

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire

Présentée par :

khababa rouaa

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Domaine : Mathématiques et Informatiques.

Filière : Mathématiques appliquée.

Spécialité : Méthodes et outils pour la recherche Opérationnelle.

Thème

Problème de décomposition des hypercubes .

Soutenu publiquement le 15/06/2023 devant le jury composé de

M.Brahmi Boualem M.C.A Maitre de conférence Président
M.Touati Hillal M.A.A Maitre assistant Encadrant
M.Ramdani Zoubir M.A.A Maitre assistant Examineur

Promotion 2022/2023

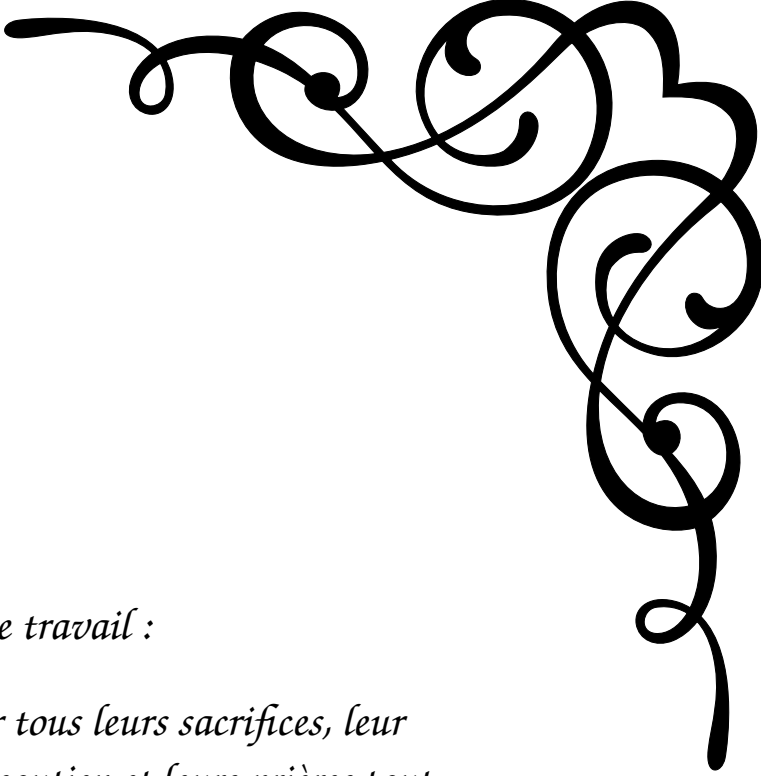


Remerciements

*A*vant tout on remercie " **Allah** " tout puissant pour la volonté, la patience que nous a données d'accomplir ce travail.

*U*n grand remerciement pour mon encadreur " **Mr. hillal TOUATI** ; pour avoir accepté de diriger ce mémoire, et pour les conseils fructueux et sa disposition, l'encouragement et l'orientations qu'elle nous a attribuées.

*N*ous remercions les membres du jury pour leur présence, pour leur lecture attentive de ce mémoire, ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail.



Je dédie ce travail :

*A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études, leur soutien moral,
A mes chers frères (Abdelfetah , Mohamed , Ritadj) pour leur appui et leur encouragement,
A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,
Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infailible,
Merci d'être toujours là pour moi.*

Merci!



khababa rouaa 

Table des matières

Introduction	8
1 Généralités sur les graphes	10
1.1 Définition et concepts de base	10
1.1.1 Adjacence, incidence et degré dans un graphe	12
1.1.2 Notion de connexité	16
1.1.3 Isomorphisme de graphe	17
1.2 Différents types de graphes	17
1.2.1 Graphe complet	17
1.2.2 Graphe planaire	18
1.2.3 Graphe biparti	19
1.2.4 Graphe régulier	19
1.2.5 Les arbres	20
1.3 Opérations sur les graphes	21
1.3.1 Suppression et Contraction	21
1.3.2 Union et Intersection	22
1.3.3 Produit de graphes	23
1.3.4 Graphes résultant du produit cartésien :	25
2 Problème de décomposition des graphes	27
2.1 Problème de décomposition dans les graphes	28
2.1.1 Les application de la décomposition des graphes	28
2.1.2 Condition pour la décomposition	30
2.2 Les différents types de décomposition	30
2.2.1 Décomposition des sommets	31
2.2.2 Décomposition des arêtes	31
2.2.3 Décomposition simple des graphes	32
2.2.4 Multi-décomposition des graphes	32
2.2.5 Décomposition en chaînes	33
2.2.6 Décomposition en cycles	35
2.3 Factorisation d'un graphe G	41
3 Décomposition des hypercubes	44
3.1 Problème de décomposition des hypercubes	44
3.1.1 Empilement des hypercubes	45
3.2 Condition sur la décomposition	50
3.3 Décomposition en cycle	51
3.4 Décomposition en chaînes	52
3.4.1 Des conditions de la décomposition d'un hypercube en chaîne	52

Table des figures

1.1	Exemple de graphe.	10
1.2	représente le graphe non orienté.	11
1.3	graphe orienté.	11
1.4	l'ordre du graphe ci-dessus est de 5 sommets et sa taille 10	11
1.5	Exemple d'un 3-graphe , il y a 3 arêtes entre le sommet 3 et le sommet 4.	12
1.6	Exemple d'un graphe partiel G_P engendré par le ensemble $(1, 2), (2, 3), (2, 4)$	12
1.7	Exemple d'un sous graphe G_S engendré (induit) par le sous ensemble $S = \{2, 3, 4\}$	12
1.8	graphe non orienté avec $d(1) = 3$	13
1.9	dans ce graphe orienté on a $d(1) = d^{-1}(1) + d^{+1}(1) = 1 + 2 = 3$	13
1.10	graphe orienté avec un chemin $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ et un circuit $\langle 1, 3, 5, 4, 2, 1 \rangle$	14
1.11	graphe non orienté avec un un chaîne $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ et un cycle $\langle 2, 3, 4, 1, 2 \rangle$	14
1.12	Le Graphe taureau a un diamètre de 3. Les deux sommets les plus éloignés sont les deux extrémités des cornes.	15
1.13	Le graphe de Petersen a une maille de 5 et une cage.	15
1.14	le graphe petersen à une circonférence 5	16
1.15	Exemple de graphe non connexe	16
1.16	Le graphe de gauche est fortement connexe, tandis que celui de droite ne l'est pas.	16
1.17	Le graphe biparti complet $K_{(1,5)}$ est 1-arête-connexe.	17
1.18	Isomorphisme de graphe.	17
1.19	graphe complet.	18
1.20	graphe planaire.	18
1.21	graphe biparti $K_{3,3}$	19
1.22	$K_{3,2}$ graphe biparti complet.	19
1.23	graphe régulier $d(v) = 3$	20
1.24	Des exemples d'arbres.	20
1.25	Exemple d'arborescence.	21
1.26	graphe étoile S_7 . (Certains auteurs l'indexent comme S_8).	21
1.27	Suppression de l'arête 1-2.	21
1.28	Suppression de sommet 1.	22
1.29	Contraction de l'arête 1 - 2.	22
1.30	G est l'union des deux graphes G_1 et G_2 qu'on note $G_1 \cup G_2$	22
1.31	G est l'intersection des deux graphes G_1 et G_2 qu'on note $G_1 \cap G_2$	23
1.32	Produit direct de deux graphes G_1 et G_2 tel que $G = G_1 \times G_2$	23
1.33	Produit cartésien de deux graphes G_1 et G_2 tel que $G = G_1 \times G_2$	24
1.34	Représentation de produit cartésien entre un cycle C_4 et une clique K_3 tel que $C_4 \times K_3$	24
1.35	Les premiers hypercubes.	25
1.36	Graphe de Hamming $H(3, 3) = K_3 \times K_3$	26
2.1	Exemple de décomposition d'un graphe simple.	28

2.2	Exemple de décomposition en sommets C_4 de Q_3 avec l'ensemble des sommets en rouge.	31
2.3	Exemple de décomposition des arêtes disjoints S_4 de Q_3 avec l'ensemble des arêtes $E = Q_n$	31
2.4	Exemple de P_5 -décomposition de K_5	32
2.5	Multi - décomposition d'un graphe simple	33
2.6	décomposition en chaîne.	34
2.7	décomposition de graphe G en cycle.	35
2.8	décomposition en chemins disjoints par paire de l'arbre T	37
2.9	2-factorisation en rouge et en bleu.	38
2.10	Exemple de deux décomposition hamiltonienne en rouge et en bleu d'un graphe complet K_5	39
2.11	Exemple de décomposition hamiltonienne en bleu et couplage parfait en rouge d'un graphe complet K_4	39
2.12	Exemple de n -fan $F_{3,4}$	40
2.13	Exemple de n -fan en rouge dans hypercubes Q_4	40
2.14	Exemple de double n -fan, $F_{n,a}^*$	41
2.15	Exemple de double n -fan $F_{n,a}^*$ en bleu dans un hypercube Q_n $n=2$, $a=4$	41
2.16	couplage parfaits.	42
3.1	Exemple des hypercube Q_n	45
3.2	Empilement parfait des sommets disjoints de H dans $G^{**} = 10$	46
3.3	Exemple de l'empilement des sommets disjoints.	49
3.4	Exemple de $V(Q_n)$ divisé en copies isométriques de $T = G$	51

Introduction

La théorie des graphes constitue un outil très puissant pour schématiser les modèles des liens et relations entre les objets. En effet, L'un des premiers problèmes de la théorie des graphes est formulé par le mathématicien suisse Leonard Euler en 1736. Il s'agit du problème des sept ponts dans la ville de Königsberg. Euler a montré qu'il était impossible de trouver une promenade qui traverse chaque pont une seule fois. Il a modélisé ce problème en le présentant sous la forme d'un graphe, où les parties terrestres sont représentées par les sommets, et les ponts, par les arêtes. Cette branche des mathématiques est largement utilisée pour modéliser des problèmes concrets, tels que les réseaux informatiques, la biologie des réseaux de transport, des circuits électriques, des bases de données...etc.

La théorie des graphes englobe de nombreux problèmes intéressants et diversifiés. Voici quelques-uns des problèmes les plus connus et étudiés en théorie des graphes : (Problème de la décomposition des graphes, Problème du plus court chemin ,Problème du voyageur de commerce ,Problème du flot maximum,Problème de l'arbre de recouvrement minimal ,Problème de couplage maximum ,Problème de coloration de graphes) .Ces problèmes ne représentent qu'une petite fraction des nombreux problèmes étudiés en théorie des graphes. Chacun de ces problèmes a ses propres propriétés, algorithmes et techniques spécifiques pour les résoudre.

Parmi les différents problèmes de la théorie des graphes mentionnés au paragraphe précédent, nous ne considérons que le premier dans ce mémoire. La décomposition des graphes est une technique utilisée pour diviser et décomposer un graphe en sous-structures plus simples (Il s'agit de recherche des sous-graphes dans un graphe G) ,Elle consiste à partitionner les sommets, les arêtes ou les ensembles d'arêtes du graphe de manière à révéler des propriétés ou des caractéristiques spécifiques.Plus généralement, la décomposition des graphes vise à représenter le graphe comme une combinaison ou une union de sous-structures disjointes qui préservent certaines propriétés du graphe d'origine. Ces sous-structures peuvent être des sous-graphes (des cycles, des chaîne, des arbres...) ou d'autres types de motifs.

Ce problème a commencé par un résultat de Walecki en 1890 concernant l'existence d'une décomposition hamiltonienne d'un graphe complet avec un nombre impair de sommets et de nombreux problèmes ouverts,Cette technique essentielle permet de décomposer un graphe complexe en composants plus gérables (diviser un graphe en sous-graphes plus petits), facilitant ainsi son analyse et sa compréhension. Comme il s'agit d'un domaine de recherche très vaste, il existe différents types de problèmes de décomposition dans la littérature. Néanmoins, il existe deux principaux types de décompositions de graphes, en fonction de la manière dont nous voulons décomposer, appelées respectivement décompo-

sitions des arêtes (ou décomposition disjointe des arêtes) et décompositions des sommets (ou décomposition disjointe des sommets). La première consiste à décomposer le graphe en sous-graphes de telle sorte que chaque arête appartienne à un et un seul sous-graphe. La seconde consiste à décomposer un graphe en sous-ensembles de sommets tels que chaque sommet doit appartenir à un et un seul sous-ensemble. Lorsqu'on parle de décomposition d'un graphe de manière générale on entend la décomposition disjointe de ses arêtes. Cette technique trouve des applications pratiques dans de nombreux domaines telles que la tolérance aux fautes, les structures de recouvrement, l'équilibrage des charges, la similarité et l'appariement des graphes, les techniques de reconnaissance des formes...etc.

Ce mémoire vise à approfondir notre compréhension de la décomposition des graphes et à explorer ses diverses applications et implications. Le travail est motivé par la question principale suivante : **les conditions que H doit satisfaire pour que G admette une H -décomposition où G est un hypercube.**

Ce mémoire structuré comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des généralités sur les graphes, où nous donnons quelques définitions, notions de base et quelques opérations liées à la théorie des graphes qui nous seront nécessaires dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous avons abordé le problème de la décomposition des graphes. Il s'agit de rechercher des sous-graphes dans un graphe G . Nous aborderons ensuite les notions de décomposition des graphes, en mettant l'accent sur les différentes catégories de décomposition, telles que la décomposition en arêtes, en sommets, en cycles, chaîne...etc. Nous présenterons ensuite les principaux résultats et les théorèmes liés à la décomposition des graphes, en mettant en évidence les propriétés des graphes qui peuvent être obtenues à travers ces décompositions. Ensuite, nous discuterons des applications concrètes de la décomposition des graphes dans divers domaines. Nous examinerons comment la décomposition des graphes est utilisée pour résoudre les différents problèmes dans la vie réelle. Nous présenterons des exemples concrets illustrant l'importance et la pertinence de la décomposition des graphes dans ces domaines.

Dans le troisième chapitre porte sur l'étude de décomposition des hypercubes. On présentera la question posée par l'officier sur l'existence de la décomposition sur les hypercubes, ensuite en va donner quelques types de décomposition des hypercube.

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

Pour une meilleur compréhension des autres chapitres, il est évident de rappeler quelques généralités sur la théorie des graphes et quelques opérations sur les graphes. Nous commencerons par rappeler certaines définitions élémentaires sur les graphes, ainsi en profiter pour expliciter les notations que l'on retrouvera fréquemment par la suite. Ensuite, nous définissons quelques classes de graphes et leurs propriétés utiles à la compréhension du travail présenté. Ensuite, nous donnons quelques notions de base sur la complexité de calcul classique. Nous terminerons ce chapitre par la présentation des opérations sur les graphes, par exemple suppression, contraction, produit cartésien, produit direct....

1.1 Définition et concepts de base

De manière générale, on appelle graphe noté $G = (V, E)$ le couple constitué par :

- un ensemble de sommets $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- une famille $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ d'éléments du produit cartésien, $V \times V = \{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in V\}$.

Exemple :

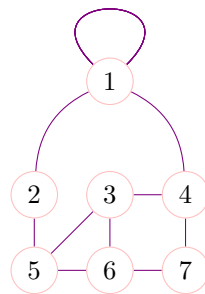


FIGURE 1.1 – Exemple de graphe.

$$v = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 1)\}$$

Deux classes de graphe existes, à savoir :

- 1) **Graphe non orienté** : Est noté $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini non vide et E un ensemble de couple non ordonnées d'éléments de V .

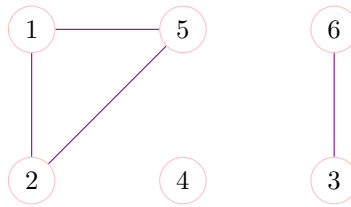


FIGURE 1.2 – représente le graphe non orienté.

$G = (V, E)$ avec $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $E = \{\{1, 2\}; \{1, 5\}; \{5, 2\}; \{3, 6\}\}$.

- Un graphe non orienté est dit simple s'il ne comporte pas de boucle ,et s'il ne comporte jamais plus d'une arête entre deux sommets.
- Une boucle est une arête reliant un sommet à lui même.
- Ordre d'un graphe, noté $|V|$, est le nombre de ses sommets. on note $|E|$ et la taille d'un graphe qui désigne le nombre de ses arêtes.

2) **Graphe orienté** : Un graphe orienté, noté $G = (V, A)$ est un graphe où les arêtes sont orienté (on les appelle arcs).

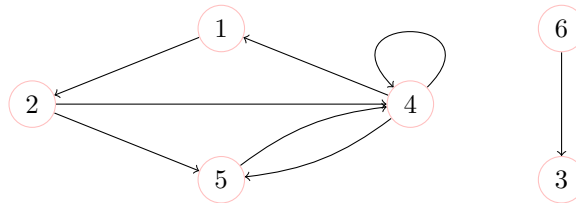


FIGURE 1.3 – graphe orienté.

représente le graphe orienté $G = (V, A)$ avec $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $A = \{(1; 2); (2; 4); (2; 5); (4; 1); (4; 4); (4; 5); (5; 4); (6; 3)\}$.

Définition 1.1. (L'ordre d'un graphe)[20] On appelle l'ordre d'un graphe le nombre de ses sommets $|V|$.

On appelle taille d'un graphe le nombre de ses arêtes et $|E|$ notée par fois $E(G)$.

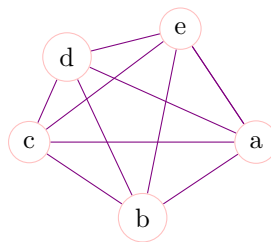


FIGURE 1.4 – l'ordre du graphe ci-dessus est de 5 sommets et sa taille 10 .

Définition 1.2. (Graphe connexe) Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit connexe si pour tout (paire) de sommets u et v de V^2 , il existe une chaîne les reliant.

Définition 1.3. (Graphe multiple)[9] Un graphe multiple, est un graphe où au moins 1 couple de sommets ont plus d'une arête entre eux. Lorsqu'on a au plus p arêtes on parle de p -graphe.

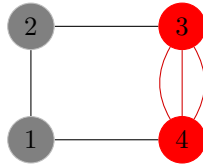


FIGURE 1.5 – Exemple d'un 3-graphe , il y a 3 arêtes entre le sommet 3 et le sommet 4.

Définition 1.4. (Graphes partiel)[9] Un graphe partiel G_p d'un graphe G , engendré par un ensemble d'arêtes, est simplement le même graphe en gardant seulement les arêtes de l'ensemble.

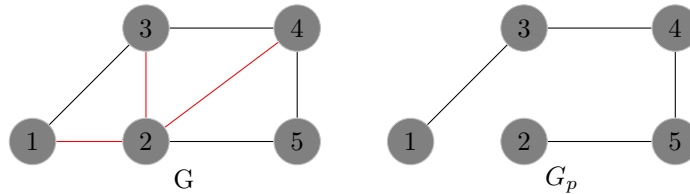


FIGURE 1.6 – Exemple d'un graphe partiel G_p engendré par le ensemble $(1, 2), (2, 3), (2, 4)$.

Définition 1.5. (Sous graphe)[9] un sous graphe G_s d'un graphe G engendré par un sous ensemble de sommet $S \subset V$, est un graphe ayant comme ensemble de sommet S et les arêtes joignant ces sommets. exemple :

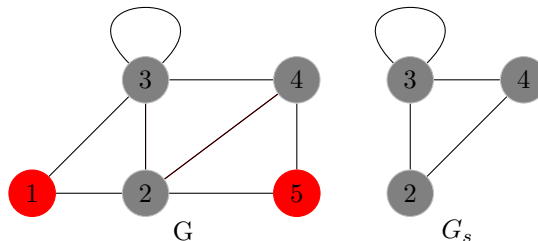


FIGURE 1.7 – Exemple d'un sous graphe G_s engendré (induit) par le sous ensemble $S = \{2, 3, 4\}$.

1.1.1 Adjacence, incidence et degré dans un graphe

Dans un graphe non orienté, le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Comme déjà dit , un graphe est formé d'un ensemble de sommets (point) reliés par ce qu'on appelle des arêtes.

En prenant l'exemple donnée à la figure 1.8 on dit que les deux sommets 3 et 4 sont **adjacents** puis qu'ils sont reliés par une arêtes.

On dit aussi que le sommets 4 est **incident** à l'arêtes (3, 4).

Dans le cas d'un graphe simple, le degré d'un sommet représente le nombre de sommets adjacents à celui-ci[9].

Dans un graphe orienté, le degré d'un sommets v est divisé en demi-degré extérieur et demi degré intérieur le premier (resp.second), noté $d^+(v)$ (resp. $d^-(v)$) représente le nombre

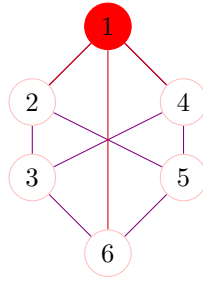


FIGURE 1.8 – graphe non orienté avec $d(1) = 3$.

d'arêtes ayant v comme extrémités initiale (resp.terminale). Le degré d'un sommet v est alors la somme des degré entrant et sortant $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$. par exemple :
et pour un autre exemple on à :

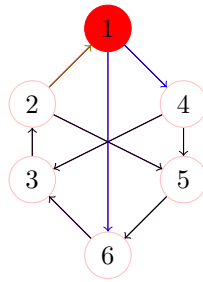


FIGURE 1.9 – dans ce graphe orienté on a $d(1) = d^{-1}(1) + d^+(1) = 1 + 2 = 3$.

Parmi les résultats fondamentaux qu'on a il y a le fameux théorème poignée de mains

Théorème 1.1. *La somme des degrés des sommets d'un graphe quelconque est égale à deux fois le nombre d'arêtes (ou d'arcs).C'est-à-dire :*

$$\sum_{v \in V} \text{deg}(v) = 2 |E|$$

Ce résultat vient de fait qu'une arête est comptabilisée deux fois dans le degré de ces extrémités.

Un résultat direct qui découle du théorème précédent, est :

Corollaire 1.1. *Le nombre de sommets ayant un degré impair est pair.*

Définition 1.6. (Chemin)[9] Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté, un chemin d'un sommet u vers un sommet v est une séquence $\langle s_0, s_1, \dots, s_k \rangle$ de sommets tels que : $u = s_0, v = s_k$ et $(s_{i-1}, s_i) \in E$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on dira que le chemin contient les sommets s_0, s_1, \dots, s_k et les arcs $(s_0, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_{k-1}, s_k)$. La longueur du chemin, est le nombre d'arcs dans le chemin c'est à dire k . S'il existe un chemin de u à v on dira que v est accessible à partir de u .

Définition 1.7. (Circuit)[9] Un chemin $\langle s_0, \dots, s_k \rangle$ forme un circuit si $s_0 = s_k$, et si le chemin comporte au moins un arc ($k \geq 1$). Une boucle est un circuit de longueur 1.

Remarque 1.1. [9] Dans le cas non orienté, on parle de chaîne au lieu de chemin et de cycle au lieu circuit.

La notion de longueur de chemin, nous permet ensuite de définir la notion de distance dans un graphe.

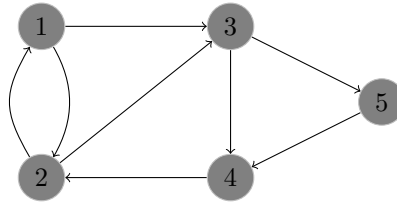


FIGURE 1.10 – graphe orienté avec un chemin $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ et un circuit $\langle 1, 3, 5, 4, 2, 1 \rangle$.

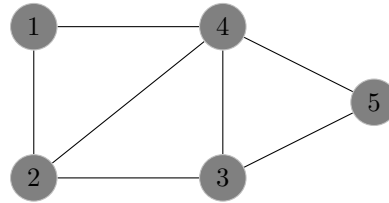


FIGURE 1.11 – graphe non orienté avec un un chaîne $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ et un cycle $\langle 2, 3, 4, 1, 2 \rangle$.

Définition 1.8. (Distance) [9] Soit un graphe $G = (V, E)$, la distance d'un sommet à un autre, est la longueur minimum entre deux sommets, ou ∞ s'il n'y a pas :

$$\forall x, y \in V, d(x, y) = \begin{cases} k & \text{si la longueur minimum entre } x \text{ et } y \text{ est égale à } k. \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1.9. (Diamètre d'un graphe) Le diamètre d'un graphe est une mesure qui quantifie la plus grande distance (la distance maximale) entre deux sommets du graphe. En d'autres termes, c'est la longueur du plus court chemin le plus long possible entre deux sommets du graphe. Pour calculer le diamètre d'un graphe, on trouve tous les chemins possibles entre chaque paire de sommets et on détermine la longueur maximale parmi ces chemins.¹

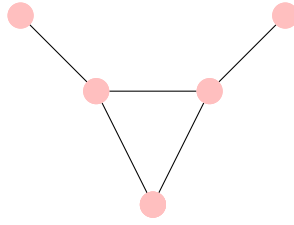


FIGURE 1.12 – Le Graphe taureau a un diamètre de 3. Les deux sommets les plus éloignés sont les deux extrémités des cornes.

Définition 1.10. (Maille d'un graphe) La maille d'un graphe est une mesure qui décrit la longueur du plus court cycle présent dans le graphe. En d'autres termes, c'est la longueur de la plus petite boucle que l'on peut former dans le graphe. Pour calculer la maille d'un graphe, on recherche tous les cycles possibles dans le graphe et on détermine celui qui a la plus petite longueur.² Si le graphe ne contient aucun cycle, sa maille est infinie.

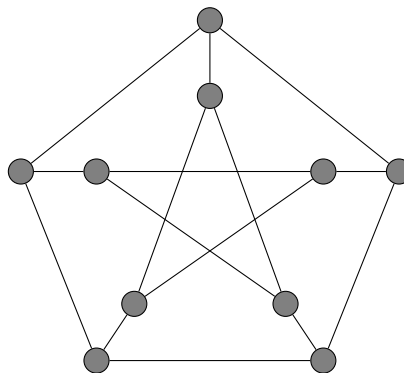


FIGURE 1.13 – Le graphe de Petersen a une maille de 5 et une cage.

Définition 1.11. (Girthen (Circonférence dans la distance)) la circonférence d'un graphe non orienté est la longueur d'un cycle le plus court contenu dans le graphe.

Si le graphe ne contient aucun cycle (c'est-à-dire qu'il s'agit d'une forêt), sa circonférence est définie comme étant l'infini. Par exemple, un 4-cycle (carré) a la circonférence 4. Une grille a également la circonférence 4, et un maillage triangulaire a la circonférence 3. Un graphe avec la circonférence quatre ou plus est sans triangle.

Un graphe cubique (tous les sommets ont un degré trois) de circonférence g aussi petite que possible est appelé g -cage (ou $(3, g)$ -cage). Le graphe de Petersen est l'unique 5-cage (c'est le plus petit graphe cubique de circonférence 5), le graphe de Heawood est l'unique 6-cage, le graphe de McGee est l'unique 7-cage et le Tutte huit cage est l'unique 8-cage[1].

1. longueur d'un chemin est définie comme le nombre d'arêtes qu'il contient.
2. La longueur d'un cycle est définie comme le nombre d'arêtes qu'il contient.

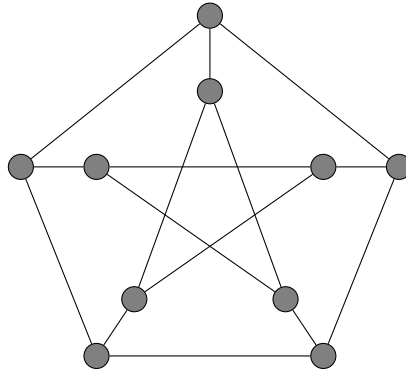


FIGURE 1.14 – le graphe petersen à une circonférence 5 .

1.1.2 Notion de connexité

La notion de connexité dans les graphes se réfère à la propriété d'un graphe d'être connecté, c'est-à-dire qu'il existe une chaîne entre chaque pair de sommet du graphe.

Définition 1.12. (Graphe et sous graphe connexes) [9] Un graphe non orienté est connexe si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre sommet, Autrement dit si pour tout couple de sommet distincts $(v_i, v_j) \in V^2$, il existe une chaîne entre v_i et v_j .

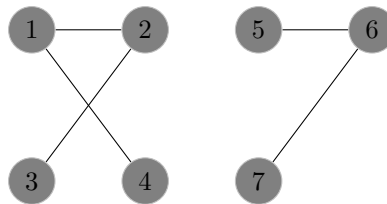


FIGURE 1.15 – Exemple de graphe non connexe

Définition 1.13. (Composante connexe)[9] Une composante connexe d'un graphe non orienté G , est un sous graphe G_0 de G qui est connexe et maximal (c'est à dire qu'aucun autre sous graphe connexe de G ne contient G_0).

Un graphe est dit connexe, si et seulement si il admet une unique composante connexe. On retrouve les différentes notions de connexités dans les graphes orientés en remplaçant naturellement la notion de chaîne par celle de chemin. dans le cas orienté on parle de graphe fortement connexe au lieu de connexe, et de composante fortement connexe au lieu de composante connexe.

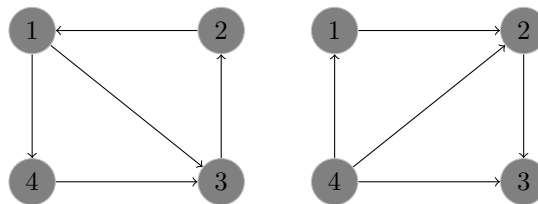


FIGURE 1.16 – Le graphe de gauche est fortement connexe, tandis que celui de droite ne l'est pas.

Définition 1.14. Graphe k -arête connexe

un graphe non orienté connexe est dit (k -arêtes connexe) si la suppression de moins de k – arêtes reste le graphe reste connexe, en d’autres termes si on supprime k – arêtes le graphe devient non connexe.

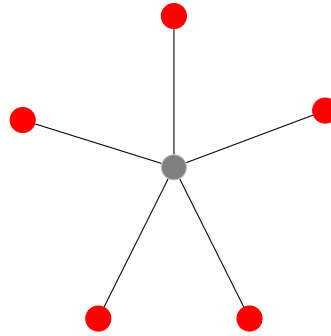


FIGURE 1.17 – Le graphe biparti complet $K_{(1,5)}$ est 1-arête-connexe.

Remarque 1.2. lors qu’il faut supprimer un grand nombre d’arêtes pour que le graphe devient non connexe on dit que le graph est fortement arête-connexe (high-edge-connectivity).

1.1.3 Isomorphisme de graphe

Deux graphes orientés $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes s’il existe une application bijective $\varphi : V \rightarrow V'$ telle que pour tout $v, v' \in V$ on $(v, v') \in E \iff (\varphi(v), \varphi(v')) \in E$. L’application φ est alors un isomorphisme de graphes orientés. Exemple suivants Les deux graphes sont isomorphes par l’isomorphisme [20].

Exemple 1.1. $\varphi : 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow c, 4 \rightarrow d, 5 \rightarrow e$

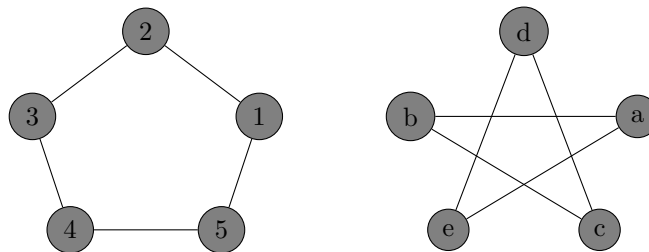


FIGURE 1.18 – Isomorphisme de graphe.

1.2 Différents types de graphes

Dans cette partie nous citerons quelques types de graphes :

1.2.1 Graphe complet

Les graphes complets sont particulièrement importants en théorie des graphes car ils représentent un cas extrême de connectivité maximale dans les graphe simple . En effet, dans un graphe complet à n sommets, le nombre d’arêtes est maximale est égal à $\frac{n * (n - 1)}{2}$, ce qui est une valeur quadratique par rapport au nombre de sommets.

Définition 1.15. (Graphe complet)[9] Un graphe complet, est le graphe ayant chaque sommet adjacent à tous les autres. On le note K_n .

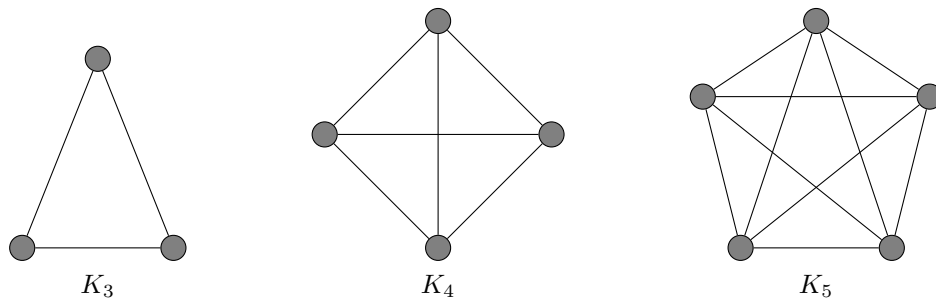


FIGURE 1.19 – graphe complet.

Remarque 1.3. quand on oriente les arêtes de se type de graphe on obtient une classe de graphe qu'on nommer les graphes tournoi.

1.2.2 Graphe planaire

Les graphes planaires ont des propriétés uniques qui les rendent importants en théorie des graphes et dans de nombreux domaines pratiques tels que la cartographie, la géographie, l'ingénierie, la physique, l'informatique, etc. Par exemple, les circuits imprimés peuvent être considérés comme des graphes planaires, où les nœuds représentent des composants électroniques et les arêtes représentent les connexions entre eux.

Définition 1.16. (Graphe planaire)[9] un graphe est dit planaire s'il admet une représentation où deux arêtes n'intersectent pas.

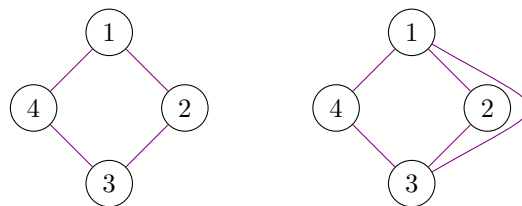


FIGURE 1.20 – graphe planaire.

Parmi les résultats les plus fondamentaux dans ce type de graphe on a, le résultat suivant :

Théorème 1.2. (Euler)[9] soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et planaire d'ordre n de taille m et ayant f faces (régions) alors on a : $n - m + f = 2$

3

3. [9] Leonhard Euler : né le 15 avril 1707 à Bâle (suisse) et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 (dans le calendrier grégorien) à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse. il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de prusse à Berlin.

1.2.3 Graphe biparti

Les graphes bipartis sont souvent utilisés pour modéliser des situations dans lesquelles il y a une séparation naturelle entre deux groupes distincts d'objets, tels que les employés et les projets dans une entreprise, les étudiants et les cours dans une université, etc.

Définition 1.17. (Graphe biparti)[9] On dit qu'un graphe $G = (V, E)$, est biparti si son ensemble de sommets peut être divisé en deux stable.⁴

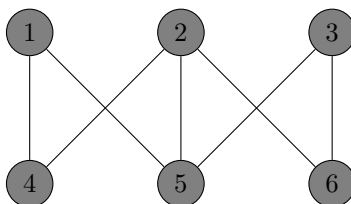


FIGURE 1.21 – graphe biparti $K_{3,3}$.

Les graphes bipartis complets sont souvent utilisés pour modéliser des situations dans lesquelles chaque objet d'un ensemble est lié à chaque objet de l'autre ensemble. Par exemple, dans un réseau de transport, chaque ville peut être reliée à chaque port par un transporteur de marchandises.

Définition 1.18. (Graphe biparti complet) un graphe est dit biparti complet (ou encore est appelé une biclique) s'il est biparti et chaque sommet du premier ensemble est relié à tous les sommets du second ensemble. Plus précisément, il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles U et V telle que chaque sommet de U est relié à chaque sommet de V . Si le premier ensemble U est de cardinal m et le second ensemble V est de cardinal n , le graphe biparti complet est noté $K_{m,n}$ [1].

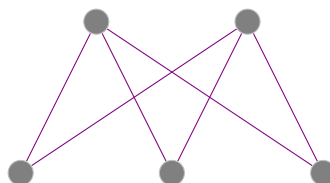


FIGURE 1.22 – $K_{3,2}$ graphe biparti complet.

1.2.4 Graphe régulier

Les graphes réguliers un type important où chaque sommet a le même degré. Leur étude est essentielle pour comprendre leurs propriétés mathématiques et leurs algorithmes spécifiques. Par exemple, la marche aléatoire sur un graphe régulier peut être utilisée pour trouver des chemins et des cycles dans le graphe. En outre, les graphes réguliers sont utilisés dans la théorie des codes correcteurs d'erreurs, où ils sont utilisés pour construire des codes linéaires à haute redondance.

4. • Un stable est un sous ensemble de sommets $S \subseteq V$ deux à deux non adjacents.

Définition 1.19. (Graphe régulier)[9] Un graphe régulier, est un graphe dont les degrés des sommets sont tous égaux. Ainsi on dit qu'un graphe est k -régulier pour tout sommet v on a $d(v) = k$.

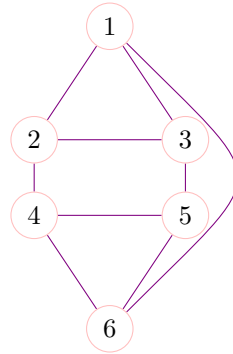


FIGURE 1.23 – graphe régulier $d(v) = 3$.

1.2.5 Les arbres

Les arbres sont des graphes non orientés connexes sans cycles utilisés pour représenter des structures hiérarchiques, des relations de dépendance, des arbres généalogiques, des structures de données et d'autres domaines où la notion de hiérarchie et de connexion est importante.

Les propriétés et les caractéristiques des graphes arbres ont été largement étudiées et utilisées dans divers domaines par exemple la théorie des graphes et l'informatique.

Définition 1.20. (Arbre)[9] On appelle arbre, qu'on note $T = (V, E)$, tout graphe simple connexe et sans cycle (On appelle racine tout sommet r tel que tout autre sommet peut être atteint à partir de r par un chemin).

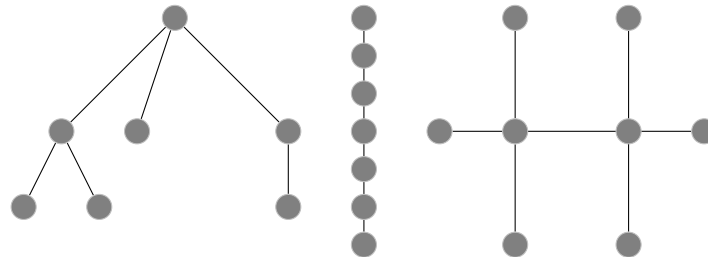


FIGURE 1.24 – Des exemples d'arbres.

Définition 1.21. (Forêt)[9] Une forêt, est un graphe non connexe et sans cycle. c'est à dire que chaque composante connexe est un arbre.

Définition 1.22. (Arborescence)[9] Dans le cas orienté, on parle d'arborescence, c'est à dire une arborescence est un arbre orienté ayant une racine⁵.

Définition 1.23. (étoile(stars)) [3] le graphe en étoile S_n , est un arbre à $n + 1$ sommets tel qu'un sommet, appelé noeud central, a un degré n et que les autres sommets ont un degré 1.

5. On appelle racine tout sommet r tel que tout autre sommet peut être atteint à partir de r par un chemin.

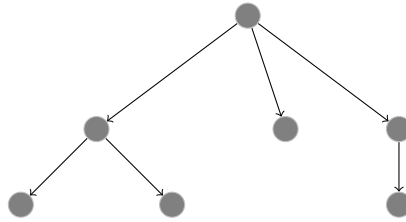


FIGURE 1.25 – Exemple d'arborescence.

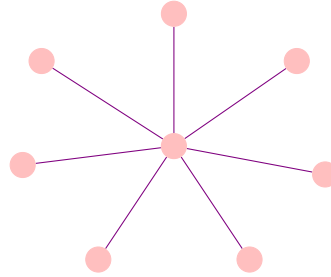


FIGURE 1.26 – graphe étoile S_7 . (Certains auteurs l'indexent comme S_8).

1.3 Opérations sur les graphes

Dans cette partie, on présente quelques opérations qui peuvent être effectuées sur les graphes. Parmi celles-ci, on cite la suppression d'une arête et d'un sommet, la contraction, l'union de deux graphes, leur intersection et produit de graphes (directe et cartésien).

1.3.1 Suppression et Contraction

Définition 1.24. (La suppression d'une arête)[9] La suppression d'une arête n'engendre que la suppression de celle-ci .

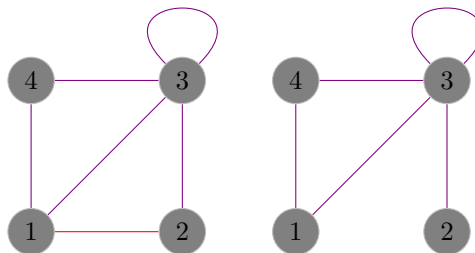


FIGURE 1.27 – Suppression de l'arête 1-2.

Définition 1.25. (La suppression d'un sommet)[9] La suppression d'un sommet engendre la suppression des arêtes qui lui sont incidentes .

Définition 1.26. (La contraction d'une arête)[9] La contraction d'une arête est la suppression de celle-ci en fusionnant les deux extrémités.

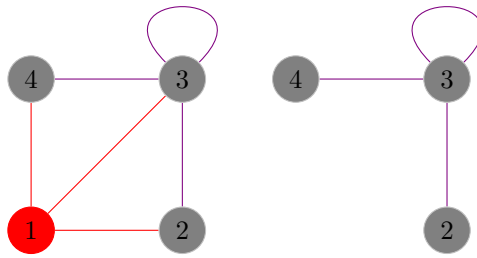


FIGURE 1.28 – Suppression de sommet 1.

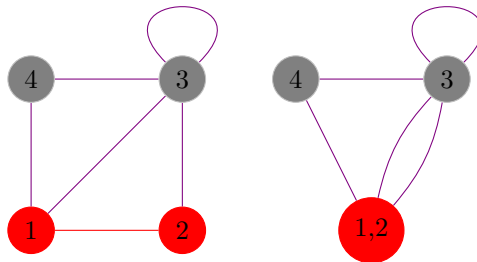


FIGURE 1.29 – Contraction de l'arête 1 – 2.

1.3.2 Union et Intersection

Définition 1.27. (Union)[9] L'union entre 2 graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, ($G = G_1 \cup G_2$) est un graphe avec : $V = V_1 \cup V_2$ et $E = E_1 \cup E_2$.

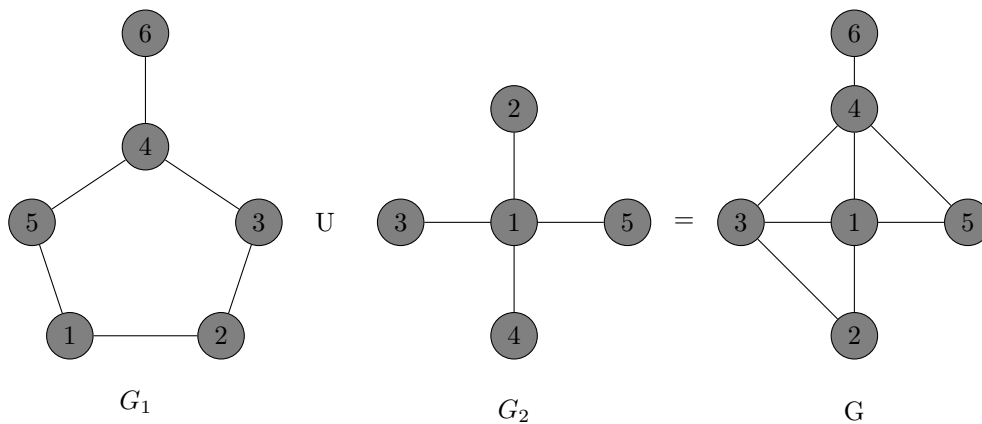


FIGURE 1.30 – G est l'union des deux graphes G_1 et G_2 qu'on note $G_1 \cup G_2$.

Définition 1.28. (Intersection)[9] L'intersection entre 2 graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, ($G = G_1 \cap G_2$) est un graphe avec : $V = V_1 \cap V_2$ et $E = E_1 \cap E_2$.

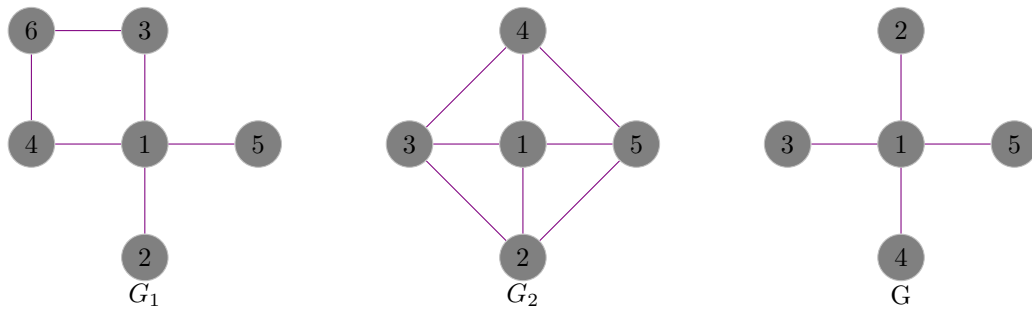


FIGURE 1.31 – G est l'intersection des deux graphes G_1 et G_2 qu'on note $G_1 \cap G_2$.

1.3.3 Produit de graphes

Dans cette partie, on présente le produit de graphe (directe et cartésien), tous les définitions et propriétés dans [9].

produit direct :

Définition 1.29. Soient deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Le produit direct ou croisé de G_1 et G_2 , noté $G_1 \times G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \times V_2$ et dont deux sommets $u = (u_1, v_1), v = (u_2, v_2)$ sont adjacents si et seulement si :

$$\begin{cases} u_1 u_2 \in E_1 \\ \text{et} \\ v_1 v_2 \in E_2 \end{cases}$$

En d'autres termes, deux sommets de $G_1 \times G_2$ sont, adjacents si et seulement si chaque deux composantes appartenant au même graphe sont adjacents.

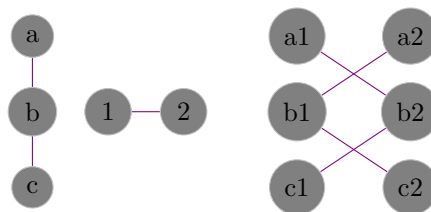


FIGURE 1.32 – Produit direct de deux graphes G_1 et G_2 tel que $G = G_1 \times G_2$.

produit cartésien :

Définition 1.30. Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Le produit cartésien ou carré de G_1 et G_2 , noté $G_1 \square G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \times V_2$ et dont deux sommets $u = (u_1, v_1), v = (u_2, v_2)$ sont adjacents si :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 \text{ et } v_1 v_2 \in E_2 \\ \text{ou} \\ v_1 = v_2 \text{ et } u_1 u_2 \in E_1 \end{cases}$$

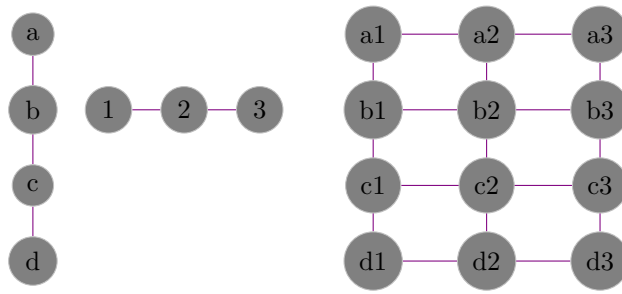


FIGURE 1.33 – Produit cartésien de deux graphes G_1 et G_2 tel que $G = G_1 \times G_2$.

Un autre exemple de produit cartésien entre un cycle et une clique ($C_4 \times K_3$) :⁶

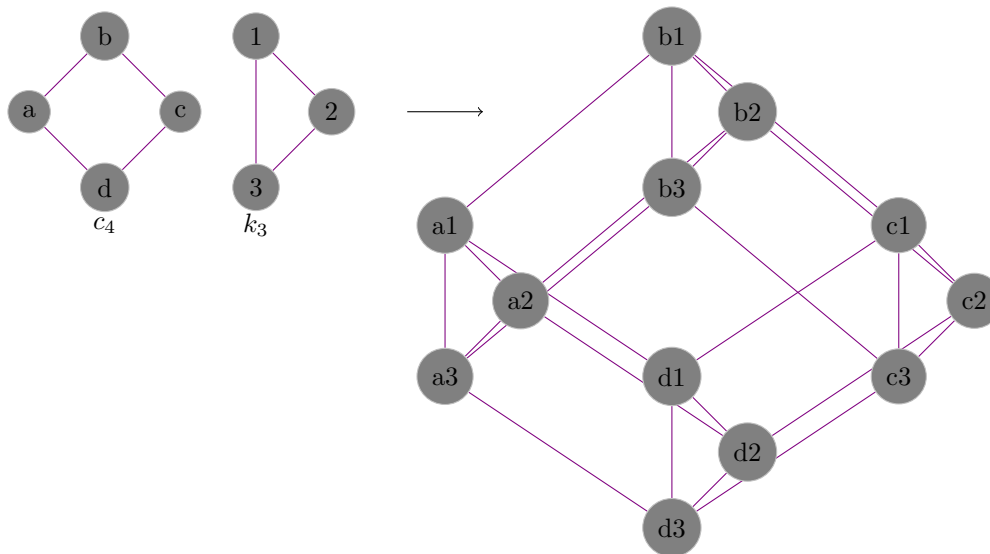


FIGURE 1.34 – Représentation de produit cartésien entre un cycle C_4 et une clique K_3 tel que $C_4 \times K_3$.

Propriétés 1. on à :

- **La commutativité :**

Le produit cartésien est commutative. En d'autres termes, on noté [9] :

$$G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$$

- **L'associativité :**

Le produit cartésien est associative, En d'autres termes, on noté [9] :

$$(G_1 \times G_2) \times G_3 \cong G_1 \times (G_2 \times G_3)$$

- **La connexité :**

Le produit cartésien $G_1 \times G_2$, est connexe si et seulement si G_1 et G_2 sont connexe [9].

- **Propriétés : Le degré d'un sommet :**

Le degré d'un sommet du produit cartésien, est égale a la somme des degrés de ses coordonnées [9].

- **Le diamètre :**

Soit $H = G_1 \times G_2$, le diamètre D_H du $G_1 \times G_2$ est la somme des diamètres de G_1 et G_2 [9].

6. Clique : est un sous-graphe complet.

1.3.4 Graphes résultant du produit cartésien :

- **Hypercube :**

Définition 1.31. [9] L'hypercube de dimension n ou le n -cube noté Q_n , est le graphe de 2^n sommets qui peuvent être considérés comme étant tous les vecteurs booléens sur $\{0, 1\}^n$, et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs associés à ces sommets diffèrent exactement en une seule composante.

Notons que $Q_0 = K_1, Q_1 = K_2$ et que d'une manière générale, Q_n peut être défini récursivement en utilisant le produit cartésien par :

$$Q_{n+1} = Q_n \times K_2.$$

$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2.$$

$$Q_{n+m} = Q_n \times Q_m.$$

Il est donc clair que $Q_n (n \geq 1)$ est isomorphe à⁷

$$K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2.$$

et donc

$$Q_{n+d} = Q_n \times Q_d.$$

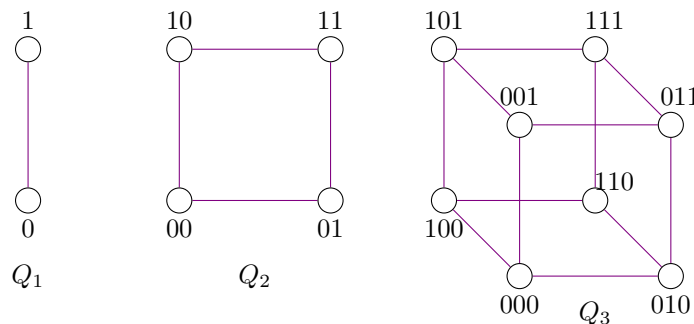


FIGURE 1.35 – Les premiers hypercubes.

- **Graphe de Hamming :**

Définition 1.32. [9] Un graphe de Hamming, est un produit cartésien de cliques de tailles quelconques. Un graphe de Hamming produit de d cliques de taille q est noté $H(d, q)$, Nombre des sommets q^d . Nombre d'arêtes $\frac{d(q-1)q^d}{2}$.

- Distribution des degrés $d(q-1)$ régulier. L'hypercube de dimension d est donc le cas particulier du graphe de Hamming $H(d, q)$.

7. Isomorphe entre deux graphes est une fonction conserve l'adjacence et la non adjacence.

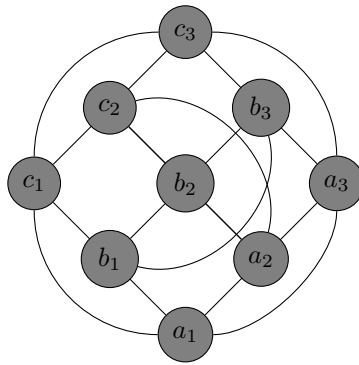


FIGURE 1.36 – Graphe de Hamming $H(3, 3) = K_3 \times K_3$.

Chapitre 2

Problème de décomposition des graphes

La décomposition des graphes est une technique importante et très active avec de nombreuses applications pratiques dans des domaines tels que l'informatique, théorie des réseaux, les réseaux de communication, la biologie, la physique et la chimie. Elle peut aider à résoudre des problèmes complexes (**NP-complet**) et à mieux comprendre les propriétés des systèmes qui peuvent être modélisés sous forme de graphes. La décomposition des graphes est l'étude de la façon dont un graphe peut être décomposé et divisé en *sous-graphes* plus simples.

Deux questions ont été posées lors de la préparation de ce manuscrit :

Question 1. *Quel est l'intérêt de la décomposition des graphes ?*

Question 2. *Quand est ce qu'on peut décomposer un graphe ?*

Parmi les problèmes les plus courants pour la décomposition des graphes, nous avons le problème des 15 écolières, également connu sous le nom de problème de Kirkman. C'est un problème mathématique classique qui a été formulé par Thomas Kirkman en 1850.

Le problème consiste à placer 15 écolières dans trois rangées de cinq, de manière à ce que chaque écolière soit dans une rangée avec deux autres écolières seulement une fois. Autrement dit, chaque écolière doit être en rangée avec exactement deux autres écolières, et chaque paire d'écolières doit être dans la même rangée exactement une fois.

Le problème est intéressant car il met en évidence les difficultés de trouver une solution pour un problème apparemment simple. Il est également intéressant car il peut être résolu en utilisant des concepts de la théorie des graphes.

En effet, on peut modéliser le problème en utilisant un graphe où chaque écolière est représentée par un sommet et chaque rangée par une couleur. Les arêtes du graphe relient les sommets correspondant à des écolières qui sont dans la même rangée.

Le problème de Kirkman revient à chercher un circuit hamiltonien dans ce graphe. Un circuit hamiltonien est un chemin qui passe par tous les sommets du graphe une seule fois.

En résolvant le problème de Kirkman, on peut trouver une configuration des rangées qui satisfait toutes les contraintes du problème. La solution au problème de Kirkman est un arrangement des écolières en trois rangées de cinq qui satisfait toutes les contraintes du problème.

2.1 Problème de décomposition dans les graphes

Dans cette partie, on présente la définition générale du problème de la décompositions , Il existe plusieurs types de décompositions de graphes. Par exemple, la décomposition en arborescences est utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation de flots de réseau, tandis que la décomposition en cycles est utilisée pour résoudre des problèmes de parcours eulérien...etc.

Définition 2.1. Une décomposition $D = \{H_1, \dots, H_k\}$ d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sous-graphes de G , notées H_i ($i = 1 \dots k$) deux à deux arête disjoint (edge disjoint) qui couvrent l'ensemble des arêtes de G . c'est à dire les sous graphes doit vérifier les deux condition suivante :

1. $G = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$.
2. pour tout $i \neq j$ et $E(H_i) \cap E(H_j) = \phi$ (graphe null) .

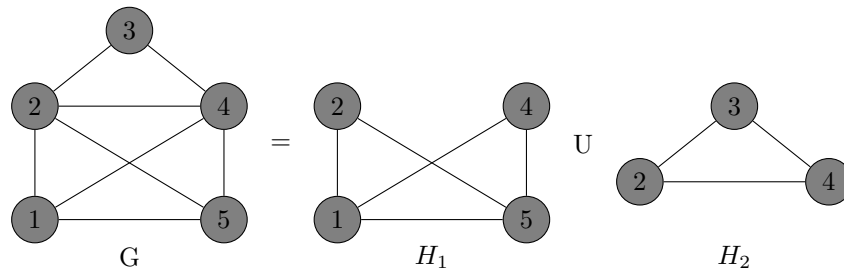


FIGURE 2.1 – Exemple de décomposition d'un graphe simple.

2.1.1 Les application de la décomposition des graphes

La recherche sur la décomposition des graphes a commencé par un résultat de Walecki en 1890 concernant l'existence d'une décomposition hamiltonienne d'un graphe complet avec un nombre impair de sommets et de nombreux problèmes ouverts sont apparus par la suite. Comme la plupart des domaines de recherche, la décomposition des graphes a connu une croissance exponentielle et les chercheurs sont devenus de plus en plus spécialisés. Par conséquent, pour le même type , nous pouvons trouver plusieurs résultats sur différents graphes et pour le même graphe, nous avons différents types de décompositions possibles. La décomposition des graphes a de nombreuses applications dans différents domaines, tels que : la théorie des réseaux , les théories de la conception et du graphisme , la géométrie, la théorie du codage et évidemment la théorie des graphes , ainsi que d'autres domaines importants . Cela a motivé les chercheurs à développer intensivement ce domaine. Les résultats sur la décomposition des graphes sont appliqués dans un large éventail d'applications telles que l'analyse des structures, la tolérance aux pannes dans l'architecture des réseaux, la détection des motifs géométriques et des textures dans la conception graphique, la décomposition des graphes en motifs spécifiques, le résumé et la compression des graphes, la similarité des graphes et la correspondance des sous-graphes, l'étude des propriétés des grands graphes... et bien d'autres applications encore. Pour avoir une idée générale de l'utilité du concept de décomposition des graphes dans la vie réelle et pour comprendre son importance, nous nous concentrons sur trois applications différentes qui utilisent la décomposition des graphes[3].

Tolérance aux pannes : La tolérance aux pannes est la propriété qui permet à un système de poursuivre correctement ses différentes opérations même en cas de défaillance d'un ou de plusieurs de ses composants. La tolérance aux pannes est souvent liée à l'architecture décomposable par cycle hamiltonien. La décomposition hamiltonienne vise à trouver tous les cycles disjoints où chacun est un cycle de graphe à travers un graphe G qui visite chaque sommet exactement une fois. Ce type de décomposition a une application directe dans le domaine des réseaux pour avoir des propriétés de tolérance aux fautes . de communication dans les réseaux informatiques. Ainsi, en cas de défaillance de communication dans un circuit, un autre circuit peut être utilisé. En d'autres termes, si le lien entre deux stations (ou nœuds) différentes du réseau est rompu, nous avons la possibilité d'utiliser un autre lien. Toutefois, d'autres constructions sont également utilisées comme modèle dans les réseaux tolérants aux pannes, comme l'architecture arborescente , l'architecture en étoile et l'architecture multipartite complète[3].

Design combinatoire : Un autre domaine de recherche qui utilise une décomposition de graphe est la construction combinatoire dans la théorie des dessins. Ce domaine de recherche est très vaste et aborde de nombreuses questions fondamentales basées sur l'arrangement d'éléments en sous-ensembles satisfaisant certaines propriétés . Par exemple, dans la théorie des dessins, nous associons le nom de dessins menottés à la décomposition en chemins et le nom de dessins résolubles à la décomposition en étoiles. Ces deux décompositions sont les plus utilisées dans ce domaine, mais nous trouvons également un grand nombre de problèmes de conception combinatoire qui peuvent être décrits en termes d'autres types de décomposition de graphes. Parmi les problèmes classiques de conception combinatoire, on trouve les problèmes de schéma d'organisation combinatoire d'index et de fichiers . Il s'agit de trouver un schéma d'organisation de fichiers approprié dans les systèmes de bases de données . Il existe différentes organisations de fichiers de données utilisées dans un environnement de base de données. En utilisant la décomposition de graphe, l'idée est de modéliser l'ensemble des fichiers de données par un graphe et de le décomposer en sous-graphes spécifiques pour donner une telle organisation[3].

Analyse des réseaux sociaux : Le concept de réseaux sociaux est en plein essor depuis l'importance de l'étude des interactions sociales et des sciences du comportement. Un réseau social peut être représenté par un graphe composé d'un ensemble de sommets correspondant aux acteurs et d'un ensemble d'arêtes représentant les relations entre ces acteurs. Un petit réseau social peut être visualisé directement par son graphe correspondant, mais les réseaux sociaux plus importants peuvent être plus difficiles à visualiser et à analyser . Dans cette perspective, il existe différents outils et techniques pour étudier les modèles de relations qui relient les acteurs sociaux dans les réseaux sociaux. La décomposition des graphes est une technique particulière qui nous aide à étudier et à analyser ces réseaux sociaux. Par exemple, la décomposition en étoile est largement utilisée pour identifier les principaux acteurs et interactions dans les réseaux sociaux. Il suffit de décomposer le réseau en étoiles et de sélectionner toutes les étoiles ayant un degré maximal. La décomposition en cliques peut être utilisée pour détecter les communautés dans les réseaux sociaux. En outre, d'autres décompositions de graphes peuvent également être utilisées pour trouver un ensemble de personnes dans un réseau social. être utilisées pour trouver un ensemble de personnes ou de groupes de personnes ayant un certain type de contacts ou d'interactions spéciales entre eux. Il existe plusieurs documents de recherche importants et livres importants dans ce sens, auxquels nous pouvons nous référer.[3]

2.1.2 Condition pour la décomposition

En abordant ce problème de décomposition d'un graphe quelconque G en sous graphes $H_i, 1 \leq i \leq k$, il est naturel de poser la question suivante :

Quelles conditions les sous graphes H_i doivent satisfaire pour que G admette une décomposition ?

Pour décomposer un graphe général G , les deux conditions fondamentales nécessaires sont les suivantes[4] :

- (1) La taille des facteurs doit correspondre à la taille de G . Si tous les facteurs sont des copies de H , $|E(H)|$ divise $|E(G)|$.
- (2) Les degrés des facteurs doivent correspondre aux degrés de G . Si G est r -régulier et que tous les facteurs sont s -réguliers, alors s divise r .

Parfois, ce sont les seules restrictions nécessaires.

Conjectures de décomposition : Lorsqu'un ensemble de graphes satisfait aux deux conditions de base pour décomposer un graphe G , il peut ne pas être clair si une telle décomposition existe réellement. C'est le thème de nombreuses conjectures non résolues sur les décompositions. En conséquence de la caractérisation des graphes eulériens, nous savons que tout graphe avec tous les degrés pairs se décompose en cycles. Cependant, le théorème ne donne aucune information sur les longueurs ou le nombre de cycles. De même, n'importe quel graphe peut être décomposé en un certain nombre de chaînes[4].

Conjecture 1 (Gallai's [4]). *Chaque graphe connexe avec ordre n peut être décomposé en $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ chemins.*

Conjecture 2 (Hajos 1968[4]). *Chaque graphe avec ordre n et tous les degrés pairs se décompose en cycles $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Théorème 2.1 (Lovasz[4]). *Chaque graphe avec ordre n se décompose en $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ chaînes et cycles.*

Pour qu'un graphe se décompose en cycles hamiltoniens, il doit être régulier avec un degré pair. Ce n'est pas suffisant quand ce degré est petit (le graphe peut même ne pas être connecté). Le théorème de Dirac dit que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ implique que G contient un cycle hamiltonien. Étonnamment, le même degré dans les graphes réguliers peut garantir une décomposition hamiltonienne [4].

Conjecture 3 (Décomposition Hamiltonien Conjecture-Nash-William [4]). *Si G est un graphe r -régulier, $r \geq \frac{n}{2}$, alors G a une décomposition en cycles hamiltoniens et au plus un couplage parfaite.*

2.2 Les différents types de décomposition

Dans cette section, nous allons présenter des décompositions de graphes bien connues, à savoir : la décomposition simple et la multi-décomposition des graphes.

On parle de décomposition simple lorsque les sous graphes sont identiques, par contre dans la multi-décomposition les sous-graphes peuvent être différents.

Par ailleurs, on distingue le type de décomposition par le type des sous graphes H_i . C'est à dire si les sous-graphes représentent des cycles alors on parle de décomposition en cycles.

2.2.1 Décomposition des sommets

La décomposition des sommets consiste à décomposer un graphe en un ensemble de sous-graphes tels que chaque sommet du graphe d'origine appartienne exactement à un sous-graphe. Il existe plusieurs types de décompositions de sommets, qui peuvent être utilisés pour résoudre différents types de problèmes. Par exemple, la décomposition en cliques consiste à décomposer un graphe en un ensemble de cliques, c'est-à-dire des sous-graphes où chaque paire de sommets est reliée par une arête. Cette décomposition peut être utilisée pour résoudre des problèmes de coloration de graphes, où l'objectif est de colorer les sommets d'un graphe de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs distinctes. D'autres types de décompositions de sommets incluent la décomposition en étoiles.

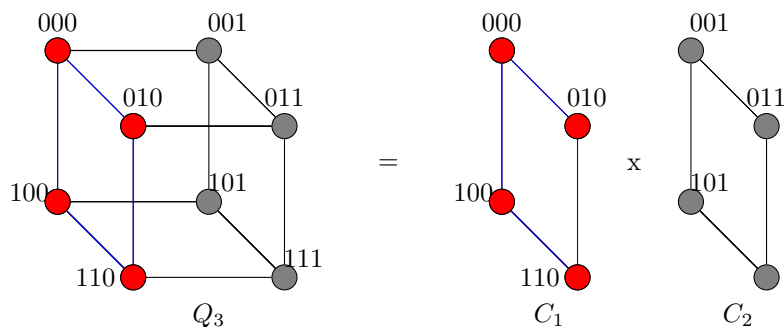


FIGURE 2.2 – Exemple de décomposition en sommets C_4 de Q_3 avec l'ensemble des sommets en rouge.

2.2.2 Décomposition des arêtes

La décomposition des arêtes consiste à décomposer un graphe en un ensemble d'arêtes appartenant chacune à un unique sous-graphe. Cette décomposition peut être utilisée pour diverses applications, telles que la construction d'arbres couvrants minimums, la résolution de problèmes de transport, ou la planification de trajets optimaux dans un réseau. Plusieurs algorithmes ont été développés pour la décomposition des arêtes, tels que l'algorithme de Fleury ou l'algorithme d'Edmonds. La décomposition des arêtes est également liée à la décomposition des sommets et à la théorie de la coloration des graphes.

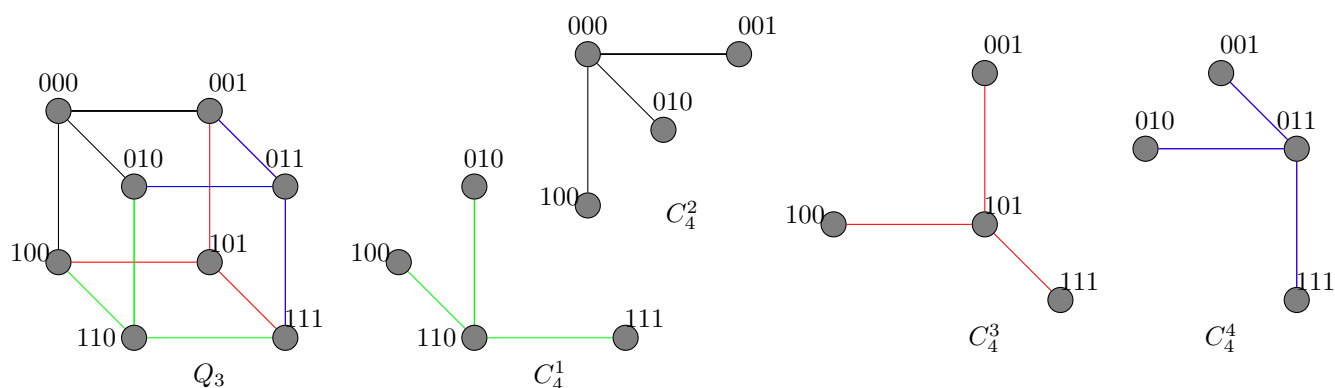


FIGURE 2.3 – Exemple de décomposition des arêtes disjointes S_4 de Q_3 avec l'ensemble des arêtes $E = Q_n$.

2.2.3 Décomposition simple des graphes

La H-décomposition de G vise à partitionner l'ensemble des arêtes de G en copies disjointes des arêtes de H . En d'autres termes, elle consiste à décomposer un graphe d'entrée $G = (V, E)$ en une collection de sous-graphes H_1, H_2, \dots, H_k , tels que chaque arête de G appartient à exactement un sous-graphe $H_i : 1 \leq i \leq k$. Notez que la décomposition du graphe G signifie qu'il n'y a pas d'arêtes restantes et que toutes les arêtes doivent appartenir à un seul sous-graphe. Si G a une H-décomposition, alors nous dirons que G est H-décomposable. En raison des nombreuses applications en informatique, une recherche intensive sur la décomposition simple a été effectuée sur de nombreux sous-graphes spéciaux. Parmi les exemples de décomposition simple les plus connus, on peut citer la décomposition en étoile, la décomposition en chemin et la décomposition en cycle[3].

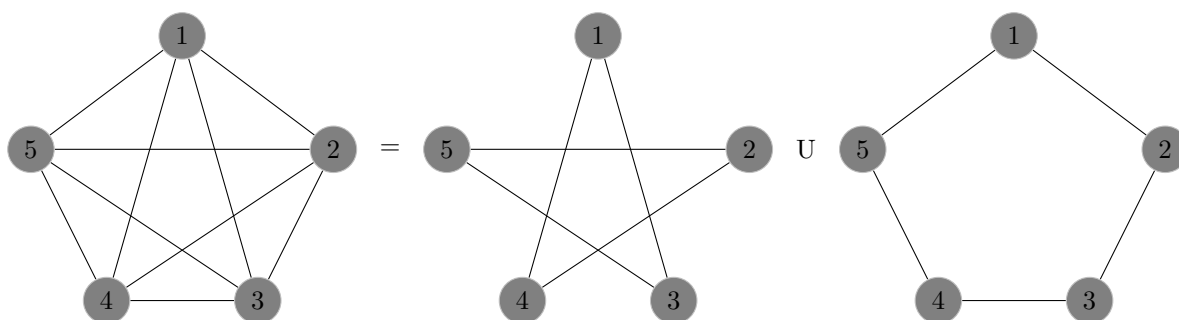


FIGURE 2.4 – Exemple de P_5 -décomposition de K_5 .

l'exemple, la figure 2.4 présente la décomposition P_5 de K_5 . La condition nécessaire évidente que K_5 doit avoir pour admettre une décomposition P_5 est que la taille de K_5 doit être un multiple de la taille de P_5 . Ainsi, par exemple, K_6 n'admet pas une décomposition P_5 puisque la condition nécessaire n'est pas satisfaite. De plus, en fonction du type de décomposition pour le graphe $G = K_5$, des conditions supplémentaires peuvent être considérées.

2.2.4 Multi-décomposition des graphes

Une décomposition (H, F) d'un graphe G consiste à trouver une partition de l'ensemble des arêtes de G en copies isomorphes disjointes des arêtes de H et F en utilisant au moins une copie de chacune.

Formellement, elle consiste à décomposer un graphe d'entrée $G = (V, E)$ en une collection de sous-graphes de deux types H et F comme suit : $H_1, H_2, \dots, H_k, F_1, F_2, \dots, F_l$, de sorte que chaque arête de G n'appartienne qu'à un seul sous-graphe. $H_i : 1 \leq i \leq k$ ou $F_i : 1 \leq i \leq l$. Si G a une (H, F) -décomposition, nous disons que G est (H, F) -décomposable (ou (H, F) -multi-décomposable). Comme exemple et pour avoir un point de vue de comparaison avec une décomposition simple, nous décomposons le graphe K_4 en utilisant la sous-section ci-dessus en cycles et étoiles. Cette décomposition est appelée (C_4, S_4) -multi-décomposition et elle est présentée à la figure suivante [3].

Remarque :

Nous allons maintenant nous intéresser de plus près à quelques problèmes de décomposition spécifiques qui ont plus d'impact et sont étudiés de manière plus intensive dans la littérature, puis nous présenterons une revue des résultats existants sur chaque type de décomposition. Notez que nous nous concentrons uniquement sur les résultats qui traitent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe soit décomposable en un type

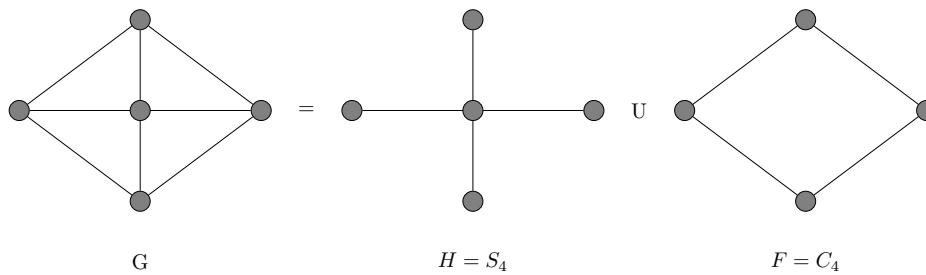


FIGURE 2.5 – Multi - décomposition d'un graphe simple .

particulier de sous-graphes.

Lorsque nous considérons le problème de la H-décomposition de G, de nombreuses questions peuvent être posées, mais le problème le plus naturel est de trouver les conditions sur G pour lesquelles la H-décomposition existe. Cela nous permet de trouver les propriétés requises du graphe pour avoir une telle décomposition [3].

Considérons le graphe complet $G = K_n$. Le graphe complet est le graphe le plus couramment étudié dans les problèmes de décomposition. Il est facile de voir que pour tout sous-graphe H d'ordre au plus n, les deux conditions suivantes sont nécessaires pour décomposer K_n en H [3] :

1. $\frac{n(n-1)}{2}$ est un multiple du nombre d'arêtes de H.
2. $n - 1$ est un multiple du plus grand diviseur commun des degrés des sommets de H.

En d'autres termes, la taille de K_n doit être un multiple de la taille du sous-graphe H et le degré de K_n doit être un multiple du plus grand diviseur commun des degrés des sommets de h. Il n'est pas difficile de trouver les conditions nécessaires, mais le vrai problème et la partie la plus difficile sont d'établir les conditions suffisantes [3].

Dans [25], Wilson a énoncé son théorème fondamental sur l'existence d'une H-décomposition du graphe complet K_n pour tout H fixé, à condition que le nombre d'arêtes de K_n soit divisible par le nombre d'arêtes de H et que n soit suffisamment grand. Depuis lors, les problèmes de décomposition sont devenus un domaine de recherche actif. Plusieurs travaux de recherche importants ont été consacrés à diverses décompositions de différents graphes. Nous nous concentrerons sur trois décompositions, à savoir : les chemins, les cycles et les étoiles. Pour le graphe complet K_n , la solution du problème correspondant pour $H = P_k$ a été prouvée par Tarsi [23].

2.2.5 Décomposition en chaînes

La décomposition en chaîne consiste à diviser un graphe en plusieurs chaînes, qui sont des parcours simples du graphe (c'est-à-dire qu'ils ne passent pas deux fois par le même sommet). Cette méthode peut être utilisée pour résoudre de nombreux problèmes en théorie des graphes, notamment pour trouver des solutions optimales pour des problèmes de couplage (problème du couplage dans les graphes bipartis), de coloration et de planarité.

Dans le cas du couplage, la décomposition en chaîne permet de déterminer si un graphe biparti contient un couplage, qui est un ensemble d'arêtes disjointes telles que chaque sommet est adjacent à une seule arête de l'ensemble. Si un graphe biparti admet un couplage, alors il peut être décomposé en chaînes.

Définition 2.2 (décomposition en chaînes [6]). Une décomposition en chaînes de G est un ensemble de chaînes simples $P = p_1, p_2, \dots, p_s$ tel que chaque arête de G appartienne à une et une seule de ces chaînes.

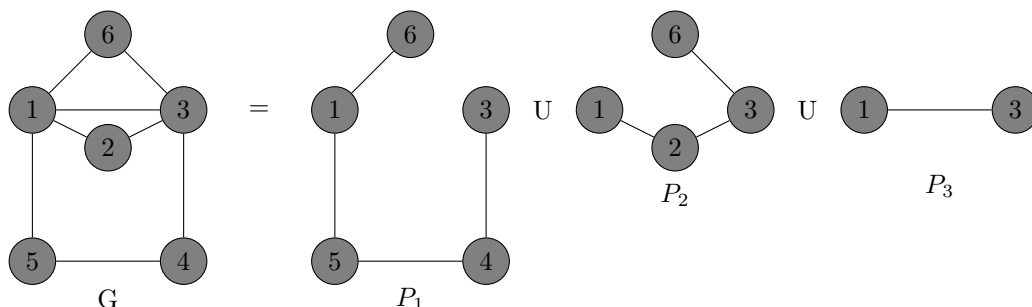


FIGURE 2.6 – décomposition en chaîne.

2.2.5.1 Graphes P_k -décomposables en chaînes

Soit $G = (V, E)$ un graphe, on dit que G est P_k -décomposable s'il est possible de partitionner ses arêtes en chaînes de longueur k , nous donne deux propriétés équivalentes :

Théorème 2.2. [6] soit $G = (V, E)$ un graphe cubique, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) G est P_3 -décomposable.
- (ii) G admet un couplage parfait.

Théorème 2.3. [6] Soit $G = (X, E)$ un graphe k -régulier, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) G biparti.
- (ii) G admet une P_k -décomposition .

2.2.5.2 Décomposition d'un graphe complet K_n

Les premières études étant sur ce type de graphe.

La décomposition d'un graphe complet K_n en copies de P_{k+1} chaînes consiste à diviser l'ensemble des arêtes du graphe complet en un ensemble de chaînes, où chaque chaîne est une séquence ordonnée d'arêtes du graphe.

Pour décomposer un graphe complet en chaînes, voici une approche possible :

- 1)- **Ordre des arêtes** : Choisissez un ordre arbitraire pour les arêtes du graphe complet. Cet ordre sera utilisé pour construire les chaînes.
- 2)- **Construction des chaînes** : Parcourez l'ordre des arêtes, en ajoutant chaque arête à la chaîne en cours de construction. Si l'ajout de l'arête crée une intersection avec une arête déjà présente dans la chaîne, fermez la chaîne existante et commencez une nouvelle chaîne. Sinon, continuez à ajouter des arêtes à la chaîne en cours.
- 3)- **Fermeture des chaînes** : Une fois que toutes les arêtes ont été traitées, vérifiez si la dernière chaîne est ouverte. Si c'est le cas, fermez-la en ajoutant une arête reliant son extrémité à son point de départ.

4)- **Résultat** : Le résultat de la décomposition est un ensemble de chaînes qui couvrent toutes les arêtes du graphe complet. Chaque chaîne est une séquence ordonnée d'arête.

Il est important de noter que la décomposition des graphes complets en chaînes peut donner différents résultats en fonction de l'ordre choisi pour les arêtes. Différents ordres peuvent entraîner des décompositions différentes en termes de nombre et de longueur des chaînes.

Théorème 2.4 (Tarsi [22]). Soient k et n des entiers positifs. K_n a une P_{k+1} -décomposition si et seulement si $n \geq k + 1$ et $n(n - 1) \equiv 0 \pmod{2k}$.

Dans le cas des graphes bipartis complets on a :

Théorème 2.5. [22] Soit k un entier positif et soit m et n des entiers positifs pairs tels que $m \geq n$. $K_{m,n}$ a une P_{k+1} -décomposition si et seulement si $m \geq \lceil \frac{K+1}{2} \rceil, n \geq \lceil \frac{K}{2} \rceil, mn \equiv 0 \pmod{K}$.

2.2.6 Décomposition en cycles

La décomposition en cycle est une méthode qui consiste à diviser un graphe en plusieurs cycles, qui sont des parcours fermés du graphe. Cette méthode peut être utilisée pour résoudre certains problèmes, comme le problème du parcours eulérien et du parcours hamiltonien.

Dans le cas du parcours eulérien, la décomposition en cycle permet de déterminer si un graphe contient un parcours qui passe par chaque arête exactement une fois. Si un graphe est eulérien, alors il peut être décomposé en cycles. De même, dans le cas du parcours hamiltonien, la décomposition en cycle peut être utilisée pour déterminer si un graphe contient un parcours qui passe par chaque sommet exactement une fois.

Définition 2.3. une décomposition d'un graphe G en cycle est une décomposition (un partitionnement des arêtes d'un graphe) en un ensemble des cycles C_1, C_2, \dots, C_n (sous-graphe H_i) disjoints qui couvrent toutes les arêtes du graphe. Chaque cycle est une séquence fermée de sommets et d'arêtes du graphe, où le dernier sommet est connecté au premier sommet. Chaque sommet d'un graphe qui a une décomposition cyclique doit avoir un degré pair.

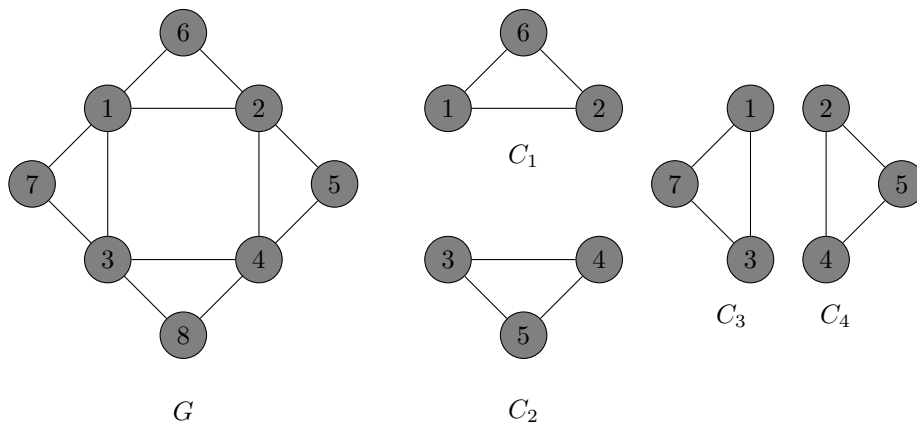


FIGURE 2.7 – décomposition de graphe G en cycle.

2.2.6.1 Théorème de décomposition des cycles de Nash-Williams

Le théorème de décomposition de Nash-Williams est un résultat important en théorie des graphes qui permet de décomposer tout cycle de manière unique en plusieurs chemins disjoints de paires de bords. Plus précisément, si G est un graphe fini et C est un cycle de G , alors il est possible de trouver une collection de chemins disjoints Q_1, Q_2, \dots, Q_k tels que chacun des bords de C est une extrémité d'un unique chemin parmi Q_1, Q_2, \dots, Q_k . En d'autres termes, le cycle C peut être décomposé en une union de chemins disjoints de paires de bords. Cette décomposition est unique à isomorphisme de graphe près, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la façon dont on représente graphiquement les différentes composantes de la décomposition. Ce théorème est très utile dans de nombreux problèmes algorithmiques.

Théorème 2.6. [24] *Un graphe admet une arête-décomposition en cycles si et seulement s'il ne contient pas de coupe impaire¹.*

Théorème 2.7. [24] *Soit T un arbre et A un ensemble de sommets dans T . Alors T possède une collection de chemins disjoints par paire, chacun joignant deux sommets de A de telle sorte que chaque sommet de A , sauf peut-être un, est l'extrémité d'un seul des chemins. Si le sommet exceptionnel de A existe, alors il n'est à l'extrémité d'aucun chemin de la collection de chemins.*

Lemme 2.1. [24] *Soit T un arbre et v un sommet de T . L'ensemble des arêtes de T peut être décomposé en chemins disjoints par paire, et ces chemins peuvent être divisés en deux classes P_1, P_2 telles que chaque sommet de T est à l'extrémité d'au plus un chemin de P_1 et d'au plus un chemin de P_2 . De plus, v n'est l'extrémité d'aucun chemin dans P_1 .*

Démonstration. Nous divisons toutes les arêtes incidentes à v en chemins de longueur 2, sauf éventuellement un chemin de longueur 1. Ces chemins appartiennent tous à P_2 . Nous répétons cet argument pour chaque composant de $T - v$ où le voisin de v joue le rôle de v et les chemins de longueur 2, 1 contenant ce sommet appartiennent à P_1 .

Exemple 2.1. *On à l'exemple suivant :*

□

Dans l'arbre T en pose $v = 4$ et nous divisons toutes les arêtes incidentes à v en chemins disjoints de longueur 2, on obtient les deux chemins suivant $\{(1, 4, 7), (8, 4, 9) \in P_2\}$, et les voisins des v sont $\{1, 7, 8, 9\}$ joues le rôle de v et les chemins de longueur 2, 1 $\{(9, 16), (8, 15), (3, 1, 2) \in P_1\}$.

Théorème 2.8. [24] *Soit G un graphe 2-arêtes connexe. Alors G contient un ensemble de cycle, noté C , tel que toute arêtes de G est contenant dans au moins un cycle de G , et au plus un nombre dénombrable dans des cycles de C .*

Lemme 2.2. [12] *Si G est pair alors par tout sommet de G passe un cycle.*

1. une coupe impair : est un ensemble d'arêtes dont la suppression divise le graphe en deux composantes connexes distinctes, où le nombre d'arêtes dans le coupe est impair. En d'autres termes, si on retire toutes les arêtes du coupe impair, le graphe se divise en deux parties disjointes avec un nombre impair de composantes connexes.

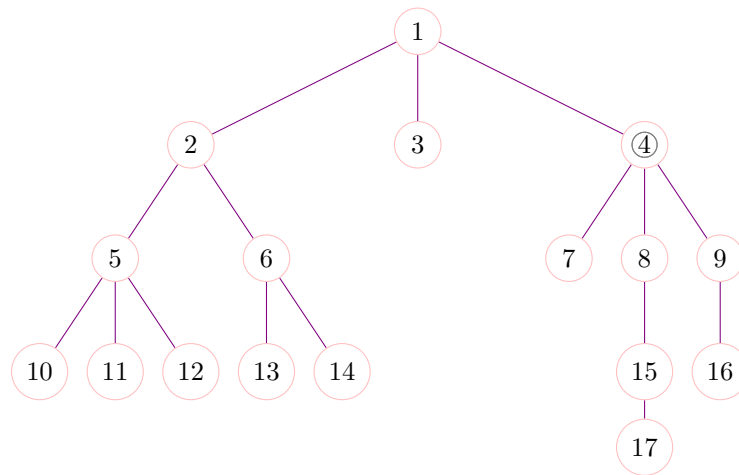


FIGURE 2.8 – décomposition en chemins disjoints par paire de l'arbre T .

Démonstration. Soit a un sommet dans G . Nous commençons à marcher, en partant de A et en prenant n'importe quel bord incident à a . a n'importe quel sommet où nous arrivons, nous pouvons toujours partir par un bord que nous n'avons pas encore utilisé, puisque si nous arrivons à un sommet b , et que nous avons déjà traversé b h fois, cela fait un total de $2h + 1$ bords au moment de l'arrivée en b . Mais le degré de b est pair, donc il doit y avoir un moyen de s'en sortir. Puisque G est fini, nous revenons finalement en a . Ainsi, nous avons trouvé un circuit dans G à travers a . \square

Théorème 2.9 (vablen 1912-13[12]). *un graphe G admet une décomposition en cycle si et seulement si G est paire, c'est à dire tout sommet a degré paire ($\forall v \in G, \deg(v) = 2k$).*

Démonstration. Chaque cycle de la décomposition en cycles contribue pour deux au degré de chaque sommet dans le cycle. Le degré de chaque sommet v dans G est la somme des degrés de v sur tous les sous-graphes H_i , donc être il doit être pair. \square

Démonstration. on a :

\Leftarrow supposons qu'il existe une décomposition en cycles de G . soit v un sommet quelconque.

deux cas se présentent :

- v est un sommet isolé ,ie $d(v) = 0$.
- v appartient à un nombre fini de cycles de la décomposition (or chacun de ces cycles)il est facile de voir que chacun de ces cycles a deux arêtes et deux seulement qui sont incidente à v . De ce fait, si k est le nombre de ces cycles alors on aura $d(v) = 2k$.

Dans les deux cas, V a un degré paire ,d'ou le résultat .

\Rightarrow on montrera la suffisance par induction sur le nombre d'arêtes.

Montrons que le résultat est vrai pour $|E(G)| = 0$ dans ce cas aucune arête n'existe, ie $d(v) = 0 \forall x \in V(G)$ d'ou le graphe est paire .

par hypothèse d'induction on supposera que le résultat est vrai pour tout graphe pair de taille inférieure à n . c'est à dire il admettent une décomposition en cycles

Soit G un graphe paire de taille m . On sait que G contient au moins un cycle (en vertu du lemme 2.2). Soit alors C le plus court cycle élémentaire dans G . Soit le graphe partiel par $G - C$ (ie on supprime les arêtes de C dans G), le graphe résultat est toujours pair, or pour hypothèse d'induction $G - C$ admet une décomposition en cycles. On peut voir qu'on a une autre décomposition de G en rajoutant le cycle élémentaire à G d'où le résultat.

□

Théorème 2.10. [12] Soit G un graphe 4-régulier. Alors G admet une décomposition en cycle ou est 2-factorisable.

Démonstration. on suppose que G est connexe sinon considérera chaque composante à part. Puisque le graphe est pair, alors il admet un cycle eulérien de longueur q , qu'on note C . Puisque $q = \frac{4p}{2} = 2p$ pair.

on colorie les arêtes de C par deux couleurs rouge et bleu en alternant.

de ce fait, chaque sommet est incident à 2 arêtes rouge et deux arêtes bleu (sauf dans le cas où il y a une boucle, qui est considérée comme un cycle de longueur 1).

enfin, nous obtenons un cycle en rouge et un autre en bleu, qui représente une 2-factorisation.

□

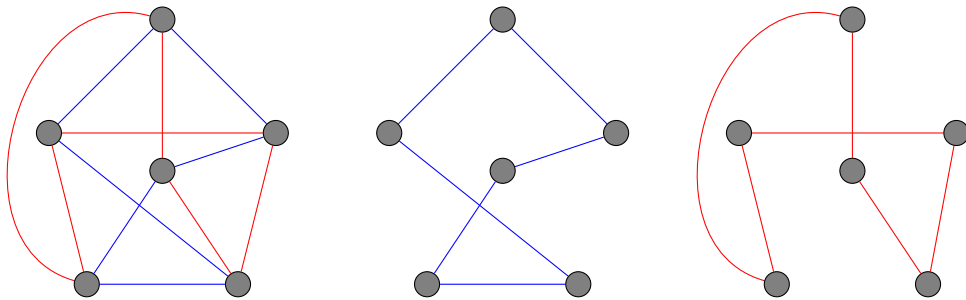


FIGURE 2.9 – 2-factorisation en rouge et en bleu.

2.2.6.2 Décomposition d'un graphe complet K_n

La décomposition d'un graphe complet est un problème classique qui consiste à décomposer un graphe complet en un certain nombre de sous-graphes, appelés cycle, de sorte que chaque arête soit contenue dans exactement un cycle.

Formellement, soit K_n le graphe complet à n sommets. Une décomposition en cycle de K_n est une collection de cycles $C = C_1, C_2, \dots, C_m$ telles que chaque arête de K_n est incluse dans un cycle de C .

Soit G un graphe régulier avec un ensemble d'arêtes $E(G)$. On dit qu'il a une décomposition hamiltonienne si l'un ou l'autre [8] :

- i) $\deg(G) = 2d$ et $E(G)$ peut être divisé en d cycles de Hamilton.
- ii) $\deg(G) = 2d + 1$ et $E(G)$ peut être divisé en d cycles de Hamilton et un couplage parfait.

Théorème 2.11. [8] tout graphe complet K_n admet une décomposition hamiltonienne pour tout n .

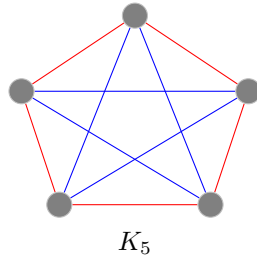


FIGURE 2.10 – Exemple de deux décomposition hamiltonienne en rouge et en bleu d'un graphe complet K_5 .

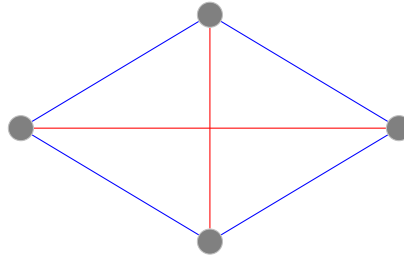


FIGURE 2.11 – Exemple de décomposition hamiltonienne en bleu et couplage parfait en rouge d'un graphe complet K_4 .

2.2.6.3 Décomposition de produit cartésien

La décomposition de produit cartésien est un problème classique qui consiste à décomposer un graphe en un produit cartésien de deux graphes plus petits. Plus précisément, soit $G = (V, E)$ un graphe et $H = (W, F)$ un autre graphe. Le produit cartésien $G \times H$ est le graphe dont les sommets sont tous les couples (v, w) avec v dans V et w dans W , et deux sommets (v_1, w_1) et (v_2, w_2) sont adjacents si et seulement si v_1 est adjacent à v_2 dans G et w_1 est adjacent à w_2 dans H .

Une décomposition de produit cartésien de G est une paire $(H, G/H)$ de deux graphes tels que H est isomorphe à un *sous-graphe* de G et G/H est isomorphe à un *sous-graphe* de H , et tel que G est isomorphe au produit cartésien $H \times G/H$.

Le problème de la décomposition de produit cartésien est de trouver une telle paire $(H, G/H)$ pour un graphe donné G , et si possible avec le plus petit graphe H possible.

Théorème 2.12 (Aubert et Schneider[8]). *Si C est un cycle et G est un graphe 4-régulier qui est décomposable en deux cycles hamiltonienne alors $C \times G$ peut être décomposé en trois cycles hamiltonienne .*

Corollaire 2.1. [8] *Si G_1 a une décomposition en n_1 cycle hamiltonienne et si G_2 a une décomposition en n_2 cycle hamiltonienne, où $n_1 \leq n_2 \leq 2n_1$ alors $G_1 \times G_2$ a une décomposition hamiltonienne .*

En plus de la conséquences si dessus nous savons aussi que le produit cartésien de n cycles de longueur différents admet une décomposition en cycle hamiltonienne plus généralement :

Corollaire 2.2. [8] *Si la collection des graphes G_1, G_2, \dots, G_p peuvent être décomposés en n cycle hamiltonienne, alors $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_p$ peut être décomposé en pn cycle hamiltonienne.*

2.2.6.4 Décomposition des hypercubes

les hypercubes sont considérés comme une classe de graphes importante, l'intérêt porté à cette classe est importante du fait de leurs application dans plusieurs domaines, tels que la théorie de l'information, la cryptographie et la théorie des codes, les topologie de calcul parallèle et d'autres des caractérisation et des propriétés combinatoires qu'elle possède. pour rappel, un hypercube d'ordre n , noté Q_n , peut être définie par les relations récursive $Q_n = Q_{n-1} \times K_1$ on \times désigne le produit cartésien et $Q_1 = K_1$. parmi les divers propriété de cette classe on a :

Proposition 1. [19] dans un hypercube Q_n , tout paire d'arêtes adjacents appartiennent exactement à un seul cycle de longueur 4.

On peut aussi dire qu'un graphe G quelconque est un hypercube si et seulement si :

- G est connexe avec $\delta(G) = n$.
- toute pair d'arêtes adjacents appartenant à un seul 4-cycle.
- la taille de G est 2^n .

décomposition évantial(fan) :

Définition 2.4. [19] Un n -fan $F_{n,a}$ est un graphe avec n cycles de longueur attachés à un sommet commun appelé sommet racine.

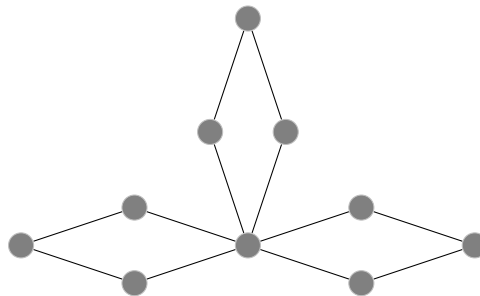


FIGURE 2.12 – Exemple de n -fan $F_{3,4}$.

Exemple dans un hypercube :

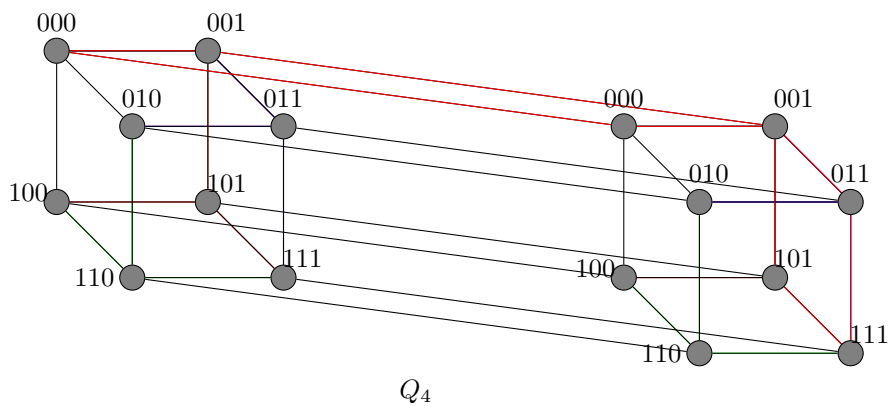


FIGURE 2.13 – Exemple de n -fan en rouge dans hypercubes Q_4 .

décomposition double éventail(n -fan) :

Définition 2.5. [19] Un double n -fan $F_{n,a}^*$ est un graphe construit en ajoutant une arête entre les deux copies d'un graphe n -fan $F_{n,a}$ à son sommet racine.

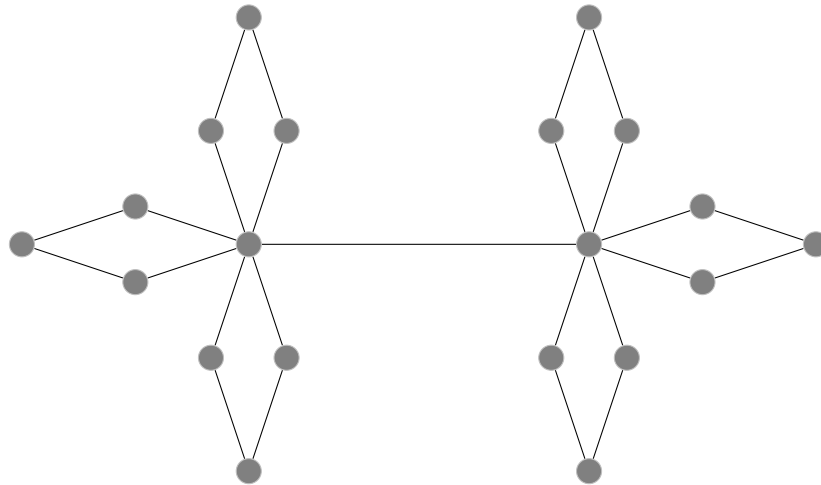


FIGURE 2.14 – Exemple de double n -fan, $F_{n,a}^*$.

Exemple dans un hypercube :

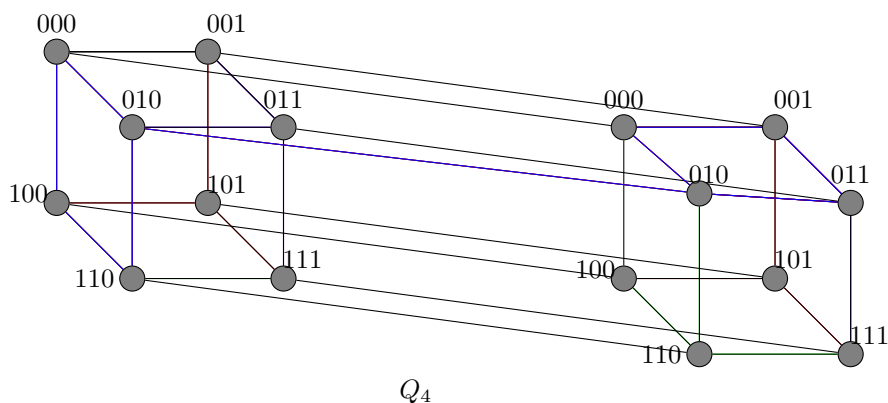


FIGURE 2.15 – Exemple de double n -fan $F_{n,a}^*$ en bleu dans un hypercube Q_n $n=2$, $a=4$.

Dans le cas des hypercubes de dimension impaire on a :

Théorème 2.13. [19] tout hypercubes Q_{2n} peut être décomposer en 4^{n-1} copies d'éventail $F_{n,4}$.

2.3 Factorisation d'un graphe G

La factorisation de graphe est une technique utilisée pour décomposer un graphe en plusieurs sous-graphes plus petits, tout en préservant certaines propriétés structurelles du graphe d'origine. Cette décomposition permet d'analyser et de comprendre la structure du graphe de manière plus détaillée.

Il existe différentes méthodes de factorisation de graphe, chacune étant adaptée à des types spécifiques de graphes ou à des objectifs particuliers. Voici quelques exemples courants de

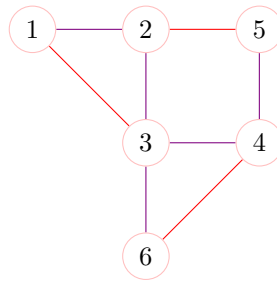


FIGURE 2.16 – couplage parfaits.

factorisations de graphe :(Factorisation en cliques , Factorisation en étoiles , Factorisation en chemins , Factorisation en arbres).

un facteur d'un graphe G est un sous-graphe couvrant , c'est-à-dire un sous-graphe qui a le même ensemble de sommets que G . Un k -facteur d'un graphe est un k -sous-graphe régulier couvrant , et une k -factorisation partitionne les arêtes du graphe en k -facteurs disjoints. Un graphe G est dit k -factorisable s'il admet une k -factorisation. En particulier, un 1-facteur est un couplage parfait , et une 1-factorisation de a k - le graphe régulier est une coloration des arêtes avec k couleurs. Un 2-facteur est une collection de cycles qui s'étend sur tous les sommets du graphe [1].

2.3.0.1 1-factorisation

Si un graphe est 1-factorisable , alors il doit s'agir d'un graphe régulier . Cependant, tous les graphes réguliers ne sont pas factorisables à 1. Un graphe k -régulier est 1-factorisable s'il a un indice chromatique k [1].

Le théorème de mariage de Hall peut être utilisé pour montrer qu'un graphe biparti k -régulier contient un couplage parfait. On peut alors supprimer le couplage parfait pour obtenir un graphe biparti $(k-1)$ -régulier, et appliquer le même raisonnement à plusieurs reprises[1].

Théorème 2.14. (Théorème de hall)[18] Soit $G = V = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti fini, ou X et Y les deux stables . Alors il est possible de recouvrir tous les sommets de X par un couplage avec des sommets de Y si et seulement si pour tout sous-ensemble W de X , le nombre de voisins $N(W)$ dans G de W est au moins égale au nombre d'éléments de W .

Remarque 2.1. Pour montrer l'existence de couplages parfaits, il suffit de montrer que X et Y ont le même nombre de sommets et qu'il existe un recouvrement de X par un couplage avec Y .

2.3.0.2 2-factorisation

Le théorème à 2-facteurs suivant, découvert par Julius Petersen , est l'un des premiers travaux en théorie des graphes. Il peut être énoncé comme suit :

Théorème 2.15 ([1]). Soit G un graphe régulier dont le degré est un nombre pair, $2k$. Alors les arêtes de G peuvent être partitionnées en k 2-facteurs arête-disjoints. Ici, un 2-facteur est

un sous-graphe de G dans lequel tous les sommets sont de degré deux, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un ensemble de cycles qui, ensemble, touchent chaque sommet exactement une fois .

Chapitre 3

Décomposition des hypercubes

Nous commençons ce chapitre par un rappel sur les hypercubes ainsi que les différentes propriétés intéressantes de cette famille de graphes. Un hypercube de dimension n est un graphe dont les noeuds représentent les coins d'un cube n -dimensionnel. Les arêtes du graphe relient les noeuds qui correspondent à des coins adjacents du cube. Par exemple, un hypercube de dimension 2 est un carré, et un hypercube de dimension 3 est un cube.

3.1 Problème de décomposition des hypercubes

les hypercubes sont considérés comme une classe de graphes importante, l'intérêt porté à cette classe est important du fait de leurs applications dans plusieurs domaines, tels que la théorie de l'information, la cryptographie et la théorie des codes, la topologie de calcul parallèle et d'autres des caractérisation et des propriétés combinatoires qu'elle possède.

Définition 3.1. [19] Pour tout entier positif n , un hypercube de n -dimension Q_n est un graphe dont l'ensemble des sommets est le suivant :

$$V(Q_n) = \{X = x_1x_2\dots x_n : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}.$$
$$Q_n = Q_{n-1} \times Q_1.$$

et l'ensemble d'arêtes $E(Q_n) = \{(X, Y) : X = x_1x_2\dots x_n, Y = y_1y_2\dots y_n \text{ et } x_i \neq y_i \text{ pour exactement un } i, 1 \leq i \leq n\}$. Nous pouvons également formuler cette définition comme suit : un hypercube Q_n est un graphe simple dont les sommets sont les n -tuples avec des entrées dans $\{0; 1\}$ et dont les arêtes sont les paires de n -tuples qui diffèrent exactement d'une position .

Un hypercube Q_n peut également être défini en termes de produit, c'est le produit cartésien de n copies de K_2 s dénoté par $Q_n = \underbrace{K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2}_n$ les lecteurs intéressés par cette classe de graphes peuvent consulter la référence [19].

Propriétés 2. [19] les propriétés suivantes :

- Dans un hypercube de dimension n , il y a 2^n sommets
- Q_n est un graphe régulier à n sommets.
- Le nombre total d'arêtes dans Q_n est $2^{n-1}n$.
- Le graphe Q_n est connexe et biparti.

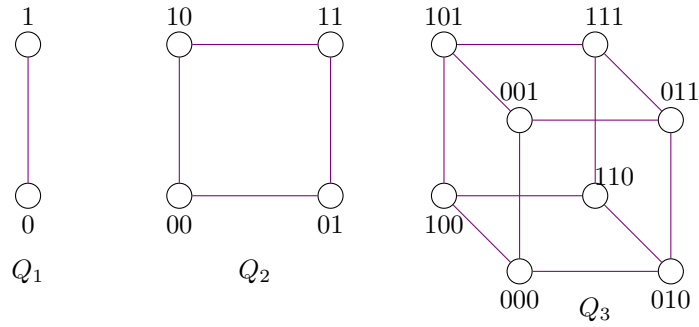


FIGURE 3.1 – Exemple des hypercube Q_n .

- Pour $1 \leq k \leq n - 1$, l'hypercube $Q_n \cong Q_k \times Q_{n-k}$ en particulier $Q_n \cong K_2 \times Q_{n-1}$.

Il existe un couplage parfait de 2^{n-1} arêtes dans Q_n . La suppression de ces arêtes génère un graphe à deux composantes, chacune étant isomorphe à Q_{n-1} . Cette opération de division est appelée décomposition canonique de Q_n et est notée $Q_n = Q_{n-1}^0 \times Q_{n-1}^1$. La construction récursive ainsi que les propriétés de découpage sont souvent utilisées pour prouver les propriétés structurelles de Q_n , et ce par induction sur n .

Définition 3.2. [19] Soit U, V des chaînes binaires de même longueur. La distance de Hamming $H(U, V)$ entre U et V est le nombre de positions où U et V diffèrent.

Définition 3.3. [19] Dans un graphe G , deux chemins (x, y) sont dits parallèles s'ils n'ont aucun sommet interne commun.

Proposition 2. [19] Les propriétés de distance suivantes sont valables pour un hypercube Q_n .

1. Pour tout $X, Y \in V(Q_n)$, $d(X, Y, Q_n) = H(X, Y)$.
2. $\text{diam}(Q_n) = n$.

Proposition 3. [19] Dans Q_n , deux arêtes adjacentes quelconques appartiennent à exactement un cycle de longueur quatre.

3.1.1 Empilement des hypercubes

Quelques définitions sont nécessaires avant de donner quelques résultats sur l'empilement.

Définition 3.4 (Empilement [1]). Un empilement d'une partie fermée X du plan euclidien dont toute intersection avec un disque est quarrable (i.e. possède une aire), est un ensemble de cercles de rayons non nuls inclus dans X dont les disques fermés associés ont les propriétés suivantes :

- 1) deux disques de l'empilement sont tangents ou d'intersection vide,
- 2) tout disque est tangent à au moins un autre.

Définition 3.5 (Recouvrement [1]). Un recouvrement d'un ensemble E est une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'ensembles dont l'union contient E , c'est-à-dire telle que tout élément de E appartient à au moins l'un des X_i .

de plus que les X_i soient des sous-ensembles de E . Dans ce cas, les X_i forment un recouvrement de E (si et seulement si leur union est égale à E , et une partition de E s'ils sont de plus non vides et deux à deux disjoints. Par exemple, pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$, la famille $(\phi, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\})$ n'est qu'un recouvrement alors que $(\{1, 2\}, \{3, 4\})$ est une partition.

Définition 3.6. [16] Un sous-graphe d'un graphe G isomorphe à un autre graphe H est appelé un plongement de H dans G .

Définition 3.7. [16] Empilement sommets-disjoint (resp.d'arêtes disjointes) de H dans G est un ensemble de plongement de H dans G de telle sorte que deux ne partagent un sommet (resp.arête).

Définition 3.8. [16] La cardinalité d'empilement P , désigné $|P|$ est le nombre de plongement dans l'empilement. A un sommet ou un arête de H est recouvert par un empilement s'il est contenu dans une certaine intégration dans l'empilement.

Définition 3.9. [16] La densité de sommet (resp densité d'arête) d'un P d'empilement de H dans G est la proportion du nombre total de sommets (resp.d'arête) de G couverts par P .

Remarque 3.1. lorsqu'il est clair quel type de densité nous considérons, nous pouvons nous référer à l'un ou l'autre de ces concepts en tant que densité. On dit que les sommets (resp. les arêtes) d'un graphe sont partitionnés par un ensemble de sous-graphes si chaque sommet (resp. arête) du graphe appartient exactement à l'un des sous-graphes. Un empilement sommets-disjoint (resp. des arêtes) de H dans G est parfait si tous les sommets (resp. les arêtes) de H sont couverts par l'empilement.

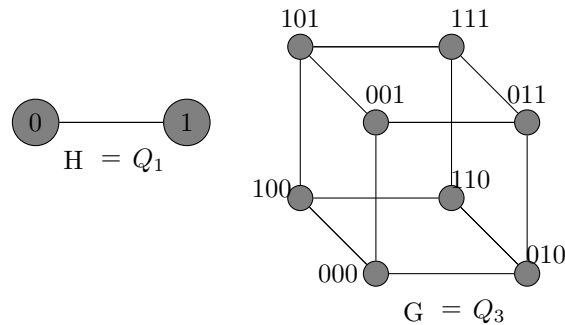


FIGURE 3.2 – Empilement parfait des sommets disjoints de H dans G $** = 10$.

3.1.1.1 Empilements des sommets disjoints

(vertex-disjoint packing) C'est une décomposition dans laquelle les sommets de l'hypercube sont partitionnés en ensembles disjoints, appelés empilement, de telle sorte que chaque sommet de l'hypercube appartient à exactement un empilement.

Chaque sommet de l'hypercube est attribué à un seul empilement et aucun sommet n'appartient à plusieurs empilement. Cela signifie que les empilements sont mutuellement disjoints en termes de sommets, mais pas nécessairement en termes d'arêtes.

L'empilement sommet-disjoint est souvent utilisé pour étudier les propriétés de couverture et de partitionnement de l'hypercube. Il peut être appliqué dans la conception de codes correcteurs d'erreurs, la construction de réseaux de communication ou la résolution de problèmes de routage dans les hypercubes.

L'empilement sommet-disjoint peut être considéré comme une approche de décomposition qui simplifie la structure de l'hypercube en partitionnant ses sommets de manière non superposée. Il permet d'analyser et de manipuler les propriétés de l'hypercube de manière plus modulaire et séparée.

Cependant, il est important de noter que trouver des empilements sommet-disjoint optimaux dans les hypercubes est un problème complexe et difficile. La recherche de décompositions optimales, avec un nombre minimal d'empilements, est un défi mathématique et

peut nécessiter des méthodes de recherche approfondie.

Définition 3.10. [16] Supposons que H est un sous-graphe de Q_n pour certains n , et que $P_v(G, n)$ noté l'ensemble des empilement sommet-disjoints de G en Q_n . On définit $v(G, n)$ comme étant la densité maximale d'un sommet-disjoint de G en Q_n . C'est-à-dire.

- $v(G, n) = \max_{P \in P_v(G, n)} \frac{|P||V(G)|}{|V(Q_n)|} = \max_{P \in P_v(G, n)} \frac{|P||V(G)|}{2^n}$.
- $v(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(G, n)$.

Les premiers résultats concernant les empilements et les décompositions de l'hypercube sont dus à Stout ,et ont été motivés par des problèmes d'allocation de processeurs. Il a introduit la notion d'empilement de sommet et d'empilement d'arête de l'hypercube et a prouvé un résultat asymptotiquement optimal pour l'empilement de sommet. Il a montré que pour tout graphe cubique H , il existe des copies de H disjointes par paire de sommets dans Q_n contenant tous les sommets de Q_n . Répondant à une question d'Offner, Gruslys a renforcé le résultat de Stout sur le d'empilement de sommet (vertex packing) en prouvant que si l'ordre de H est une puissance de 2, alors pour un nombre suffisamment grand de n , il existe des copies de H disjointes par paire de sommets contenant tous les sommets de Q_n . En fait, le résultat de Gruslys est valable même pour la notion plus forte d'empilements isométriques [8].

Théorème 3.1. (Stout,1990) [17] Pour tous les sous graphes cubiques G , on a $v(G) = 1$.

Démonstration. [16] Etant donné G un sous-graphe de Q_d , on construit une séquence d'empilement de sommets disjoint (ESD) P_i de G dans Q_{id} avec $i \geq 1, i \in \mathbb{Z}$ de densité qui converge vers 1.

puisque $v(G, n)$ est monotone, ceci suffit à la démonstration .

Soit P_1 un ESD de G dans Q_d et supposant que cet empilement a une densité $r > 0$.

Si $r = 1$ alors c'est qu'on veut démontrer. Sinon, supposons qu'on a un empilement P_i de G dans Q_{id} et procédons par récurrence.

On commence par partitionner les sommets de $Q_{(i+1)d}$ en un ensemble de A de 2^d copies de *sommes – disjointes* de Q_{id} , chacun de la forme $[** \dots * Y]$. Cette forme se compose de id étoiles avec un mot binaire de longueur d .

En copiant P_i dans chaque élément de A , on obtient un ESD P'_{i+1} de même densité que P_i .

Pour les sommets non couvert de $Q_{(i+1)d}$ il peuvent être partitionner en un ensemble B de copies de Q_d de sommets disjointes chacun de la forme $[x_1 x_2 x_{id} ** \dots *]$ ayant d étoile et $[x_1 x_2 x_{id}]$ un sommet de Q_{id} non couvert par P_i .

En copiant P_i dans chaque éléments de B , on obtient un empilements sommets disjointes P''_{i+1} couvrant une proportion r des sommets non couverts.

Notons P_{i+1} l'union des empilements P'_{i+1} et P''_{i+1} . Alors P_{i+1} est un ESD de G dans $Q_{(i+1)d}$. Notons maintenant $\rho(P)$ la densité de l'empilement P , alors on obtient pour tout $i \geq 1$.

$$\rho(P_{i+1}) = \rho(P'_{i+1}) + \rho(P''_{i+1}) = \rho(P_i) + (1 - \rho(P_i))r$$

par induction , la densité de P_i est :

$$r + (1 - r)r + (1 + r)^2 r + \dots + (1 - r)^{i-1} r$$

De plus en sait que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - r)^{i-1} r$$

$$\begin{aligned}
&= (1-r)^0 r + (1-r)^1 r + (1-r)^2 r + \dots + (1-r)^n r \\
&= r[(1-r)^0 + (1-r)^1 + (1-r)^2 + \dots + (1-r)^n]
\end{aligned}$$

D'où l'empilement de densité égale à 1.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-r)^{i-1} r.$$

Pour résoudre cette somme, nous pouvons la reformuler sous la forme d'une série géométrique. La série géométrique générale est de la forme :

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i,$$

où a est le premier terme et r est le facteur de multiplication commun entre les termes successifs. Dans notre cas, nous pouvons réécrire la somme initiale comme suit :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-r)^{i-1} r = \sum_{i=0}^{\infty} (1-r)^i r.$$

Maintenant, nous pouvons utiliser la formule de la somme d'une série géométrique pour résoudre cette expression. La formule est la suivante :

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r},$$

où $|r| < 1$. Dans notre cas, $a = r$ et r est également compris entre 0 et 1, ce qui satisfait la condition $|r| < 1$. Ainsi, en appliquant la formule, nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1-r)^i r = \frac{r}{1-(1-r)} = \frac{r}{r} = 1.$$

Donc, la somme de la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-r)^{i-1} r$$

est égale à 1. □

Exemple 3.1. Exemple d'empilement des sommets disjointes sur un hypercube Q_4
 Dans la figure 3.3 on a P_1 est un plongement de G dans Q_2 noté aussi Q_{id} tel que $Q_{id} = Q_2, id = 2, d = 2, i = 1$.

On partitionne les sommets de $Q_{(i+1)d}$ en un ensemble A de $2^d = 2^2 = 4$ copies des sommes disjointes de $Q_{id} = Q_2$ chacune sous la forme $[** Y]$ tel que :

$$Q_{id} \rightarrow \{(** 10), (** 00), (** 01), (** 11)\}$$

et l'ensemble

$$A = \{\{0000, 0001, 0010, 0011\}, \{0100, 0101, 0110, 0111\}, \{1000, 1001, 1010, 1011\}, \{1100, 1101, 1110, 1111\}\}.$$

avec $|A| = 4 = 2^2 = 2^d$. En copiant $P_i = P_1$ dans chaque éléments dans A on obtient un ESD P'_{i+1} de même densité de P_1 tel que :

$$P'_{i+1} = \{\{0000, 0001, 0011\}, \{1000, 1001, 1011\}, \{0100, 0101, 0111\}, \{1100, 1101, 1111\}\}$$

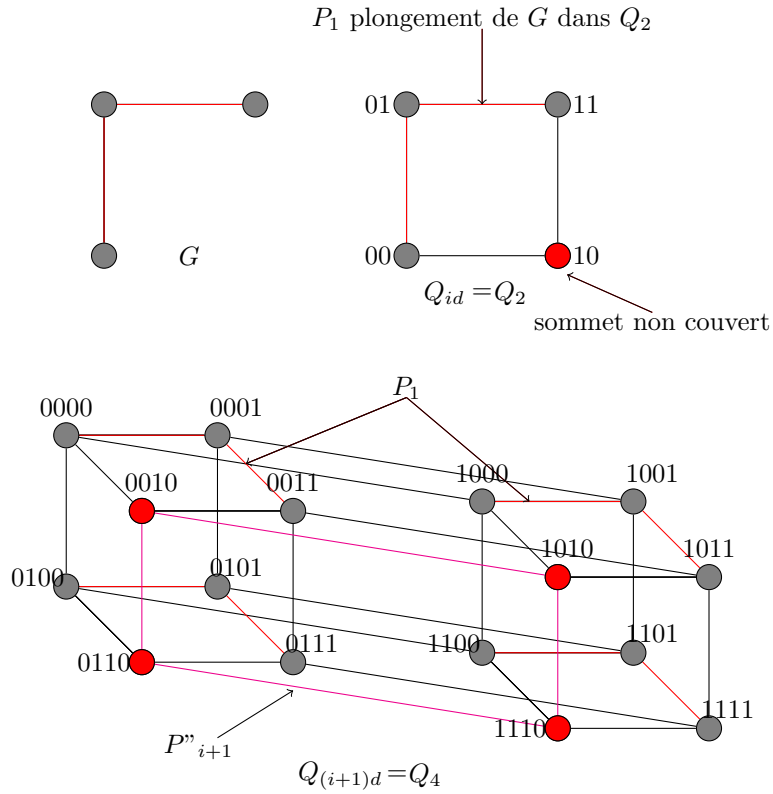


FIGURE 3.3 – Exemple de l'empilement des sommets disjoints.

Pour les sommets non couverts de $Q_{(i+1)d}$ sont $\{\{0010\}, \{1010\}, \{1110\}, \{0110\}\}$, il peuvent être partitionne en un ensemble B de copies de Q_d de sommets disjoints chacune de la forme $[x_1x_2**]$ tel que $B = \{\{0010\}, \{1010\}, \{0110\}, \{1110\}\}$
 En copiant P_1 dans chaque éléments de B on obtient un ESD P''_{i+1} couvert une proportion $r = \frac{3}{4}$ des sommets non couverts $\{\{00**\}, \{10**\}, \{01**\}, \{11**\}\}$.

$$\rho(P_{i+1}) = \frac{12}{16} + (1 - \frac{3}{4})\frac{3}{4}$$

3.1.1.2 Empilements des arêtes disjointes

L'empilement d'arêtes-disjointes est un concept important dans la théorie des graphes. Il consiste à trouver un arrangement d'arêtes sur un graphe de manière à ce qu'aucune paire d'arêtes ne se croise, ne partageant aucun sommet en commun et ne s'intersectant pas.

Définition 3.11. [16] Supposons que G est un sous-graphe de Q_n pour certains n , et que $P_v(G, n)$ noté l'ensemble des empilements arêtes-disjointes de G en Q_n . Définir $e(G, n)$ comme étant la densité maximale d'un arêtes-disjoint de G en Q_n . C'est-à-dire.

- $v(G, n) = \max_{P \in P_v(G, n)} \frac{|P||E(G)|}{|E(Q_n)|} = \max_{P \in P_v(G, n)} \frac{|P||E(G)|}{n2^{n-1}}$.
- $e(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(G, n)$.

Contrairement à $v(G, n)$, $e(G, n)$ n'est pas monotone. Par exemple, $e(Q_2, 2) = 1$, mais $e(Q_2, 3) = \frac{2}{3}$. Ceci est dû au fait que pour $n \geq 2$, les arêtes de Q_{n+1} ne peuvent pas être divisées en copies des arêtes disjointes de Q_n . Cependant, les arêtes de Q_{mn} peuvent être divisées en copies des arêtes disjointes de Q_m ou Q_n , et en particulier $Q_{n^{i+1}}$ peut être décomposé en

copies des arêtes disjoints de Q_{n^i} ou Q_n , et ce fait sera utile pour prouver le Théorème 2. De manière plus au moins similaire l'auteur montre que :

Théorème 3.2. [16] *Soit G un graphe avec au moins une arête dans sous-graphe de Q_n pour certains n , Alors $e(G) = 1$.*

les deux contractions commencent par un empilement quelconque non vide, puis ils l'utilisent pour générer une séquence d'empilement, chacune est dans un sens une augmentation de la précédente

3.2 Condition sur la décomposition

lors qu'on parle de H-décomposition pour un hypercube, une condition nécessaire triviale est la divisibilité d'un nombre de sommets de Q_n sur l'ordre de H . En d'autre terme : $|H|$ doit être une puissance de 2. Cependant, cette condition à elle seule n'est pas suffisante et pour cause H peut être non isomorphe à aucun des sous graphes de Q_n . A titre d'exemple H n'est pas biparti ou bien il peut l'être mais contient $K_{3,2}$ comme un sous graphe. Or $K_{3,2}$ ne peut en aucun cas être un sous graphe de Q_n puisque deux sommets à distance 2 dans Q_n ont exactement deux chaîne qui les relient [11].

Question 3 (offner 2016 [16]). *Soit H un sous graphe de Q_k pour un certain k avec $|H| \equiv 0 \pmod{2}$. Est-il vrai, pour tout n suffisamment grand Q_n admet une H-décomposition.*

Le plongement isométrique de G dans H est une applications $\alpha : V(G) \rightarrow V(H)$ qui préserve la distance. Dans [11], V.Gruslys et al, ont tenté de montrer la question posé par offner du exploitent une relation étroite entre le problème posé par ce dernier avec l'espace métrique de Hamming. C'est à dire, pour montre ce résultat il convient de voir l'hypercube Q_n comme m espace métrique. ¹ $\{0, 1\}^n$ où la distance entre deux éléments $x, y \in \{0, 1\}^n$ noté $d(x, y)$, est égale au nombre de composants sur lesquelles x et y diffèrent. par exemple $d(x, y) = 1$ si et seulement si x et y sont des sommets adjacents de Q_n . Si H est un sous graphe de Q_k , alors on peut identifier H avec un sous ensemble de $\{0, 1\}^n$. Pour tout $n \geq k$, nous disons qu'un ensemble $X \subset \{0, 1\}^n$ est une copie isométrique de H s'il existe une isométrie $\varphi : \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}^n$ qui relie H à X . Clairement, toute copie isométrique de H en $\{0, 1\}^n$ est un ensemble H , mais un ensemble H n'a pas besoin d'être une copie isométrique de H .

ainsi la question de H-décomposition d'un hypercube Q_n avec H un sous graphe de Q_n et $|H| \equiv 0 \pmod{2}$ se formulera comme suit :

Théorème 3.3. [11] *Soit X un sous-ensemble de $\{0, 1\}^k$ où k est un entier positif. Si $|X|$ est une puissance de 2, alors il existe un entier positif n tel que $\{0, 1\}^n$ peut être partitionné en copies isométriques de X .*

Dans un travail à l'intérieur, Ramras a montré le résultat suivant :

Théorème 3.4. [11] *Si $n = 2^r - 1$ et si T est un arbre sur $n+1$ sommets qui est un sous-graphe induit de Q_n , alors $V(Q_n)$ peut être divisé en copies isométriques de T .*

Définition 3.12 (antipodal paths [11]). *Un chemin antipodal est un chemin de longueur n qui commence et se termine à deux sommets diagonalement opposés de Q_n .*

1. Un espace métrique un couple (E, d) où E est un ensemble non vide et d est une distance sur E , c'est-à-dire une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Il est utilisé pour étudier et décrire les propriétés de distance et de proximité dans différents contextes mathématiques.

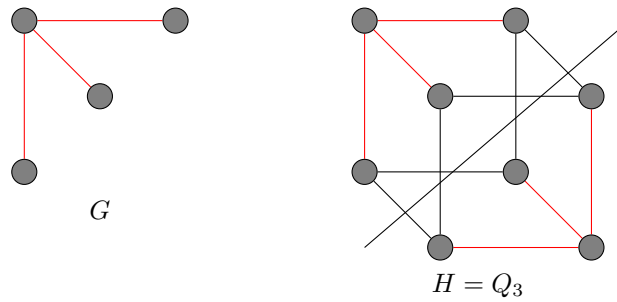


FIGURE 3.4 – Exemple de $V(Q_n)$ divisé en copies isométriques de $T = G$.

décompositions des sommets condition nécessaire[17] :

- G doit être cubique.
- G doit avoir 2^i sommets.

Théorème 3.5 (Gruslys 2016[17]). *pour une taille suffisante n , si G satisfait aux conditions n nécessaires alors G décompose Q_n (i.e. $v(G, n) = 1$).*

Décomposition des arêtes condition nécessaire[17] :

- G doit être cubique.
- divisibilité des arêtes (Q_n a $n2^{n-1}$ arêtes).
- degré de divisibilité (chaque sommet de Q_n a un degré n).
- divisibilité de direction (il y a 2^{n-1} arêtes dans chaque direction).

Théorème 3.6 (Wilson 1975 [17]). *si G satisfait à la condition nécessaire, alors pour un nombre suffisamment grand de n , G se décompose en K_n .*

3.3 Décomposition en cycle

La décomposition des hypercubes en cycle est un sujet de recherche actif, et il existe encore des questions ouvertes concernant les décompositions optimales pour certaines dimensions d'hypercube ou des résultats généraux pour toutes les dimensions. Les techniques utilisées pour résoudre ce problème incluent des approches combinatoires, algorithmiques et de théorie des graphes.

la décomposition des hypercubes en cycle consiste à partitionner les arêtes d'un hypercube en un ensemble de cycles disjoints qui couvrent toutes les arêtes. Cette décomposition est utile dans la conception de réseaux de communication et a des applications pratiques. Le théorème suivant stipule que tout hypercubes peut être décomposé en chaîne dont la longueur est une puissance de 2.

Théorème 3.7. [10] *Si n est pair, $n \geq 2$, et $2 \leq i \leq n$, alors l'hypercube à n dimensions peut être décomposé en cycles de longueur 2^i .*

Proposition 4. [10] Q_4 a une décomposition en quatre cycles de longueur 8. Q_6 a une décomposition en six cycles de longueur 32.

Théorème 3.8 (Kotzig, 1973 [10]). *Le produit cartésien de deux cycles a une décomposition hamiltonienne.*

Théorème 3.9 (Aubert et Schneider, 1982 [10]). *Si G est un graphe 4-régulier avec une décomposition hamiltonienne et que C est un cycle, alors $G \square C$ a une décomposition hamiltonienne.*

Le fait que si n est pair, Q_n a une décomposition hamiltonienne est un corollaire du Théorème 3.9 (voir [2]).

Notons qu'une décomposition hamiltonienne est partitionnable, chaque ensemble de partition contenant un cycle. Le résultat peut être formulé comme suit.[10]

Théorème 3.10. [10] *Pour tout n pair, Q_n a une décomposition partitionnable en cycles hamiltoniens.*

3.4 Décomposition en chaînes

Pour décomposer un hypercube en chaînes, on choisit une dimension spécifique comme axe principal de décomposition. Les sommets de l'hypercube sont ensuite répartis de manière ordonnée le long de cet axe principal. Chaque chaîne est formée en reliant les sommets adjacents de manière consécutive le long de l'axe principal.

La décomposition en chaînes peut être réalisée de différentes manières, en fonction des besoins et des contraintes spécifiques. Par exemple, on peut choisir de diviser l'hypercube en un nombre égal de chaînes de même longueur, ou bien d'opter pour des chaînes de longueurs différentes selon les besoins du problème.

La décomposition des hypercubes en chaînes est couramment utilisée dans les réseaux de communication et les systèmes parallèles. Elle permet de faciliter l'acheminement des données le long des chaînes, en exploitant la connectivité linéaire des structures. De plus, la décomposition en chaînes peut être combinée avec d'autres techniques de décomposition pour obtenir des structures plus complexes et adaptées à des applications spécifiques.

3.4.1 Des conditions de la décomposition d'un hypercube en chaîne

Mollard et Ramras ont donné deux conditions nécessaires pour dire qu'un hypercube d'ordre impair admet une décomposition en chaînes de longueur k . La première fait que $E(Q_n) = n2^{n-1}$ on doit nécessairement avoir $n2^{n-1} \equiv 0 \pmod k$ puisque Q_n est un graphe r -régulier et n est impaire chaque sommet doit être nécessairement une extrémité d'au moins une chaîne, ce qui implique qu'on doit avoir au moins 2^{n-1} chaîne (vu que chaque chaîne possède deux extrémités). De plus on doit avoir $k \leq n$.

Dans [14], Anick et Ramras ont la conjecture suivante :

Conjecture 4. *Soit n et k deux entiers tel que n est impaire et $n \equiv 0 \pmod k$ avec $k \leq n$. Alors Q_n décomposable en chaîne de longueur k .*

Dans leur travail, les mêmes auteurs, montrent que c'est vrai pour $n < 2^{32}$.

Un travail récent de J.Erde 2018, l'auteur montre que la conjecture est vraie pour tout n .

Théorème 3.11. [7] *Soit n impaire et k tel que $k \mid n2^{n-1}$ et $k \leq n$. Alors Q_n peut être décomposé en chaîne de longueur k .*

la preuve de théorème 3.11 est basé sur les 4 lemmes suivants :

Lemme 3.1. [7] Pour tout n , soit t un entier impair tel que $n \equiv 0 \pmod t$. Si $Q_{\frac{n}{t}}$ peut être décomposé en chaînes de longueur s , alors Q_n peut être décomposé en chaîne de longueur ts .

Définition 3.13. (chaîne antipodal) une chaîne antipodal est une séquence de sommets qui parcourt le graphe de manière à maximiser la distance entre les sommets adjacents.

Lemme 3.2. [7] Pour tout n , Q_n peut être décomposé en chaîne antipodaux de longueur n .

Lemme 3.3. [7] Si Q_i et Q_j peuvent être décomposés en chaîne de longueur k , il en va de même pour Q_{i+j} .

Lemme 3.4. [7] Soit n pair. Alors Q_n peut être décomposé en cycles hamiltoniens par es arêtes disjointes .

Conclusion

Dans ce travail, on s'est intéressé à l'étude du problème de la décomposition en théorie des graphes. La décomposition $D = \{H_1, \dots, H_k\}$ d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sous-graphes de G , notées H_i ($i = 1 \dots k$) deux à deux arête disjoint (edge disjoint) qui couvrent l'ensemble des arêtes de G , en principe est un problème difficile (**NP-complet**).

L'étude de ce problème présente plusieurs intérêts et motivations : tout d'abord les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes réels complexes. L'analyse de la décomposition des graphes peut également aider à réduire la complexité de ces problèmes en les décomposant en sous-problèmes plus gérables. En plus la décomposition trouve des applications dans divers domaines tels que les réseaux de communication, Tolérance aux pannes, design combinatoire, analyse des réseaux sociaux. Aussi l'étude de ce problème conduit à des développements théoriques importants dans la théorie des graphes. Elle permet d'explorer de nouveaux concepts, de formuler des conjectures et de démontrer des théorèmes sur les propriétés structurales des graphes.

Certains problèmes de décomposition des graphes sont intraitables dépendance du type de décomposition ou la structure du graphe, La difficulté du problème de la décomposition peut varier en fonction du type de décomposition recherché. Certaines décompositions, comme la décomposition en chaînes, peuvent être plus faciles à trouver que d'autres décompositions plus spécifiques. Aussi la structure du graphe influence la difficulté de la décomposition. Certains graphes peuvent avoir des propriétés spécifiques qui facilitent ou compliquent la décomposition. Dans ce travail, nous avons abordé quelques types de décomposition (chaîne, cycle et en arbre) de certains graphes (complet, biparti, régulier, hypercube).

D'autre part, nous avons choisi la décomposition des hypercubes qui est présentée dans le chapitre 3 pour plus de détails on va essayer de répondre à la question suivante : les conditions que H doit satisfaire pour dire que G admet une H -décomposition où G est un hypercube.

En effet, les résultats ont été obtenus dans le cas que G est un hypercube Q_n en peut décomposé en chaîne et en cycle.

Mollard et Ramras ont donné deux conditions nécessaires pour dire que un hypercube d'ordre n impair admet une décomposition en chaînes de longueur k $E(Q_n) = n2^{n-1}$ si $n2^{n-1} \equiv 0 \pmod k$ et $k \leq n$.

Offner a donné deux conditions nécessaires pour qu'un hypercube d'ordre n pair et $n \geq 2$ et $2 \leq i$ admet une décomposition en cycles de longueur 2^i .

Bibliographie

- [1] <https://wikipedia.org>. Consulté entre le 12/04 et 05/06 de l'année 2023.
- [2] J.C. and Sotteau D. Alspach, B. and Bermond. *Decomposition into cycles I : Hamilton decompositions.*, pages 9–18. Springer Netherlands, 1990.
- [3] Fairouz BEGGAS. Decomposition and domination of some graphs. Master's thesis, l'Université Claude Bernard Lyon 1, 28/03/2017.
- [4] Allan Bickle. *Fundamentals of Graph Theory*. American Mathematical Society, 2020.
- [5] Fábio Botler and Yoshiko Wakabayashi. Decomposition of graphs into paths. 07 juillet 2017.
- [6] André Bouchet and Jean-Luc Fouquet. Trois types de décomposition d'un graphe en chaînes. In C. Berge, D. Bresson, P. Camion, J.F. Maurras, and F. Sterboul, editors, *Combinatorial Mathematics*, volume 75 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 131–141. North-Holland, 1983.
- [7] Joshua Edre. Decomposing the cube into paths. *Discrete Mathematics*, 336 :41–45, 2014.
- [8] Maria Axenovich et David Offner et Casey Tompkins. Long path and cycle decompositions of even hypercubes. *Europeann Journal of Combinatorics*, 95 :103320, 2021.
- [9] R.khababa et N. belkhiri. codes identifiants dans le produit cartésien de deux chemins. Master's thesis, Université Mohamed El Bachir El Ibrahim de bordj bou arréridj, 2020-2021.
- [10] Samuel Gibson and David Offner. Decompositions of even hypercubes into cycles whose length is a power of two. *arXiv e-prints*, page arxiv :2107.07450, jul 2021.
- [11] Vytautas Gruslys. Decomposing the vertex set of a hypercube into isomorphic subgraphs. University of Cambridge, Wilberforce Road, 2016.
- [12] Nora Hartsfield and Gerhard Ringel. *Pearls in Graph theory a comprehensive introduction*. Academic press INC, 1990.
- [13] H.Touati. *Cours éléments de Théorie des Graphes*. Université Mohamed Elbachir El-ibrahimi, 2018-2019.
- [14] Michel Mollard and Mark Ramras. Edge decompositions of hypercubes by paths and by cycles. *Graphs and Combinatorics*, 31 :729–741, 2015.
- [15] Nicolas Nisse. Étude d'algorithmes de décomposition de graphes. Master's thesis, Université Cote D'azur, 2020.
- [16] David Offner. Packing the hypercubes. *Discussiones Mathematicae*, 34 :85–93, 2014.
- [17] David Offner. packing and decomposition problems on hypercubes graphs. NYC Combinatorics Seminar, 2020. NYC Combinatorics Seminar.
- [18] Carl Joshua Quines. Hall's marriage theorem. <https://cjquines.com/files/halls.pdf>, July 1, 2017.

- [19] Annet Roy. *Decomposition of Hypercubes*. PhD thesis, Christ university, Bengaluru, India, 2017.
- [20] Mathieu SABLİK. Notes de cours : Graphes. Université de Toulouse, 2021-2022.
- [21] W. Schnyder. Planar graphs and poset dimension. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, pages 323–343, 1989.
- [22] Tay-Woei Shyu. Decompositions of complete graphs into paths and stars. *Discrete Mathematics*, 310(15) :2164–2169, 2010.
- [23] Michael Tarsi. Decomposition of a complete multigraph into simple paths : Nonbalanced handcuffed designs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 34(1) :60–70, 1983.
- [24] Carsten Thomassen. Nash-williams cycle decomposition theorem. *Combinatorica*, 37 :1027–1037, 2017.
- [25] R.M. Wilson. Decomposition of a complete graph into subgraphs isomorphic to a given graph. *Proceedings of the 5th British Combinatorial Conference*, page 647–659, 1976.
- [26] Yang Zhao and Baoyindureng Wu. Star decomposition of graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 07 :1550016, 03 2015.