

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj bou Arréridj  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématique



Mémoire

Présenté par

ABAS YOUSRA & SAADI FAYZA

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : *Mathématiques appliqués*

Spécialité : Analyse mathématique et applications

---

**Thème :**

**Résolution numérique des équations  
intégréo-différentielles sur un domaine non borné**

---

Soutenu publiquement le 06 juillet 2021 devant le jury composé de

ADIMI HADJER    Président

GEUCHI AHMED    Encadrant

MAADADI ASMA    Examineur

Promotion 2020/2021



## Remerciements



*Au nom d'Allah le clément et le miséricordieux louange à Allah le tout puissant*

*Tout d'abord, nous remercions Allah notre créateur. Nous tenons sincèrement à remercier notre encadreur **Dr "GUECHI Ahmed "**, de nous avoir encadré, encouragé, aidé et orienté tout le long de ce travail.*

*Nous exprimons aussi nos vifs remerciements aux membres du jury : Mad"**MAADADI Asma "** et Mad"**ADIMI Hadjer "** pour l'intérêt qu'elles ont porté à notre mémoire en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs remarques.*

*Nous remercions Dr "**BENYOUSSEF soufiane "** pour sa présence.*

*Nous remercions également les enseignants qui nous ont prodigué conseils et encouragements au cours de ces années d'étude.*

*Sans oublier de remercier tous les amis et collègues qui nous ont encouragés.*

*Merci à toutes et à tous.*

# Table des matières

Liste des tableaux	iii
Table des figures	iv
Introduction	vi
<b>1 Introduction à la théorie des équations intégrales</b>	<b>1</b>
1.1 Notions sur les opérateurs	1
1.2 Classification des équations intégrales	2
1.2.1 Équation intégrale de Fredholm	3
1.2.2 Équation intégrale de Volterra	3
1.2.3 Équation intégrale de Volterra-Fredholm	3
1.2.4 Équations intégrales singulières	3
1.3 Classification des équations intégréo-différentielles	4
1.4 Existence et unicité de solution	4
<b>2 Polynômes orthogonaux et applications de changement de variable</b>	<b>8</b>
2.1 Polynômes orthogonaux	8
2.1.1 Polynôme de Jacobi	8
2.1.2 Polynômes et fonctions de Laguerre	14
2.2 Applications entre $(0, \infty)$ et $(-1, 1)$	17
2.3 Approximation et intégration d'une fonction sur domaine non borné	18
<b>3 Résolution numérique des équation intégréo-différentielle sur un domaine non borné</b>	<b>20</b>
3.1 Méthodes de résolution	20
3.1.1 Méthode de collocation de Jacobi (MCJ)	20
3.1.2 Méthode de collocation de Laguerre	22
3.2 Illustrations numériques	23

<b>Conclusion</b>	<b>27</b>
<b>Bibliography</b>	<b>28</b>

# Liste des tableaux

2.1	Zéros et poids des Jacobi, Legendre et Tchebychev. . . . .	12
2.2	Erreurs absolues maximales d'approximation pour l'Ex 2.1 (Table1). . . . .	18
2.3	Erreurs absolues maximales d'approximation pour l'Ex 2.1 (Table2). . . . .	18
2.4	Erreurs absolues d'intégration pour l'Ex. 2.2. . . . .	19
3.1	Applications exponentielle, rationnelle et logarithmique sur $\mathbb{R}_+$ . . . . .	23
3.2	Comparaison des erreurs entre les deux méthodes collocation Jacobie et Legendre pour l'Ex. 3.2 . . . . .	24
3.3	Comparaison des erreurs entre les trois méthodes CJ, [3] et [1] pour l'Ex. 3.3. . . . .	25
3.4	Comparaison des erreurs entre CRJ et [3] pour l'Ex.3.4. . . . .	25
3.5	Comparaison des erreurs absolues maximales entre les trois methodes CRJ, [3] et [1] pour l'Ex. 3.4. . . . .	26
3.6	Comparaison l'erreur entre les deux méthodes collocations Jacobie et Laguerre pour l'Ex. 3.5. . . . .	26

# Table des figures

3.1	Solution numérique et erreur pour varions $n$ et les base d'Ex. 3.1. . . . .	24
-----	--	----

# Liste des symboles et abréviations

- ▷  $C^1(\mathbb{R})$  : Ensemble des fonctions continue et sa dérivées continue sur  $\mathbb{R}$ .
- ▷  $\delta_{n,m}$  : Symbole de Kronecker défini par  $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$
- ▷  $\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{L}$  : Fonction et polynôme de Laguerre respectivement
- ▷ EDP Équation différentielle au dérivé partielle.
- ▷ EID Équation intégro-différentielle.
- ▷ EI Équation intégrale.
- ▷ CEJ,CEL Collocation exponentielle de Jacobi, Legendre.
- ▷ CRJ, CRL Collocation rationelle de Jacobi, Legendre.
- ▷ CLJ, CLL Collocation logarithmique de Jacobi, Legendre.
- ▷ CR Collocation rationelle.
- ▷ PLGs Polynôme de Laguerre généralisé.
- ▷ FLGs Fonctions de Laguerre généralisé.
- ▷  $\Gamma$  Fonction de Gamma.
- ▷ G Gausse.
- ▷ GR Gausse Radeau.
- ▷ GL Gausse Lobatto.

# Introduction

L'équation intégrale-différentielle (EID) a de nombreuses applications dans différentes branches des sciences et de l'ingénierie. Il se pose naturellement dans une variété de modèles des mathématiques appliquées, de la physique et d'autres disciplines, telles que la théorie de l'élasticité, électromagnétique, électrodynamique, dynamique des fluides, équilibre radiatif, transfert de chaleur et de masse, champ magnétique oscillant, etc. Cependant, dans la pratique, les EID sont trop difficiles à résoudre analytiquement.

Le présent mémoire se concentre sur la solution numérique de l'équation intégrale-différentielle linéaire de type Fredholm de la forme

$$\sum_{k=0}^2 v_k(x)\varphi^{(k)}(x) - \int_0^\infty k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad x \in [0; \infty[, \quad (1)$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi(0) = \alpha \quad \text{et} \quad \varphi(\infty) = \beta, \quad (2)$$

dans l'éq. (1),  $k(x,t)$ ,  $f(x)$  et  $v_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2$  sont des fonctions continues et  $u(x)$  est une fonction inconnue. Par ailleurs, la partie intégrale est supposée être une intégrale de Riemann impropre et sa valeur est supposée exister.

Différentes méthodes spectrales sont disponibles dans la littérature pour résoudre des problèmes dans des domaines semi-infinis,  $x \in [0; \infty)$ . Ils peuvent être essentiellement classés en quatre approches. L'approche classique consiste à approximer la solution de la problème en utilise les polynômes ou fonctions de Laguerre [7]. La seconde approche consiste à résoudre le problème sur un grand intervalle fini,  $x \in [0, L]$  en utilisant des polynômes de Chebyshev avec une transformation d'argument appropriée. Cette méthode est nommée domaine troncature [4]. Une troisième approche consiste à reformuler le problème original dans le domaine semi-infini en un problème singulier dans le domaine borné par transformation variable, puis en utilisant les polynômes de Jacobi pour approximer le résultat équation [15]. Une quatrième approche est basée sur les fonctions orthogonales rationnelles [5].

Plus récemment, Benyoussef et Rahmoune [3] ont utilisant les méthodes de collocation spectrale basées sur des fonctions de Legendre exponentielles, rationnelles et logarithmiques

---

---

pour traiter numériquement les EID de Fredholm sur demi-ligne. Akhavan [1] a calculé les solutions numériques des équations intégrales singulières à deux conditions aux limites sur demi-droite en utilisant la méthode de Petrov-Galerkin basée sur les multi-ondelettes de Legendre.

Le but de ce travail est de trouver la résolution numérique des EID de Fredholm sur un domaine non borné, se compose en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on fait présentation théorique d'introduction à la théorie des opérateurs, Équations intégrales et intégrales-différentielles, et leur classification. Dans la dernière partie on rappelle les théorèmes de l'existence et l'unicité de solution.

Pour le deuxième chapitre, nous avons rappelés les notions des bases concernant les polynômes orthogonaux Jacobi et Laguerre et quelques propriétés, et l'intégration de Gauss. D'autre part, été données les applications de changement de variable de domaine non borné et domaine borné. A la fin, nous avons comparé entre les polynômes orthogonaux pour étudier approximation et intégration d'une fonction sur un domaine non borné.

Dans le dernier chapitre, nous présenterons une méthode pour chercher la solution numérique des équations intégrales-différentielles sur un domaine non borné en utilisant la méthode de collocation de Jacobi et aussi la méthode de collocation de Laguerre et quelque exemple, en estimant les erreurs pour les deux méthodes pour comparer les solutions approchées avec la solution exacte par programmation en MATLAB(R2009b).

# Introduction à la théorie des équations intégrales

## 1.1 Notions sur les opérateurs

**Définition 1.1** (Opérateurs linéaires). Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels topologiques. On appelle opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$  une application,

$$y = \mathcal{A}x, \quad (x \in E, \quad y \in F) \text{ qui vérifie la condition :}$$

$$\mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathcal{A}x_1 + \beta \mathcal{A}x_2.$$

**Définition 1.2** (Opérateurs bornés). L'opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  défini sur  $E$  dans  $F$  est borné, s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in E$ ,

$$\| \mathcal{A}x \| \leq C \| x \| . \tag{1.1}$$

**Définition 1.3** (Norme d'un opérateur). Pour tout opérateur borné  $\mathcal{A}$  d'un espace normé dans un espace normé on a :

- Le plus petit des nombres  $C$  vérifiant l'inégalité (1.1) s'appelle norme de l'opérateur  $\mathcal{A}$  et se note  $\| \mathcal{A} \|$ .
- La norme de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est donnée aussi par :

$$\| \mathcal{A} \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| \mathcal{A}x \|}{\| x \|} = \sup_{\| x \| \leq 1} \| \mathcal{A}x \|$$

**Proposition 1.1.**

- L'opérateur  $\mathcal{A}$  est dit continu, s'il est continu en tout point  $x \in E$ .
- Tout opérateur linéaire borné est continu.

**Définition 1.4** (Opérateur inverse). Soient  $\mathcal{A}$  un opérateur de  $E$  dans  $F$  ;  $D_{\mathcal{A}}$  son domaine de définition et  $R_{\mathcal{A}}$  le domaine de ses valeurs.

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est dite inversible, si pour tout  $y \in R_{\mathcal{A}}$  l'équation :

$$\mathcal{A}x = y,$$

a une et une seule solution.

Si  $\mathcal{A}$  est inversible, chaque  $y \in R_{\mathcal{A}}$  on peut faire correspondre un élément et un seul  $x \in D_{\mathcal{A}}$  à savoir la solution de l'équation

$$\mathcal{A}x = y.$$

L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle inverse de  $\mathcal{A}$  et se note  $\mathcal{A}^{-1}$ .

**Proposition 1.2.** L'opérateur  $\mathcal{A}^{-1}$ , l'inverse d'un opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  est aussi linéaire.

**Définition 1.5** (Opérateur compact). Un opérateur linéaire  $\mathcal{A} : E \rightarrow F$  est compact si et seulement si, pour tout suite bornée  $(\varphi_n)$  de  $E$ , on peut extraire de la suite  $(\mathcal{A}\varphi_n)$  de  $F$  une sous suite convergente. i.e., si toute suite de l'ensemble  $\{\mathcal{A}\varphi, \varphi \in E, \|\varphi\| \leq 1\}$  contient une sous suite convergente.

**Définition 1.6** (Opérateurs Adjoints). Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert  $E$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $F$ , l'opérateur linéaire noté  $\mathcal{A}^*$  défini de  $F$  dans  $E$  est dite opérateur adjoint de  $\mathcal{A}$  si l'on a pour tout  $\varphi \in E$  et  $\psi \in F$ ,

$$\langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle_F = \langle \varphi, \mathcal{A}^*\psi \rangle_E.$$

**Définition 1.7** (Opérateur intégral). On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  défini sur un espace normé  $E$  à valeurs dans un espace normé  $F$  donné sous la forme :

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in \Omega;$$

où  $k(x, t)$  étant appelé noyau de l'opérateur intégrale  $\mathcal{A}$ .

## 1.2 Classification des équations intégrales

Une équation dans laquelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégrale est dite équation intégrale. La forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t)u(t)dt, \quad (1.2)$$

où  $\alpha(x)$ ,  $f(x)$  est une fonction donnée  $k(x, t)$  est appelée noyau de l'équation intégrale et  $u(t)$  est l'inconnu à déterminer,  $\lambda$  est un réel ou complexe différent de zéro,  $a(x)$  et  $b(x)$  sont les limites de l'intégration.

### 1.2.1 Équation intégrale de Fredholm

Une équation de la forme (1.2) dont les bornes d'intégration fixées est dite équation intégrale de Fredholm, elle est dite aussi :

- 1) de première espèce, si  $\alpha(x) = 0$ , c.à.d. de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0. \quad (1.3)$$

- 2) de seconde espèce, si  $\alpha(x) = 1$ , c.à.d. de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = u(x). \quad (1.4)$$

- 3) de troisième espèce si  $\alpha(x)$  est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de  $[a, b]$ .

- 4) homogène, si  $f(x) = 0$ , c.à.d. de la forme :

$$\lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = u(x). \quad (1.5)$$

### 1.2.2 Équation intégrale de Volterra

Les équations intégrales de Volterra de première espèce, de seconde espèce, ou homogène sont définies de la même manière précédente sauf que la borne supérieure de l'intégrale est une variable c.à.d.  $b(x) = x$ .

### 1.2.3 Équation intégrale de Volterra-Fredholm

On appelle équation de Volterra-Fredholm une équation de la forme,

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt. \quad (1.6)$$

### 1.2.4 Équations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière, si l'une ou les deux limites de l'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale.

**Exemple 1.1.** Soit  $k(x, t)$  le noyau de l'équation (1.2) et  $a(x)$ ,  $b(x)$  sont les limites de l'intégration de cette équation, on dit que :

1- **Équation intégrale d'Abel** : si  $k(x, t) = \frac{g(x, t)}{(x-t)^\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

2- **Équation intégrale à noyau de Cauchy** : si  $k(x, t) = \frac{g(x, t)}{(t-x)}$ ,  $a \leq x \leq b$ .

3- **Singularité logarithmique** : si  $k(x, t) = \ln|x-t|g(x, t)$ ,  $-1 < x < 1$ .

4- si  $a(x) = -\infty$  et (ou)  $b(x) = +\infty$ , alors cette équation intégrale aussi singulière.

### 1.3 Classification des équations intégral-différentielles

Une équation intégral-différentielle est une équation fonctionnelle dans laquelle l'opérateur intégral et différentiel intervient c.à.d. les opérateurs différentiels et intégrales apparaissent dans la même équation. Dans ce type d'équations, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît comme dérivé ordinaire et sous le signe intégral dans la même équation. On distingue les types suivants :

1) **Équations intégral-différentielles de Fredholm** : une équation du type :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt. \quad (1.7)$$

2) **Équations intégral-différentielles de Volterra** :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt. \quad (1.8)$$

3) **Équations intégral-différentielles de Volterra-Fredholm** :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt. \quad (1.9)$$

4) **Équations intégral-différentielles singulières** : On dit qu'une équation intégral-différentielle singulière si l'un ou les deux hypothèses suivantes consistent dans (EID).

i/ L'un ou les deux limites de l'intégration sont infinies.

ii/ Le noyau devient infini au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration.

**Remarque 1.1.** Dans les équations (1.7), (1.8) et (1.9),  $u^{(n)}(x)$  indique la dérivée  $n$ -ième de  $u(x)$ .

### 1.4 Existence et unicité de solution

On considère un intervalle réel  $I = [x_0, x_0 + a]$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}$  et on introduit une fonction  $f$  définie sur  $I \in \mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , on cherche une fonction  $f$  définie sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  admettant une dérivée  $\varphi'$  et telle que pour tout  $x \in I$ , l'équation différentielle,

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (1.10)$$

soit vérifiée. Cette fonction  $\varphi$  est appelée une solution, quelquefois une intégrale de l'équation différentielle.

La donnée de  $f$  est en fait la donnée de  $n$  fonctions  $f_i$ , que l'on supposera continues sur  $I \times \mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , la solution  $\varphi$  correspond donc ainsi à  $n$  fonctions

$\varphi_i \in C^1(\mathbb{R})$  l'équation (1.10) correspond ainsi à un système différentiel de  $n$  équations

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

Les équations précédentes sont dites du premier ordre, car seules des dérivées d'ordre un interviennent. Dans le cas général, on aurait à l'ordre  $p$  (*pentier*) le système d'équations suivant :

$$\varphi^{(p)}(x) = f(x, \varphi', \dots, \varphi^{(p-1)}).$$

Où  $\varphi$  est toujours définie sur  $I \times \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut se ramener à système d'ordre un en posant successivement

$$z_1 = \varphi, z_2 = \varphi', \dots, z_p = \varphi^{(p-1)}.$$

Pour obtenir le système de  $p$  équations

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{(p-1)}' = z_p \\ z_p' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_p) \end{cases}$$

On appelle condition de cauchy la donnée d'une valeur  $\varphi' \in \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\varphi(x_0) = \varphi_0. \quad (1.11)$$

Pour une équation d'ordre  $p$ , compte tenu de son écriture sous la forme d'un système de premier ordre cette condition correspond à la donnée de  $(\varphi_0, \varphi_0', \dots, \varphi_0^{(p-1)}) \in \mathbb{R}^p$ , Soit la valeur de  $\varphi$  et de ses  $(p-1)$  dérivées en  $x_0$ , on va montrer que moyennant une condition de régularité sur  $f$ , le problème de Cauchy de l'équation différentielle (1.10) et les conditions de Cauchy (1.11) admet une seule solution unique. On note  $|\cdot|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , et on munit  $E = C(I, \mathbb{R}^n)$  de la norme uniforme :

$$\|u\|_E = \sup_{x \in I} |u(x)|_{\mathbb{R}^n}.$$

Rappelons que  $E$ , muni de cette norme est une espace de Banach.

**Théorème 1.1** ([12]). *Si  $f$  vérifie la condition de Lipschitz, alors le problème de Cauchy (1.10), (1.11) admet une solution unique  $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ .*

**Preuve 1.1.** *En intégrant (1.10) , entre  $x_0$  et  $x$  on obtient :*

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi. \quad (1.12)$$

*Réciproquement si  $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ , on retrouve bien (1.10) en dérivant (1.12) et on retrouve (1.11) en faisant  $x = x_0$ . Ainsi l'équation intégrale (1.12) caractérise la solution du problème de Cauchy (1.10), (1.11), et on s'intéresse donc à  $\varphi$  vérifiant (1.12). On pose pour  $u \in E$ .*

$$\phi(u)(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, u(\xi)) d\xi.$$

*On définit ainsi une application  $\phi$  de  $E$  dans  $E$ , et la fonction  $\varphi$  cherchée est solution de*

$$\varphi = \phi(\varphi). \quad (1.13)$$

*C'est une équation de type point fixe.*

**Unicité**

Si  $u$  vérifie  $u = \phi(u)$ , on a aussi  $\phi^p(u) = u$  et  $\phi^{p+1}(u) = u$ . Soit  $u$  et  $v$  sont deux solutions on a :

$$\|\phi(u) - \phi(v)\| \leq \|\phi^{p+1}(u) - \phi^{p+1}(v)\| \leq c\|\phi(u) - \phi(v)\|.$$

D'où  $(1 - c)\|\phi(u) - \phi(v)\| \leq 0$ , et alors  $\phi(u) = \phi(v)$  c'est-à-dire  $u = v$ .

**Existence**

On se donne  $u_0 \in E$ , et on construit :

$$u_1 = \phi^p(u_0), u_2 = \phi^p(u_1), \dots, \phi^p(u_{n-1}).$$

Alors :

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq c\|u_n - u_{n-1}\| \leq c^2\|u_{n-1} - u_{n-2}\| \leq \dots \leq c^n\|u_1 - u_0\|.$$

Et

$$\begin{aligned} \|u_{m+k} - u_m\| &= \|(u_{m+k} - u_{m+k-1}) + (u_{m+k-1} - u_{m+k-2}) + \dots + (u_{m+1} - u_m)\| \\ &\leq \|(u_{m+k} - u_{m+k-1})\| + \|(u_{m+k-1} - u_{m+k-2})\| + \dots + \|(u_{m+1} - u_m)\| \\ &\leq c^m(c^k - 1 + c^k - 2 + \dots + c + 1)\|u_1 - u_0\| \leq \frac{c^m}{1-c}\|u_1 - u_0\|. \end{aligned}$$

Donc  $\|u_{m+k} - u_m\|$  tend vers zéro lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ . La suite  $(u_n)$  est de Cauchy dans  $E$  donc converge. On note  $u$  sa limite qui vérifie nécessairement  $\phi^p(u) = u$ . or

$$\|\phi(u) - u\| \leq \|\phi^{(p+1)}(u) - \phi^{(p)}(u)\| \leq c\|\phi(u) - u\|.$$

Donc  $(1 - c)\|\phi(u) - u\| \leq 0$ , d'où  $\phi(u) = u$  et  $u$  est bien solution de (1.13).

Un formalisme encore plus compact réunit en une seule équation intégrale, le système différentiel et sa condition initiale par théorème suivante :

**Théorème 1.2** ([12]). Soit  $f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue, définie sur le produit d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . L'équation différentielle :

$$\varphi' = f(\varphi(t), t),$$

qui passe par  $\varphi_0$  à  $t = 0$ , est équivalente à l'équation intégrale

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi(\tau), \tau) d\tau.$$

Il est alors tenté de substituer l'expression de  $\varphi(t)$ , sous l'intégrale et de générer ainsi la suite des approximations de Picard. Partant d'une fonction d'essai  $\varphi^{(0)}(t)$  (un choix courant consiste à prendre la condition initiale  $\varphi^{(0)}(t) = \varphi_0$ ), l'itération d'ordre  $(p)$  est générée à partir de la précédente par la relation

$$\varphi^{(p)}(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi^{(p-1)}(\tau), \tau) d\tau.$$

Le problème est évidemment de savoir si la suite ainsi générée converge vers une fonction solution du système différentiel étudiée et si cette solution est unique.

# Polynômes orthogonaux et applications de changement de variable

## 2.1 Polynômes orthogonaux

Les polynômes constituent une famille de fonctions tout à fait remarquable en mathématiques ils sont aussi un outil essentiel du calcul dans l'analyse numérique notamment dans l'évaluation à l'approximation des fonctions dans les problème d'interpolation et d'extrapolation, dans la résolution des équations intégrales ou équations différentielles...etc

### 2.1.1 Polynôme de Jacobi

**Définition 2.1.** *Le polynôme de Jacobi de degré  $n$ , notés  $J_n^{\alpha,\beta}(x)$ , sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids de Jacobi  $w^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  sur  $I = (-1, 1)$ , c'est à dire :*

$$\int_{-1}^{+1} J_n^{\alpha,\beta}(x) J_m^{\alpha,\beta}(x) w^{\alpha,\beta}(x) dx = \gamma_n^{\alpha,\beta} \delta_{n,m},$$

où,  $\gamma_n^{\alpha,\beta} = \|J_n^{\alpha,\beta}\|_{w^{\alpha,\beta}}^2$ . La fonction de poids  $w^{\alpha,\beta}$  appartient à  $L^1(I)$  si et seulement si  $\alpha, \beta > -1$  (à supposer tout au long de cette section).

#### Propriétés de base

On appelle polynômes de Jacobi de degré  $n$ , les polynômes défini par la relation de récurrence pour  $\alpha > -1$  et  $\beta > -1$ ,

$$a_n J_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = (b_n + x c_n) J_n^{\alpha,\beta}(x) - d_n J_{n-1}^{\alpha,\beta}(x),$$

initialisée par,

$$J_0^{\alpha,\beta}(x) = 1, \quad J_1^{\alpha,\beta}(x) = (\alpha - \beta)/2 + (1 + (\alpha + \beta)/2)(x),$$

avec les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} a_n &= 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta), \\ b_n &= (2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2), \\ c_n &= (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2), \\ d_n &= 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2). \end{aligned}$$

Les premiers polynômes sont pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ ,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1, \\ J_1(x) &= (3x+1)/2, \\ J_2(x) &= (5x^2+2x-1)/2, \\ J_3(x) &= \frac{35}{8}x^3 + 15x^2 - \frac{15}{8}x - \frac{3}{8}, \\ J_4(x) &= \frac{63}{8}x^4 + \frac{7}{2}x^3 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}, \\ J_5(x) &= \frac{231}{16}x^5 + \frac{105}{16}x^4 - \frac{105}{8}x^3 - \frac{35}{8}x^2 + \frac{35}{16}x + \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

(1) Les polynômes de Jacobi satisfont l'équation différentielle,

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

(2) En posant  $\lambda = 2n + \alpha + \beta$ , les polynômes de Jacobi vérifient les relations :

$$\begin{aligned} \lambda(1-x^2)\partial_x J_n^{\alpha,\beta}(x) &= n(\alpha - \beta - \lambda x)J_n^{\alpha,\beta}(x) + 2(n+\alpha)(n+\beta)J_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \\ J_n^{\alpha,\beta-1}(x) - J_n^{\alpha-1,\beta}(x) &= J_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \\ \lambda J_n^{\alpha,\beta-1}(x) &= (n+\alpha+\beta)J_n^{\alpha,\beta}(x) + (n+\alpha)J_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \\ (1-x)J_n^{\alpha+1,\beta}(x) + (1+x)J_n^{\alpha,\beta+1}(x) &= 2J_n^{\alpha,\beta}(x). \end{aligned}$$

(3) La norme du polynôme de Jacobi est :

$$\|J_n^{\alpha,\beta}\|_{w^{\alpha,\beta}}^2 = \gamma_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

(4) Formule de Rodrigues,

$$J_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left( (1-x^2)^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \right).$$

(5) La dérivée du polynôme de Jacobi satisfait la relation suivante :

$$\partial_x J_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)J_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x). \quad (2.1)$$

$$\partial_x^k J_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+1)}{2^k \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} J_{n-k}^{\alpha+k,\beta+k}(x), \quad n \geq k. \quad (2.2)$$

(6) Formule d'intégration :

$$2n \int_0^x J_n^{\alpha,\beta}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt = J_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(0) - h^{\alpha,\beta}(x)J_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x),$$

où

$$h^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta}.$$

**Cas particuliers :**

1) si  $\alpha = \beta = 0$ , on trouve le polynôme de Legendre :

$$L_n(x) = J_n^{0,0}(x),$$

2) si  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ , on trouve le polynôme de Tchebychev de première espèce :

$$T_n(x) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} J_n^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x),$$

3) si  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , on trouve le polynôme de Tchebychev de deuxième espèce :

$$U_n(x) = \frac{(n+1)! \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} J_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x),$$

4) si  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ , on trouve le polynôme de Tchebychev de troisième espèce :

$$V_n(x) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} J_n^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x),$$

5) si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = -\frac{1}{2}$ , on trouve le polynôme de Tchebychev de quatrième espèce :

$$W_n(x) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} J_n^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x),$$

6) si  $\alpha = \beta$ , on trouve le polynôme de Gegenbauer :

$$G_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(2\alpha + n) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\alpha) \Gamma(\alpha + n + \frac{1}{2})} J_n^{\alpha - \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}}(x).$$

**Quadratures de Gauss**

Il est question de méthode de quadrature lorsqu'on veut approximer numériquement la valeur d'une intégrale. Une méthode très simple et bien connue s'appelle la méthode du trapèze. On se propose d'évaluer l'intégrale  $\int_a^b f(x)w(x)dx$ , en subdivisant l'intervalle d'intégration,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b,$$

et en approchant  $f$  sur chaque intervalle par une somme finie de la forme,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N+1} \sum_{i=0}^N f(x_i).$$

Cette méthode requiert donc  $N$  évaluations de  $f(x)$  et est de degré de précision  $N$ , c'est-à-dire que la quadrature est exacte dans le cas des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$ . Cherchons maintenant à atteindre un degré de précision supérieur avec une méthode analogue

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^N \omega_i f(x_i).$$

Les  $\omega_i$  sont appelés poids d'intégration et les  $x_i$  points d'intégration. En prenant  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{b-a}{2}$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ , nous retrouvons la méthode du trapèze. Mais il y a mieux. Ce sont les quadratures de Gauss.

Soit  $w$  une fonction poids fixée sur  $]a, b[$ . On étudie les méthodes d'intégration approchée du type

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i)\omega_i, \quad x_i \in [a, b].$$

**Théorème 2.1.** *Il existe un choix et un seul des points  $x_i$  et des coefficients  $\omega_i$  de sorte que la méthode soit d'ordre  $m = n + 1$ . Les points  $x_i$  appartiennent à  $]a, b[$  et sont les racines du  $(n + 1)$ -ième polynôme orthogonal pour la fonction de poids  $w$ .*

**Preuve 2.1** (voir [8]).

### Quadrature de Gauss-Jacobi

Les polynômes de Jacobi forment une base orthogonale sur  $[-1, 1]$  par rapport à la fonction de pondération  $w^{\alpha, \beta}(x)$ . Les polynômes de Jacobi permettent de calculer une approximation de l'intégrale :

$$\int_{-1}^1 f(x)w^{\alpha, \beta}(x)dx = \sum_{j=0}^N f(x_j)\omega_j^{\alpha, \beta} + E_N[f], \quad (2.3)$$

où

$$w^{\alpha, \beta}(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta.$$

Rappelons que si l'erreur de quadrature  $E_N[f] = 0$ , on dit que (2.3) est exacte pour  $f$ , tel que  $\{x_j, \omega_j\}$  donnant dans le table (2.1) pour Gegenbauer nous prenons  $\alpha = \beta$  dans les zeros et les poids de Jacobi ; Deuxième quadrature de Gauss-Radau (GR) avec une extrémité droite fixe  $x_N = 1$  peut être établi de la même manière. Enfin, nous considérons la quadrature Gauss-Lobatto (GL), qui comprend deux points d'extrémité  $x = \pm 1$  en tant que nœuds.

### Calculer les nœuds et les poids

Pour trouver les nœuds et les poids on utilisons la matrice suivante :

$$A_{N+1} = \begin{bmatrix} a_0 & -\sqrt{b_1} & & & & \\ -\sqrt{b_1} & a_1 & -\sqrt{b_2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\sqrt{b_{N-1}} & a_{N-1} & -\sqrt{b_{N-1}} & \\ & & & -\sqrt{b_N} & a_N & \end{bmatrix}$$

où

$$a_j = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2j + \alpha + \beta)(2j + \alpha + \beta + 2)},$$

$$b_j = \frac{4j(j + \alpha)(j + \beta)(j + \alpha + \beta)}{(2j + \alpha + \beta - 1)(2j + \alpha + \beta)^2(2j + \alpha + \beta + 1)},$$

	Jacobi	Legendre	Tchebychev
$w^{\alpha,\beta}(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	1	$(1-x^2)^{-1/2}$
$\{x_j, \omega_j^{\alpha,\beta}\}$	<p><b>G</b></p> <p><math>x_j</math> : étant les zéros de <math>J_{N+1}^{\alpha,\beta}(x)</math></p> $\omega_j = \frac{g_N^{\alpha,\beta}}{J_N^{\alpha,\beta}(x_j) d_x J_{N+1}^{\alpha,\beta}(x_j)},$ $= \frac{g_N^{\alpha,\beta}}{(1-x_j^2)[\partial_x J_{N+1}^{\alpha,\beta}(x_j)]^2}$	<p><math>x_j</math> : sont les zéros de <math>P_{N+1}(x)</math></p> $\omega_j = \frac{2}{(1-x_j^2)[P'_{N+1}(x_j)]^2}$	$x_j = -\cos \frac{(2j+1)\pi}{2N+2},$ $\omega_j = \frac{\pi}{N+1}.$
	<p><b>GR</b></p> <p><math>x_0 = -1</math> et <math>x_j</math> : sont les zéros de <math>J_N^{\alpha,\beta+1}(x)</math></p> $\omega_0 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\beta+1)\Gamma^2(\beta+1)N!\Gamma(N+\alpha+1)}{\Gamma(N+\beta+2)\Gamma(N+\alpha+\beta+2)},$ $\omega_j = \frac{1}{1+x_j} \frac{J_N^{\alpha,\beta+1}(x_j) d_x J_N^{\alpha,\beta+1}(x_j)}{g_{N-1}^{\alpha,\beta+1}}$ $= \frac{1}{(1-x_j)(1+x_j)^2} \frac{g_{N-1}^{\alpha,\beta+1}}{[d_x J_N^{\alpha,\beta+1}(x_j)]^2}, \quad 1 \leq j \leq N.$	<p><math>x_j</math> : sont les zéros de <math>P_N(x) + P_{N+1}(x)</math>,</p> $\omega_j = \frac{1}{(N+1)^2} \frac{1-x_j}{[P_N(x_j)]^2}.$	$x_j = -\cos \frac{2\pi j}{2N+1},$ $\omega_0 = \frac{\pi}{2N+1},$ $\omega_j = \frac{2\pi}{(2N+1)^2}.$
<b>GL</b>	<p><math>x_0 = -1, x_N = 1</math></p> <p>et <math>x_j</math> : sont les zéros de <math>\partial_x J_N^{\alpha,\beta}(x)</math>,</p> $\omega_0 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\beta+1)\Gamma^2(\beta+1)\Gamma(N)\Gamma(N+\alpha+1)}{\Gamma(N+\beta+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+2)},$ $\omega_N = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(N)\Gamma(N+\beta+1)}{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+2)},$ $\omega_j = \frac{1}{1-x_j^2} \frac{g_{N-2}^{\alpha+1,\beta+1}}{J_{N-2}^{\alpha+1,\beta+1}(x_j) \partial_x J_{N-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x_j)},$ $= \frac{1}{(1-x_j^2)^2} \frac{g_{N-2}^{\alpha+1,\beta+1}}{[\partial_x J_{N-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x_j)]^2}, \quad 1 \leq j \leq N-1.$ <p>où <math>g_N^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta}(2N+\alpha+\beta+2)\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{(N+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+2)}</math>,</p> <p>et <math>\tilde{g}_N^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(N+\alpha+2)\Gamma(N+\beta+2)}{(N+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+2)}</math>.</p>	<p><math>x_j</math> : sont les zéros de <math>(1-x^2)P'_N(x)</math>,</p> $\omega_j = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[P_N(x_j)]^2}.$	$x_j = -\cos \frac{\pi j}{N},$ $\omega_j = \frac{\pi}{\tilde{c}_j N},$ <p>où <math>\tilde{c}_0 = \tilde{c}_N = 2</math>,</p> <p>et <math>\{\tilde{c}_j\}_{j=1}^{N-1}</math>.</p>

TABLE 2.1 – Zéros et poids des Jacobi, Legendre et Tchebychev.

tel que les nœuds  $\{x_j\}_{j=0}^N$  sont les valeurs propres de  $A_{N+1}$ , De plus, les poids de Gauss-Jacobi  $\{\omega_j\}_{j=0}^N$  peuvent être obtenus en calculant les *vecteurs propres* de  $A_{N+1}$ , c-à-d,

$$\omega_j = \gamma_0^{\alpha,\beta} [Q_0(x_j)]^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} [Q_0(x_j)]^2,$$

où  $Q_0(x_j)$  est la première composante du vecteur propre orthonormé correspondant à la valeur propre  $x_j$ .

**Remarque 2.1.** Pour les intégrales définie sur  $[a, b]$  comme  $I_a^b(f) = \int_a^b f(y)dy$ , en utilisant le changement suivant  $y = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ , c-à-d

$$I_a^b(f) = \int_a^b f(y)dy = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{j=0}^n \frac{1}{w(x_j)} f\left(\frac{b-a}{2}x_j + \frac{b+a}{2}\right) \omega_j,$$

où la fonction  $w$  est une fonction de poids associée à la base utilisée.

### Interpolation et approximation

Le problème fondamental de l'interpolation consiste à approximer la fonction donnée  $u$  par une autre fonction  $u_n$ ,

$$u(x) = u_n(x) + E_n(x), \quad (2.4)$$

où  $E_n(x)$  est l'erreur d'approximation ou l'erreur de troncature [2], et donné par

$$E_n(x) = \frac{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(n+1)!} u^{(n+1)}(c). \quad (2.5)$$

De plus, la fonction d'interpolation doit correspondre à la fonction donnée à un ensemble spécifié de points  $x_j$ , ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), c'est-à-dire

$$u(x_j) = u_n(x_j), \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (2.6)$$

Cet ensemble de points sera appelé points d'interpolations ou abscisses.

**Définition 2.2** ([14]). Pour tout  $u \in C(\Lambda)$ , on définit l'opérateur d'interpolation  $I_n : C(\Lambda) \rightarrow P_n$  tel que

$$(I_n u)(x_j) = u(x_j), \quad 0 \leq j \leq n, \quad (2.7)$$

où  $\Lambda = (a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$  pour la quadrature de Gauss, Gauss-Radau et Gauss-Lobatto, respectivement.

La condition d'interpolation (2.7) implique que  $I_n p = p$  pour tout  $p \in P_n$ . Par contre, puisque  $I_n u \in P_n$ , on peut écrire

$$(I_n u)(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{u}_i p_i(x).$$

## 2.1.2 Polynômes et fonctions de Laguerre

### Polynômes de Laguerre généralisés

Étant donné que les propriétés des polynômes de Laguerre peuvent être dérivées de la même manière que pour les polynômes de Jacobi, nous collectons simplement les formules pertinentes sans fournir leurs dérivations.

#### Définition et propriétés de base

**Définition 2.3.** Les polynômes de Laguerre généralisés (PLGs), notés  $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$  (avec  $\alpha > -1$ ), sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids  $w_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ , c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) \mathcal{L}_m^{(\alpha)}(x) w_\alpha(x) dx = \gamma_n^{(\alpha)} \delta_{nm},$$

où

$$\gamma_n^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}.$$

En particulier,  $\mathcal{L}_n^{(0)}(x)$  est le polynôme de Laguerre usuel qui sera noté  $\mathcal{L}_n(x)$ . Il est clair que  $\{\mathcal{L}_n\}$  sont orthonormés par rapport à la fonction de poids  $w(x) = e^{-x}$ , i.e.

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}_n(x) \mathcal{L}_m(x) w(x) dx = \delta_{nm}.$$

et les polynômes  $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$  d'ordre  $n$ , sont définie par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} (n+1)\mathcal{L}_{n+1}^{(\alpha)}(x) &= (2n + \alpha + 1 - x)\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)\mathcal{L}_{n-1}^{(\alpha)}(x), \\ \mathcal{L}_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \quad \mathcal{L}_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1. \end{aligned}$$

Les premier polynômes sont

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\ \mathcal{L}_1^{(\alpha)}(x) &= -x + \alpha + 1, \\ \mathcal{L}_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2)), \\ \mathcal{L}_3^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{6}(-x^3 + 3(\alpha + 3)x^2 - 3(\alpha + 2)(\alpha + 3)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)). \end{aligned}$$

(1) Les PLGs sont solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

(2) Formule de Rodrigues pour PLGs donnée par :

$$\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}.$$

(3) De plus, on a l'expression explicite

$$\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n + \alpha}{n - k} x^k. \quad (2.8)$$

(4) Les PLGs satisfont les relations de récurrence, pour  $\alpha$  entier

$$\partial_x \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = -\mathcal{L}_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_k^{(\alpha)}(x), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = \partial_x \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) - \partial_x \mathcal{L}_{n+1}^{(\alpha)}(x), \quad (2.10)$$

$$x \partial_x \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = n \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha) \mathcal{L}_{n-1}^{(\alpha)}(x). \quad (2.11)$$

### Fonctions de Laguerre généralisés

**Définition 2.4.** Les fonctions de Laguerre généralisées (FLGs) sont définies par

$$\widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) = e^{-x/2} \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \alpha > -1. \quad (2.12)$$

De plus, les FLGs sont définie par la relation de récurrence

$$(n+1) \widehat{\mathcal{L}}_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n + \alpha + 1 - x) \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha) \widehat{\mathcal{L}}_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_0^{(\alpha)}(x) = e^{-x/2}, \quad \widehat{\mathcal{L}}_1^{(\alpha)}(x) = (-x + \alpha + 1)e^{-x/2}.$$

Les propriétés de base des FLGs sont résumées ci-dessous.

(1) Les FLGs sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids  $\widehat{w}_\alpha(x) = x^\alpha$  :

$$\int_0^{+\infty} \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) \widehat{\mathcal{L}}_m^{(\alpha)}(x) \widehat{w}_\alpha(x) dx = \gamma_n^{(\alpha)} \delta_{nm}.$$

(2) Les fonctions de Laguerre usuelles définies par

$$\widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) := e^{-x/2} \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0,$$

sont orthonormés par rapport à la fonction de poids uniforme  $w = 1$ .

(3) Relation de récurrence

$$\widehat{\partial}_x \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) = -\widehat{\mathcal{L}}_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \widehat{\mathcal{L}}_k^{(\alpha)}(x), \quad (2.13)$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) = \widehat{\partial}_x \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) - \widehat{\partial}_x \widehat{\mathcal{L}}_{n+1}^{(\alpha)}(x), \quad (2.14)$$

$$x \widehat{\partial}_x \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) = n \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha) \widehat{\mathcal{L}}_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (2.15)$$

$$\partial_x \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{-1}{2} \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) - \widehat{\mathcal{L}}_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \quad (2.16)$$

$$\partial_x^2 \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{4} \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) + \widehat{\mathcal{L}}_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + \widehat{\mathcal{L}}_{n-2}^{(\alpha+2)}(x), \quad (2.17)$$

où  $\widehat{\partial}_x$  l'opérateur dérivé défini par  $\widehat{\partial}_x = \partial_x + \frac{1}{2}$ , et on a clair que

$$\partial_x \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = e^{x/2} \widehat{\partial}_x \widehat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x).$$

## Quadratures de Gauss-Laguerre

Les formules de quadrature de type Gauss-Laguerre, y compris les règles de Gauss-Laguerre et de Gauss-Radau-Laguerre, peuvent être dérivées du cadre général de la Sect.2.1.1.

**Théorème 2.2** ([14]). *Soit  $\{x_j^{(\alpha)}, \omega_j^{(\alpha)}\}_{j=0}^N$  un ensemble de noeuds et de poids en quadratures de type Gauss-Laguerre.*

- Pour la quadrature Gauss-Laguerre

$$\{x_j^{(\alpha)}\}_{j=0}^N \text{ sont les zéros de } \mathcal{L}_{N+1}^{(\alpha)}(x), \quad (2.18)$$

$$\omega_j = \frac{\Gamma(N + \alpha + 1)}{(N + \alpha + 1)(N + 1)!} \frac{x_j^{(\alpha)}}{[\mathcal{L}_N^{(\alpha)}(x_j^{(\alpha)})]^2}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (2.19)$$

- Pour la quadrature Gauss-Radau-Laguerre

$$x_0^{(\alpha)} = 0 \text{ et } \{x_j\}_{j=1}^N \text{ sont les zéros de } \partial_x \mathcal{L}_{N+1}^{(\alpha)}(x); \quad (2.20)$$

$$\omega_0 = \frac{(\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)N!}{\Gamma(N + \alpha + 2)}, \quad (2.21)$$

$$\omega_j = \frac{\Gamma((N + \alpha + 1))}{N!(N + \alpha + 1)} \frac{1}{[\mathcal{L}_N^{(\alpha)}(x_j^{(\alpha)})]^2}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (2.22)$$

Avec une petite modification des poids de quadrature du Théorème 2.2, on peut en déduire les formules en quadrature associées aux fonctions de Laguerre généralisées.

**Théorème 2.3.** *Soit  $\{x_j^{(\alpha)}, \omega_j^{(\alpha)}\}_{j=0}^N$  l'ensemble des noeuds en quadrature de Gauss-Laguerre ou Gauss-Radau-Laguerre et des poids donnés dans le Théorème 2.2. Définir*

$$\hat{\omega}_j^{(\alpha)} = e^{x_j^{(\alpha)}} \omega_j^{(\alpha)}. \quad (2.23)$$

## Calculer les noeuds et les poids

Pour trouver les noeuds (les zéros de  $\mathcal{L}_{N+1}^{(\alpha)}(x)$ ) et les poids on utilisant la matrice suivante :

$$A_{N+1} = \begin{bmatrix} a_0 & -\sqrt{b_1} & & & & \\ -\sqrt{b_1} & a_1 & -\sqrt{b_2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\sqrt{b_{N-1}} & a_{N-1} & -\sqrt{b_{N-1}} & \\ & & & -\sqrt{b_N} & a_N & \end{bmatrix}$$

où

$$a_j = 2j + \alpha + 1, \quad 0 \leq j \leq N; \quad b_j = j(j + \alpha), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (2.24)$$

tel que les noeuds  $\{x_j^{(\alpha)}\}_{j=0}^N$  sont les valeurs propres de  $A_{N+1}$ , De plus, les poids de Gauss-Laguerre  $\{\omega_j^{(\alpha)}\}_{j=0}^N$  peuvent être obtenus en utilisant la relation (2.19).

## 2.2 Applications entre $(0, \infty)$ et $(-1, 1)$

Une méthode commune et efficace pour traiter les domaines non bornés consiste à utiliser une application adaptée qui transforme un domaine infini en un domaine fini. Ensuite, des images des polynômes orthogonaux classiques sous l'application inverse formeront un ensemble de fonctions de base orthogonaux qui peuvent être utilisées pour approcher des solutions de EDP et EI dans les domaines infinis. Considérons une famille de changement de la forme :

$$x = g_s(y), \quad s > 0, \quad y \in I := (-1, 1), \quad x \in \Lambda = (0, +\infty), \quad (2.25)$$

tel que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= g'_s(y) > 0, \quad s > 0, \quad y \in I, \\ g_s(-1) &= 0, \quad g_s(1) = +\infty. \end{aligned}$$

Dans cette transformation bijective, le paramètre  $s$  est un facteur positif. Sans perte de généralité, nous supposons en outre que l'application est explicitement inversible, et dénotons son application inverse par :

$$y = g_s^{-1}(x) = h(x), \quad x \in \Lambda, y \in I, s > 0. \quad (2.26)$$

Plusieurs applications typiques qui ont été proposées et utilisées dans la pratique sont ci-dessus (voir, par exemple, Shen et al [14], Boyd [4]), et on a les applications défini entre  $x \in \Lambda = (0, +\infty)$  et  $y \in I = (-1, 1)$  avec  $s > 0$  :

- **Application rationnelle (algébrique) :**

$$x = \frac{s(1+y)}{1-y}, \quad y = \frac{x-s}{x+s}. \quad (2.27)$$

- **Application logarithmique :**

$$x = s \operatorname{arctanh}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{s}{2} \ln \frac{3+y}{1-y}, \quad y = 2 \tanh(s^{-1}x) - 1. \quad (2.28)$$

- **Application exponentielle :**

$$x = s \ln\left(\frac{2}{1-y}\right), \quad y = 1 - 2 \exp(-s^{-1}x). \quad (2.29)$$

## 2.3 Approximation et intégration d'une fonction sur domaine non borné

Dans cette section, on appliqué les fonction de Laguerre et aussi les applications précédent avec la base de Jacobi pour approximé ou intégrer d'une fonction sur demi-line  $\mathbb{R}_+$ .

**Exemple 2.1.** Soit les deux fonction  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  par  $u(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$  et  $v(x) = \cos(x) \exp(-x)$ , on peut approximer la fonction  $u$  par la série :

$$u(x) \approx u_n(x) = \sum_{i=0}^n u_i \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x); \quad \text{en utilisant les fonctions de Laguerre généralisés,}$$

ou bien

$$u(x) \approx u_n(x) = \sum_{i=0}^n u_i J_i^{\alpha, \beta}(g^{-1}(x)); \quad \text{en utilisant les applications et polynôme de Jacobi.}$$

$n$	Applications et Jacobi			FLGs	
	Exp.	Rat.	Log.	$\alpha = -0.25$	$\alpha = 0$
	(1, 0; 6)	(0, 0; 1)	(-0.5, -0.5; 7)		
05	$7.85e - 02$	$2.22e - 16$	$1.07e - 01$	$7.69e - 02$	$1.10e - 01$
10	$4.57e - 03$	$4.20e - 16$	$4.96e - 03$	$1.89e - 02$	$2.94e - 02$
20	$2.77e - 04$	$4.44e - 16$	$8.81e - 04$	$2.19e - 03$	$3.72e - 03$
30	$1.65e - 04$	$2.22e - 16$	$6.78e - 04$	$3.81e - 04$	$6.82e - 04$

TABLE 2.2 – Comparaison des erreurs absolues maximales pour la fonction  $u$ .

$n$	Applications et Jacobi			FLGs		
	Exp.	Rat.	Log.	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$
	$(\alpha, \beta; s) = (0, 0; 7)$					
05	$1.05e - 01$	$1.54e - 01$	$6.19e - 02$	$2.37e - 02$	$8.51e - 02$	$1.93e - 01$
10	$1.09e - 03$	$6.29e - 03$	$1.12e - 04$	$1.76e - 03$	$7.40e - 03$	$1.85e - 02$
15	$1.08e - 04$	$1.05e - 03$	$8.87e - 06$	$1.09e - 04$	$4.39e - 04$	$9.02e - 04$
20	$4.20e - 07$	$5.91e - 05$	$1.52e - 07$	$4.38e - 06$	$6.32e - 06$	$5.06e - 05$

TABLE 2.3 – Comparaison des erreurs absolues maximales pour la fonction  $v$ .

**Exemple 2.2.** Considérons les intégrales suivantes :

$$(i) \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx, \quad (ii) \int_0^\infty \exp(-x^2) dx, \quad (iii) \int_0^\infty \sin(x) \exp(-x) dx.$$

Pour calculer ces intégrales, on utilise la forme quadratique de Gauss-Laguerre, ou bien les applications avec la forme de quadratique de Gauss-Jacobi, comme suit :

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} x^\alpha dx \simeq \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i^{(\alpha)})}{x_i^{(\alpha)}} \hat{\omega}_i^{(\alpha)},$$

où  $\alpha > -1$ ;  $\{x_i^{(\alpha)}, \hat{\omega}_i^{(\alpha)}\}$  sont les zéros et les poids de Gauss Laguerre (Théorème 2.2).

et pour deuxième méthode :

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{f(g_s(y))g'_s(y)}{(1-y)^\alpha(1+y)^\beta} (1-y)^\alpha(1+y)^\beta dy \simeq \sum_{j=0}^n \frac{f(g_s(y_j))g'_s(y_j)}{(1-y_j)^\alpha(1+y_j)^\beta} \omega_j^{\alpha,\beta},$$

où  $g_s(y_j)$  est une application;  $\{y_j, \omega_j^{\alpha,\beta}\}$  sont les zéros et les poids de Gauss Jacobi (voir Table 2.1).

Dans Le tableau 2.4, nous donnons des erreurs absolues entre la valeur exacte et approchée de l'intégral, et nous entrons les paramètres  $\alpha, \beta$  et  $s$  sous forme  $(\alpha, \beta; s)$ . Pour l'intégral (i) la fonction est décroissante algébrique donc manuellement l'application algébrique est la mouilleur, et pour pour l'intégral (ii) la fonction est décroissante exponentielle les deux applications exponentielle et logarithmique données bon résultats, et le dernière intégral la méthode de Laguerre était la meilleure.

	Applications et Jacobi			FLGs
	Exp.	Rat.	Log.	
(i)	$\alpha = 1, \beta = 0; s = 7$	$\alpha = \beta = 0; s = 1$	$\alpha = \beta = 1; s = 8$	$\alpha = -0.2$
	$2.41e - 02$	$0.00e + 00$	$5.33e - 02$	$7.84e - 03$
(ii)	$(0, 0; 3)$	$(0, 0; 5)$	$(0, 0; 5)$	$\alpha = 0$
	$6.13e - 13$	$1.44e - 08$	$4.44e - 16$	$2.93e - 05$
(iii)	$(0, 0; 7)$	$(0, 0; 7)$	$(0, 0; 7)$	$\alpha = 0$
	$9.21e - 11$	$7.37e - 07$	$1.59e - 08$	$1.67e - 15$

TABLE 2.4 – Comparaison des erreurs absolues pour  $n = 20$  entre les deux méthodes.

## Résolution numérique des équation intégréo-différentielle sur un domaine non borné

Dans ce chapitre, nous présentons résolution numérique des équation intégréo-différentielle sur un domaine non borné en utilisant les applications avec la base de Jacobi et aussi la méthode de collocation de Laguerre et quelques exemples.

### 3.1 Méthodes de résolution

#### 3.1.1 Méthode de collocation de Jacobi (MCJ)

En appliquant l'application de exponentielle, rationnelle ou logarithmique définies dans Sect.2.2, sur le problème (1) peut être réformé comme

$$\sum_{k=0}^2 v_k(x) \varphi^{(k)}(x) - \int_0^{\infty} K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (3.1)$$

on pose  $x = g_s(z)$ ,  $t = g_s(y)$  alors  $dt = g'_s(y) dy$

$$\sum_{k=0}^2 v_k(g_s(z)) \varphi^{(k)}(g_s(z)) - \int_{-1}^1 K(g_s(z), g_s(y)) \varphi(g_s(y)) g'_s(y) dy = f(g_s(z)),$$

et soit  $u(z) = \varphi(g_s(z))$   $h_i(z) = v_i(g_s(z))$  et  $F_s(z) = f(g_s(z))$

comme  $u(z) = \varphi(g_s(z))$ , alors

$$\varphi'(g_s(z)) = \frac{1}{g'_s(z)} u'(z); \quad \varphi''(g_s(z)) = \frac{1}{(g'_s(z))^2} u''(z) - \frac{g''_s(z)}{(g'_s(z))^3} u'(z),$$

donc on obtient

$$\sum_{k=0}^2 h_k u^{(k)}(z) - \int_{-1}^1 K(g_s(z), g_s(y)) u(y) g'_s(y) dy = F_s(z).$$

Pour appliquer la forme quadratique de Gausse-Jacobi (2.3), on multiplions et divisons par

$w^{\alpha,\beta}(y) = (1-y)^\alpha(1+y)^\beta$  on obtient :

$$\sum_{k=0}^2 h_k(z)u^{(k)}(z) - \int_{-1}^1 g'_s(y) \frac{K(g_s(z), g_s(y))}{w^{\alpha,\beta}(y)} u(y)w^{\alpha,\beta}(y)dy = F_s(z),$$

où

$$M(z, y) = g'_s(y) \frac{K(g_s(z), g_s(y))}{w^{\alpha,\beta}(y)},$$

$$w^{\alpha,\beta}(y) = (1-y)^\alpha(1+y)^\beta \quad \text{et} \quad F(z) = f(g_s(z)),$$

$$\sum_{k=0}^2 h_k(z)u^{(k)}(z) - \int_{-1}^1 M(z, y)u(y)w^{\alpha,\beta}(y)dy = F_s(z), \quad (3.2)$$

on pose  $u(z) \simeq \sum_{i=0}^n u_i J_i^{\alpha,\beta}(z)$ , donc  $u'(z) \simeq \sum_{i=0}^n u_i \partial_z J_i^{\alpha,\beta}(z)$ ,  $u''(z) \simeq \sum_{i=0}^n u_i \partial_z^2 J_i^{\alpha,\beta}(z)$ .

Ensuite, en utilisant une formule de quadrature de Gauss (2.3) à  $(n+1)$  points relative au poids de Jacobi  $\{\omega_p^{\alpha,\beta}\}_{p=0}^n$ , le terme d'intégration dans (3.2), alors on obtient

$$\sum_{i=0}^n u_i \left[ \sum_{k=0}^2 h_k(z) \partial_z^k J_i^{\alpha,\beta}(z) - \sum_{p=0}^n M(z, y_p) J_i^{\alpha,\beta}(y_p) \omega_p^{\alpha,\beta} \right] = F_s(z). \quad (3.3)$$

D'abord, pour déterminer les inconnues  $\{u_i\}_{i=0}^n$  on résoudrons le système d'équations aux points  $z = \{z_j\}_{j=0}^n$  (les nœuds de Gauss-Jacobi),

$$\sum_{i=0}^n u_i \left[ \sum_{k=0}^2 h_k(z_j) \partial_z^k J_i^{\alpha,\beta}(z_j) - \sum_{p=0}^n M(z_j, y_p) J_i^{\alpha,\beta}(y_p) \omega_p^{\alpha,\beta} \right] = F_s(z_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

On écrivons ce système sous la forme matricielle comme :

$$(D - I)U = F \quad \text{ou bien} \quad \left( \sum_{k=0}^2 H_k J_k - MW J_0 \right) U = F;$$

où

$$U = [u_0, u_1, \dots, u_n]^t, \quad F = [F_s(z_0), F_s(z_1), \dots, F_s(z_n)]^t$$

$$H_k = \text{diag}[h_k(z_0), h_k(z_1), \dots, h_k(z_n)], \quad W = \text{diag}[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n]$$

$$J_k = \begin{pmatrix} \partial^k J_0^{\alpha,\beta}(y_0) & \partial^k J_1^{\alpha,\beta}(y_0) & \cdots & \partial^k J_n^{\alpha,\beta}(y_0) \\ \partial^k J_0^{\alpha,\beta}(y_1) & \partial^k J_1^{\alpha,\beta}(y_1) & \cdots & \partial^k J_n^{\alpha,\beta}(y_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^k J_0^{\alpha,\beta}(y_m) & \partial^k J_1^{\alpha,\beta}(y_m) & \cdots & \partial^k J_n^{\alpha,\beta}(y_m) \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} M(z_0, y_0) & M(z_0, y_1) & \cdots & M(z_0, y_n) \\ M(z_1, y_0) & M(z_1, y_1) & \cdots & M(z_1, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M(z_n, y_0) & M(z_n, y_1) & \cdots & M(z_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Enfin, la solution approchée de l'équation (3.1) est obtenue comme :

$$\varphi_n(x) \simeq \sum_{i=0}^n u_i J_i^{\alpha,\beta}(g_s^{-1}(x)).$$

### 3.1.2 Méthode de collocation de Laguerre

Tout d'abord, supposons que l'équation résultante est valable aux points de collocation  $x_i$  sur  $[0, \infty[$ , et approxime la solution par  $\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x)$ , donc on obtient

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[ \sum_{k=0}^2 v_k(x) \partial_x^k \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x) - \int_0^{+\infty} K(x, t) \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(t) dt \right] = f(x). \quad (3.5)$$

Nous allons maintenant approximer l'intégrale dans l'équation (3.1) en utilisant une formule de quadrature de Gauss (Sect. 2.1.2) à  $(n+1)$  points relative au poids des fonctions de Laguerre généralisés  $\{\hat{\omega}_p^{(\alpha)}\}_{p=0}^n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i \left[ \sum_{k=0}^2 v_k(x) \partial_x^k \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x) - \int_0^{+\infty} \frac{K(x, t)}{t^\alpha} \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(t) t^\alpha dt \right] &= f(x), \\ \sum_{i=0}^n c_i \left[ \sum_{k=0}^2 v_k(x) \partial_x^k \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x) - \sum_{p=0}^n x_p^{-\alpha} K(x, x_p) \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x_p) \hat{\omega}_p^{(\alpha)} \right] &= f(x), \end{aligned}$$

pour déterminer les inconnues  $\{c_i\}_{i=0}^n$  on résoudrons le système d'équations suivant

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[ \sum_{k=0}^2 v_k(x_j) \partial_x^k \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x_j) - \sum_{p=0}^n x_p^{-\alpha} K(x_j, x_p) \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x_p) \hat{\omega}_p^{(\alpha)} \right] = f(x_j),$$

on écrivons ce système sous forme matricielle comme :

$$\left[ \sum_{k=0}^2 V_k L_k - MWL_0 \right] C = F;$$

où

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t, \quad F = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

$$V_k = \text{diag}[v_k(x_0), v_k(x_1), \dots, v_k(x_n)], \quad W = \text{diag}[\hat{\omega}_0^{(\alpha)}, \hat{\omega}_1^{(\alpha)}, \dots, \hat{\omega}_n^{(\alpha)}]$$

$$L_k = \begin{pmatrix} \partial^k \hat{\mathcal{L}}_0^{(\alpha)}(x_0) & \partial^k \hat{\mathcal{L}}_1^{(\alpha)}(x_0) & \cdots & \partial^k \hat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x_0) \\ \partial^k \hat{\mathcal{L}}_0^{(\alpha)}(x_1) & \partial^k \hat{\mathcal{L}}_1^{(\alpha)}(x_1) & \cdots & \partial^k \hat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^k \hat{\mathcal{L}}_0^{(\alpha)}(x_n) & \partial^k \hat{\mathcal{L}}_1^{(\alpha)}(x_n) & \cdots & \partial^k \hat{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x_n) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} x_0^{-\alpha} k(x_0, x_0) & x_1^{-\alpha} k(x_0, x_1) & \cdots & x_n^{-\alpha} k(x_0, x_n) \\ x_1^{-\alpha} k(x_1, x_0) & x_1^{-\alpha} k(x_1, x_1) & \cdots & x_n^{-\alpha} k(x_1, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{-\alpha} k(x_n, x_0) & x_n^{-\alpha} k(x_n, x_1) & \cdots & x_n^{-\alpha} k(x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

Enfin, la solution approchée de l'équation (3.1) est obtenu comme :

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \hat{\mathcal{L}}_i^{(\alpha)}(x).$$

## 3.2 Illustrations numériques

Dans cette section, les résultats numériques des exemples suivants sont obtenus en considérant trois applications pratiques fonctions, qui sont données avec certaines de leurs propriétés dans le Tableau 3.1. Tous les calculs ont été effectués par MATLAB R2009b. Dans les exemples (3.2-3.4) on comparons entre la méthode (MCJ) et les deux méthodes CL (voir Benyoussef et Rahmoune [3]) et Petrov-Galerkin (voir Akhavan [1]). Pour simplifier la notation, nous écrivons le composé ternaire  $(\alpha, \beta; s)$  dans les tableaux ci-dessous. Pour la plupart, l'erreur des approximations est mesurée comme la norme  $L^2$  discrète par rapport à la fonction de poids de Jacobi  $w^{\alpha, \beta}(x)$ , de la différence entre les solutions approximatives et exactes, donné par :

$$\mathbf{e}_n = \left( \sum_{i=0}^n |u(x_i) - u_n(x_i)|^2 \omega_i^{\alpha, \beta} \right)^{1/2},$$

où,  $\{x_i, \omega_i^{\alpha, \beta}\}_{i=0}^n$ , sont les zéros et les poids de Gauss Jacobi (voir Table 2.1).

Nome	Fonction	Inverse	Dérivai
	$x = g_s(y)$	$y = g_s^{-1}(x)$	$g'_s(y) = \frac{dx}{dy}$
Exponentiel	$s \ln\left(\frac{2}{1-y}\right)$	$1 - 2 \exp(-x/s)$	$\frac{s}{1-y}$
Rationnelle	$\frac{s(1+y)}{(1-y)}$	$\frac{x-s}{x+s}$	$\frac{2s}{(1-y)^2}$
Logarithmique	$\frac{s}{2} \ln\left(\frac{3+y}{1-y}\right)$	$2 \tanh(x/s) - 1$	$\frac{2s}{(1-y)(3+y)}$

TABLE 3.1 – Applications exponentielle, rationnelle et logarithmique sur  $\mathbb{R}_+$ , leur inverse et leur dérivée.

**Exemple 3.1.** *Considérons d'abord le problème,*

$$\varphi'(x) - \int_0^\infty xte^{-2t} \sin t\varphi(t)dt = -\frac{3}{50}x - e^{-x}, \quad x \in [0, \infty), \quad (3.6)$$

avec  $\varphi(0) = 1$ , dont la solution exacte est  $\varphi(x) = e^{-2x}$ , dans la sous-figure 3.1 (a) est montrée une solution approche en utilisant l'application exponentielle et les polynômes de Legendre, pour  $n = 5$  et  $s = 2$  c-à-d :

$$\varphi_5(x) = u_5(y) = \sum_{j=0}^5 c_j J_j^{0,0}(y), \quad y = 1 - 2e^{-x/2}, \quad y \in (-1, 1), x \in \mathbb{R}_+.$$

La sous-figure 3.1 (b) est montrée l'erreur des approximations  $e_n$  pour varions  $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30$  et les bases Jacobi, Gegenbauer, Tchebyshev et Legendre, avec fixer le paramètre  $s = 2$ . Dans cet exemple, les bons résultats étaient donnés pour les deux base Legendre et Jacobi ( $J^{1,0}$ ).

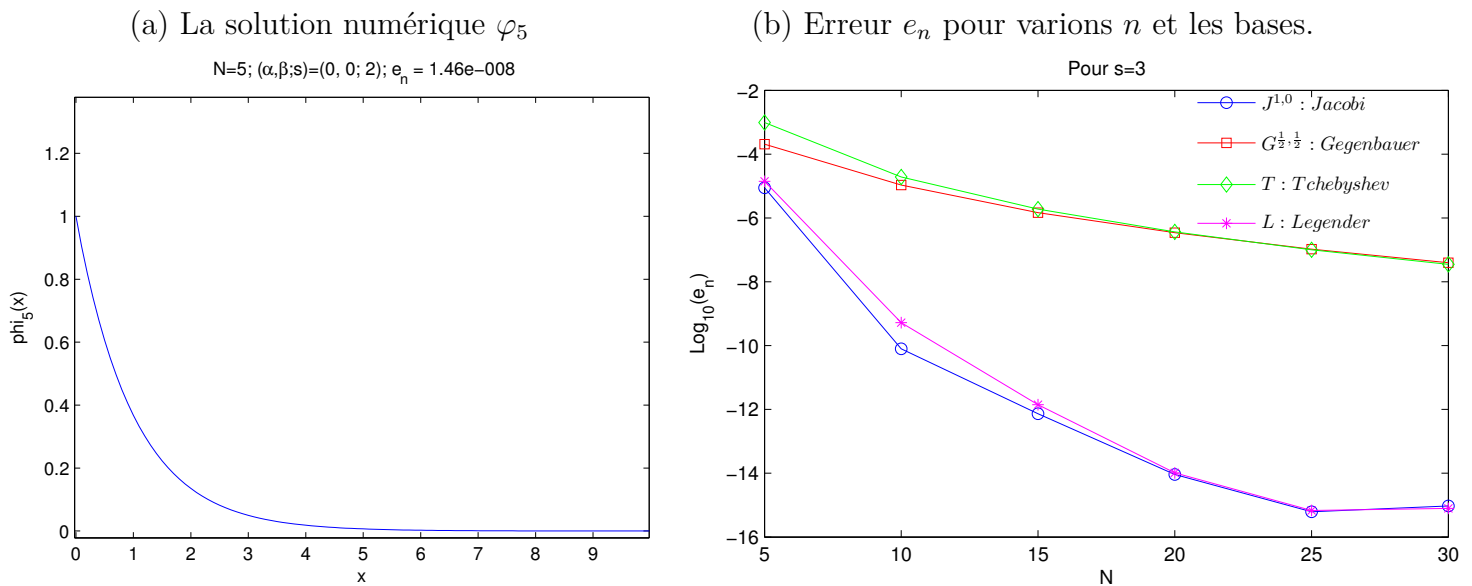


FIGURE 3.1 – (a) La solution numérique d'exemple 3.1 pour  $n = 5$ ,  $s = 2$  et en utilisant l'application exponentielle avec les polynômes de Legendre. (b) L'erreur des approximations  $e_n$  pour varions  $n$  et les bases Jacobi, Gegenbauer, Tchebyshev et Legendre, avec fixé le paramètre  $s = 2$ .

**Exemple 3.2** ([3]). *Considérons le problème,*

$$\varphi'(x) - \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} \varphi(t) dt = e^{-x} - \frac{7}{4} \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty), \quad (3.7)$$

avec  $\varphi(0) = 1$ , dont la solution exacte est  $\varphi(x) = 2e^{-x}$ . Le tableau 3.2 montre les erreurs numériques obtenues en utilisant CE, CR et méthodes CL avec  $s = 8$  et différentes valeurs de  $N$ .

Méthode présentée (MCJ) $(\alpha, \beta; s) = (0, 0; 8)$ [3] $s = 8$						
$n$	CEJ	CRJ	CLJ	CEL	CRL	CLL
6	1.67e-03	6.48e-03	4.88e-03	7.88e-03	7.60e-03	2.66e-02
8	3.40e-10	5.25e-04	3.65e-04	8.65e-10	6.86e-04	2.45e-03
10	1.34e-11	6.33e-05	2.28e-05	3.64e-11	8.36e-05	1.77e-04
12	9.17e-13	1.26e-05	1.26e-06	2.63e-12	1.59e-05	1.10e-05
14	8.92e-14	3.23e-06	6.34e-08	2.78e-13	4.20e-06	6.11e-07
16	1.17e-14	8.59e-07	2.88e-09	1.40e-14	1.14e-06	3.21e-08
18	4.88e-15	2.06e-07	1.36e-10	5.24e-16	2.74e-07	1.91e-09
20	8.92e-15	3.87e-08	5.86e-11	2.54e-15	5.18e-08	2.64e-10
24	3.20e-15	1.14e-09	1.55e-11	5.45e-15	1.47e-09	5.18e-11
32	1.39e-14	1.31e-11	1.72e-12	7.39e-14	1.47e-11	6.05e-12
40	1.04e-14	3.32e-12	3.16e-13	2.38e-14	5.31e-12	1.11e-12

TABLE 3.2 – Comparaison des erreurs dans  $L^2$  discrète  $e_n$  pour l'Exemple 3.2.

**Exemple 3.3** ([3, 1]). *Considérons d'abord le problème,*

$$\varphi''(x) - 2\varphi'(x) - 8\varphi(x) - \int_0^\infty x(t^2 + 1)\varphi(t)dt = -\frac{3}{4}x, \quad x \in [0, \infty), \quad (3.8)$$

avec  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ , dont la solution exacte est  $\varphi(x) = e^{-2x}$ . Dans le tableau 3.3, comparaison entre les valeurs de  $\|\varphi_s - \varphi_{s,N}\|_\infty$  (calculé comme le maximum de la différence absolue entre les solution exacte de l'équation résultante (3.1) et les approximations) montre que les résultats numériques basés sur tous les trois méthodes sont en bon accord avec celles obtenues à partir de [3, 1].

n	Méthode présentée (MCJ)			[3]			[1]
	CEJ (1, 0; 4)	CRJ (0, 0; 3)	CLJ (0.5, 0; 1.8)	CEL s = 3	CRL s = 7/2	CLL s = 3/2	m = 0 m' = 1
4	2.18e-01	7.53e-03	3.91e-02	1.96e-02	1.44e-02	1.92e-02	9.27e-02
6	7.18e-03	1.08e-03	1.20e-03	6.47e-11	2.46e-03	2.32e-04	2.30e-02
8	1.51e-13	1.87e-04	1.51e-05	2.92e-12	4.09e-04	1.90e-05	3.20e-03

TABLE 3.3 – Comparaison des erreurs dans  $L^2$  discrète  $e_n$  pour l'Exemple 3.3.

**Exemple 3.4** ([3]). *Considérons le problème,*

$$(1+x)^2\varphi''(x) - (1+x)\varphi'(x) + \varphi(x) - \int_0^\infty x(t^2 - 1)e^{-3t}\varphi(t)dt = \frac{4}{1+x} + \frac{2}{9}x, \quad x \in [0, \infty), \quad (3.9)$$

avec  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ . La solution exacte de ce problème est  $\varphi(x) = \frac{1}{1+x}$ , qui est une fonction lisse et décroît très lentement à l'infini. Les erreurs numériques obtenues en utilisant la méthode CR avec différentes valeurs de  $N$  et  $s$  sont rapportées dans le tableau 3.4, est meilleure que [3]. Encore une fois, le tableau 3.5 montre que la méthode CRJ(4.5, 0; 1.3) est meilleure que [1, 3].

n	Méthode présentée (MCJ)		[3]
	(1/2, 0; 2)	(0, 0; 2)	s = 2
10	4.85e-07	1.48e-06	1.48e-06
16	7.66e-10	2.57e-09	2.57e-09
30	3.13e-15	5.83e-15	5.37e-15

TABLE 3.4 – Comparaison des erreurs dans  $L^2$  discrète entre CRJ et [3] pour l'Exemple 3.4.

	Méthode présente (MCJ)	[3]	[1]
$n$	CRJ(4.5, 0; 1.3)	CRL	
4	2.48e-04	5.79e-04	6.58e-04
6	3.03e-05	1.41e-04	7.13e-04
8	8.71e-07	2.13e-06	2.85e-04

TABLE 3.5 – Comparaison des erreurs absolues maximales entre trois méthodes CRJ et [1, 3] pour l'Exemple 3.4.

**Exemple 3.5.** *Considérons le problème,*

$$x\varphi''(x) + 3\varphi(x) - \int_0^\infty e^{-x-t}\varphi(t)dt = (-2x \cos(x) + 3 \sin(x) - 1/5)e^{-x}, \quad x \in [0, \infty), \quad (3.10)$$

avec  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ , dont la solution exacte est  $\varphi(x) = \sin(x)e^{-x}$ . On utilise les fonctions de Laguerre et les applications de changement de variable avec Legendre, voir Table 3.6, dans ce tableau nous comparons l'erreur entre les applications ( $s = 9$ ) et Jacobi ( $J^{0,0}$ ) avec la méthode de collocation de Laguerre généralisés ( $\hat{\mathcal{L}}^{(0)}$  et  $\hat{\mathcal{L}}^{(1)}$ ) pour  $n = 5, 10, 20, 40, 80$ .

$n$	FLGs		CEJ	CRJ	CEJ
	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$(\alpha, \beta; s) = (0, 0; 9)$		
05	2.77E-02	3.00E-02	9.40e-02	1.15e-02	8.26e-02
10	5.17E-03	4.10E-03	4.31e-03	2.40e-02	5.81e-04
20	1.77E-04	4.50E-05	2.04e-06	6.36e-04	2.11e-07
40	8.13E-09	4.28E-09	2.16e-11	5.22e-07	2.51e-10
80	3.14E-14	3.53E-14	4.61e-16	2.65e-12	6.47e-13

TABLE 3.6 – Comparaison l'erreur absolues maximales entre les deux méthodes collocations Jacobi et Laguerre pour l'Exemple 3.5.

## Conclusion

Dans ce mémoire, nous utilisons une famille des applications pour reformer l'équation intégral-différentielle de Fredholm sur la demi-droite, et nous résolvons la nouvelle équation singulière résultante sur l'intervalle fini  $[-1, 1]$  par les polynômes de Jacobi. L'avantage de cette méthode est qu'elle est rapide et donne de bons résultats, et que la sélection des applications se fait en fonction du degré de décroissement de la solution. Le paramètre  $s$  a un rôle important dans l'amélioration des résultats pour les trois applications (voir Exemple 3.3) même pour le choix de  $\alpha$  et  $\beta$  c-à-d la base (voir Exemple 3.1), et on présente une méthode classique utilise les fonctions de Laguerre généralisés mais cette méthode n'est pas rapide par rapport à la méthode précédente.

# Bibliographie

- [1] S. Akhavan, Numerical solution of singular Fredholm integro-differential equations of the second kind via Petrov–Galerkin method by using Legendre multiwavelet, *J. Math. Comput. Sci.* 9 (2014) 321–331.
- [2] H.M. Antia. Numerical methods for scientists and engineers. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi 1991.
- [3] S. Benyoussef, A. Rahmoune. Efficient spectral-collocation methods for a class of linear Fredholm integro-differential equations on the 46 half-line, *J. Comput. Appl. Math.* 377(2020), 112894.
- [4] J.P. Boyd, Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Dover Publication Inc., Mineola, NY, 2d edition, 2001.
- [5] J.P. Boyd, Orthogonal rational functions on a semi-infinite interval, *J. Comput. Phys.* 70 (1987) 63–88.
- [6] R.L.Burden, J.D. Faires , Numerical Analysis, 7th ed., Brooks Cole, 2000.
- [7] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral Methods Fundamentals in Single Domains, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [8] J.P. Demailly. Analyse numérique et équations différentielles. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [9] F. Jędrzejewski, Introduction aux méthodes numériques. Deuxième édition. Springer-Verlag France, Paris 2005. of Modern Physics B, 20(2006).
- [10] R.P. Kanwal. Linear Integral Equations. Birkhauser, Boston, 1997.
- [11] P. K. Kythe, Michael R. Schäferkötter, Handbook of computational methods for integration, CRC Press. 2005.
- [12] M.Moussaï. Les Solutions Des Equations Intégrales Et Différentielles . Mémoire de Magistère, Université de M’sila, 2009/2010.
- [13] A. Rahmoune, Sur la Résolution Numérique des Equations Intégrales en Utilisant des Fonctions Spéciales, Thèse de doctorat en science université de Batna, 2011.
- [14] J. Shen, T. Tang and L.-L. Wang, Spectral methods. Algorithms, Analysis and applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [15] J. Shen, L.L. Wang, Some recent advances on spectral methods for unbounded domains, *Commun. Comput. Phys.* 5 (2–4) (2009) 195–241.

## ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة المعادلة التكاملية التفاضلية لفريد هولم التي لها الشكل العام:

$$\sum_{k=0}^2 v_k(x) \varphi^{(k)}(x) - \int_0^{\infty} K(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

الهدف من هذا العمل هو ايجاد حل لهذا النوع من المعادلات، فالفكرة هي تغيير المجال من غير محدود الى مجال محدود، ثم استخدام الطرق النقطية لجاكوبي من اجل حلها في المجال المحدود، أو استخدام دوال "لافيير" المعممة لحلها على المجال غير المحدود (نصف الخط الحقيقي) مباشرة.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية التفاضلية، الطريقة النقطية، تطبيقات تبديل المتغير، كثيرات الحدود المتعامدة، نصف المستقيم الحقيقي.

## Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié l'équation intégral-différentielle singulière de Fredholm, qui a la forme générale:

$$\sum_{k=0}^2 v_k(x) \varphi^{(k)}(x) - \int_0^{\infty} K(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

Le but de ce travail est trouvé la solution de cette équation. L'idée est de changer l'intervalle non borné au intervalle borné et d'utiliser les méthodes de collocation de Jacobi pour résoudre l'équation intégral-différentielle dans un intervalle fini. Ou méthode de collocation de Laguerre dans semi-ligne réel.

**Mots-clés:** Equations intégral-différentiel, applications de changement de variable, polynômes orthogonale, semi-ligne réel.

## Abstract

In this thesis, we have studied the singular of Fredholm integro-differential equation, which has the general form:

$$\sum_{k=0}^2 v_k(x) \varphi^{(k)}(x) - \int_0^{\infty} K(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

The aim of this work is to provide the solution of this equation. The main idea is to change the unbounded interval to a bounded one and use the Jacobi collocation methods to solve this equation in the finite interval. Or using collocation Laguerre methods on half-line,

**Keywords:** integro-differential equations, mappings, orthogonal polynomials, half-line.