

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER

FILIÈRE : MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Sur la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires

Présenté par :

SEKHARA HOUDA

Devant le jury :

Dr. Hamidi Khaled	Université : BBA	- Président
Dr. Berrah Abdelmalek	Université : BBA	- Encadreur
Dr. Zeghdane Rebiha	Université : BBA	- Examineur
Dr. Mani Abdelouahab	Université : BBA	- Examineur

Année universitaire
2021/2022

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à re-
mercier *Allah*, le tout puis- sant et le miséricordieux
qui m'a donné la force, la santé et la patience d'accomplir ce modeste
travail. J'aimerais exprimer toutes mes vifs remerciements à mes parents ma
famille, mes frères et mes soeurs qui m'ont encouragé et aidé d'arriver à ce stade
de mes études. Je voudrais adresser toute ma reconnaissance à mon encadreur de ce
memoire ,*Mr. ABDELMALEK BERRAH* je le remercie de m'avoir orienté et aidé,
par ses conseils, sa patience sa grande disponibilité et sa générosité. Mes remer-
ciements vont également à tous les enseignants de la Faculté des Mathématiques
et informatique à Bordj Bou Arréridj, un grand merci également à *Mr. HAS-
SANE BOUREMEL*. Je tiens aussi à exprimer mes gratitudes et mes sincères
remerciements à tous les membres du jury pour avoir accepté de juger et de
mettre en valeur ce mémoire. Mes remerciements vont aussi à tous mes
amis en particulier *DJAATIT IMANE, BOUDJLAL KHAOULA,
BOUKARROUI ZAINEB* et *BENACHOUR AMANI* et à
tous les gens aimables et serviables qui m'ont soutenus
durant nos études. Enfin, un grand merci à toutes
les personnes qui ont contribué de près
ou de loin à la réalisation de
ce mémoire de fin
d'études .



Merci à tous

Résumé

Dans ce travail, on s'est intéressé à la théorie des semi-groupes dans un espace de Banach, en particulier les semi-groupes fortement continus et leurs applications aux équations différentielles abstraites, ainsi que les équations aux dérivées partielles.

Abstract

In this work, we are interested for the theory of semigroups in a Banach space, precisely semigroups strongly continuous and their applications to abstract differential equations as well as partial differential equations.

الملخص

في هذا العمل كان اهتمامنا منصبا على نظرية شبه الزمر في فضاء بناخ و بالتحديد شبه الزمر المستمرة بقوة و تطبيقاتها على المعادلات التفاضلية المجردة و كذلك المعادلات التفاضلية الجزئية.

Remerciements	1
NOTATIONS UTILISÉES	4
Introduction Générale	6
1 Préliminaires	8
1.1 Opérateurs linéaires	8
1.2 Opérateurs linéaires bornés, non bornés et fermés	8
1.3 Ensemble résolvant, spectre et résolvante	11
1.4 Opérateurs dissipatifs	14
1.5 Théorèmes d'analyse fonctionnelle	14
2 Introduction aux semi-groupes d'opérateurs linéaires	16
2.1 C_0 -semi-groupe	16
2.1.1 Générateurs infinitésimaux	18
2.2 Transformée de Laplace d'un c_0 -semi-groupe	23
2.3 Perturbation et approximation	25
2.4 Théorème de Hille Yosida	28
2.5 Théorème de Lumer Phillips	32
3 Application à la résolution d'équations différentielles abstraites	34
3.1 Équation différentielles abstraites	34
3.1.1 Équation homogène	34
3.1.2 Équation non homogène	36
3.2 Application (Résolution d'une EDP)	40
3.2.1 Équation d'Advection	40
3.2.2 Équation d'ondes	41
Conclusion Générale	43
Bibliographie	44

NOTATIONS UTILISÉES

$D(A)$: Le domaine de l'opérateur A .

$L(E, F)$: L'espace des opérateurs linéaires de E dans F .

$\mathcal{L}(E, F)$: L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F .

$\mathcal{F}(E, F)$: L'espace des opérateurs linéaires fermés de E dans F .

Id : L'opérateur identité.

$Im(A)$: L'image de l'opérateur A .

$l^2(\mathbb{R})$: L'espace des suites réelles de carrés sommables.

X' : Le dual topologique de l'espace de Banach X .

$\langle f, x \rangle$: Désigne $f(x)$ pour $f \in X'$ et $x \in X$.

$Re\lambda$: La partie réelle du nombre complexe λ .

$C([a, b], X)$: L'espace des fonctions continument intégrables sur $[a, b]$ dans X .

$L^1([0, \tau[, X)$: L'espace des fonctions intégrables sur $[0, \tau[$ à valeurs dans X .

PCH : Le problème de Cauchy homogène.

$PCNH$: Le problème de Cauchy non homogène.

Ω : Ouvert borné de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue.

$L^2(\Omega)$: L'ensemble des fonctions de carré intégrable sur Ω .

$H^1(\Omega)$: L'espace de Sobolev des fonctions qui appartiennent à $L^2(\Omega)$ et dont les dérivées au sens des distributions appartiennent à $L^2(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$: L'adhérence de l'espace des fonctions test à support compact dans $H^1(\Omega)$.

$H^2(\Omega)$: L'espace de Sobolev.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des semi-groupes devient un outil important et puissant pour la résolution des problèmes " bien posé " dans la théorie des équations d'évolution, notamment les équations différentielles abstraites et équations aux dérivées partielles (équation de chaleur, ondes, advection, schrodinger, Korteweg-de Vries,...). [12]

Cette théorie a été découverte en 1821 par Augustin Louis Cauchy (1789-1857), en posant la question suivante :

Déterminer toutes les fonctions complexes continues non nulles vérifiant :

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Par la suite, le résultat de la question posée par Louis Cauchy est aussi prouvé par Henri K. Abel (1802-1829), il a défini le générateur infinitésimal de semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ par :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad \forall x \in D(A).$$

Ce qui a donné la naissance effective de la théorie.

Compte tenu de la remarque simple que la fonction exponentielle $t \mapsto e^{ta}$, $a \in \mathbb{R}$ possède deux propriétés importantes ; D'une part elle est une solution réelle continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ sous la condition $f(0) = 1$. D'autre part elle est l'unique solution réelle de l'équation différentielle $u' = au$ sous la condition initiale $u(0) = 1$. Cette double caractérisation a été généralisée au cadre des opérateurs. En effet à la fin du 19^{ème} siècle et après l'année 1888 le mathématicien Giuseppe Peano a cherché d'écrire la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = Au \\ u(0) = Id. \end{cases}$$

Où A est une matrice sous la forme $t \mapsto e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$.

Ce qui a été étendu aux équations différentielles opératorielles $u' = Au$.

Où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X .

Plus tard sa célébrité est connue grâce à Eina Hille (1894-1980) et Kosaku Yosida (1909-1990) qui ont résolu le problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Où A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach X et $x \in X$, ils ont caractérisé le générateur infinitésimal des semi-groupes fortement continus, c'est à dire ayant la propriété :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions et définitions sur les opérateurs linéaires et quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle.

Ensuite, le deuxième chapitre présente une introduction à la théorie des semi-groupes et ses résultats, en exposant les théorèmes de Hille Yosida et Lumer Phillips.

Enfin, dans le dernier chapitre nous allons étudier le problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène en appliquant les résultats des chapitres précédents avec deux exemples d'applications des équations aux dérivées partielles (équation d'advection et équation d'onde).

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions et résultats générales sur les opérateurs linéaires et quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle.

Soient E et F deux espaces de Banach complexes.

1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1. Un opérateur linéaire A est une application linéaire définie d'un sous espace vectoriel $D(A)$ de E appelé domaine de A dans F .

$$A : D(A) \subset E \rightarrow F$$

Notons $L(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires de E dans F .

Remarque 1.1. Rappelons que si $\overline{D(A)} = E$, on dit que A est à domaine dense.

Définition 1.2 (Graphe d'un opérateur). Le graphe d'un opérateur A de domaine $D(A)$ est un sous espace de $E \times F$ noté $G(A)$, définit par :

$$G(A) = \{(x, y) \in E \times F / x \in D(A), y = Ax\}.$$

1.2 Opérateurs linéaires bornés, non bornés et fermés

Définition 1.3 (Opérateur borné). Soit A un opérateur linéaire de E dans F , on dit que A est borné si $D(A) = E$ et s'il est continu, c'est à dire : $\exists c > 0$ tel que $\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E$.

Notons $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F .

Exemple 1.1.

1. L'opérateur identité

$$Id_E : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto Id_E(x) = x$$

$$\forall x \in E, \quad \|Id_E(x)\|_E = \|x\|_E .$$

2. L'opérateur de décalage (shift)

$$S : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R})$$

$$x = (x_n)_n \longmapsto S(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$\forall x \in l^2(\mathbb{R}), \quad \|S(x)\|_{l^2(\mathbb{R})} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{l^2(\mathbb{R})} .$$

Proposition 1.1. Soit A opérateur linéaire de E dans F . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. $\forall x_0 \in E, \lim_{x \rightarrow x_0} \|Ax - Ax_0\|_F = 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \|Ax\|_F = 0$.
4. $\exists M > 0$ tel que : $\|Ax\|_F \leq M\|x\|_E$.

Définition 1.4 (Norme d'opérateur). Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit la norme de A par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \inf \{ c > 0, \|Ax\|_F \leq c\|x\|_E \quad , \forall x \in E \} .$$

L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ est de Banach.

Proposition 1.2. Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$1. \|A\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} .$$

2. Pour tout $x \in E$ on a :

$$\|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E .$$

Exemple 1.2.

1. $\|Id_E\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.
2. $\|S\|_{\mathcal{L}(l^2(\mathbb{R}))} = 1$.

Définition 1.5. Si A, B deux opérateurs linéaires sur E , alors l'opérateur AB est défini par :

$$AB : D(AB) \subset E \rightarrow E$$

$$x \longmapsto A(B(x))$$

où $D(AB) = \{x \in D(B) \mid Bx \in D(A)\}$.

On définit alors l'opérateur $A^n, n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} A^n &: D(A^n) \subset E \rightarrow E \\ x &\longmapsto A(A^{n-1}x) \end{aligned}$$

où $\forall n \geq 2 : D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}$.

Et

$$\begin{cases} D(A^0) = E & , A^0 = Id \\ D(A^1) = D(A) & , A^1 = A. \end{cases}$$

Ce qui nous donne la proposition suivante

Proposition 1.3. Soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$, alors on a

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}; \|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Définition 1.6 (Opérateur non borné). A est un opérateur linéaire non borné si $D(A) \neq E$.

Exemple 1.3.

$$T : ((C^1[0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow ((C[0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), \quad f \longmapsto T(f) = f'.$$

T n'est pas borné car si T borné alors :

$$\exists K > 0 : \|T(f)\| \leq K\|f\|, \quad \forall f \in ((C^1[0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty).$$

Pour la suite $(f_n)_n$ donnée par $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|f_n\| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mais $\|T(f_n)\| = \|f'_n\| = \sup_{x \in [0,1]} |nx^{n-1}| = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Si T est borné alors :

$$\exists K > 0 : \|T(f_n)\| = n \leq K\|f_n\| = K, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui n'est pas possible.

Remarque 1.2. On peut voir que si on est dans le cas de dimension finie tous les opérateurs linéaires sont bornés.

D'autre façon

$$\mathcal{L}(E, F) \subset L(E, F)$$

Si $\dim E < +\infty$ alors l'inclusion devient égalité.

Pour cela on s'intéresse aux espaces de dimension infini, pour passer à la classe des opérateurs non bornés.

Définition 1.7 (Opérateur fermé). A opérateur linéaire fermé si son graphe est fermé. Notons par $\mathcal{F}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires fermés de E dans F .

La caractérisation des fermés par les suites donne la proposition suivante.

Proposition 1.4. $A \in \mathcal{F}(E, F)$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ tel que : $x_n \rightarrow x \in E$, alors $Ax_n \rightarrow y \in F$ (quand $n \rightarrow +\infty$) et $x \in D(A), y = Ax$.

Proposition 1.5. Soient A, B deux opérateurs linéaires sur E .

1. Si B est borné, alors B est fermé.
2. Si A est fermé et B est borné, alors $A + B$ est fermé.
3. Si A est fermé et B est borné, alors AB est fermé.

Définition 1.8 (Inverse d'un opérateur).

- Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ opérateur linéaire, A inversible s'il existe un unique $A' \in L(E)$ tel que :

$$AA' = A'A = Id.$$

Où Id est l'opérateur identité sur E , A' appelé l'inverse de A et noté A^{-1} .

- Si A un opérateur linéaire injectif sur E , on définit A^{-1} par

$$A^{-1} : Im(A) \rightarrow E$$

$$y \longmapsto A^{-1}y = x.$$

Où $x \in D(A)$ vérifie $Ax = y$ et notons que $Im(A^{-1}) = D(A)$.

Lemme 1.1. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible, alors A^{-1} est fermé.

Théorème 1.6. $A \in \mathcal{L}(E)$, si $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, alors

$(Id - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ (la série de Neumann).

1.3 Ensemble résolvant, spectre et résolvante

Définition 1.9.

- L'ensemble résolvant de A :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)\}.$$

- Le spectre de A :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

- L'application résolvante de A au point λ :

$$R(\lambda, A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$\lambda \longmapsto (\lambda Id - A)^{-1}.$$

Proposition 1.7.

1. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire alors, pour toutes $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

2. $R(\cdot, A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

4. Nous avons

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \lambda \in \rho(A).$$

Preuve.

1. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire.

On a : $(\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A))R(\mu, A) = R(\mu, A).$

Aussi

$$(\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A))R(\lambda, A) = R(\lambda, A).$$

Faisons la différence des deux égalités, on obtient :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

2. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, notons $D(\lambda_0, \frac{1}{R(\lambda_0, A)})$ est le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\frac{1}{R(\lambda_0, A)}$.

Alors, pour tout $\lambda \in D(\lambda_0, \frac{1}{R(\lambda_0, A)})$, nous avons

$$\lambda Id - A = [Id - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)](\lambda_0 Id - A).$$

Mais

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)\| = |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\| < 1.$$

Compte tenu du théorème (1.6) , il résulte que

$$Id - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A) \text{ inversible.}$$

D'où $(\lambda Id - A)$ est inversible.

Et

$$\begin{aligned} (\lambda Id - A)^{-1} &= (\lambda_0 Id - A)^{-1} [Id - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)]^{-1} \\ &= R(\lambda_0, A) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n] (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $R(\cdot, A)$ est analytique sur $\rho(A)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $|\lambda| > \|A\|$, alors $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, d'où $(Id - \lambda^{-1}A)$ inversible.

De plus

$$(Id - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}.$$

Par conséquent

$$R(\lambda, A) = (\lambda Id - A)^{-1} = \lambda^{-1} (Id - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

4. Par récurrence, pour $n = 1$ nous avons

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = \frac{d}{d\lambda} (\lambda Id - A)^{-1} = -(\lambda Id - A)^{-2} = -R(\lambda, A)^2.$$

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, on ait : $\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda, A) = (-1)^k k! R(\lambda, A)^{k+1}$.

Montrons que $\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda, A) = (-1)^{k+1} (k+1)! R(\lambda, A)^{k+2}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda, A) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda, A) \right) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left[(-1)^k k! (\lambda Id - A)^{-k-1} \right] \\ &= (-1)^k k! (-k-1) (\lambda Id - A)^{-k-2} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! R(\lambda, A)^{k+2}. \end{aligned}$$

Et, par conséquent

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}.$$

■

Lemme 1.2. Si $A : D(A) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire tel que : $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé.

Preuve. Soit $\lambda \in \rho(A)$, on a $(\lambda Id - A)^{-1}$ est borné sur X et donc fermé, par conséquent $(\lambda Id - A)$ est fermé, ce qui entraîne que A est fermé. ■

1.4 Opérateurs dissipatifs

Considérons $f \in E'$ et $x \in E$, notons $f(x)$ par $\langle f, x \rangle$ ou $\langle x, f \rangle$.

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{F}(x) = \{f \in E' : \langle f, x \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}.$$

Définition 1.10. Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est dit dissipatif si pour tout $x \in D(A)$ il existe $f \in \mathbf{F}(x)$ tel que

$$\operatorname{Re} \langle f, Ax \rangle \leq 0.$$

Théorème 1.8. Un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si :

$$\|(\lambda Id - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Preuve. Voir [1]. ■

Remarque 1.3. Si $(\lambda Id - A)$ est surjectif c'est à dire $\forall \lambda > 0, \operatorname{Im}(\lambda Id - A) = E$, on dit que A est maximal dissipatif, et on note A m-dissipatif.

Théorème 1.9. Soit A un opérateur dissipatif à domaine dense dans E , s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que : $\operatorname{Im}(\lambda_0 Id - A) = E$, alors pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\operatorname{Im}(\lambda Id - A) = E.$$

Preuve. Voir [1]. ■

Lemme 1.3. Si A un opérateur m-dissipatif alors A est fermé et à domaine dense.

1.5 Théorèmes d'analyse fonctionnelle

Théorème 1.10 (Théorème de Banach Steinhawss). Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) des opérateurs linéaires continus de E dans F , on suppose que

$$\sup_{i \in I} \|A_i x\| < +\infty, \quad \forall x \in E.$$

Alors $\sup_{i \in I} \|A_i\| < +\infty$.

Théorème 1.11 (Théorème du graphe fermé). *Soit A un opérateur linéaire fermé de E dans F , si $D(A) = E$, alors*

$$A \in \mathcal{L}(E, F).$$

CHAPITRE 2

INTRODUCTION AUX SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES

2.1 C_0 -semi-groupe

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe.

Définition 2.1. On appelle semi-groupe la famille des opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t \geq 0}$ dans X qui vérifie :

1. $T(0) = Id$.
2. $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$.

Définition 2.2. Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit fortement continu si, pour tout $x \in X$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

Aussi prend le terme c_0 -semi-groupe.

Exemple 2.1. Soit $E = \{f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est uniformément continue et bornée } \}$.

Avec la norme $\|f\|_E = \sup_{\alpha \in [0, \infty[} |f(\alpha)|$, l'espace E devient un espace de Banach.

Définissons

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t + \alpha), \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \alpha \in [0, \infty[.$$

Evidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire et en plus, on a

1. $(T(0)f)(\alpha) = f(0 + \alpha) = f(\alpha)$.

Donc

$$T(0) = Id.$$

2. $(T(t_1 + t_2)f)(\alpha) = f(t_1 + t_2 + \alpha) = (T(t_1)f)(t_2 + \alpha) = (T(t_1)T(t_2)f)(\alpha), \quad \forall f \in E$.

Donc

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

$$3. \lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)f - f\|_E = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \sup_{\alpha \in [0, +\infty[} |f(t+\alpha) - f(\alpha)| \right\} = 0, \quad \forall f \in E.$$

De même nous avons

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_E &= \sup_{\alpha \in [0, +\infty[} |(T(t)f)(\alpha)| = \sup_{\alpha \in [0, +\infty[} |f(t+\alpha)| \\ &= \sup_{\beta \in [t, +\infty[} |f(\beta)| \leq \sup_{\beta \in [0, +\infty[} |f(\beta)| = \|f\|_E, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1, \quad \forall t \geq 0.$

Par conséquent $(T(t))_{t \geq 0}$ est un c_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E , nommé le c_0 -semi-groupe de translation à droite.

Proposition 2.1. *Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est c_0 -semi-groupe sur X , alors il existe des constantes $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Si M existe alors nécessairement $M \geq 1$ puisque $T(0) = Id$.

On a pour $\eta \geq 0$, $\|T(t)\|$ est borné sur $[0, \eta]$.

En effet, si on pose le contraire on obtient :

$$\exists t_n \in [0, \eta] : \|T(t_n)\| \geq n.$$

Or, d'après le théorème de Banach Steinhaus, il existe $x \in X$ tel que : $\|T(t_n)x\|$ est non borné, contradiction avec la définition du c_0 -semi-groupe.

Posons donc $\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, \eta].$

Et $w = \eta^{-1} \log M \geq 0.$ pour tout $t > 0$, on peut écrire

$$t = n\eta + \delta \quad ; 0 < \delta < \eta.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq \|T(\delta)\| \|T(\eta)\|^n \\ &\leq M^{n+1} \leq M.M^{\frac{t}{\eta}} = Me^{wt}. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.

1. Si $w = 0$,

$$\|T(t)\| \leq M.$$

le c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit uniformément borné.

2. Si $w = 0$ et $M = 1$,

$$\|T(t)\| \leq 1.$$

$(T(t))_{t \geq 0}$ est appelé c_0 -semi-groupe de contraction .

3. Si $M = 1$ et $w \in \mathbb{R}$

$$\|T(t)\| \leq e^{wt}.$$

Le c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit quasi-continu.

Corollaire 2.2. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe sur X , alors pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est continue de \mathbb{R}^+ dans X .

Preuve. Soient $t, h \geq 0$, la continuité de $t \mapsto T(t)x$ se déduit de

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{wt} \|T(h)x - x\|. \end{aligned}$$

pour $t \geq h \geq 0$

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{wt} \|x - T(h)x\|. \end{aligned}$$

■

2.1.1 Générateurs infinitésimaux

Définition 2.3. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe sur X . On appelle générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$ l'opérateur A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \left\{ f \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existe dans } X \right\}.$$

Par

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt}, \quad \forall f \in D(A).$$

Exemple 2.2. Prenons le c_0 -semi-groupe de translation.

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ son générateur infinitésimal, si $f \in D(A)$, alors on a

$$Af(\alpha) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha).$$

Par conséquent $D(A) \subset \{f \in E : f' \in E\}$.

Si $f \in E$, tel que : $f' \in E$, alors

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_E = \sup_{\alpha \in [0, +\infty[} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|.$$

Or

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| = \left| \frac{1}{t} [f(\tau)]_{\alpha}^{t+\alpha} - f'(\alpha) \right| \\
 &= \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} f'(\tau) d\tau - t f'(\alpha) \right| = \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} (f'(\tau) - f'(\alpha)) d\tau \right| \\
 &\leq \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)| d\tau, \quad \forall t \geq 0 \\
 &\leq \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} \sup_{\tau \in [\alpha, \alpha+t]} |f'(\tau) - f'(\alpha)| d\tau \\
 &\leq \frac{1}{t} \sup_{\tau \in [\alpha, \alpha+t]} |f'(\tau) - f'(\alpha)| \int_{\alpha}^{\alpha+t} d\tau \\
 &\leq \sup_{\tau \in [\alpha, \alpha+t]} |f'(\tau) - f'(\alpha)| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.
 \end{aligned}$$

D'où Af converge uniformément par rapport à α vers f' pour $t \rightarrow 0$, par suite

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_E \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc $f \in D(A)$, et on a $\{f \in E : f' \in E\} \subset D(A)$.

Par conséquent $D(A) = \{f \in E : f' \in E\}$ et $Af = f'$.

Proposition 2.3. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe sur X et A son générateur infinitésimal, alors :

$$1. \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

$$2. \forall t \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad \int_0^t T(s)x ds \in D(A), \text{ et on a :}$$

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = \int_0^t T(s)Ax ds = T(t)x - x.$$

3. $\forall t \geq 0, \quad \forall x \in D(A)$ l'application $[0, \infty[\ni t \mapsto T(t)x \in X$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et en générale

$$\frac{d^n}{dt^n} T(t)x = A^n T(t)x = T(t)A^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

4. $\forall t \geq 0, \quad \forall s \geq 0, \quad \forall x \in D(A)$, on a

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

Preuve.

1. Soit $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \sup_{s \in [t, t+h]} \|T(s)x - T(t)x\| \int_t^{t+h} ds \\ &\leq \sup_{s \in [t, t+h]} \|T(s)x - T(t)x\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

D'après la continuité de l'application $t \mapsto T(t)x$, l'égalité est vérifiée.

2. Soient $x \in X$ et $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - T(0)}{h} \int_0^t T(s)x ds &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s+h)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} T(s)x ds - \int_0^h T(s)x ds \right] - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} T(s)x ds - \int_0^h T(s)x ds \right]. \end{aligned}$$

Par suite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} T(s)x ds - \int_0^h T(s)x ds \right) \right] = T(t)x - x, \quad \forall t \geq 0.$$

Et

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A).$$

3. Soit $x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$, on a :

$$T(t)Ax = T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}.$$

Donc $T(t)x \in D(A)$ et on a : $T(t)Ax = AT(t)x$, $\forall t \geq 0$.

Soient maintenant $x \in D(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$, montrons que les dérivées à droite et à gauche de $t \mapsto T(t)x$ existent et sont égaux à l'expression donnée.

• La dérivée à droite :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\ &\leq Me^{wt} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax.$$

D'où

$$\frac{d^+T(t)x}{dt} = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$$

- La dérivée à gauche :

Si $t \geq h > 0$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} + Ax - Ax - T(h)Ax \right\| \\ &\leq Me^{w(t-h)} \left[\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(h)Ax - Ax\| \right] \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Par suite : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t)Ax.$

Et $\frac{d^-T(t)x}{dt} = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0$

Maintenant pour $x \in D(A)$, $A(Ax)$ a un sens, c'est à dire : $x \in D(A)$ et $Ax \in D(A)$, alors

$$\frac{dT(t)}{dt}Ax = \frac{d^2T(t)x}{dt^2} = AT(t)Ax = A^2T(t)x.$$

Par récurrence, on obtient

$$\frac{d^nT(t)x}{dt^n} = A^nT(t)x, \quad x \in D(A^{n-1}).$$

Il résulte que l'application $t \mapsto T(t)x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, $\forall x \in D(A)$.

De plus on a l'égalité :

$$\frac{d^nT(t)x}{dt^n} = T(t)A^n x = A^nT(t)x.$$

4. Le résultat s'obtient, en intégrant entre s et t , d'où

$$\int_s^t \frac{dT(\tau)x}{d\tau} d\tau = T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

■

Corollaire 2.4. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ c_0 -semi-groupe sur X et A son générateur infinitésimal alors, on a

1. $D(A)$ dense dans X .
2. A est un opérateur linéaire fermé.

Preuve.

1. $\overline{D(A)} = X$?

Soit $x \in X$ et montrons que $\exists x_n \in D(A)$ tel que : $x_n \rightarrow x$.

On pose $x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x ds$, tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

D'où

$$x_n \in D(A), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x ds = T(0)x = x.$$

Donc $\overline{D(A)} = X$.

2. A fermé?

Soit $x_n \in D(A)$ tel que $x_n \rightarrow x$ et $Ax_n \rightarrow y$, montrons que $x \in D(A)$, $Ax = y$.

On a $T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds$.

Montrons que l'application $s \mapsto T(s)Ax_n$ converge uniformément vers $T(s)y$.

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)(Ax_n - y)\|, \quad \forall s \in [0, t] \\ &\leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\|, \quad \forall s \in [0, t] \\ &\leq Me^{ws} \|Ax_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Alors $T(s)Ax_n$ converge uniformément vers $T(s)y$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(t)x_n - x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds.$$

$$\Rightarrow T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds.$$

D'où

$$Ax = T(0)y = y, \quad \forall x \in D(A)$$

Donc A fermé. ■

Théorème 2.5 (Unicité de l'engendrement). Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux c_0 -semi-groupes ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A , alors

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$, définissons l'application :

$$[0, t] \ni s \mapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dU(s)x}{ds} &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{dS(s)x}{ds} \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0, \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Donc $U(s)x$ est constante.

Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'où

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A) \quad \text{et} \quad t \geq 0.$$

Puisque $\overline{D(A)} = X$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{L}(X)$ pour tout $t \geq 0$, il résulte que

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in X$$

$$\Rightarrow T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

■

2.2 Transformée de Laplace d'un c_0 -semi-groupe

On note $SG(M, w)$ l'ensemble des c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{L}(X)$ pour lesquels il existe $w \geq 0$ et $M \geq 1$, tel que : $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$.

Dans ce cas, on dit que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un c_0 -semi-groupe exponentiellement borné.

Dans la suite pour $w \geq 0$, nous désignons par Λ_w l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > w\}$.

Définition 2.4. L'opérateur

$$R : \Lambda_w \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

$$R(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt.$$

Est dit la transformée de Laplace du $(T(t))_{t \geq 0}$.

Théorème 2.6. Soit $\lambda \in \Lambda_w$ et $(T(t))_{t \geq 0} \in SG(M, w)$ de générateur infinitésimal A . alors

- $\lambda \in \rho(A)$.
- $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ et $R(\lambda)x = R(\lambda, A)x$, $\forall x \in X$.

Preuve. Soit $\lambda \in \Lambda_w$ et $(T(t))_{t \geq 0} \in SG(M, w)$, alors on a

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Et on voit que

$$\|e^{-\lambda t} T(t)x\| \leq e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|T(t)\| \|x\| \leq Me^{-(\operatorname{Re} \lambda - w)t} \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

D'où

$$\left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t} T(t)x\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w} \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

D'où $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$.

$$\begin{aligned} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(h+t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \lambda R(\lambda)x - x. \end{aligned}$$

D'où $R(\lambda)x \in D(A)$, et

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

$$(\lambda Id - A)R(\lambda)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Si $x \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)Ax dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AT(t)x dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{dT(t)}{dt} x dt \\ &= \left[e^{-\lambda t} T(t)x \right]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt = -x + \lambda R(\lambda)x. \end{aligned}$$

Donc

$$R(\lambda)(\lambda Id - A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Alors $\lambda \in \rho(A)$ et $(\lambda Id - A)$ inversible, d'inverse

$$(\lambda Id - A)^{-1} = R(\lambda)$$

. D'où

$$R(\lambda, A)x = R(\lambda)x, \quad \forall x \in X.$$

■

Remarque 2.2. On voit que si $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe et A son générateur infinitésimal, alors

$$\Lambda_w \subset \rho(A).$$

Théorème 2.7. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe et A son générateur infinitésimal, alors pour tout $\lambda \in \Lambda_w$, on a

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - w)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. $(T(t))_{t \geq 0}$ c_0 -semi-groupe, alors $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$

D'après le théorème (2.6), si $\lambda \in \Lambda_w$ on obtient $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A)x = R((\lambda)x$

D'où

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - w)}.$$

On voit que

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = - \int_0^{+\infty} te^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X.$$

Par récurrence

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Et comme $R(\lambda, A)$ est localement analytique, on obtient

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}x, \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où

$$(-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent

$$R(\lambda, A)^{n+1}x = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)^n x\| &\leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - w)t} dt \\ &= \frac{M\|x\|(n-1)}{(n-1)!(\operatorname{Re}\lambda - w)} \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - w)t} dt \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{M\|x\|}{(\operatorname{Re}\lambda - w)^n}, \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

D'où il résulte $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - w)^n}$. ■

2.3 Perturbation et approximation

Théorème 2.8 (Théorème de la perturbation bornée). *Soit A le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$ c_0 -semi-groupe dans X qui vérifie :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}.$$

Si B un opérateur linéaire borné sur X , alors

L'opérateur $A + B$ est le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ qui satisfait :

$$\|S(t)\| \leq M e^{(w+M\|B\|)t}.$$

Preuve. Voir [12] ■

Corollaire 2.9. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A .

Et soient $w \geq 0$, $M \geq 1$, tel que : $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$, $\forall t \geq 0$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_w$ et $x \in D(A)$, on a

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax.$$

La démonstration résulte du fait que $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.

Définition 2.5. La famille $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_w}$, où $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ s'appelle l'approximation généralisé de Yosida de l'opérateur A .

Lemme 2.1. Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire qui vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\overline{D(A)} = X$ et A fermé.
- ii) Il existe $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_w \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_w$, on a

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - w)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors nous avons

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

De plus

$$A_\lambda \in \mathcal{L}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Preuve. Soient $x \in D(A)$ et $\lambda \in \Lambda_w$. alors : $R(\lambda, A)(\lambda Id - A)x = x$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \|R(\lambda, A)\| \|Ax\| \\ &\leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w} \|Ax\| \xrightarrow{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$, $\forall x \in D(A)$.

soit $x \in X$, puisque $\overline{D(A)} = X$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset D(A)$ tel que : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)x_n\| + \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
 &\leq \|\lambda R(\lambda, A)\| \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
 &\leq \frac{|\lambda| M}{\operatorname{Re}\lambda - w} \|x - x_n\| + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w} \|Ax_n\| + \|x_n - x\| \\
 &= \frac{|\lambda| M + \operatorname{Re}\lambda - w}{\operatorname{Re}\lambda - w} \|x_n - x\| + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w} \|Ax_n\|.
 \end{aligned}$$

Or $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|x_{\eta_\varepsilon} - x\| < \varepsilon \frac{\operatorname{Re}\lambda - w}{|\lambda| M + \operatorname{Re}\lambda - w}.$$

De plus

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| < \varepsilon + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w} \|Ax_{\eta_\varepsilon}\|.$$

D'où

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow +\infty} \sup \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Où bien :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Par suite

$$A_\lambda = \lambda[\lambda Id - (\lambda Id - A)]R(\lambda, A) = \lambda[\lambda R(\lambda, A) - Id] = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda Id.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \|A_\lambda x\| &= \|\lambda[\lambda R(\lambda, A) - Id]x\| \\
 &\leq |\lambda| \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \\
 &\leq |\lambda| (\|\lambda R(\lambda, A)x\| + \|x\|) \\
 &\leq |\lambda| \left(\frac{|\lambda| M}{\operatorname{Re}\lambda - w} + 1 \right) \|x\|, \quad \forall x \in X.
 \end{aligned}$$

Et on voit que : $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$.

Si $x \in D(A)$, alors nous avons

$$\lambda R(\lambda, A)Ax = [\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda Id]x = \lambda AR(\lambda, A)x.$$

D'où il résulte que

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow +\infty} \lambda AR(\lambda, A)x = \lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Remarque 2.3. Pour $\lambda \in \Lambda_w$, on voit que A_λ est le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe uniformément continu $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$.

2.4 Théorème de Hille Yosida

Il s'agit du résultats les plus importants concernant les c_0 -semi-groupe. Ce théorème nous permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs des c_0 -semi-groupes, il a été montré par Hille et Yosida pour les c_0 -semi-groupes de contraction, puis quelque années plus tard la démonstration a été développer pour le cas général.

Dans la suite ; pour $r > 1$, nous notons par $\Lambda_{w,r}$ l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \lambda > \frac{r}{r-1}w\}$.

Lemme 2.2. *Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire qui vérifie les propriétés du lemme (2.1) alors, pour tout $r > 1$ et tous $\lambda, \mu \in \Lambda_{w,r}$ nous avons*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq M^2 t e^{wrt} \|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad \forall x \in X, \quad t \geq 0.$$

Preuve. Voir [12]. ■

Théorème 2.10 (Hille Yosida). *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X si et seulement si :*

- i) $\overline{D(A)} = X$ et A fermé.
- ii) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_0$, on a : $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$.

Théorème 2.11 (Théorème de Hille Yosida généralisé). *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ vérifie : $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$, si et seulement si :*

- i) $\overline{D(A)} = X$ et A fermé
- ii) $]w, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_w$, on a : $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve.

⇒ **Condition nécessaire :**

La condition nécessaire résulte du corollaire (2.4). Et du fait que $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$ et $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $w \geq 0$ et $M \geq 0$.

⇐ **Condition suffisante :**

On suppose que l'opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ possède les propriétés (i) et (ii).

Soit $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_w}$, l'approximation de Yosida de l'opérateur A et d'après le lemme (2.1)

On obtient que

$$A_\lambda \in \mathcal{L}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Pour $\lambda \in \Lambda_w$, soit $(T_\lambda(t))_{t \geq 0} = (e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ le semi-groupe uniformément continu engendré par A_λ .

Soit $r > 1$, d'après le Lemme (2.2), on a

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq M^2 t e^{wrt} \|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda_{w,r}, \quad x \in D(A), t \geq 0.$$

Soient $[D(A)]$ l'espace de Banach $D(A)$ avec la norme $\|\cdot\|_{D(A)}$ et $\mathcal{L}([D(A)], X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés définis sur $[D(A)]$ à valeurs dans X , doté de la topologie forte. Notons par $C([0, +\infty[, \mathcal{L}([D(A)], X))$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{L}([D(A)], X)$ doté de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compact de $[0, +\infty[$.

Si $[a, b] \subset [0, +\infty[$, alors pour tout $x \in D(A)$ nous avons Si $r \rightarrow 1$, donc si $Re\lambda, Re\mu \rightarrow +\infty$

$$\sup_{t \in [a, b]} \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq M^2 b e^{wrb} (\|A_\lambda x - Ax\| + \|A_\mu x - Ax\|) \rightarrow 0.$$

D'où il résulte que $((T_\lambda(t))_{t \geq 0})_{\lambda \in \Lambda_{w,r}}$ est une suite de Cauchy dans $C([0, +\infty[, \mathcal{L}([D(A)], X))$. Donc, il existe un unique $T_0 \in C([0, +\infty[, \mathcal{L}([D(A)], X))$; tel que

$$T_\lambda(t)x \xrightarrow{Re\lambda \rightarrow +\infty} T_0(t)x, \quad \forall x \in D(A).$$

Pour la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0, +\infty[$.

Puisque

$$\|T_\lambda(t)\| \leq M e^{wrt}, \quad \forall t \geq 0.$$

On obtient

$$\|T_0(t)x\| \leq M e^{wt} \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \quad x \in D(A).$$

Maintenant considérons l'application linéaire

$$\phi_0 : D(A) \longrightarrow C([a, b], X)$$

$$\phi_0 x = T_0(\cdot)x.$$

$\forall [a, b] \subset [0, +\infty[$, on a

$$\|\phi_0 x\|_{C([a, b], X)} = \sup_{t \in [a, b]} \|T_0(t)x\| \leq M e^{wb} \|x\| \leq M e^{wb} \|x\|_{D(A)}, \quad \forall x \in D(A).$$

On voit que ϕ_0 est une application continue et comme $\overline{D(A)} = X$, elle se prolonge de façon unique en une application linéaire continue

$$\phi : X \longrightarrow C([a, b], X)$$

$$\phi \big|_{D(A)} = \phi_0.$$

et

$$\|\phi x\|_{C([a, b], X)} \leq M e^{wb} \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Par conséquent : il existe un seul opérateur $T \in C([a, b], \mathcal{L}(X))$, tel que

$$\phi x = T(\cdot)x, \quad \forall x \in X.$$

On peut répéter ce procédé pour tout les intervalles compacts de $[0, +\infty[$, et on voit qu'il existe un seul opérateur, noté aussi par $T \in C([0, +\infty[, \mathcal{L}(X))$, tel que $\forall x \in X$, on ait :

$$T_\lambda(t)x \xrightarrow{Re\lambda \rightarrow +\infty} T(t)x$$

Uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, +\infty[$.

De plus

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Donc

$$T(0)x = \lim_{Re\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(0)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\lim_{Re\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(t)x \right) = x, \quad \forall x \in X.$$

Soient $t, s \in [0, +\infty[$ et $x \in X$, alors nous avons

$$\|T(t+s)x - T(t)T(s)x\| \leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \|T_\lambda(t+s)x - T_\lambda(t)T(s)x\|$$

$$+ \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\|.$$

$$\leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \|T_\lambda(t)\| \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| + \|T_\lambda(t)(T(s)x) - T(t)(T(s)x)\|.$$

Puisque $T_\lambda(t) \xrightarrow{Re\lambda \rightarrow +\infty} T(t)$, si $Re\lambda \rightarrow +\infty$ pour la topologie forte de $\mathcal{L}(X)$, il s'ensuit que $T(t+s)x = T(t)T(s)x$, pour tout $x \in X$.

Par conséquent

$$(T(t))_{t \geq 0} \in SG(M, w).$$

Ensuite montrons que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Pour tout $x \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| &\leq \|T_\lambda(s)\| \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \\ &\leq M e^{wrt} \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{Re\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

uniformément par rapport à $s \in [0, t]$, d'où

$$T(t)x - x = \lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow +\infty} [T_\lambda(t)x - x] = \lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t T_\lambda(s) A_\lambda x ds = \int_0^t T(t) A x ds; \quad \forall x \in D(A), t \geq 0.$$

Soit B le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$; si $x \in D(A)$, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(t) A x ds = Ax..$$

Et nous voyons que $x \in D(B)$. Par conséquent $D(A) \subset D(B)$ et $B|_{D(A)} = A$.

D'autre nous avons l'inégalité

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\lambda \in \Lambda_w$, alors $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

Soit $x \in D(B)$, on a donc : $(\lambda Id - B)x \in X$.

Et comme l'opérateur $\lambda Id - A : D(A) \rightarrow X$ est bijectif, il existe $x' \in D(A)$, tel que

$$(\lambda Id - A)x' = (\lambda Id - B)x.$$

Puisque $B|_{D(A)} = A$, il vient que

$$(\lambda Id - B)x' = (\lambda Id - B)x.$$

Et comme $\lambda \in \rho(B)$, il en résulte que

$$x' = x.$$

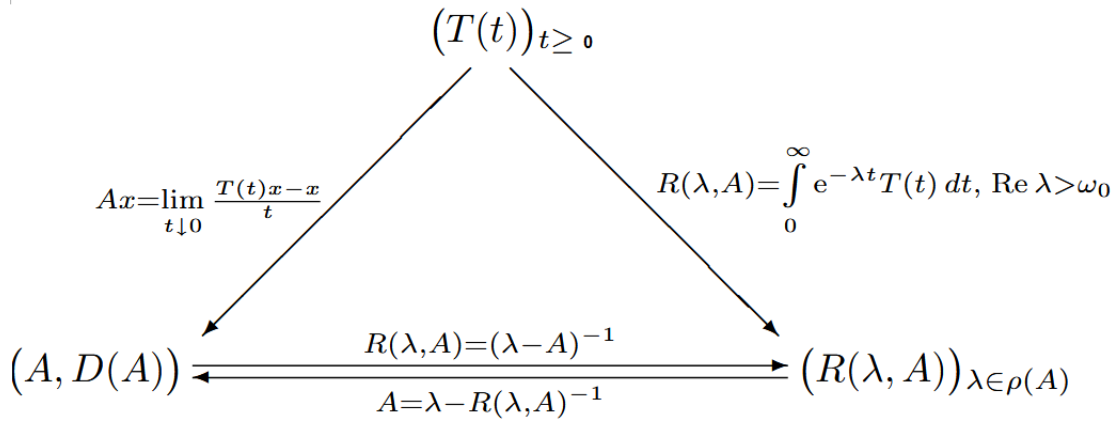
Par suite $x \in D(A)$ et donc : $D(B) \subset D(A)$.

Finalement, on voit que

$$D(A) = D(B) \quad \text{et} \quad A = B.$$

Nous avons donc montrer que A est le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et compte tenu du théorème de l'unicité de l'engendrement, il résulte que $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'unique c_0 -semi-groupe engendré par A . ■

Pour conclure, on rassemble dans un diagramme les informations obtenus sur la relation entre un c_0 -semi-groupe, son générateur et sa résolvante.



2.5 Théorème de Lumer Phillips

Théorème 2.12. Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire à domaine dense dans X . A le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ de contraction si et seulement si A est m -dissipatif.

Preuve. Soit A le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$. Soient $x \in D(A)$ et $f \in \mathbf{F}(x)$, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \langle T(t)x - x, f \rangle &= \operatorname{Re} \langle T(t)x, f \rangle - \operatorname{Re} \langle x, f \rangle \\
 &\leq |\operatorname{Re} \langle T(t)x - x, f \rangle| - \operatorname{Re} \langle x, f \rangle \\
 &\leq \|T(t)x\| \|f\| - \|x\|^2 \leq \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Divisant sur t et faire tendre vers 0, d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Re} \langle \frac{T(t)x - x}{t}, f \rangle \leq 0.$$

Donc A un opérateur dissipatif.

Ainsi, d'après le théorème de Hille Yosida on voit que $]0, +\infty[\subset \rho(A)$.

Donc $(\lambda Id - A) \in \mathcal{L}(X)$, $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, par suite $\operatorname{Im}(\lambda Id - A) = X$, $\forall \lambda > 0$

Par conséquent A est un opérateur m -dissipatif.

Réciproquement, on suppose que A est m -dissipatif alors d'après le lemme (1.3) A est fermé et à domaine dense.

Et $\operatorname{Im}(\lambda Id - A) = X$, $\forall \lambda > 0$, par suite $]0, +\infty[\subset \rho(A)$.

D'après le théorème (1.8) on a pour tout $x \in D(A)$

$$\lambda \|x\| \leq \|(\lambda Id - A)x\|, \quad \forall \lambda > 0.$$

Posons $y = (\lambda Id - A)x$

D'où

$$\lambda \|(\lambda Id - A)^{-1}y\| \leq \|y\|, \quad \forall \lambda > 0.$$

Donc

$$\|(\lambda Id - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Donc, d'après le théorème de Hille Yosida A est le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe de contraction. ■

CHAPITRE 3

APPLICATION À LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude du problème homogène et non homogène et quelques applications illustratives à la théorie des équations aux dérivées partielles.

3.1 Équation différentielles abstraites

X espace de Banach, u et f des fonctions à valeurs dans X .
 $A : D(A) \rightarrow X$ est un opérateur linéaire et $x \in X$ est la valeur initiale.

3.1.1 Équation homogène

Soit a le problème de cauchy suivant :

$$(PCH) \quad \begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Définition 3.1. La fonction $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ est une solution classique du problème (PCH) si : u est continue pour $t \geq 0$, continument différentiable et $u(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$ et u vérifie (PCH) .

Remarque 3.1. Comme $u(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et u continue en $t = 0$, le problème (PCH) ne peut pas avoir une solution pour $x \notin \overline{D(A)}$.

Définition 3.2. Le problème de cauchy (PCH) est dit bien posé si :

1. Il existe une solution $u(t)$ pour tout $x \in X$.
2. La solution $u(t)$ est unique pour tout $\tau > 0$ et uniformément stable pour tout $t \in [0, \tau[$ par rapport aux données initiales.

Proposition 3.1. Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors pour tout $x \in D(A)$, la fonction $u : t \longmapsto u(t) = T(t)x$ est l'unique solution classique du (PCH).

Preuve.

- L'existence :

Soit $x \in D(A)$, alors il vient de l'assertion (2) du proposition (2.3)

$$T(t)x \in D(A) \quad \text{et} \quad \frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Il en résulte que $t \longmapsto u(t) = T(t)x$ est une solution classique du problème (PCH).

- L'unicité :

Supposons qu'il existe un autre solution v . Soit $t > 0$ et posons

$$w(s) = T(t-s)v(s), \quad \forall s \in [0, t].$$

Pour tout $s \in [0, t]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dw(s)}{ds} &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que la fonction $s \longmapsto w(s) = T(t-s)v(s)$ est constante.

En particulier ces valeurs aux points $s = t$ et $s = 0$ coïncident.

D'où $v(t) = T(t)x = u(t), \quad \forall t \geq 0$. ■

Théorème 3.2. Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans X dont l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est non vide. Le problème (PCH) admet une unique solution classique $u(t)$ pour chaque $x \in D(A)$ si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Preuve. voir [12]. ■

Définition 3.3. Une fonction continue $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ est dite solution faible du problème (PCH) de valeur initiale x , si pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t u(s)ds \in D(A) \quad \text{et} \quad u(t) = A\left(\int_0^t u(s)ds\right) + x.$$

Proposition 3.3. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe sur X de générateur A , alors pour tout $x \in X$ la fonction $t \longmapsto u(t) = T(t)x$ est l'unique solution faible du problème (PCH) à valeur initial x .

Preuve. Soit $x \in D(A)$, d'après l'assertion (2) de la proposition (2.3), on a

$$\begin{aligned} u(t) &= A\left(\int_0^t u(s)ds\right) + x \\ &= T(t)x - x + x \\ &= T(t)x. \end{aligned}$$

Il résulte que $t \mapsto u(t) = T(t)x$ est une solution faible du problème (PCH).

Montrons maintenant l'unicité de cette solution.

Supposons qu'il existe deux solutions faibles u_1 et u_2 , soit $t > 0$.

Et posons $y(s) = T(t-s) \int_0^s (u_1(r) - u_2(r))dr$, $\forall s \in [0, t]$.

Pour tout $s \in [0, t]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dy(s)}{ds} &= -AT(t-s) \int_0^s (u_1(r) - u_2(r))dr + T(t-s)(u_1(s) - u_2(s)) \\ &= -T(t-s)A \int_0^s (u_1(r) - u_2(r))dr + T(t-s)(u_1(s) - u_2(s)) \\ &= -T(t-s)(u_1(s) - u_2(s)) + T(t-s)(u_1(s) - u_2(s)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que $s \mapsto T(t-s) \int_0^s (u_1(r) - u_2(r))dr$ est constante, par conséquent ces valeurs aux points $s = t$ et $s = 0$ coïncident.

D'où

$$\int_0^t (u_1(r) - u_2(r))dr = 0.$$

Par suite

$$\int_0^t u_1(r)dr = \int_0^t u_2(r)dr.$$

Finalement, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A\left(\int_0^t u_1(r)dr\right) + x = A\left(\int_0^t u_2(r)dr\right) + x \\ &= u_2(t). \end{aligned}$$

■

3.1.2 Équation non homogène

Considérons le problème de cauchy non homogène suivant :

$$(PCNH) \quad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & , \quad t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $f : [0, \tau[\rightarrow X$.

On suppose dans cette partie que A est le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, par conséquent l'équation homogène correspondante à $f \equiv 0$ admet une unique solution pour tout $x \in D(A)$.

Définition 3.4. On dit que $u : [0, \tau[\rightarrow X$ est une solution classique du problème (PCNH) sur $[0, \tau[$ si :

1. u est continue sur $[0, \tau[$.
2. u est continument différentiable sur $[0, \tau[$.
3. $u(t) \in D(A)$ pour $0 < t < \tau$ et u satisfait le problème (PCNH).

Proposition 3.4. Si $f \in L^1([0, \tau[, X) = \{f : [0, \tau[\rightarrow \mathbb{R} / \int_0^\tau \|f(t)\| dt < +\infty\}$, alors pour tout $x \in X$ le problème (PCNH) admet au plus une solution.

Si elle existe, elle est sous la forme :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (3.3)$$

Preuve. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe de générateur infinitésimal A et soit u une solution du problème (PCNH), alors la fonction $s \mapsto g(s) = T(t-s)u(s)$ est différentiable pour $s \in]0, t[$, et

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)[Au(s) + f(s)] \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Où $f \in L^1([0, \tau[, X)$ alors f est intégrable. En intégrant de 0 à t , on obtient

$$\int_0^t \frac{dg}{ds} ds = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Par suite

$$[T(t-s)u(s)]_0^t = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Ce qui implique

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

■

Définition 3.5. Soit A le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Soit $x \in D(A)$ et $f \in L^1([0, \tau[, X)$. On dit que la fonction $u \in L^1([0, \tau[, X)$ donnée par :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad , \quad \text{pour tout } t \in [0, \tau[.$$

Est une solution faible du problème (PCNH) sur $[0, \tau[$.

Remarque 3.2. La continuité de f en général ne suffit pas pour assurer l'existence de la solution (soit faible ou classique) du problème (PCNH) pour $x \in D(A)$.

Exemple 3.1. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semi-groupe, A son générateur infinitésimal de domaine $D(A)$. Soit $x \in X$ tel que : $T(t)x \notin D(A)$, pour tout $t \geq 0$.

On considère la fonction f définie par $f(s) = T(s)x$, $s \in [0, \tau[$. Alors f est continue pour tout $s \geq 0$.

Considérons le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + T(t)x, & t > 0 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Ce problème n'admet pas de solution même si $u(0) \in D(A)$ car, on sait que la solution faible de ce problème est sous la forme :

$$u(t) = T(t).0 + \int_0^t T(t-s)T(s)x ds = \int_0^t T(t)x ds = tT(t)x.$$

Or $tT(t)x$ n'est pas différentiable pour $t > 0$.

Donc, on ne peut pas arriver à une solution de ce problème.

Lemme 3.1. Soit $g : [a, b[\rightarrow X$ une fonction continue admettant une dérivée à droite g'_d continue sur $[a, b[$, alors g continument différentiable sur $[a, b[$.

Preuve. voir [12]. ■

Théorème 3.5. Soient A le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, $f \in L^1([0, \tau[, X)$ continue sur $[0, \tau[$ et soit la fonction définie par :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (3.4)$$

Le problème (PCNH) admet une solution u sur $[0, \tau[$ pour tout $x \in D(A)$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) v est continument différentiable sur $[0, T[$.

ii) $v \in D(A)$ pour tout $0 < t < T$ et la fonction $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $[0, \tau[$.

Réciproquement, si le problème (PCNH) admet une solution u sur $[0, \tau[$ pour un certain $x \in D(A)$ alors cette solution satisfait à la fois (i) et (ii).

Preuve. Si le problème (PCNH) admet une solution u par un certain $x \in D(A)$, alors cette solution est donné par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Par conséquent

$$t \mapsto v(t) = u(t) - T(t)x.$$

Est différentiable pour tout $t > 0$ (comme différence de deux fonctions différentiables), et on a

$$v'(t) = u'(t) - T(t)Ax.$$

Donc v' est clairement continue sur $[0, \tau[$ et par suite (i) est vérifiée.

De plus si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A) \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Donc $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $[0, \tau[$ ainsi (ii) est vérifiée.

D'autre part, on a pour tout $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds + \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \right] \\ &= \frac{T(h) - Id}{h} v(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\frac{T(h) - Id}{h} v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \quad (3.5)$$

De la continuité de f , il est clair que le second terme de la coté droite de (3.5) admet la limite $f(t)$ quand $h \rightarrow 0$

- Si v est continument différentiable sur $[0, \tau[$, il résulte de (3.5) que $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < \tau$ et $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Puisque $v(0) = 0$, il en résulte que $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution du problème (PCNH), pour $x \in D(A)$.
- Si $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < \tau$, il résulte de (3.5) que v est différentiable à droite en t et sa dérivée à droite $v'_d(t) = Av(t) + f(t)$ puisque v'_d est continue, il vient du lemme (3.1) que v est continument différentiable sur $[0, \tau[$ et $v'(t) = Av(t) + f(t)$.

Puisque $v(0) \equiv 0$, $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution de problème (PCNH) pour $x \in D(A)$. ■

Les deux corollaires suivantes sont des résultats du théorème (3.5)

Corollaire 3.6. Soit A le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ si f est continument différentiable sur $[0, \tau[$, alors (PCNH) admet une solution u sur $[0, \tau[$ pour tout $x \in D(A)$.

Preuve. On a : $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t)f(t-s)ds$.

Ce qui entraîne que v est différentiable pour tout $t > 0$, et par la règle intégrale de Leibiz, on a

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t)f'(t-s)ds = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds$$

D'où v est continue sur $[0, \tau[$, le résultat découle donc du théorème (3.5), (i). ■

Corollaire 3.7. Soient A le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et $f \in L^1([0, \tau[, X)$ une fonction continue sur $[0, \tau[$, si $f(s) \in D(A)$ pour $0 < s < \tau$ et $s \mapsto Af(s) \in L^1([0, \tau[, X)$ alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (PCNH) admet une solution sur $[0, \tau[$.

Preuve. D'après les conditions du corollaire, il en résulte que pour tout $s > 0$ $T(t-s)f(s) \in D(A)$ et la fonction $s \mapsto AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ est intégrable. Par conséquent $v(t)$ définie par (3.4) vérifiant $v(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$, et

$$Av(t) = A \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds.$$

Donc $t \mapsto Av(t)$ est continue, le résultat découle du théorème (3.5), (ii). ■

3.2 Application (Résolution d'une EDP)

3.2.1 Équation d'Advection

Considérons l'équation d'advection suivante, qui décrit la quantité de la chaleur transportée par un fluide en mouvement.

$$(EA) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = 0, & t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (3.6)$$

On cherche les solutions dans l'espace de Banach $X = L^2(\mathbb{R})$.

Nous écrivons d'abord le problème (EA) sous la forme abstraite, en posant $u(t) = v(\cdot, t)$

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = f. \end{cases}$$

Où $A = \frac{-d}{dx}$ de domaine $D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) / u' \in L^2(\mathbb{R})\} = H^1(\mathbb{R})$.

D'autre part, A est le générateur infinitésimal du c_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ défini sur X par

$$(T(t)f)(x) = f(x-t) \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Alors, il vient du proposition (3.1) que pour tout $f \in D(A)$, la fonction définie par :

$$v(x, t) = (T(t)f)(x) = f(x-t)$$

est l'unique solution de (EA).

3.2.2 Équation d'ondes

Il s'agit d'équation aux dérivées partielles de second ordre qui décrit les phénomènes de propagation, l'équation d'ondes dont u est une solution est donnée par :

$$(EO) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) - \Delta v(x, t) = 0 & , \text{sur } \Omega \times [0, \tau[\\ v(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \tau[\\ v(x, 0) = v_0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = v_1 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Où Ω est un sous ensemble régulier de \mathbb{R}^k et $v_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $v_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Nous écrivons d'abord l'équation (EO) sous la forme abstraite, en posant $u = (v, \frac{\partial v}{\partial t})$, alors :

$$(PCH) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au, & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Où $Au = A(u_1, u_2) = (u_2, \Delta u_1)$ et $u_0 = (v_0, v_1)$.

Soit $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on définit sur X le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_X = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega} u_2 v_2 dx, \quad \text{où } u = (u_1, u_2) \text{ et } v = (v_1, v_2).$$

L'opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ de domaine $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ est m -dissipatif sur X , en effet :

- D'abord, A est dissipatif car

$$\langle Au, u \rangle_X = \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla u_1 dx + \int_{\Omega} \Delta u_1 \cdot u_2 dx = 0 \quad [\text{D'après la formule de green}].$$

- Soient $(f, g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. L'équation $u - Au = (f, g)$ est équivalent aux système :

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = f \\ u_2 - \Delta u_1 = g \end{cases}$$

En remplaçant $u_2 = u_1 - f$ dans la deuxième équation, on obtient

$$u_1 - \Delta u_1 = f + g$$

Qui admet une solution unique $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, d'après le théorème de Lax-Milgram.

Par conséquent $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est unique. Donc $Im(\lambda Id - A) = X$ et A est m -dissipatif.

Par le théorème de Lumer-Phillips, il vient que A est le générateur infinitésimal d'un c_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ et par suite le problème (3.7) admet une solution unique donnée par :

$$u(x, t) = (T(t)u_0)(x).$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les semi-groupes sont un outil très puissant pour la résolution des équations d'évolutions, ils ont connu des développements et des applications très intéressants.

Notre étude consiste d'abord à donner des notions globales sur la théorie des semi-groupes, ensuite à examiner la relation entre l'existence et l'unicité de la solution de certaines équations différentielles, en particulier les équations différentielles abstraites (problème de Cauchy) en donnant quelques applications illustratives à quelques équations aux dérivées partielles .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Barrouk. *Semi-groupes et applications aux EDP avec exercices corrigés*, Université Mohamed Cherif Messaadia, Souk Ahras, 2018/2019.
- [2] A. Batkai, S. Piazzera. *Semigroups for Delay Equations*, A K Peters, Wellesly, Massachusetts, 2005.
- [3] B. Bendoukha. *Théorie spectrale des opérateurs dans les espaces de Hilbert*, cours Université Addelhamid Ibn Badis, Mostaghanem, Janvier 2020.
- [4] F. Boyer. *Analyse Fonctionnelle*, cours Aix Marseille Université, 13 décembre 2015.
- [5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et applications*. Masson, Pris, 1983.
- [6] K. J Engel and R. Nagel. *One parameter semigroups for linear evolution equations*. springer-verlag, New york ,2000.
- [7] D. Hiber. *Cours de Théorie spectrale*, 2019/2020.
- [8] L. D. Lemle. *Autour de propriétés spectrales des semi-groupes*, Université Claud Bernard. Lyon 1. Université Politechnica de Tinisora, France. Roumanie, 2010.
- [9] L. D. Lemle. *semi-groupes d'opérateurs, l'unicité des pré-générateurs et application*, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand, 2007.
- [10] S. Makhlouf. *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires*, 3 ème année licence Maths, Université L'arbi Ben Mhidi.OEB, April 2020.
- [11] Y. Naas. *Résolution d'équations différentielles elliptiques du second ordre dans des espaces d'interpolation*, Université Ahmed Ben Bela, Oran, Thèse doctorat, 2006.
- [12] A. Pazy. *semigroup of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl Math.sci,44 : springer verlag,New york, Berlin, 1983.
- [13] A. Thorel. *Equation de diffusion généralisée pour un modèle de croissance et de dispersion d'une population incluant des comportements individuels à la frontière des divers habitats*, Université le Havre Normandie, Thèse doctorat, 2018.