{aligned}
& M_y^4 \tag{III.42} \\
= & 16\pi^2 \left\{ \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle y^2 \rangle_{\mu, \eta}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \left( \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{1,y}^{sph}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \right. \right. \\
& + \left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{2,y}^{sph}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} - \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{3,y}^{sph}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0}^2 \right) \\
& \left. - \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle y\theta_y \rangle^{sph}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \right\}
\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions appropriées dans l'équation (III.41) et (III.42) ci-dessus et en les écrivant dans Mathematica, on obtient les courbes suivantes :

(a)



(a)



(b)

**Figure III.3.** Facteur de qualité du faisceau dû à l'aberration sphérique en fonction de la largeur du faisceau le long de l'axe x et y pour divers HGnm, pour un coefficient d'aberration de 0.1 cm

La **Figure III.3** illustre l'effet de l'**aberration sphérique** sur le facteur de qualité  $M^2$  pour différents modes de faisceaux Hermite-Gauss. Lorsque la largeur du faisceau est faible, le facteur de qualité reste pratiquement constant, ce qui reflète un faisceau proche de l'état idéal avec une bonne focalisation. À mesure que le faisceau s'élargit, les valeurs de  $M_x^2$  et  $M_y^2$  augmentent progressivement, indiquant une dégradation de la qualité du faisceau due aux distorsions de front d'onde engendrées par une phase de type sphérique (quatrième ordre). Cet effet est particulièrement marqué pour les modes d'ordre élevé tels que HG21 et HG32, qui sont plus sensibles aux aberrations optiques, même en présence d'une faible intensité d'aberration. En raison de la nature radiale de l'aberration sphérique, les valeurs de  $M^2$  augmentent de manière symétrique dans les directions x et y

### III.4.3. Combinaison entre l'Aberration sphérique et 45°astigmatisme :

L'aberration sphérique et l'astigmatisme sont deux types d'aberrations optiques qui influencent le facteur de qualité d'un faisceau Hermite-Gauss. Pour obtenir une expression combinée de ces aberrations, on additionne les deux expressions données dans le tableau 1. Après calcul, on obtient les résultats suivants :

$$\theta_{2,x}^{sph+ast} = \frac{N^2 \pi w_0^4}{32 \lambda^4} \left( 24 D_{sp}^2 w_0^4 + D_{ast}^2 (1 + 2(\eta_1 + \eta_2))^2 + \right. \quad (III.43)$$

$$\left. 8 D_{ast} D_{sp} F1 + (\mu_1 + \mu_2)^2 + 4 D_{sp}^2 F2 (F3 (+F4 + F3 + F5)) \right) \exp\{2[\mu_1 \mu_2 + \eta_1 \eta_2]\}$$

Ou

$$F1(\mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2) = w_0^2 (\mu_1 + \mu_2) (\eta_1 + \eta_2) (3 + (\eta_1 + \eta_2)^2) ;$$

$$F2(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) = w_0^4 (6 + (\eta_1 + \eta_2)^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2) ; F3(\eta_1, \mu_1, \mu_2) = \eta_1^2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) ;$$

$$F4(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) = 2\eta_1 \eta_2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) ; F5(\mu_1, \mu_2) = (\mu_1 + \mu_2)^2 (5 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2)$$

Et

$$\theta_{2,y}^{sph+ast} = \frac{N^2 \pi w_0^4}{32 \lambda^4} \left( 24 D_{sp}^2 w_0^4 + D_{ast}^2 (1 + 2(\mu_1 + \mu_2))^2 + \right. \quad (III.44)$$

$$\left. + 8 D_{ast} D_{sp} F1 + (\eta_1 + \eta_2)^2 + 4 D_{sp}^2 F2 (F3 (F4 + F3 + F5)) \right) \exp\{2[\mu_1 \mu_2 + \eta_1 \eta_2]\}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 F1(\mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2) &= w_0^2 (\eta_1 + \eta_2) (\mu_1 + \mu_2) \left( 3 + (\mu_1 + \mu_2)^2 \right); \\
 F2(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) &= w_0^4 \left( 6 + (\mu_1 + \mu_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2 \right); F3(\eta_1, \mu_1, \mu_2) = \eta_1^2 \left( 1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2 \right); \\
 F4(\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2) &= 2\mu_1\mu_2 \left( 1 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2 \right); F5(\mu_1, \mu_2) = (\eta_1 + \eta_2)^2 (5 + 2(\eta_1 + \eta_2)^2)
 \end{aligned}$$

Et

$$\theta_{3,x}^{sph+ast} = \frac{N^2\pi w_0^3}{\lambda 2\sqrt{2}} \left( D_{ast}(\eta_1+\eta_2) + 21D_{sp}w_0^2(\mu_1 + \mu_2)(2 + (\eta_1+\eta_2)^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2) \right) \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\} \quad (III.45)$$

Et

$$\theta_{3,y}^{sph+ast} = \frac{N^2\pi w_0^3}{\lambda 2\sqrt{2}} \left( D_{ast}(\mu_1 + \mu_2) + 21D_{sp}w_0^2(\eta_1+\eta_2)(2 + (\mu_1 + \mu_2)^2 + (\eta_1+\eta_2)^2) \right) \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\}. \quad (III.46)$$

Le moment angulaire spatial du premier ordre, dans lex et y direction, est donnée comme suit :

$$\langle x\theta_x \rangle^{ast45+sph} = \frac{N^2\pi w_0^4}{\lambda 8} \left( 4\pi D_{ast}(\mu_1 + \mu_2)(\eta_1+\eta_2) + D_{sp}w_0^2 \left( (1 + 2(\eta_1+\eta_2)^2)(1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2) + \pi(6 + 8(\mu_1 + \mu_2)^2(3 + (\mu_1 + \mu_2)^2)) \right) \right) \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\} \quad (III.47)$$

Et

$$\langle y\theta_y \rangle^{ast45+sph} = \frac{N^2\pi w_0^4}{\lambda 8} \left( 4\pi D_{ast}(\eta_1+\eta_2)(\mu_1 + \mu_2) + D_{sp}w_0^2 \left( (1 + 2(\mu_1 + \mu_2)^2)(1 + 2(\eta_1+\eta_2)^2) + \pi(6 + 8(\eta_1+\eta_2)^2(3 + (\eta_1+\eta_2)^2)) \right) \right) \exp\{2[\mu_1\mu_2 + \eta_1\eta_2]\} \quad (III.48)$$

La valeur de  $M_x^4$  pour un faisceau Hermite-Gauss particulier peut être obtenu par l'opération suivante :

$$M_x^4 = \tag{III.49}$$

$$16\pi^2 \left\{ \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle x^2 \rangle_{\mu, \eta}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \left( \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{1,x}^{\text{sph+ast}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} + \right. \right.$$

$$\left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{2,x}^{\text{sph+ast}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} - \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{3,x}^{\text{sph+ast}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0}^2 \right) -$$

$$\left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle x \theta_x \rangle^{\text{sph+ast}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \right\}$$

En utilisant la même approche que ci-dessus,  $M_y^4$ , pour un faisceau Hermite-Gauss particulier est donné comme :

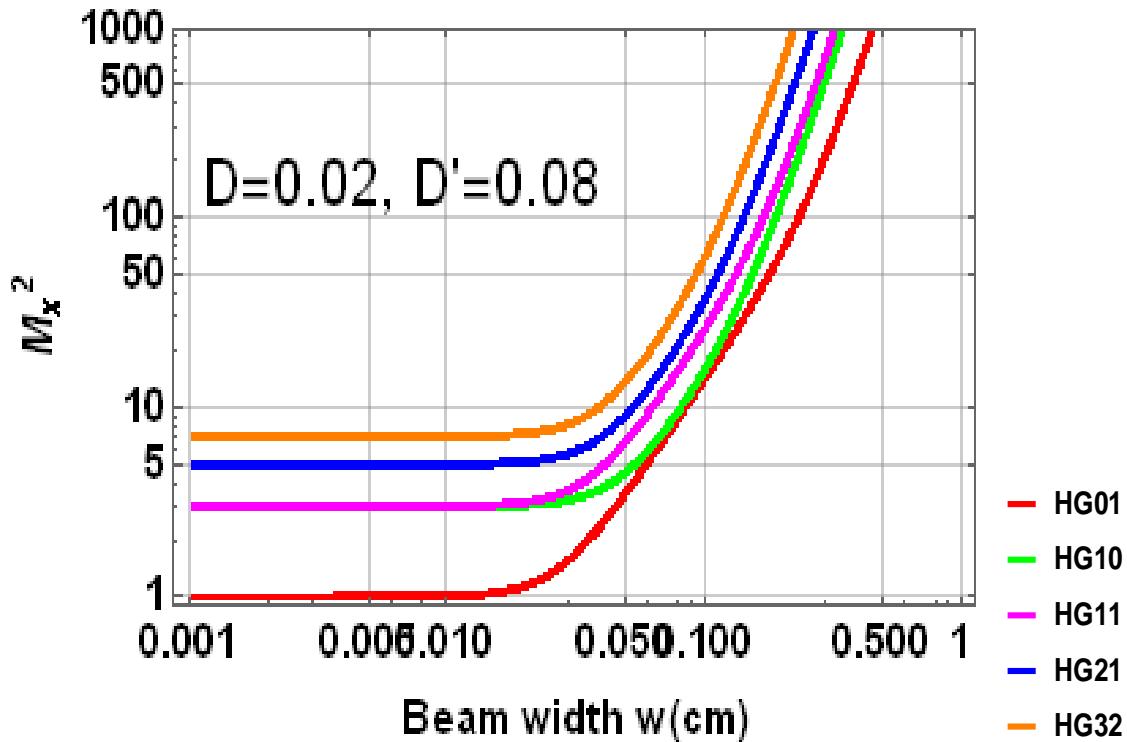
$$M_y^4 = \tag{III.50}$$

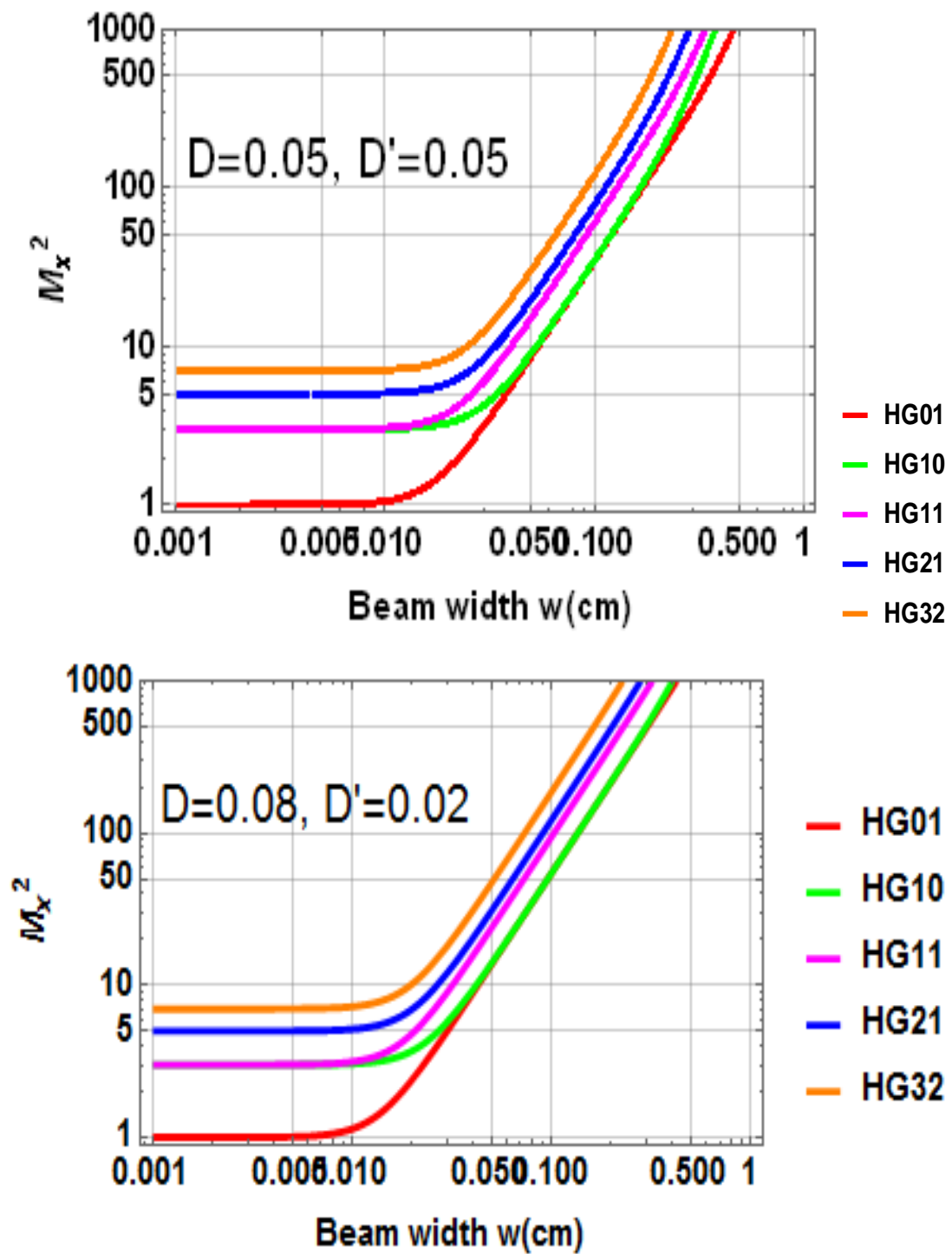
$$16\pi^2 \left\{ \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle y^2 \rangle_{\mu, \eta}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \left( \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{1,y}^{\text{sph+ast}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} + \right. \right.$$

$$\left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{2,y}^{\text{sph+ast}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} - \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \theta_{3,y}^{\text{sph+ast}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0}^2 \right) -$$

$$\left. \left[ \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^m} \frac{\partial^m}{\partial \eta_2^m} \frac{\partial^n}{\partial \mu_1^n} \frac{\partial^n \langle y \theta_y \rangle^{\text{sph+ast}}}{\partial \mu_2^n} \right]_{\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2=0} \right\}$$

En remplaçant les expressions appropriées dans l'équation (III.49) et (III.50) ci-dessus et en les écrivant dans Mathematica, on obtient les courbes suivantes :





**Figure. III.4.** Facteur de qualité du faisceau HGnm dû à l'aberration sphérique et de l'astigmatisme à  $45^\circ$  pour différents modes Hermite-Gauss.

Les figures ci-dessus illustrent l'effet combiné de l'aberration sphérique et de l'astigmatisme à  $45^\circ$  sur le facteur de qualité  $M_x^2$  pour différents modes Hermite-Gauss.

Lorsque l'intensité des deux aberrations est égale ( $D=D'=0,05$ ), leurs effets se répartissent de manière symétrique, entraînant une augmentation progressive de  $M_x^2$  tout en maintenant une déformation relativement équilibrée du faisceau.

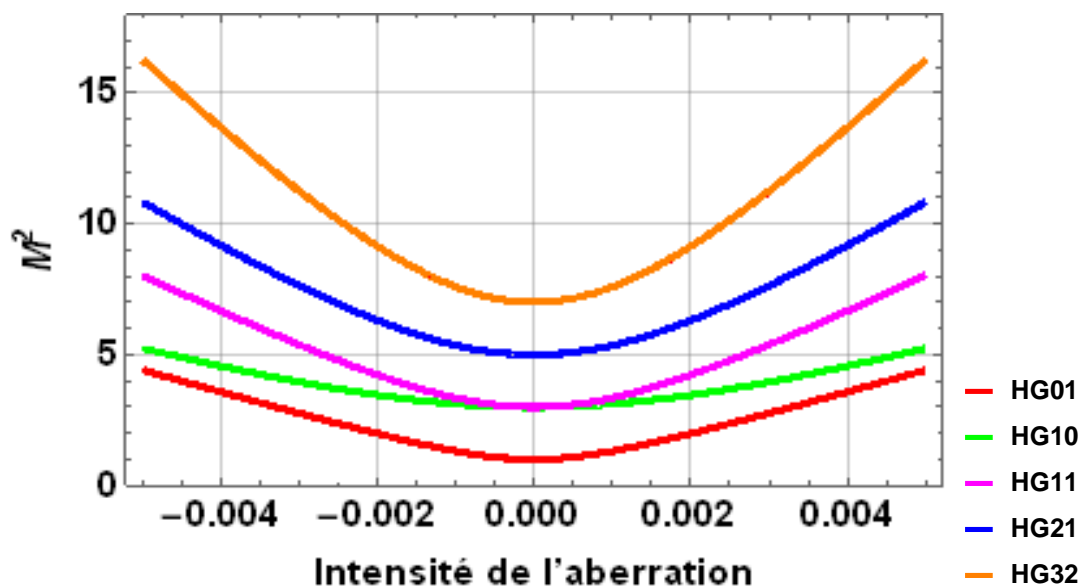
En revanche, la **domination de l'astigmatisme** ( $D'>D$ ) provoque une déformation asymétrique plus marquée, avec une élévation plus abrupte du facteur de qualité, en particulier pour les faisceaux de modes d'ordre élevé comme HG32. Cela reflète la forte sensibilité de ces faisceaux à la distorsion angulaire causée par l'astigmatisme.

Lorsque c'est l'**aberration sphérique qui prédomine** ( $D>D'$ ) on observe un effet radial symétrique entraînant une augmentation plus modérée mais plus régulière de  $M_x^2$ , avec une distorsion globalement mieux répartie.

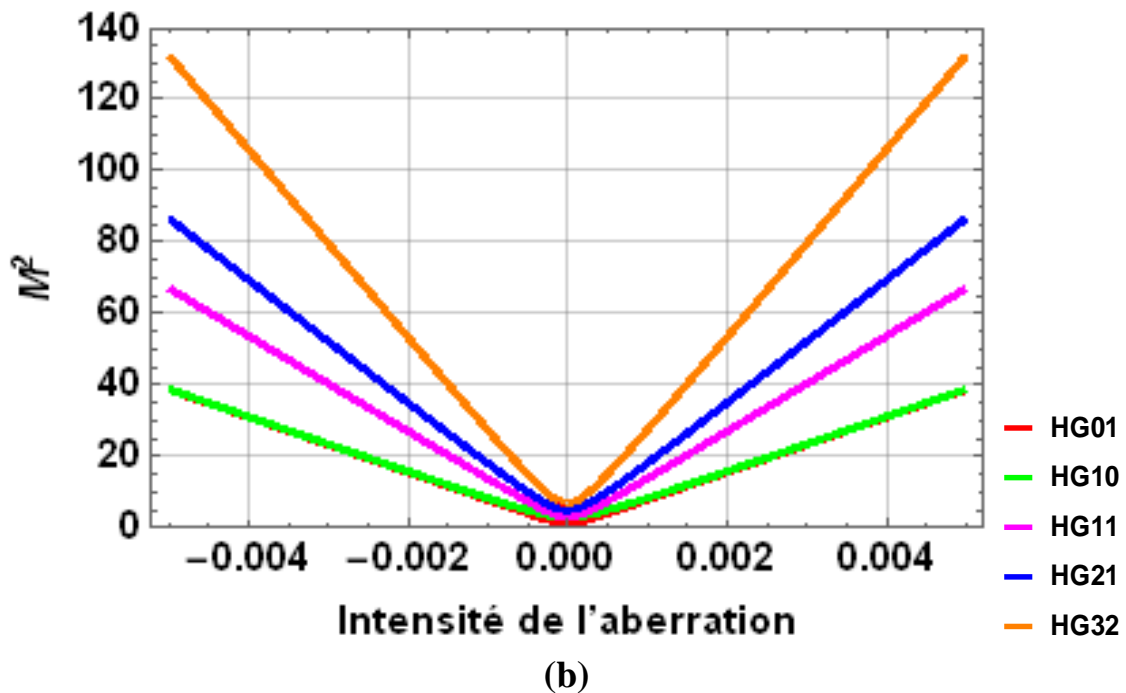
### III.5.L'effet de l'intensité d'Aberration sur le facteur de qualité :

Tous les résultats sont générés à l'aide de  $\lambda=632.8\text{nm}$ , deux rayons de faisceau  $1\text{cm}$  et  $3\text{cm}$ . Pour la validation, nous prenons uniquement en compte le facteur de qualité du faisceau le long de l'axe x.

#### III.5.1.L'effet de l'aberration Astigmatism 45°:



(a)



**Figure.III.5.** Le graphe montre comment le facteur de qualité du faisceau change avec l'intensité de «Astigmatisme 45°», pour différents faisceaux HG. Les graphes présentent les résultats pour des faisceaux HG sélectionnés avec (a) une largeur de faisceau de 1 cm et (b) une largeur de faisceau de 3 cm

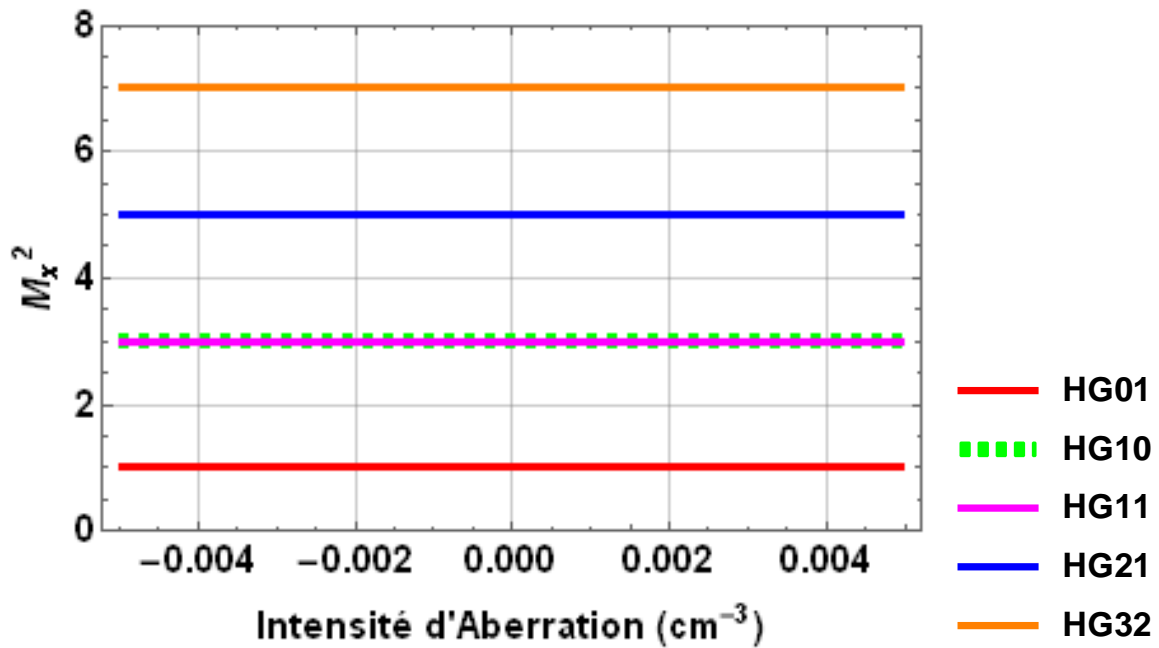
La figure .III. 5 montre le facteur de qualité du faisceau Hermite-Gauss (HG) sélectionnés qui sont aberrés avec 45° Astigmatisme. Sur la figure 5 (a), la variation du facteur de qualité du faisceau n'est pas brutale. En revanche, la situation est différente sur la figure 5 (b). La variation du facteur de qualité du faisceau avec l'augmentation de l'astigmatisme est abrupte. Par exemple, le facteur de qualité du faisceau pour le mode Hermite-Gauss avec indices  $n=1, m=0$  commence à  $M^2=1$  lorsqu'il n'y a pas d'astigmatisme et devient juste en dessous 40 lorsque la force de l'astigmatisme est  $D_{ast} = 5\text{cm}^{-1}$

L'augmentation du facteur de qualité du faisceau est considérée comme proportionnelle au facteur de qualité du faisceau sans aberration. L'augmentation la plus radicale pour  $D_{ast} = 5\text{cm}^{-1}$  correspond au faisceau Hermite-Gauss avec des indices  $n=3, m=2$ .

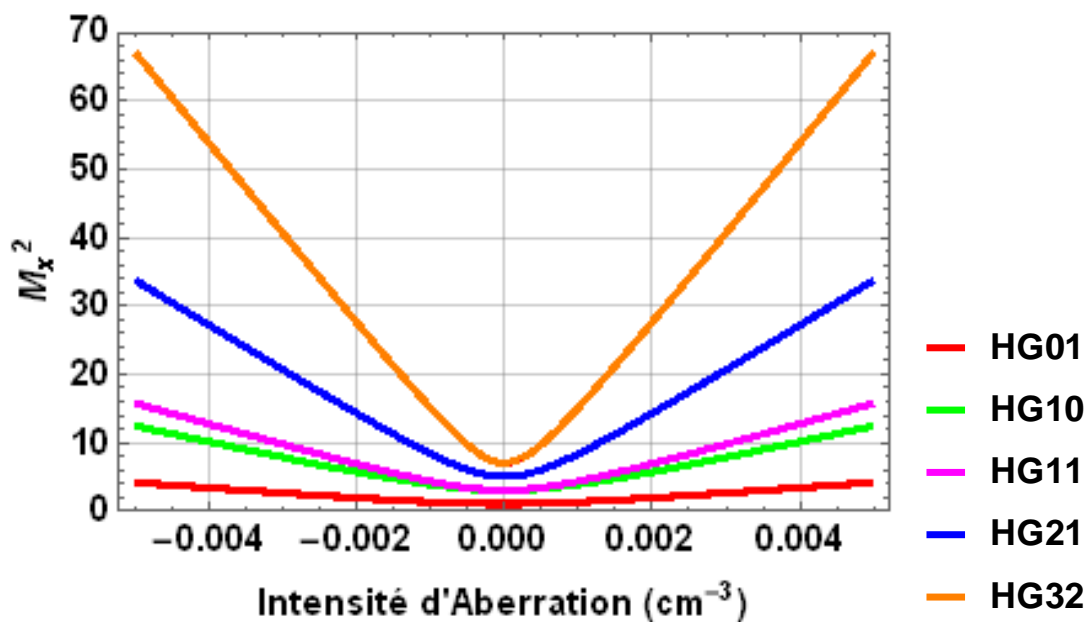
### III.5.2.L'effet de l'aberration sphérique :

L'effet de l'aberration sphérique sur le facteur de qualité du faisceau Hermite-Gauss est illustré à la Figure .III.6. Pour les faisceaux Hermite-Gauss d'un rayon de 1cm, il n'y a aucun effet sur la qualité du faisceau, comme le montre la figure. III.6 (a). Cependant, il n'en va pas de même pour les faisceaux Hermite-Gauss d'un rayon de 3cm, le facteur de qualité du faisceau

est fortement affecté et la quantité de changement dépend du faisceau Hermite-Gauss particulier.



(a)



(b)

**Figure.III.6.** Les graphes illustrent l'évolution du facteur de qualité du faisceau en fonction de l'aberration sphérique pour différents faisceaux HG. Les tracés présentent les résultats pour des faisceaux HG sélectionnés avec (a) une largeur de faisceau de 1 cm et (b) une largeur de faisceau de 3 cm.

### III.6. Conclusion :

Dans ce travail, nous avons étudié l'influence de certaines aberrations optiques sur la qualité des faisceaux laser de type Hermite-Gauss, à travers une approche théorique et une étude analytique basée sur la méthode des moments. L'analyse a été centrée sur le facteur de qualité  $M^2$ , considéré comme un indicateur fondamental de la capacité du faisceau à conserver sa focalisation et sa cohérence lors de la propagation.

Trois cas principaux ont été considérés :

- l'effet de l'**astigmatisme à 45°**,
- l'effet de l'**aberration sphérique**,
- et leur **combinaison**.
- L'effet d'**intensité d'Aberration** sur le facteur de qualité

Les résultats ont montré que même des aberrations de faible intensité peuvent avoir un impact notable sur les caractéristiques du faisceau, notamment pour les modes d'ordre élevé (**comme HG21, HG32**). Il a été observé que l'astigmatisme génère une distorsion asymétrique du faisceau, tandis que l'aberration sphérique agit de manière plus symétrique. Leur combinaison peut entraîner des déformations complexes, difficiles à prévoir sans une analyse approfondie.

L'étude a également révélé que l'intensité des aberrations joue un rôle crucial dans la dégradation du facteur de qualité. Plus l'astigmatisme ou l'aberration sphérique est intense, plus la qualité du faisceau se détériore, notamment lorsque le rayon du faisceau augmente.

A decorative scroll graphic with a central text box. The scroll is white with a black outline and a grey shadow. It has three rolled-up ends: one on the left side, one on the top right, and one on the bottom left. In the center of the scroll is a white rectangular box with a black border containing the text "Conclusion général" in a bold, black, serif font.

**Conclusion  
général**

## Conclusion générale

---

Ce travail, intitulé « **Modélisation analytique et numérique des faisceaux lasers** », a été réalisé dans le cadre d'un mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de **Master en Sciences de la Matière**. Il a porté sur l'étude des faisceaux lasers de type Hermite-Gauss à travers une modélisation analytique et numérique, ce qui nous a permis de mettre en évidence l'effet de certaines aberrations optiques sur la qualité de ces faisceaux et leur stabilité lors de la propagation. Nous avons utilisé des outils mathématiques et des techniques numériques afin de comprendre avec précision le comportement du faisceau et d'analyser l'évolution du **facteur de qualité  $M^2$**  dans différentes conditions optiques.

Les résultats obtenus ont clairement montré la sensibilité des faisceaux d'ordres supérieurs à certains types de déformations optiques. Ils ont également mis en évidence la possibilité de contrôler la forme et l'intensité du faisceau à l'aide de modèles appropriés.

Dans tous les cas, nous avons observé que le facteur de qualité du faisceau présente un comportement qualitatif similaire. Les aberrations ont un effet négligeable jusqu'à un certain rayon de faisceau, au-delà duquel le facteur de qualité commence à s'écarter fortement du cas sans aberration. À partir de cette observation, nous avons dérivé un rayon qui peut être utilisé comme limite pour séparer la région à effet minimal de celle où l'augmentation est brusque. Nous appelons ce rayon critique la largeur critique. De plus, étant donné que les faisceaux de Hermite-Gauss ne sont pas symétriques circulairement, nous avons constaté que la largeur critique est généralement différente pour le facteur de qualité du faisceau dans les directions  $x$  et  $y$ .

Dans l'ensemble, les résultats de ce mémoire soulignent l'importance de prendre en compte les aberrations dans les faisceaux optiques et leurs effets sur le facteur de qualité du faisceau. En comprenant et en quantifiant ces effets, il devient possible d'optimiser les systèmes optiques et de garantir la livraison de faisceaux de haute qualité pour diverses applications.

Cette étude ouvre ainsi de nouvelles perspectives de recherche dans le développement de solutions optiques efficaces pour la mise en forme des faisceaux et l'amélioration de leurs performances dans les systèmes appliqués.

À la lumière de ces résultats, nous proposons d'étendre ce travail à l'avenir à l'étude d'autres types de faisceaux non gaussiens, tels que les faisceaux **Laguerre-Gauss** et **Bessel** et **Airy**, et avec d'autres types d'aberrations.

- [1] A. C. Nawel « **Etude des modes Hermite-Gauss d'un résonateur optique** », mémoire master,(2017)
- [2] A.E.Siegman, « **Lasers**», University Science Books, Mill Valley, California, (1986).
- [3] A. Yazid, T. Fares«**Etude des lasers à semi-conducteurs et application au micro-usinage de matériaux**», mémoire master,(2018)
- [4] S.Marimuthu, H. Körs,A.Sezer and A. M. Kamara, « **Developments in Surface Contamination and Cleaning**», Elsevier Inc., Oxford, (2019).
- [5] J. P. Conry, « **Polarization properties of maxwell-gauss laser beams** » , PhD thesis, Université de Arkansas. Fayetteville, (2012).
- [6] S. Forget, «**Optique des lasers & faisceaux gaussiens** », Cours de Laboratoire de Physique des Lasers, Université Paris Nord/13,(2010).
- [7] J. V.Roey, J. van der Donk, and P. E. Lagasse, «**Beam-propagation method: analysis and assessment**», JOSA, volume 71, number 7, 803–810 ,(1981).
- [8] A. Culoma, «**Propagation des faisceaux gaussiens. Transport des faisceaux de puissance**», Cours thématique de l'Ecole d'été Systemes Optiques, France,Volume 3, 245-262,(1992).
- [9] M.Kasprzack, « **Thermally Deformable Mirrors: a new Adaptive Optics scheme for Advanced Gravitational Wave Interferometers** », PhD thesis de l'université Paris Sud 11, (2014).
- [12] N. Zaidi « **Contribution à l'étude des faisceaux lasers pseudo non-diffractants** », mémoire master,(2021).
- [10] N.Mishra, « **Analysis of Beam Properties of Lorentz-Gauss and Hermite- Gaussian beams for Unstable Resonator through Paraxial ABCD Optical System** » , PhD thesis, Université de Thapar, Patiala, India, (2015).
- [11] A.Bencheikh, « **Développement d'une technique d'analyse de la phase dans les lasers et interférogrammes** » , PhD thesis de Université de Sétif 1, (2012).
- [13] H.C. Kim , Y. H. Lee, «**Hermite–Gaussian and Laguerre–Gaussian beams beyond the paraxial approximation** », Optics Communications.169, 9–16 ,(1999).
- [14] S.Ngcobo, « **Applications Of Digital Holograms For The Selection And Detecton Of Transverse Laser Modes** » , PhD thesis de l'université de KwaZulu-Natal, Durban., (2014).
- [15] E. J. Galvez, «**Gaussian Beams** » ,Cours Department of Physics and Astronomy ,Colgate University,(2009).
- [16] A. E. Siegman, « **New developments in laser resonators**», SPIE, volume 1224,2-14,(1990).
- [17] T.Ghrieb,K.Mansouri « **Mesure de facteur de qualité pour plusieurs types des faisceaux lasers** », rapport de licence(2013).
- [18] H. Urey, « **Spot size, depth-of-focus, and diffraction ring intensity formulas for truncated Gaussian beams**», Applied Optics, volume 43,number 3, 620-625,(2004).
- [19] Zhangrong.M, Daomu.Z, Juguang.G and Haidan.M, « **Focal shift in focused off-axial Hermite-Cosh-Gaussian beams**», Optics and laser technology, volume 37, 299-303,(2005 ).
- [20] Michel.M, Pierre.B and Pierre.G, « **Moment definition of the pointing stability of a laser beam**», Optics letters, volume 19, nnumber 18,1379-1381,(1994 ).
- [21] R.Martinez-Herrero and P.M.Mejjias, " **On the different definitions of laser beam moments** », Optical and Quantum Electronics, volume 25,423-428,(1993 ).
- [22] Y.Champagne, «**Second-moment approach to the time-averaged spatial characterization of multipletransverse- mode laser beams**», J. Opt. Soc. Am. A, volume12, 1707-1714, (1995).

- [23] K.MIHOUBI « **Modélisation de la diffraction des faisceaux lasers d'ordres supérieurs**» Doctorat en Sciences THÈSE Présentée à l'Institut d'Optique et de Mécanique de Précision Pour l'obtention du diplôme de Université Farhat Abbas - Sétif 1.
- [24] F.J.Duarte, «**Laser pulse phenomena and applications**», European research council, Paris-226424, chap. 11, pp484, 350-352,(2010).
- [25] B.Lü and H.Ma, « **A comparative study of elegant and standard Hermite–Gaussian beams** », Optics Communications.174 ,99–104, (2000).
- [26] M.Loghrab, «**Etude Comparative Des Methodes De Fabrication Des Surfaces Aspheriques**», mémoire magister, (2012).
- [27]W. Daoudi «**Etude des effets de défauts de surface sur les aberrations optiques**» mémoire de magister(2010)..
- [28] R. Shannon, «**The Art and Science of Optical Design**», Cambridge University Press, ISBN 0-521 -45414-X, New York, USA, (1997).
- [29]J.Claude Hild « **Eléments de Cours et Expériences d'Optique**», centre de publication universitaire, Tunis, (2000)
- [30]M. J. Bastiaans , T. Alieva, «**Generating function for hermite–gaussian modes propagating through first-order optical systems**» J. Phys. A: Math. Gen. **38**(6), L73 (2005).
- [31]A. Wünsche, «**Hermite and laguerre 2d polynomials**» J. Comput. Appl. Math. **133**(1-2), 665–678 (2001).