



Mémoire de fin d'études

PRESENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE : Licence

Filière : Physique
Option : Physique des Matériaux

THÈME : DYNAMIQUE D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Préparé par : Maadadi wided
Halilou Leila

Soutenu le : 14/06/2014.

Devant le jury :

Président: Benchiheub Nadjat

Rapporteur : berrehail Mounira

Examineur: Labga Noudjoud

MAA

MAA

MCB

Université BBA

Université BBA

Université BBA

SOMMAIRE

Introduction générale	3
Chapitre 01 : Particule chargée dans un champ électromagnétique	
1.1- Introduction	6
1.2- Equation de Maxwell	6
1.2.1- Le potentiel scalaire et vecteur	7
1.3 - Particule chargée dans un champ magnétique	8
1.3.1- Etude classique	8
1.4- Particule chargée dans un champ électromagnétique	12
1.4.1- Etude classique	12
1.4.2- Etude quantique.....	13
Chapitre 02 : Invariance de jauge	
2.1- Notion de jauge	16
2.2- Invariance de jauge.....	16
2.3- Invariance de jauge en mécanique classique.....	17
2.4- Invariance de jauge en mécanique quantique	19
2.4.1- Cas général ou les potentiels scalaire et vecteur sont tous les deux non nuls	19
2.4.2- Cas général ou les potentiels scalaire est nul et le potentiel vecteur non nul.....	20
2.5- Transformation unitaire du vecteur d'état et Invariance de forme de l'équation de Schrödinger	20
Chapitre 03 : Application particule chargée placée dans un champ magnétique	
3.1- Introduction	26
3.2- Hamiltonien quantique	26
3.2.1- La jauge de landau	26
3.2.2- La jauge symétrique	29
Conclusion générale	34
Bibliographie	35

Remerciements

Nous tenons avant tout à adresser notre reconnaissance à notre Dieu tout puissant de nous avoir permis d'en arriver là, car sans lui rien n'est possible.

Nous exprimons ensuite toute notre gratitude et nos remerciements les plus sincères :

A notre professeur encadreur M. Berrehail pour nous avoir guidé grâce à ses précieux conseils et ses encouragements lors de la réalisation de ce mémoire.

Aux membres de jury qui ont accepté de juger notre Travail,

A toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

A tous les membres du département des sciences de la matière de l'université de Bordj Bou-Arreridj.

A nos parents qui nous ont enseigné la patience, la politesse et qui ont toujours été là pour nous.

Enfin, à tous les amis et collègues qui nous ont apporté leur savoir et soutien moral tout au long de notre parcours universitaire.

*Introduction
générale*

INTRODUCTION GENERALE

La gravitation est la seule force pour laquelle Newton formule une loi précise, mais elle n'est pas la seule force qui existe dans l'univers. Il y a aussi l'électricité et le magnétisme. Ce n'est presque que 200 ans après Newton qu'une théorie physique mature de l'électricité et du magnétisme voit le jour. Il s'agit de l'électrodynamique de James Clark Maxwell, théorie qui unifie les phénomènes de l'électricité et du magnétisme.

Les champs électriques et magnétiques, produits par une source de courant, sont généralement interdépendants. Ils sont reliés entre eux par l'intermédiaire des équations de Maxwell, qui sont des équations différentielles couplées. En mécanique classique, le champ électromagnétique intervient directement dans la dynamique d'un système physique puisqu'il figure explicitement dans la force de Lorentz. Par exemple, et par conséquent la loi fondamentale de la dynamique y dépend aussi explicitement. Cependant, en mécanique quantique, relativiste ou non relativiste, le champ magnétique n'intervient pas directement dans l'expression de l'hamiltonien mais ce dernier s'exprime à l'aide d'un autre couple de champs qui sont les potentiels scalaire et vecteur [1]. Le plus important est que ce couple de champs n'est pas unique de sorte que si l'on arrive à déterminer un couple particulier de champs, on peut générer une infinité de tels champs, reliés entre eux par des transformations ponctuelles, et qui peuvent être également, utilisés pour décrire la dynamique du système. De telles transformations, appelées transformations de jauge, jouent un rôle très important en mécanique quantique relativiste et non relativiste.

Du point de vue mathématique, l'invariance de jauge permet en principe d'aborder une jauge qui simplifie la résolution de l'équation de Schrödinger. Cependant, il faut bien distinguer entre les problèmes dépendants et indépendants du temps. Si les champs, magnétique et électrique, ne dépendent pas explicitement du temps, il n'y aura aucune relation entre eux. Par contre, si par exemple on crée un champ magnétique variable dans le temps il sera généré automatiquement d'après les équations de Maxwell, un champ électrique qui dépend éventuellement de l'espace-temps. Le problème d'une particule chargée placée dans un champ électromagnétique est particulièrement intéressant pour ces différentes applications, notamment en physique de solide, comme par exemple l'effet Hall, la physique théorique.

Dans ce travail nous allons nous intéresser à ce problème et essayer de clarifier certaines ambiguïtés. Dans le chapitre 1 nous allons faire un rappel plus ou moins en détail sur la dynamique d'une particule chargée ; classique et quantique. Pour cela, nous présenterons, d'abord les formalismes Lagrangien et Hamiltonien pour une particule chargée placée dans un champ magnétique et ensuite électromagnétique.

Nous suivrons en partie les développements présentés dans le livre standard de mécanique quantique [1].

Dans le chapitre 2 nous aborderons l'étude de l'invariance de la mécanique quantique par rapport aux transformations de jauge et nous montrerons qu'un changement de jauge est équivalent à une transformation unitaire sur la fonction d'onde, qui n'aura aucun effet sur les prévisions des quantités physiques véritables.

Par ailleurs dans le chapitre 3 nous présenterons notre travail qui consiste à étudier la solution de l'équation de Schrödinger d'une particule chargée placée dans un champ magnétique. Afin de simplifier la résolution de l'équation de Schrödinger associé, nous choisirons deux jauges ; jauge de Landau et jauge symétrique, sur laquelle nous chercherons la forme de hamiltonien, la valeur propre ainsi que la fonction d'onde. Nous finirons ce travail par une brève conclusion.

Chapitre 01

*Particule chargée dans
un champ
électromagnétique*

1.1 Introduction

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre plus ou moins peu détaillé à l'étude de la dynamique d'une particule chargée soumise à l'action d'un champ électromagnétique. L'étude sera menée en considérant d'abord la théorie classique basée sur la loi de Newton et le principe de Lagrange et ensuite la théorie quantique basée sur une formulation hamiltonien du problème et les règles de commutations. Bien sûr, l'étude classique sera faite à titre de rappel sans trop de détails car c'est cette approche quantique qui sera mise en évidence avec plus de détails car c'est cette approche que nous adopterons dans notre travail qui sera développée dans les prochains chapitres.

1.2 Equations de Maxwell

En 1865 Maxwell a unifié l'électricité et le magnétisme en une seule théorie, l'électromagnétisme [2, 3]. Les champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ne peuvent pas être traités indépendamment car la variation de l'un nécessite la présence de l'autre. Donc il s'agit d'une seule entité physique appelée champ électromagnétique, ce champ subit deux effets sur le milieu matériel : un effet de polarisation dû au champ électrique et un effet d'aimantation dû au champ magnétique, ces deux effets sont décrits par deux fonctions complexes ε et μ qui décrivent la relation entre le champ incident (\vec{E}, \vec{B}) et le milieu matériel. Les équations de Maxwell satisfaites par un champ électromagnétique dans un milieu caractérisé par sa permittivité ε et sa perméabilité μ s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

où $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ont respectivement la densité de charge et la densité de courant représentant les sources du champ électromagnétique. A partir des équations (1.2), (1.3) on peut montrer que $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ peuvent être décrits par un potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ et un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

1.2.1 Le potentiel scalaire et vecteur

Dans de nombreuses situations, les problèmes d'électromagnétisme sont grandement simplifiés par l'utilisation du champ supplémentaire: le potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

L'existence des deux champs auxiliaires est une conséquence des équations de Maxwell (1.2) et (1.3). Ces deux équations ne font pas intervenir la matière (contrairement aux deux autres), elles peuvent être comprises comme deux contraintes imposées à la structure du champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} .

a. Potentiel vecteur

La non existence de charge magnétique nous a permis d'établir la relation (1.2) puisque la divergence du champ magnétique est toujours nulle, cela signifie qu'il s'agit d'un champ rotationnel [4.5]. En d'autre

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.5)$$

$\vec{A}(\vec{r}, t)$ est appelée le potentiel vecteur de \vec{B} .

Ce potentiel n'est pas défini de manière unique. En effet, considérons un autre potentiel vecteur \vec{A}' tel que :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\beta \quad (1.6)$$

\vec{A} étant le potentiel vecteur du champ \vec{B} et β un champ scalaire quelconque, on calcule le rotationnel de ce vecteur par :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\beta) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.7)$$

Car

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\beta) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\beta = 0 \quad (1.8)$$

Donc

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (1.9)$$

\vec{A} est aussi un potentiel vecteur du champ \vec{B} . Nous voyons donc que les deux potentiels vecteurs

\vec{A} et $\vec{A}' = \vec{A} + (\vec{\nabla}\beta)$, qui ne diffèrent que par $(\vec{\nabla}\beta)$ conduisent au même champ magnétostatique \vec{B} . On dit que le potentiel vecteur est défini à un gradient près. Pour définir \vec{A} de manière unique, il faut imposer une condition supplémentaire à \vec{A} . Cette condition est appelée condition de jauge.

b. potentiel scalaire

En injectant l'expression du potentiel vecteur (1.5) dans l'équation (1.3), on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.10)$$

Le rotationnel du dernier membre est toujours nul, ce dernier appartient donc à un champ du gradient, on peut toujours trouver une fonction scalaire ϕ tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi \quad (1.11)$$

La fonction ϕ est appelée potentiel scalaire. Aussi dans le potentiel scalaire on peut dire que ce potentiel n'est pas unique. En effet, considérons la nouvelle fonction scalaire

$$\phi' = \phi + \beta(t) + K \quad (1.12)$$

Où β est une fonction de temps seulement et K une constante.

Le gradient de cette nouvelle fonction ϕ' :

$$\vec{\nabla} \phi' = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \beta + \vec{\nabla} K = \vec{\nabla} \phi \quad (1.13)$$

Car le dérivé de la fonction β par rapport aux variables d'espaces n'est nulle, tout comme celle de la constante K . Si ϕ est un potentiel scalaire, alors ϕ' l'est aussi, donc le potentiel scalaire n'est pas unique.

1.3 Particule chargée dans un champ magnétique

1.3.1 Etude Classique

Considérons une particule de masse m , de position r et de charge q , soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$, la force \vec{F} qui s'exerce sur elle est donnée par la loi de la place :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.14)$$

Où \vec{v} est la vitesse de la particule : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Si on choisit le repère de telle façon que le champ magnétique \vec{B} uniforme soit porté par l'axe (oz) $\vec{B} = B\vec{K}$, avec $B > 0$, la force de Lorentz est à tout instant orthogonale à \vec{K} et les équations du mouvement se réduisent à :

$$m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y \quad (1.15)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \quad (1.16)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (1.17)$$

D'après les trois équations, on peut résumer :

$$X''(t) = \frac{qB}{m} y'(t) \quad , \quad Y''(t) = \frac{qB}{m} x'(t) \quad , \quad Z''(t) = 0 \quad (1.18)$$

Ces équations admettent comme solution générale :

$$X(t) = x_0 + R \cos(\omega_c t + \theta) \quad (1.19)$$

$$Y(t) = y_0 + R \sin(\omega_c t + \theta) \quad (1.20)$$

$$Z(t) = z_0 + v_z t \quad (1.21)$$

Avec $\omega_c = qB/m$ est la fréquence cyclotron [6].

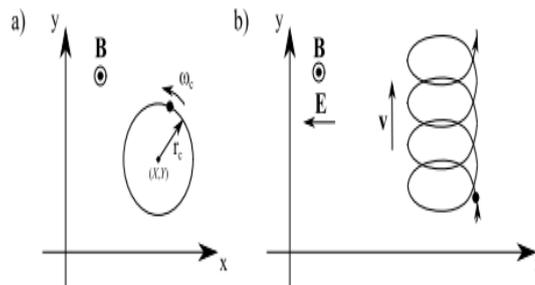


Figure 1 : Mouvement cyclotron de particule chargée, a) dans un champ magnétique et b) dans un champ magnétique et un champ électrique

a. Formulation de Lagrange

Un système de n particules est généralement décrit dans l'espace par $6n$ variables qui sont les coordonnées généralisées et leurs vitesses correspondantes. Ces coordonnées peuvent être les positions dans un système cartésien, cylindrique, sphérique, elles sont dénotées par $\{q_i, \dot{q}_i, i=1..3n\}$. La fonction

de Lagrange, dénotée par $L(q_i, \dot{q}_i)$ est définie comme la différence entre l'énergie cinétique $T(q_i, \dot{q}_i)$ et l'énergie potentielle $U(q_i)$:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U = \frac{1}{2}mv^2 + qv \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + q(x'A_x + y'A_y + z'A_z) \quad (1.22)$$

Les équations de mouvement du système sont données par les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \text{Pour } i = 1, 2, 3 \quad (1.23)$$

La connaissance des q_i permet de calculer la position dans l'espace d'un point quelconque du système. La trajectoire du mouvement du système est donc caractérisée par la donnée des $3n$ fonctions du temps $q_i(t)$ [1]. L'état du système à un instant donné t_0 est alors défini par l'ensemble des $q_i(t_0), \dot{q}_i(t_0)$.

En effet, considérons par exemple pour un système de 3 dimensions, l'équation de Lagrange impliquant la coordonnée x .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = q \left[x' \frac{\partial A_x}{\partial x} + y' \frac{\partial A_y}{\partial x} + z' \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \quad (1.26)$$

De sorte que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + x' \frac{\partial A_x}{\partial x} + y' \frac{\partial A_x}{\partial y} + z' \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \quad (1.27)$$

L'équation de Lagrange relative à la coordonnée x s'écrit donc :

$$m\ddot{x} + qy' \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) - qz' \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + q \frac{\partial A_x}{\partial t} = 0 \quad (1.28)$$

b. Formulation de Hamilton

Parfois, la résolution d'un tel système est trop compliquée et il est préférable de le transformer en un système équivalent constitué de $6n$ équations différentielles du premier ordre à $6n$ fonctions inconnues. Cette transformation s'appelle Formalisme de Hamilton qui conduit à la construction d'une nouvelle

fonction à $6n$ variables indépendantes. Cette fonction est appelée Hamiltonien et les variables indépendantes sont appelées variables canoniques.

Dans le formalisme de Hamilton, on définit ce qu'on appelle les moments conjugués p_i associés aux coordonnées généralisées q_i par la relation :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, i = 1, 3n \quad (1.29)$$

Dans le cas du Lagrangien de la particule chargée dans un champ magnétique, défini par (1.22), on obtient :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{r}_i + qA_i, i = x, y, z \quad (1.30)$$

Où p_i est l'impulsion canoniquement conjuguée aux coordonnées q_i .

Les p_i sont parfois appelés impulsions généralisées. Dans le cas d'un système de particules où les forces dérivent d'une énergie potentielle, les moments conjugués des variables de position $r_i(x_i, y_i, z_i)$ sont simplement les quantités de mouvements :

$$p_i = m\dot{r}_i \quad (1.31)$$

La fonction de Hamilton (Hamiltonien) du système est par définition donnée par :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (1.32)$$

En ce qui concerne la particule chargée dans un champ magnétique, la fonction de Hamilton s'écrit :

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - q \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1.33)$$

Substituant l'équation (1.30) dans (1.33), nous obtenons:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (1.34)$$

Cependant, dans le formalisme Hamiltonien le but est justement d'éliminer les vitesses au profit des moments conjugués. En utilisant encore la relation (1.30), on obtient:

$$\dot{r} = \frac{1}{m} (\vec{p} - q \vec{A}(\vec{r}, t)) \quad (1.35)$$

De sorte que H est donné par l'expression suivante :

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 \quad (1.36)$$

Sur la base de cette relation, on voit que l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du champ magnétique mais du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Cette propriété a une importance capitale en théorie quantique comme nous allons le voir par la suite [1].

1.4 Particule chargée dans un champ électromagnétique

1.4.1 Etude Classique

Soit une particule classique de charge q , se déplaçant sous l'effet d'un champ électromagnétique.

Dans la théorie de Newton, cette particule subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (1.37)$$

Où \vec{v} la vitesse de cette particule à l'instant considéré, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sont respectivement, le champ électrique et le champ magnétique [7]. D'une part, les deux champs (\vec{E}, \vec{B}) dérivent d'un potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ et d'un potentiel vectoriel $\vec{A}(\vec{r}, t)$ respectivement :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.38)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.39)$$

Les équations du mouvement, qui déterminent l'évolution temporelle de la position de la particule, sont les équations de Newton. Dans le régime non-relativiste, celles-ci s'écrivent sous la forme:

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = f \quad (1.40)$$

La loi de Newton conduit aux équations différentielles couplées suivantes :

$$\begin{aligned} mv'_x - qB_z v_y + qB_y v_z &= qE_x \\ mv'_y - qB_x v_z + qB_z v_x &= qE_y \\ mv'_z - qB_y v_x + qB_x v_y &= qE_z \end{aligned} \quad (1.41)$$

a. Formulation de Lagrange

Le Lagrangien pour cette particule s'écrit comme :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} mv^2 + q\vec{V} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - q\phi(\vec{r}, t) = \\ &= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - q\phi \end{aligned} \quad (1.42)$$

Les équations du mouvement, qui déterminent l'évolution temporelle de la position de la particule, sont les équations de Lagrange [8]. En effet, considérons l'équation de Lagrange impliquant la coordonnée x , On a :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = q \left[x \cdot \frac{\partial A_x}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial A_y}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] - q \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \quad (1.44)$$

De sorte que :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + x \cdot \frac{\partial A_x}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial A_x}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \quad (1.45)$$

L'équation de Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, relative a la coordonnée x s'écrit donc :

$$m\ddot{x} + qy \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) - qz \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = -q \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) \quad (1.46)$$

b. Formulation d'Hamilton

Pour le traitement quantique d'un système à une particule, il est souvent préférable d'utiliser le formalisme hamiltonien de la mécanique classique. Le Hamiltonien s'obtient à partir du lagrangien par une transformation de Legendre :

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + q\phi(\vec{r}, t) \quad (1.47)$$

Comme la Lagrangien, cet Hamiltonien s'exprime en fonction des potentiels $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et $\phi(\vec{r}, t)$, et non des champs \vec{E} et \vec{B} [8].

1.4.2 Etude quantique

Le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique se fait par la considération des variables canoniques r et p comme des opérateurs qui vérifient les relations de commutation canoniques :

$$[x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar \quad (1.48)$$

Les grandeurs physiques classiques seront représentées alors en remplaçant dans leurs expressions les variables canoniques par leurs opérateurs correspondants en symétrisant l'expression obtenue. En ce qui concerne l'Hamiltonien classique donné dans (1.47), sa contrepartie quantique s'écrit avec la même expression tout en sachant que p et $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ont des opérateurs vectoriels dont les composantes ne commutent pas en général [7]. Ceci se traduit par l'écriture du premier terme du membre de droite de (1.47) sous la forme suivante :

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + q\phi(\vec{r}, t) \quad (1.49)$$

Dans le cas d'un système indépendant du temps, l'équation de Schrödinger qui décrit l'évolution de la fonction d'onde de la particule chargée s'écrit toujours comme :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t) \quad (1.50)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} [\vec{P} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + q\phi(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (1.51)$$

Chapitre 02

Invariance de jauge

2.1 Notion de jauge

Nous avons vu dans le chapitre précédent que, puisqu'un champ électromagnétique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ doit satisfaire les équations de Maxwell, il existe toujours une fonction scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ et une fonction vectorielle $\vec{A}(\vec{r}, t)$, appelées respectivement potentiel scalaire et potentiel vecteur, tel que le champ électromagnétique qui s'exprime par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.2)$$

Par ailleurs, si un tel couple (ϕ, \vec{A}) est connu, on peut en déduire une infinité d'autres couples de potentiels qui peuvent être également associés au champ électromagnétique, appelé jauge [9].

2.2 Invariance de jauge

A une configuration donnée des potentiels $\phi(\vec{r}, t)$ et $\vec{A}(\vec{r}, t)$ correspondent aux champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ bien précis, si l'on remplace le potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$, respectivement par les potentiels $\phi'(\vec{r}, t)$ et $\vec{A}'(\vec{r}, t)$ définis par :

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\beta \quad (2.4)$$

Où $\beta = \beta(\vec{r}, t)$ est une fonction scalaire quelconque de la position et du temps.

On peut montrer que :

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \vec{\nabla}\beta) \quad (2.6)$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad (2.7)$$

Et que :

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\beta) \quad (2.8)$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (2.9)$$

Le remplacement de \vec{A} et ϕ par \vec{A}' et ϕ' s'appelle une transformation de jauge qui laisse les champs \vec{E} et \vec{B} invariants et donc la trajectoire classique inchangée. L'invariance de \vec{E} et \vec{B} dans cette transformation s'appelle l'invariance de jauge.

Pour l'étude de certains problèmes, il peut être utile de choisir parmi tous les potentiels possibles ceux qui sont le plus adaptés, que se soit pour les raisons techniques ou des raisons plus physiques [10]. Ce choix se fait en imposant une condition supplémentaire au potentiel appelée condition de jauge. Cette condition porte en générale sur la divergence du potentiel vecteur. On a par exemple :

La jauge de Lorentz :

$$\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

La jauge de Colomb :

$$\text{div}\vec{A} = 0 \quad (2.11)$$

Les deux jauges les plus fréquemment utilisées sont la jauge de Landau et la jauge symétrique. Remarquons que la jauge est choisie uniquement pour des raisons de commodité de calcul. Par exemple, la jauge de Landau est invariante par translation dans la direction y et paraît donc appropriée pour étudier des systèmes possédant cette symétrie [11]. Evidemment, les résultats physiques sont complètement indépendants de ce choix.

2.3 Invariance de jauge en mécanique classique

On rappelle que l'hamiltonien classique d'une particule plongée dans un champ électromagnétique dérivant \vec{A} et ϕ s'écrit :

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + q\phi(\vec{r}, t) \quad (2.12)$$

Les variables dynamiques sont les positions \vec{r} et les impulsions \vec{p} , satisfaisant aux équations de hamilton:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{\nabla}_p H(\vec{r}(t), \vec{p}(t)) \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = -\vec{\nabla}_r H(\vec{r}(t), \vec{p}(t)) \quad (2.14)$$

On rappelle que la quantité de mouvements s'écrit comme :

$$\vec{\pi} = m\dot{\vec{r}} = \vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.15)$$

Pour écrire les équations (2.13) et (2.14), il est nécessaire de choisir une jauge J qui dépend du potentiel \vec{A} et ϕ décrivant le champ électromagnétique, et on prend une autre jauge J' caractérisée par des potentiels \vec{A}' et ϕ' [1]. Comme nous l'avons signalé, les équations de newton indiquent que la position r et la vitesse v prennent à chaque instant des valeurs indépendantes de la jauge, on a par conséquent :

$$\begin{aligned} r'(t) &= r(t) \\ \pi'(t) &= \pi(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Or d'après (2.15)

$$\pi(t) = p(t) - q\vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.17)$$

$$\pi'(t) = p'(t) - q\vec{A}'(\vec{r}', t) \quad (2.18)$$

Donc les valeurs $p(t)$ et $p'(t)$ de l'impulsion dans la jauge J et J' sont différentes, elle doivent vérifier:

$$p'(t) - q\vec{A}'(\vec{r}', t) = p(t) - q\vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.19)$$

Pour passer de la jauge J à la jauge J', les valeurs des variables dynamiques fondamentales se transforment lors de ce changement de jauge suivant les formules:

$$r'(t) = r(t) \quad (2.20)$$

$$p'(t) = p(t) + q\vec{\nabla}\beta(\vec{r}, t) \quad (2.21)$$

Dans le formalisme hamiltonien, les valeurs à chaque instant des variables dynamiques qui décrivent un mouvement donné dépend de la jauge choisie [1].

2.4 Invariance de jauge en mécanique quantique

Comme l'hamiltonien de tous système dépend explicitement de la jauge choisie, on s'attend évidemment à conclure que toutes les observables du système dépendent aussi éventuellement de la jauge. Pour cela nous effectuerons tous les opérateurs par l'indice de jauge J' [1]. Les opérateurs $R_{J'}$ et $P_{J'}$ correspondent respectivement à la position et l'impulsion, doivent vérifier les mêmes relations de commutations qui sont annoncées dans la jauge J. Par conséquent, pour satisfaire à cette exigence nous devons considérer que ces opérateurs ne dépendent pas explicitement de la jauge. On écrit alors :

$$\begin{aligned} R_J &= R_{J'} \\ P_J &= P_{J'} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mais d'autres opérateurs quelque soit l'opérateur associé à la quantité de mouvement dépend au contraire de la jauge choisie. Il est en effet donné dans la jauge J par :

$$\Pi_J = p - q\vec{A}(R, t) \quad (2.23)$$

Et si on change la jauge J', il devient :

$$\Pi_{J'} = p - q\vec{A}'(R, t) \quad (2.24)$$

2.4.1 Cas général où les potentiels scalaire et vecteur sont tous les deux non nuls

Dans le cas général, l'opérateur s'écrit dans les deux jauges J et J' à partir de la relation du chapitre 1 (1.47) comme :

$$H_J(R, p, t) = \frac{1}{2m} \left[p - q\vec{A}(R, t) \right]^2 + q\phi(R, t) \quad (2.25)$$

Et

$$H_{J'}(R, p, t) = \frac{1}{2m} [p - q\vec{A}'(R, t)]^2 + q\phi'(R, t) \quad (2.26)$$

D'après (2.3) et (2.4), on obtient :

$$H_{J'}(R, p, t) = \frac{1}{2m} [p - q\vec{A} - q\vec{\nabla}\beta(R, t)]^2 + q\left(\phi(R, t) - \frac{\partial}{\partial t}\beta(R, t)\right) \quad (2.27)$$

Il est clair que $H_{J'}(R, p, t)$ ne coïncide avec $H_J(R, p, t)$ que si $\beta(R, t)$ est une constante, c'est à dire lorsque les deux jauges coïncident.

2.4.2 Cas général où le potentiel scalaire est nul et le potentiel vecteur non nul

Dans le cas particulier où la première jauge comporte uniquement le potentiel vecteur, l'hamiltonien s'écrit :

$$H_J(R, p, t) = \frac{1}{2m} [p - q\vec{A}(R, t)]^2 \quad (2.28)$$

Et dans l'autre jauge il s'écrit :

$$H_{J'}(R, p, t) = \frac{1}{2m} [p - q\vec{A} - q\vec{\nabla}\beta(R, t)]^2 - q\frac{\partial}{\partial t}\beta(R, t) \quad (2.29)$$

2.5 Transformation unitaire du vecteur d'état et Invariance de forme de l'équation de Schrödinger

a- Opérateur unitaire T_β :

Considérons les vecteurs d'états du système dans les jauges J et J' respectivement, dénotés pour simplifier par $|\Psi(t)\rangle$ et $|\Psi'(t)\rangle$. Pour déterminer la relation qui existe entre les deux vecteurs, on va utiliser les égalités entre valeurs moyennes :

$$\begin{aligned} \langle \Psi'(t) | R_{J'} | \Psi'(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | R_J | \Psi(t) \rangle \\ \langle \Psi'(t) | P_{J'} | \Psi'(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | P_J + q\vec{\nabla}\beta(R, t) | \Psi(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

En utilisant (2.22), il apparaît que ces égalités sont possibles seulement si les états $|\Psi(t)\rangle$ et $|\Psi'(t)\rangle$ sont différents. Montrons alors qu'il existe une transformation unitaire qui les relie :

$$|\psi'(t)\rangle = T_\beta(t)|\psi(t)\rangle \quad (2.31)$$

Où $T_\beta(t)$ est un opérateur unitaire

$$T_\beta^+(t)T_\beta(t) = T_\beta(t)T_\beta^+(t) = 1 \quad (2.32)$$

En considérant les relations (2.22), il apparaît que les égalités (2.30) seront satisfaites pour un ket $|\Psi(t)\rangle$ arbitraire, à condition que l'opérateur $T_\beta(t)$ vérifie :

$$T_\beta^+(t)RT_\beta(t) = R \quad (2.33)$$

$$T_\beta^+(t)PT_\beta(t) = P + q\vec{\nabla}\beta(R,t) \quad (2.34)$$

En multipliant (2.33) à gauche par $T_\beta(t)$ il vient que :

$$RT_\beta(t) = T_\beta(t)R \quad (2.35)$$

Ce qui signifie que l'opérateur qu'on cherche doit commuter avec les trois composantes de R .

$$[R, T_\beta] = 0 \quad (2.36)$$

Autrement dit, on peut chercher $T_\beta(t)$ comme une fonction de r . Pour satisfaire l'unitarité, on prend :

$$T_\beta(t) = \exp iF(R,t) \quad (2.37)$$

Où $F(R,t)$ est un opérateur hermétique.

Rappelons le résultat :

$$[P, G(X)] = -i\hbar G'(X) \quad (2.38)$$

Pour obtenir :

$$[P, T_\beta] = \hbar\nabla\{F(R,t)\}T_\beta \quad (2.39)$$

Multiplions cette égalité à gauche par T_β^+ et reportons-la dans (2.34) nous obtenons alors :

$$\hbar \nabla \{F(R,t)\} = q \nabla \beta(R,t) \quad (2.40)$$

On montre aisément que $F(R,t)$ doit être relié à la fonction de jauge $\beta(R,t)$ par :

$$F(R,t) = F_0(t) + \frac{q}{\hbar} \beta(R,t) \quad (2.41)$$

Où $F_0(t)$ est une fonction arbitraire du temps. Cependant, puisque les vecteurs d'états sont définis à une constante de phase près, on peut, sans perte de généralité, prendre $F_0(t) = 0$. On aura donc

$$T_\beta(t) = \exp \left\{ \frac{iq}{\hbar} \beta(R,t) \right\} \quad (2.42)$$

b. Évolution dans le temps du vecteur d'état

Le changement de jauge se traduit pour la fonction d'onde par un changement de phase qui varie d'un point à l'autre est donné, en représentation $\{|r\rangle\}$, sous la forme :

$$|\psi'(t)\rangle = \exp \left\{ \frac{iq}{\hbar} \beta(\vec{r},t) \right\} |\psi(t)\rangle \quad (2.43)$$

Ce qui veut dire que le changement de jauge en mécanique quantique se traduit par la multiplication de la fonction d'onde par un facteur de phase globale qui, en général, dépendant du temps et de l'espace.

Par ailleurs, si le ket $|\psi(t)\rangle$ obéit dans la jauge à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_J |\psi(t)\rangle \quad (2.44)$$

C'est un simple exercice de montrer que le ket $|\psi'(t)\rangle$ vérifie une équation similaire où H_J est remplacé par son équivalent dans la jauge J', c'est-à-dire $H_{J'}$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} T_\beta^+(t) |\Psi'(t)\rangle &= H_J T_\beta^+(t) |\Psi'(t)\rangle \\ i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi'(t)\rangle &= T_\beta(t) H_J T_\beta^+(t) |\Psi'(t)\rangle - i\hbar T_\beta(t) \frac{d}{dt} T_\beta^+(t) |\Psi'(t)\rangle \end{aligned} \quad (2.45)$$

L'équation (2.45) peut s'écrire comme :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi'(t)\rangle = \left\{ -q \frac{\partial}{\partial t} \beta(R,t) + \tilde{H}_J(t) \right\} |\Psi'(t)\rangle \quad (2.46)$$

Où $\tilde{H}_J(t)$ désigne la transformée de $H_J(t)$

$$\tilde{H}_J(t) = T_\beta(t) H_J(t) T_\beta^\dagger(t) \quad (2.47)$$

L'équation (2.46) est réduite à la forme simple :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi'(t)\rangle = H_{J'}(t) |\Psi'(t)\rangle \quad (2.48)$$

Avec

$$H_{J'}(t) = \tilde{H}_J(t) - q \frac{\partial}{\partial t} \beta(R,t) \quad (2.49)$$

Or $\tilde{H}_J(t)$ est donné par :

$$\tilde{H}_J(t) = \frac{1}{2m} \left[\tilde{P} - q \vec{A}(\tilde{R},t) \right]^2 + q\phi(\tilde{R},t) \quad (2.50)$$

Où \tilde{R} et \tilde{P} désignent les transformés de R et P par l'opérateur unitaire $T_\beta(t)$, d'après (2.33) et (2.34)

$$\tilde{R} = R \quad (2.51)$$

$$\tilde{P} = P - q \vec{\nabla} \beta(R,t) \quad (2.52)$$

On remplace ces relations dans (2.50) et on trouve :

$$\tilde{H}_J(t) = \frac{1}{2m} \left[P - q \vec{A}(R,t) - q \vec{\nabla} \beta(R,t) \right]^2 + q\phi(R,t) \quad (2.53)$$

Donc l'équation de Schrödinger peut être écrite de la même manière, quelle que soit la jauge choisie [1]. Ceci veut dire, en conclusion, que pour une particule placée dans un champ électromagnétique, il y a une équivalence entre une transformation de jauge sur les potentiels scalaire et vecteur du type (2.43). A partir de (2.43), il apparaît que la probabilité de présence ne dépend pas de la jauge néanmoins l'invariance des prévisions physiques à partir des fonctions

d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ ou $\psi'(\vec{r}, t)$ n'est pas à priori évidente. Pour prouver cette invariance, considérons le comportement d'une observable quelconque dans deux jauges différentes. Sous l'effet de la transformation unitaire $T_\beta(t)$, une observable physique décrite dans la première jauge par l'opérateur K sera décrite dans la seconde jauge par l'opérateur \tilde{K} , donné par :

$$\tilde{K} = T_\beta(t) K T_\beta^\dagger(t) \quad (2.54)$$

Si on considère la position r et l'impulsion p , qui ne dépendent pas explicitement de la jauge, on montre qu'elles se transforment comme :

$$\tilde{R}_j = R_j = R_{j'} \quad (2.55)$$

Et

$$\tilde{P}_j = P_j - q\vec{\nabla}\beta(R, t) \quad (2.56)$$

On voit donc que la position ne change pas dans la transformation unitaire par contre l'impulsion change. En fait, on peut dire que l'effet de la transformation unitaire sur la position dans une jauge n'est pas transformée dans l'autre jauge. On dit alors que la position est quantité physique. Par ailleurs, si on considère la quantité de mouvement Π_j dans la jauge J , défini par (2.23), elle se transforme comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_j &= \tilde{p}_j - q\vec{A}(\tilde{R}_j, t) \\ &= P_j - q\vec{\nabla}\beta(R, t) - q\vec{A}(R_j, t) \\ &= \Pi_j - q\vec{\nabla}\beta(R, t) \end{aligned} \quad (2.57)$$

De façon générale, à toute grandeur physique véritable correspond un opérateur $G(t)$ qui vérifie la condition :

$$\tilde{G}_j(t) = G_{j'}(t) \quad (2.58)$$

Sur la base de (2.55) et (2.57), on peut conclure que les grandeurs physiques véritables sont des fonctions de la position et de la quantité de mouvements.

Chapitre 03

Application

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de résoudre l'équation de Schrödinger pour une particule chargée, placée dans un champ magnétique indépendant du temps. Nous commençons par traiter la situation où aucun champ électrique extérieur n'est appliqué $E=0$. Nous choisissons la jauge de Landau où l'hamiltonien du système est à deux dimensions et par la méthode de transformation unitaire [1], nous ramènerons le problème à un problème standard de l'oscillateur harmonique à une dimension indépendante du temps et pour exprimer la solution de l'équation de Schrödinger dans la jauge symétrique on a introduit un changement de coordonnées et nous utilisons les opérateurs de créations et d'annihilation, elle aide à simplifier les calculs. Nous avons confirmé que l'analyse quantique du système dans les deux jauges coïncide mutuellement.

3.2 Hamiltonien Quantique

On considère une particule chargée sans spin, de masse m et de charge q , soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme et constant parallèle à l'axe (oz). Les coordonnées du champ magnétique sont $\vec{B} = (0, 0, B)$. L'Hamiltonien quantique associé au système, où le potentiel scalaire $\phi = 0$, se trouve de la manière habituelle :

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t))^2 \quad (3.1)$$

Il est bien connu que le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ n'est pas unique, mais dépend de la jauge. Des calculs sont souvent exécutés avec un choix spécifique de la jauge pour le potentiel vecteur. Nous parlerons de deux jauges populaires, à savoir, la jauge de Landau et la jauge symétrique [12].

3.2.1 La jauge de Landau

En utilisant la jauge de Landau, un champ électromagnétique peut être exprimé en terme de potentiels $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et $\phi(\vec{r}, t)$ qui obéissent à :

$$\vec{A}_L = (-By, 0, 0), \phi = 0 \quad (3.2)$$

On remplace le potentiel vecteur \vec{A}_L dans la forme hamiltonien (3.1), on obtient :

$$H_L = \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + q^2 B^2 y^2 + 2qByp_x] \quad (3.3)$$

Afin d'étudier le mouvement quantique de notre système nous devons résoudre l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_L |\psi(t)\rangle \quad (3.4)$$

Pour résoudre (3.4), remarquons tout d'abord que l'hamiltonien (3.3) ne dépend pas explicitement des variables z, x et par conséquent $H(t)$ commute avec p_x, p_z .

$$[H, p_x] = [H, p_z] = 0 \quad (3.5)$$

Nous pouvons alors chercher la solution de l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\Psi_L(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar}(K_1 x + K_2 z)} f(y) \quad (3.6)$$

Où K_1 et K_2 sont des constantes réelles [1].

L'avantage de cette transformation est de faire disparaître les variables canoniques z, p_z, x, p_x du problème et réduire ce dernier à un problème à une dimension. La nouvelle fonction $f(y)$ satisfait l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} f(y) = H'_L f(y) \quad (3.7)$$

Avec le nouveau hamiltonien H'_L s'écrit comme :

$$H'_L = \frac{1}{2m} [p_y^2 + q^2 B^2 y^2 + 2qByk_1 + k_1^2 + k_2^2] \quad (3.8)$$

Le nouveau Hamiltonien (3.8) ne dépend pas du temps, ce qui signifie qu'on peut résoudre l'équation aux valeurs propres

$$H'_L f(y) = E f(y) \quad (3.9)$$

Par simplification on obtient :

$$\frac{1}{2m} [p_y^2 + q^2 B^2 y^2 + 2qByk_1] f(y) = \left(E - \frac{k_1^2}{2m} - \frac{k_2^2}{2m} \right) f(y) \quad (3.10)$$

Considérons donc la nouvelle variable u , reliée à y par

$$y + \frac{k_1}{qB} = u \quad (3.11)$$

Et posant :

$$f(y) = f(\mu) \quad (3.12)$$

Après quelques calculs algébriques, on obtient l'équation différentielle de $f(\mu)$ sous la forme :

$$\left[\frac{1}{2m} p_u^2 + \frac{1}{2} m \omega_c^2 u^2 \right] f(u) = \left(E - \frac{k_2^2}{2m} \right) f(u) \quad (3.13)$$

Avec $\omega_c = \frac{qB}{m}$ est la fréquence de cyclotrons.

On voit bien que la technique de la séparation des variables employée a permis de transférer l'hamiltonien (3.13) à un hamiltonien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel de masse m et de pulsation ω_c , on obtient les solutions normalisées :

$$f(\mu) = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\omega_c \mu^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}} \mu \right) \quad (3.14)$$

Avec $H_n(x)$ représente le polynôme d'Hermite de degré n [1], il est défini comme :

$$H_0 = 1, H_1 = 2x, H_2 = 4x^2 - 2 \quad (3.15)$$

Et la relation de récurrence

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \quad (3.16)$$

En reportant (3.11) dans (3.14), on obtient :

$$f(y) = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\omega_c \left(y + \frac{k_1}{qB} \right)^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}} \left(y + \frac{k_1}{qB} \right) \right) \quad (3.17)$$

Les états propres $f(y)$ correspondant à des valeurs propres non -dégénérées, où n est un entier positif ou nul :

$$E_n = \hbar\omega_c \left(\frac{1}{2} + n \right) + \frac{k_z^2}{2m} \quad (3.18)$$

Les solutions $f(y)$ qu'on doit considérées sont celles qui sont normalisables. Autrement dit on doit exiger que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f_n^*(y) f_m(y) = \delta_{nm} \quad (3.19)$$

Où l'intégration est étendue à tout le domaine du mouvement permis par le potentiel.

Notre but est bien sûr de trouver la solution de l'équation originale, c'est-à-dire l'expression de la fonction d'onde $\Psi_L(x, y, z)$. D'après les relations (3.6) et (3.17), on trouve que :

$$\Psi_L(x, y, z) = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{i(K_1 x + K_2 z)} e^{-\frac{\omega_c \left(y + \frac{k_z}{qB} \right)^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}} \left(y + \frac{k_z}{qB} \right) \right) \quad (3.20)$$

Nous nous référons au $n=0$ comme niveau le plus bas de Landau, $n=1$ comme deuxième niveau de Landau, et ainsi de suite.

3.2.2 La jauge symétrique

En ce qui la concerne, nous choisissons $\vec{A}(\vec{r}, t)$ sous la forme :

$$\vec{A}_s = \frac{B}{2} (-y, x, 0) \quad (3.21)$$

Ce qui correspond à un champ électrique donné par $E = 0$.

On remplace le potentiel vecteur \vec{A}_s dans la forme du hamiltonien, on obtient :

$$H_s = \frac{1}{2m} (p - q\vec{A}_s)^2 \quad (3.22)$$

L'Hamiltonien s'écrit dans ce cas comme :

$$H_s = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \frac{1}{4} q^2 B^2 (x^2 + y^2) + qB (p_y x - p_x y) \right] \quad (3.23)$$

Remarquons tout d'abord que l'hamiltonien (3.23) ne dépend pas explicitement de variable z et par conséquent $H(t)$ commute avec p_z . Nous pouvons alors chercher la solution de l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\Psi_s(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar} Kz} f(x, y) \quad (3.24)$$

Où K est une constante réelle.

La nouvelle fonction $f(x, y)$ satisfait l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} f(x, y) = H'_s f(x, y) \quad (3.25)$$

Avec le nouveau hamiltonien H'_s s'écrit comme :

$$H'_s = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + \frac{q^2 B^2}{4} (x^2 + y^2) + K^2 \right] + \frac{qB}{2m} (p_y x - p_x y) \quad (3.26)$$

On peut écrire l'équation (3.26) sous la forme :

$$H'_s = H_{xy} + H_L \quad (3.27)$$

Avec H_{xy} est l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à deux dimensions :

$$H_{xy} = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + \frac{q^2 B^2}{4} (x^2 + y^2) + K^2 \right] \quad (3.28)$$

Et H_L est l'hamiltonien dépend du moment angulaire selon la direction du champ magnétique :

$$H_L = \frac{qB}{2m} (p_y x - p_x y) = \frac{qB}{2m} L_z \quad (3.29)$$

Afin de déterminer la fonction d'onde correspondante à l'hamiltonien (3.26), on va utiliser les opérateurs d'annihilation et de création :

$$a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p_x, \quad a_x^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p_x \quad (3.30)$$

$$a_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} y + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p_y, a_y^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} y - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p_y \quad (3.31)$$

avec $\omega = \frac{qB}{m}$.

Dont la relation de commutation est :

$$[a_x, a_x^+] = [a_y, a_y^+] = 1 \quad (3.32)$$

On peut exprimer H'_S à l'aide de ces opérateurs, on obtient :

$$H'_S = \hbar\omega(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1) + i\hbar \frac{\omega}{2} (a_x^+ a_y - a_y^+ a_x) + \frac{K^2}{2m} \quad (3.33)$$

Ce hamiltonien contient un terme de couplage proportionnel à $(a_x^+ a_y - a_y^+ a_x)$, à cause de ce dernier l'hamiltonien ne se présente pas sous une forme standard. Pour chercher la solution de l'équation de Schrödinger associée au nouveau hamiltonien, nous devons utiliser d'autres opérateurs d'annihilation et de création [1].

On introduit les opérateurs a_d et a_g tel que :

$$\begin{aligned} a_d &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - ia_y) \\ a_g &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + ia_y) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ceux qui ont la propriété suivante :

$$[a_d, a_d^+] = [a_g, a_g^+] = 1 \quad (3.35)$$

De plus H'_S peut être écrit en fonction de ces opérateurs de manière semblable à (3.33), en effet comme :

$$\begin{aligned} H'_S &= \hbar\omega(a_d^+ a_d + a_g^+ a_g + 1) + \frac{\omega}{2} \hbar (a_d^+ a_d - a_g^+ a_g) + \frac{K^2}{2m} \\ &= \left(\frac{\omega\hbar}{2}\right) \left(a_d^+ a_d + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3\hbar\omega}{2}\right) \left(a_g^+ a_g + \frac{1}{2}\right) + \frac{K^2}{2m} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nous avons diagonalisé l'hamiltonien H'_s en terme des opérateurs. Nous obtenons deux oscillateurs harmoniques découplés de fréquences différentes.

Comme dans l'oscillateur harmonique, les valeurs des énergies propres E_{nmk}

$$E_{n,m,k} = \left(\frac{\omega\hbar}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3\omega\hbar}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right) + \frac{K^2}{2m} \quad (3.37)$$

Et les états propres de H'_s peuvent alors être exprimées sous la forme :

$$\Psi_s(x, y, z) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{\frac{i}{\hbar}Kz} e^{-\frac{\omega(x)^2}{4\hbar}} e^{-\frac{3\omega(y)^2}{4\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{3m\omega}{2\hbar}}x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}y\right) \quad (3.38)$$

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, on s'est préoccupé du problème d'une particule chargée sans spin, placée dans un champ électromagnétique. On a présenté dans le chapitre 1 un rappel des formalismes Lagrangien et Hamiltonien, classique et quantique, pour une particule chargée placée dans un champ magnétique et électromagnétique.

Dans le chapitre 2 nous avons étudié l'invariance de la mécanique quantique par rapport aux transformations de jauge et nous avons montré qu'un changement de jauge est équivalent à une transformation unitaire sur la fonction d'onde, qui n'aura aucun effet sur les prévisions des quantités physiques véritables. Nous avons fini notre travail par une application sur la solution de l'équation de Schrödinger d'une particule chargée placée dans un champ. Afin de simplifier la résolution de l'équation de Schrödinger associée, nous choisirons deux jauges, jauge de Landau et la jauge symétrique, sur laquelle nous chercherons la forme de Hamiltonien, les valeurs propres ainsi que la fonction d'onde.

Bibliographie :

- [1] C.C.Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Mécanique quantique (Collection Enseignement des science. Hermann, éditeur des sciences et des arts, Paris, 1996).
- [2] T. Bécherrawy, Electromagnétisme équation de Maxwell, propagation et émission (La Voisire Librairie ,2012).
- [3] M. Nicolas, Ondes et Electromagnétisme (Dunod Paris, 2009).
- [4]H. Djelouah, Electromagnétisme cours et exercices (Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene 2009/2010).
- [5] P. Krempf, Electromagnétisme PC-PSI (Édition Pierre Hugel, Les Nouveaux précis Bréal, Septembre 2004).
- [6] P. Krempf, Electromagnétisme PTSI (Édition Les Nouveaux Précis Bréal, 2003).
- [7] F. Jundt, Mécanique quantique une introduction (Université Louis Pasteur Strasbourg. Springer, 1999).
- [8] J.L. Basdevant, J. Dalibard, M. Joffre, Mécanique quantique (Édition de L'école Polytechnique, Mars 2008).
- [9] M. Henry & D. Suchet, Modèle Standard et théorie de jauge, Décembre 2010.
- [10] C. Aslangul, Mécanique quantique 2 Développements et applications à basse énergie (De Boeck Université Supérieur, Octobre 2008).
- [11] P.A. Martin, F.Rothen, Problèmes à N-Corps et champs quantiques (Presses polytechnique et Universitaires Romandes, Suisse, 1990).
- [12] K. Lakhdar, Etude de l'effet de hall quantique fractionnaire (Thèse Magister de l'université Tlemcen, 2011).

Résumé :

Dans ce travail, nous avons considéré, dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste, le problème d'une particule chargée sans spin placée dans un champ électromagnétique, et aussi magnétique indépendant du temps. Nous avons montré le formalisme Lagrangien et Hamiltonien pour les deux systèmes, dans le cas classique et quantique. Par l'application de la transformation de jauge. Nous avons étudié la dynamique d'une particule chargée dans un champ magnétique indépendant du temps.

Abstract:

In this work, we considered in the framework of non relativistic quantum mechanics, the problem of charged particle without spin, placed in an electromagnetic field and also time-independent magnetic field. We showed Lagrangian and Hamiltonian formalism for both systems in the classical and quantum case. By the application of the gauge transformation. We studied the dynamics of a charged particle in a time independent magnetic field independent of time particle.

ملخص

في هذا العمل اعتبرنا وفي إطار ميكانيكا الكم الغير نسبي مسألة جسم مشحون بدون سبين خاضع لفعل حقل كهرومغناطيسي بتقديم شكل معادلة لغرانج و هاميلتون في كلا النظامين الكلاسيكي والكمي لجسيمة موضوعه في حقل كهرومغناطيسي غير متعلق بالزمن وأكملنا عملنا بإعطاء مثال تطبيقي للتحويلات القياسية لدراسة ديناميكية الجسم الموضوع في حقل مغناطيسي غير متعلق بالزمن .

Mots clés :

Particule chargée, Schrödinger, transformation de jauge