

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI
Faculté des Mathématiques & Informatique



Mémoire

Présenté par

HIRECHE BACHIR & LOUAIL AMINE

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : *Mathématiques*

Spécialité : système dynamique

**Thème : Applications des polynômes orthogonaux pour
résolution des équations intégrales**

Soutenu publiquement le / ... / 2021 devant le jury composé de :

Dekkar K. Président
Mani A. Encadrant
Guechi A. Examineur

Promotion 2020/2021

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma mère " **Naaima** ", décédée mais toujours présente dans mes souvenirs et mes pensées. Qu'elle repose en paix.

À mon cher père " **Seddik** " et à ma deuxième mère " **Houria** " pour l'encouragement et leurs sacrifices.

À ma tendre sœur " **Djamila** " et à celle qui pense toujours à moi " **Serine** " et à mon frère et soutien " **Islam** "

À toute la famille " **HIRECHE** " et " **ABASS** ".

À mes meilleurs amis " **Nassim AISSAT** et **Rachid GHANEM** " et à mes amis proches " **Djalil** et **Fouad** ". Je tiens à mentionner mes amis " **Hakem, Loth, , Selman, Amine, younes, Mohamed, Alli, Walid, Sofiane, Khelifa, Asâad, Ramzy, Taher, Zohir, Abdo, Rezki, hoossam...** "

À mes camarades " **Nour EL imane boukhari** ". " **Hadjer, Hafidaa, maroua, Chahira, Silya, Assma, Zahra, Houda, chaima, Madiha, Mouna, Maissa, yousra, Hiba, assia** "

Spécialement : Grand-mère " **Oum El khir** " et mon grand-père " **Badi** "
Et aux deux oncles **Mohammad, Ismail**
Et à ma cousine " **yousra** "

Me pardonnerons ceux qui m'ont connu et que je n'ai pas cité. Ils ont mon affection.

HIRECHE Bachir

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes parents "Belouadeh" et "Daykha", pour l'encouragement et leurs sacrifices.

À mes chers sœurs "Soumia, Wassila" et frères "Samir, Yacine, Saber, Jakoub Bogba, Nono".

À toute la famille "LOUAIL" et "TAIRI".

À mes chers amis "Selmane, Djail, Bachir, El hadj, Moumen, Imad, Belkacem, Hamza, Ringo, Abd El-nor, Zohir, Loth, Hakem, Foued, Bilel, Azeddine, Lakhmissi, Ahmed, laid, Habib, Zino, , Halim, Asâad, Amine, Walid, Sofiane, Khelifa, salah... "

Et "Hadjer, Chahira, Silya, Nour El Imane, Zahra, Mouna. "

À qui a importé la joie à la maison "Maissa, Anes, Amir, Islem, Doda, younes, alaa el rahman... "

Spécialement "TAIRI Abd El Rahim "

Qui nous alliés et des bons moments passée ensemble.

LOUAIL Amine

Remerciements

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux louange à ALLAH le tout puissant

Tout d'abord, nous remercions le dieu notre créateur. Nous tenons sincèrement à remercier notre encadreur Dr " Mani abdelouahab ", de nous avoir encadré, encouragé, aidé et orienté tout le long de ce travail.

Nous exprimons aussi nos vifs remerciements aux membres du jury : "GUECHI Ahmed " et "DEKKAR Khadra " pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre mémoire en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs remarques.

Nous remercions également les enseignants qui nous ont prodigué conseils et encouragements au cours de ces années d'étude.

Nous souhaitons exprimer notre reconnaissance aux personnes qui nous ont aidés et soutenus dans élaboration de ce mémoire surtout "REMILI Walid " et "GUECHI Ahmed".

Sans oublier de remercier tous les amis et collègues qui nous ont encouragés.

Merci à toutes et à tous.

Table des matières

1	Espace de Hilbert	7
1.1	Propriétés élémentaires et Exemples	7
1.2	Projection Orthogonale	11
1.3	Polynômes de Tchebyshev	15
1.3.1	Propriétés des Polynômes de Chebyshev	16
1.4	Polynômes de Legendre	18
1.4.1	Propriétés des polynômes de Legendre	19
1.5	Polynômes de Laguerre	19
1.6	Polynômes d’Hermite	20
1.7	Interpolation	20
2	Équation intégral	22
2.1	Opérateurs intégraux	22
2.2	Applications linéaires compactes	22
2.2.1	Équations à opérateurs compacts	23
2.3	La compacité des opérateurs intégraux	28
2.4	Classification des equations integrales	29
2.4.1	equations integrales lineaires	29
2.4.2	Équation intégrales non lineaires	30
2.5	Existance l’unicité	32
2.5.1	Contraction de l’opérateur	32
2.5.2	Alternative de Fredholm	32
3	Étude numérique d’équation intégral	35
3.1	Principe des méthodes spectrale	35
3.2	Convergence spectrale	36
3.3	Méthodes de spectrale	36
3.3.1	Méthode de Galerkin	37
3.3.2	Méthode de collocation	37
	References	40

Notation

- ▷ $\mathcal{C}^K(\Omega)$, $0 < K < \infty$ l'espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à K existent et sont continues dans Ω .
- ▷ l'addition deux ensembles $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{x + y/x \in \mathcal{A} \text{ et } y \in \mathcal{B}\}$.
- ▷ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$.
- ▷ $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est un domaine de définition de l'opérateur \mathcal{A} .
- ▷ $\mathcal{X}\mathcal{X}$ produit cartésienne.
- ▷ \Re le partie réel de nombre complexe.
- ▷ $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes.
- ▷ T^* adjoint T .
- ▷ $N(T)$ Le noyau de l'opérateur T .
- ▷ $R(X)$ L'image de l'opérateur T .

Introduction

Nous allons étudier dans ce mémoire les polynômes orthogonaux parmi les plus célèbres. Dans ce chapitre, nous donnons brièvement un rappel sur la définition des équations intégrales. Puis, nous introduisons la classification de ces équations, qui a pour objectif de familiariser le lecteur avec le concept d'équation intégrale. Ensuite, nous parlons de l'origine des équations intégrales et la relation entre ces dernières et les équations intégrales. La dernière partie est consacrée à la question d'existence et d'unicité, nous présentons certains théorèmes du point fixe et ces applications.

Dans la première partie nous présenterons les notions de base de l'analyse fonctionnelle et quelques polynômes orthogonaux parmi les plus importants (Chebyshev , Legendre ...)

Dans la deuxième partie nous étudierons les équations intégrales et leurs types et donnerons les démonstrations d'existence et l'unicité pour les solutions des équations intégrales

Dans la troisième partie nous présenterons quelques méthodes numériques de résolution d'équations intégrales.

Espace de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont la version de dimension infinie des espaces euclidiens ou hermitiens, dont ils gardent beaucoup de propriétés. En fait, ils trouvent leur origine dans la théorie des développement de fonctions arbitraires en séries de fonctions orthogonales, celles-ci apparaissant le plus souvent comme fonctions propres de certains opérateurs différentiels linéaires (séries de Fourier, fonctions sphériques, polynômes orthogonaux). Ils fournissent le cadre mathématique dans lequel se développe la mécanique quantique et jouent un rôle important dans beaucoup de branches des mathématiques, spécialement en Analyse linéaire. [7]

1.1 Propriétés élémentaires et Exemples

Définition 1.1.1. *soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} ne forme sesquilinéaire sur E est toute application B de $E \times E$ dans \mathbb{k} vérifiant ,quels que soient α, β dans \mathbb{k} et x, y, z dans E :*

•a) $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z).$

•b) $B(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} B(x, y) + \bar{\beta} B(x, z) .$

on dit que B est hermitienne si elle vérifie de plus

•c) $B(x, y) = \overline{B(x, y)}, \forall x, y \in E.$

Notons que dans le cas où le corps des scalaires est $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est simplement une forme bilinéaire, et une forme hermitienne est une forme bilinéaire symétrique.

La forme quadratique associée à B est définie par : $Q(x) = B(x, x)$ On notera que si B est hermitienne alors Q est réelle, c'est-à-dire que $Q(x)$ est un réel pour tout x dans E . On dit que la forme hermitienne B est positive si la forme quadratique Q est positive : $Q(x) \geq 0$ pour tout x dans E .

Théorème 1.1.1. *(Identité de polarisation) Toute forme bilinéaire symétrique*

B vérifie :

$$4B(x, y) = B(x + y, x + y) - B(x - y, x - y),$$

Toute forme sesquilinéaire B (hermitienne ou non) vérifie :

$$4B(x, y) = B(x + y, x + y) - B(x - y, x - y) + iB(x + iy, x + iy) - iB(x - iy, x - iy),$$

Ces identités, dont la preuve est immédiate, montrent que, dans tous les cas, la forme quadratique Q associée à B caractérise entièrement celle-ci.

Théorème 1.1.2. Soit B une forme hermitienne sur E . Si B est positive alors elle vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

(i) L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|B(x, y)| \leq B(x, x)^{\frac{1}{2}} B(y, y)^{\frac{1}{2}},$$

L'égalité n'a lieu que si x et y sont proportionnels.

(ii) L'inégalité de Minkowski :

$$B(x + y, x + y)^{\frac{1}{2}} \leq B(x, x)^{\frac{1}{2}} + B(y, y)^{\frac{1}{2}},$$

Démonstration 1. Le point-clef est bien sûr la positivité de la forme hermitienne. Étant donné deux éléments x et y on considère la fonction ϕ définie sur \mathbb{k} $\phi(\alpha) = B(x + \alpha y, x + \alpha y)$ C'est une fonction à valeurs positives et par développement elle s'écrit :

$$\phi(\alpha) = |\alpha|^2 B(y, y) + \bar{\alpha} B(x, y) + \alpha B(y, x) + B(x, x),$$

$$\phi(\alpha) = |\alpha|^2 B(y, y) + 2\Re(\alpha) B(y, x) + B(x, x),$$

la valeur minimale par rapport α en ce qui concerne le don direct l'inégalité de Cauchy-Schwarz

si $\phi(y) = 0$ l'inégalité précédente ne peut avoir lieu pour tout réel α que si $B(x, y) = 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est dans ce cas une égalité.

sinon P est une polynôme du second degré qui reste positif en tout t réel, il en résulte que son discriminant à savoir $|B(x, y)|^2 - \phi(y)\phi(x)$ est négatif ce qui traduit précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De celle-ci on déduit :

$$B(x, y) + B(y, x) = 2\Re B(x, y) \leq 2B(x, x)^{\frac{1}{2}} B(y, y)^{\frac{1}{2}},$$

et en ajoutant $B(x, x) + B(y, y)$ aux deux membres, on trouve :

$$B(x + y, x + y) \leq [B(x, x)^{\frac{1}{2}} + B(y, y)^{\frac{1}{2}}]^2,$$

En prenant la racine carrée des deux membres, on obtient l'inégalité de Minkowski.

L'inégalité de Minkowski montre que l'application $x \rightarrow Q(x)$ est une seminorme, et est une norme si et seulement si la forme Q est non dégénérée c'est-à-dire vérifie : $Q(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. On dit dans ce cas que c'est une norme induite par la forme hermitienne B .

Définition 1.1.2. Un produit scalaire sur E est une forme hermitienne positive et non dégénérée.

Définition 1.1.3. Un espace préhilbertien réel (ou complexe) est un espace vectoriel E sur \mathbb{k} sur lequel est défini un produit scalaire B et muni de la norme induite par B .

On écrit $\langle x, y \rangle$ au lieu de $B(x, y)$ et on pose $\|x\| = Q(x)^{\frac{1}{2}}$. Avec ces notations, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski s'écrivent : pour x et y dans E :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{et} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

Exemple 1. Les espaces \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont des espaces préhilbertiens pour le produit scalaire dit usuel :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{dans le cas réel} \\ \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \text{dans le cas complexe} \end{aligned}$$

soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$ avec n dans \mathbb{N} et x_n dans \mathbb{k} telles que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty,$$

Soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ deux éléments de l'ensemble $\ell^2(\mathbb{N})$.

L'inégalité $2 |x_i y_i| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$, montre que la série $\sum x_i \bar{y}_i$ est absolument convergente et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |x + y|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2\Re(x_i \bar{y}_i)) \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^2 + |y_i|^2). \end{aligned}$$

Ces inégalités montrent que $x + y$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$. celui-ci est donc un espace vectoriel. On pose pour x et y dans $\ell^2(\mathbb{N})$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i.$$

On vérifie que cela définit bien un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$ et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski s'écrivent :

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} et \langle, \rangle un produit scalaire sur E . l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme et l'application qui au couple (x, y) associe $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E .

Définition 1.1.4. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur \mathbb{k} qui est complet pour la distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Un espace de Hilbert est donc encore un espace de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire. Une telle norme est parfois appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Exemple 2. *L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert.*

Démonstration 2. *On a vu à l'exemple 1 que $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire est un espace préhilbertien, il reste à montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est complet pour la distance associée au produit scalaire usuel. Soit donc (x_n^p) une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$ avec :*

$$x^p = (x_1^p, x_2^p, \dots)$$

Par définition $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p - x_n^q|^2$ tend vers zéro lorsque p et q tendent vers l'infini donc a fortiori pour tout n fixé, la suite numérique (x_n^p) $p \in \mathbb{N}$, est une suite de Cauchy notons x_n sa limite et $x = (x_n)$ la suite ainsi définie. Soit $\epsilon > 0$ il existe un entier r tel que pour $p \geq r$ et $q \leq r$ on ait :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p - x_n^q|^2 < \epsilon$$

Pour tout entier m on aura a fortiori

$$\sum_{n \leq m} |x_n^p - x_n^q|^2 \leq \epsilon$$

comme il s'agit ici d'une somme finie on peut faire tendre q vers l'infini et on obtient l'inégalité $\sum_{n \leq m} |x_n^p - x_n^q|^2 \leq \epsilon$. Cela étant pour tout entier m on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p - x_n|^2 \leq \epsilon$$

Il en résulte que la suite $x = (x_n)$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ et que lorsque p tend vers l'infini, x^p tend vers x dans $\ell^2(\mathbb{N})$

L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ joue un rôle fondamental dans l'Analyse Hilbertienne c'est lui qu'on a longtemps appelé " l'espace de Hilbert ".

Exemple 3. Soit $C[-1, 1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs complexes. L'application qui à une fonction f dans $C[-1, 1]$ associe :

$$\| f \|_{\infty} = \sup_{|x| \leq 1} |f|,$$

est une norme, dite norme de la convergence uniforme, et l'espace $C[-1, 1]$ muni de cette norme est complet.

Considérons maintenant la forme hermitienne qui, à deux fonctions f et g continues sur $[-1, 1]$ associe :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

C'est un produit scalaire sur $C[-1, 1]$ et l'application

$$f \mapsto \| f \| = \left(\int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme sur $C[-1, 1]$, dite norme de la convergence en moyenne quadratique, l'espace de Hilbert $L^2((-1, 1), \| \cdot \|)$ est complet.

Corollaire 1. (Sous-spaces de Hilbert).

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E , on peut évidemment le munir d'un produit scalaire, restriction de celui de E et F devient préhilbertien si de plus E est un espace de Hilbert et F est fermé dans E . F est complet, c'est donc un espace de Hilbert. on dit alors que F est un sous-espace de Hilbert de E .

[1]

1.2 Projection Orthogonale

Soit E un espace métrique $x \in E$ et F une partie non vide de E .

- Existe-t-il un point $a \in F$, $d(x, a) \leq d(x, y)$, ? autrement dit tel que :

$$d(x, a) = \inf_{y \in F} d(x, y) \text{ ou encore } d(x, F) = d(x, a),$$

- Si un tel point existe, est-il unique ?

Un tel point, quand il existe, est appelé une projection de x sur F .

Si F n'est pas fermé, on peut citer des exemples triviaux où la réponse à la première question est déjà négative (prendre par exemple $E = \mathbb{R}$, $F = [0, 1[$ et $x = 2$). Aussi supposons-nous dans la suite que F est une partie fermée non vide. En général un point n'a pas forcément de projection sur un

sous-ensemble fermé, ou peut en avoir plusieurs (prendre F un cercle et x son centre). Cependant ce problème a une solution satisfaisante lorsque F est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert E . Cela s'accomplit grâce à la notion d'orthogonalité que nous introduisons maintenant

Définition 1.2.1. Deux éléments x et y d'un espace de Hilbert E sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ on écrit alors $x \perp y$. On dit que deux parties F et G de E sont orthogonales si tout élément de F est orthogonal à tout élément de G on écrit alors $F \perp G$. L'orthogonal d'une partie F de E , noté F^\perp est l'ensemble des éléments de E orthogonaux à F .

Proposition 1. soit E un espace de Hilbert.

1) L'orthogonal d'un sous-ensemble F de E est un sous-espace fermé de E et on a :

$$F \cap F^\perp = \{0\}, \quad F^\perp = \overline{(F)}^\perp \text{ et } F \subset (F^\perp)^\perp,$$

2) si deux sous-ensemble F et G de E vérifient $F \subset G$, alors leurs orthogonaux vérifient $G^\perp \subset F^\perp$

Démonstration 3. La propriété (1) est triviale. Par ailleurs il est clair que F^\perp est un sous-espace vectoriel de E , car si x et y sont dans F^\perp alors la linéarité montre que, pour tout z dans F ,

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0,$$

Montrons que F^\perp est fermé ?

soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de F^\perp et soit x sa limite. Pour tout y dans F on a :

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle| \leq \|x - x_n\| \|y\|,$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini et donc $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci étant pour tout $y \in F$, on en déduit que x appartient à F^\perp et donc F^\perp est un fermé. D'autre part, puisque $F \subset \overline{F}$ on a l'inclusion $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$. Soit alors x un élément de F^\perp et y un élément de \overline{F}^\perp , il existe une suite (y_n) d'éléments de F telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - y_n\| = 0$. on a alors :

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, y - y_n \rangle| \leq \|x\| \|y - y_n\|,$$

Le membre de droite tend vers zéro quand n tend vers l'infini et il en résulte que $\langle x, y \rangle = 0$ Aiansi F^\perp est inclus dans $(\overline{F})^\perp$

Théorème 1.2.1. (pythagore) si x_1, x_2, \dots, x_n sont des éléments de E , deux à deux orthogonaux alors :

$$\|(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2,$$

Proposition 2. *Si F et G sont deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert E et s'ils sont orthogonaux $F \perp G$, alors l'ensemble $F + G$ des éléments de la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ est un sous-espace fermé de E*

Théorème 1.2.2. *Dans un espace de Hilbert E la norme vérifie les deux propriétés équivalentes suivantes, valables pour tout x et a et b dans E :*

1) *L'identité de la médiane :*

$$\|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 = 2\|x - 1/2(a + b)\|^2 + \|x + 1/2(a - b)\|^2,$$

2) *L'identité du parallélogramme :*

$$\|x - a\|^2 + \|x + a\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|a\|^2],$$

Théorème 1.2.3. *(projection sur une partie convexe complète).*

Soient E un espace préhilbertien et F une partie non vide de E convexe et complète et pour tout élément x de E il existe un unique élément a de F tel que $\|x - a\| = d(x; F)$. De plus a est caractérisé par la propriété suivante :

$$\Re(\langle x - a, b - a \rangle) \leq 0, \quad \text{pour tout } b \in F,$$

Théorème 1.2.4. *(projection sur un sous-espace de Hilbert). Soient E un espace de Hilbert F un sous-espace de Hilbert et x un élément de E Il existe un unique élément $a_x \in F$ tel que :*

$$\|x - a_x\| = d(x; F)$$

De plus, a_x est l'unique élément de F tel que $x - a_x$ soit orthogonal à F , il est noté $P_F(x)$ est appelé la projection orthogonale de x sur F .

Remarque 1. *La réciproque de ce théorème, à savoir que si dans un espace hilbertien E , un ensemble F est tel que pour tout $x \in E$ il existe un unique $a \in F$ qui est le plus proche de x , alors F est convexe et fermé, a été avancée depuis longtemps, mais elle n'a été ni prouvée ni réfutée*

Corollaire 2. *Hilbert de E Alors les sous-espaces F et F^\perp sont supplémentaires dans E c'est-à-dire que : $E = F \oplus F^\perp$.*

Corollaire 3. *L'application P_F est un opérateur linéaire de E dans F qui vérifie, pour tout x et tout y dans E $\|P_F x\| \leq \|x\|$, $\langle P_F x, y \rangle = \langle x, P_F y \rangle$ et $P_F(P_F x) = P_F x$.*

Remarque 2. *On doit noter que même si F est un sous-espace vectoriel fermé dans un espace préhilbertien, son orthogonal ne lui est pas nécessairement*

supplémentaire comme le montre l'exemple suivant, Soit l'espace vectoriel $C[0, 1]$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt ,$$

Soit F le sous-espace vectoriel des fonctions nulles sur $[0, \frac{1}{2}]$, alors son orthogonal F^\perp est le sous-espace vectoriel des fonctions nulles sur $[\frac{1}{2}, 1]$. La fonction constante 1 ne peut être somme d'une fonction nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$ et d'une fonction nulle sur $[\frac{1}{2}, 1]$ car elle s'annulerait au point $\frac{1}{2}$. C'est que l'hypothèse " F fermé " n'est pas la bonne hypothèse quand l'espace E n'est pas complet (ce qui est le cas de l'espace $C[0, 1]$ muni de la norme induite par le produit scalaire ci-dessus). La bonne hypothèse est que F soit complet comme c'est précisé dans le théorème résidante

Corollaire 4. Soit E un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel (non nécessairement fermé). F est dense dans E si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Théorème 1.2.5. Soient v_1, v_2, \dots, v_k des éléments deux à deux orthogonaux et de norme 1, dans un espace de Hilbert E , soit F le sous-espace vectoriel engendré par (v_j) et soit x un élément de E . Alors quels que soient les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ on a :

$$\|x - \sum_{j=1}^k \langle x, v_j \rangle v_j\| \leq \|x - \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j\|,$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\lambda_j = \langle x, v_j \rangle$ pour $1 \leq j \leq k$. La projection orthogonale de x sur le sous-espace F est :

$$P_F x = \sum_{j=1}^k \langle x, v_j \rangle v_j,$$

La distance γ de x au sous-espace F est donnée par :

$$\gamma^2 = \|x - P_F x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^k |\langle x, v_j \rangle|^2,$$

Ainsi on a trouvé un algorithme constructif permettant de trouver la projection orthogonale d'un élément x de E sur un sous-espace de dimension finie.

Remarque 3. L'espace polynômial est dense dans l'espace des fonctions continues

Nous introduisons dans les prochaines sections deux familles importantes de polynômes orthogonaux. Les polynômes de Legendre, de Tchebysheve et de Hermite dont nous donnerons cidessous une forme génératrice forment une famille des polynômes orthogonaux, ils ont un certain nombre de propriétés intéressantes que l'on retrouvera dans des ouvrages spécialisés [2]

1.3 Polynômes de Tchebyshev

L'application $\theta \mapsto \cos \theta$ est une bijection continue de $(0, \pi)$ sur $(-1, 1)$ et donc à chaque fonction F continue sur $(0, \pi)$ on associe de façon univoque la fonction f continue sur $(-1, 1)$ par la relation :

$$F(\theta) = f(x) \quad \text{avec } x = \cos \theta,$$

De plus :

$$\int_0^\pi |F(\theta)|^2 d\theta = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

On en déduit que l'application qui à une fonction F de $C(0, \pi)$ fait correspondre la fonction f de $C(-1, 1)$ se prolonge en une bijection isométrique de l'espace de Hilbert $L^2((0, \pi), d\theta)$ sur l'espace de Hilbert $L^2((-1, 1), w(x)dx)$ des (classes de) fonctions de carré sommables sur $(-1, 1)$ pour la mesure de densité $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire vérifiant :

$$\|f\|_w^2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \infty.$$

Le produit scalaire associé sera noté \langle, \rangle_w :

$$\langle f, g \rangle_w = \int_{-1}^1 \frac{f(x)\overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad f, g \in L^2((-1, 1), w(x)dx),$$

On est en situation d'appliquer les résultats du paragraphe 1. La famille $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ est totale dans l'espace $L^2((-1, 1), w(x)dx)$ et le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt permet d'en fabriquer une base hilbertienne. Cependant, l'isomorphisme mis en évidence plus haut permet de retrouver rapidement cette base hilbertienne, en effet les fonctions définies par $\phi_n(\theta) = \cos n\theta$ forment une base orthogonale de $L^2((0, \pi), d\theta)$ et on a

$$\int_0^\pi \phi_n(\theta)\overline{\phi_m(\theta)}d\theta = \begin{cases} (\frac{\pi}{2})\delta_{mn} & \text{si } n, m \neq 0 \\ \pi\delta_{00} & \text{sinon} \end{cases},$$

Il en résulte que les fonctions $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ forment une base orthogonale de $L^2((-1, 1), w(x)dx)$

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle_w &= \frac{\pi}{2}\delta_{nm} \quad \text{si } n, m \neq 0 \\ \langle T_0, T_0 \rangle_w &= \pi\delta_{00} \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

On sait que $\cos n\theta$ s'exprime par un polynôme en $\cos \theta$ en résulte que $T_n(x)$ est en fait un polynôme de degré n en x , appelé polynôme de Chebyshev On a

par exemple :

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad T_2(x) = \cos(2\theta) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3\theta) = 4x^3 - 3x \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \text{ etc..}$$

La figure (FIG1) représente les graphes des polynômes T_n pour $0 \leq n \leq 5$. Le développement d'une fonction f de $L^2((-1, 1), w(x)dx)$ suivant cette base

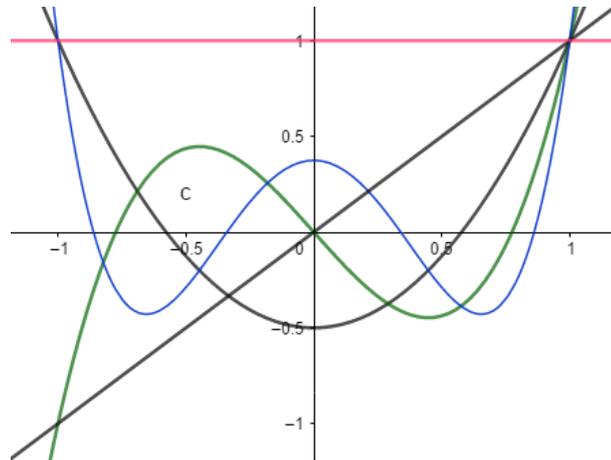


FIG (1)

s'écrit :

$$\frac{1}{\pi} \langle f, T_0 \rangle_w T_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, T_n \rangle_w T_n$$

où la série converge vers f dans $L^2((-1, 1), w(x)dx)$

Théorème 1.3.1. *La suite des polynômes de Chebyshev T_n est une base orthogonale de l'espace $L^2((-1, 1), w(x)dx)$ et pour tout f dans cet espace, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \frac{1}{\pi} \langle f, T_0 \rangle_w T_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \langle f, T_k \rangle_w T_k \right\|_w = 0.$$

et

$$\|f\|_w^2 = \frac{1}{\pi} |\langle f, T_0 \rangle|^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, T_n \rangle|^2,$$

On peut en déduire la propriété de minimisation suivante. [1]

1.3.1 Propriétés des Polynômes de Chebyshev

1) Parité. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$T_n(1) = 1 \text{ et } T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

2) Relation de récurrence. De l'identité trigonométrique

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta.$$

on déduit que les polynômes de Chebyshev vérifient la relation de récurrence suivante :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

Cette relation montre que le coefficient de x^n dans l'expression de $T_n(x)$ est 2^{n-1} . Elle permet aussi de calculer T_n par récurrence à partir de $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

- 3) Fonction génératrice. On cherche une fonction de deux variables (x, z) telle que :

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)z^n$$

En posant $x = \cos \theta$, on a

$$G(x, z) = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (e^{im\theta} + e^{-im\theta}) z^m, |z| < 1$$

$$G(x, z) = \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2}$$

- 4) Équation différentielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme de Chebyshev T_n vérifie l'équation différentielle du second ordre suivante

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$$

Pour le voir, il suffit de poser $x = \cos \theta$ et d'utiliser le fait que la fonction cosinus vérifie $\cos''(n\theta) + n^2 \cos n\theta = 0$.

- 5) Racines et extremums de T_n . Les racines de T_n se calculent facilement. En effet, puisque $\cos nx = 0$ si $x = (2K - 1)\pi/(2n)$,

$$x_k = \cos\left(\frac{2K - 1}{2n}\pi\right), \text{ avec } 1 \leq K \leq n$$

sont les n racines de T_n . Elles sont toutes réelles, simples, distinctes et appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$. D'autre part, la relation

$$T'(x) = \frac{n}{\sqrt{1 - x^2}} \sin(n \arccos x)$$

montre que $T'(x) = 0$ si $x = x'_k = \cos(K\pi/n)$ où $1 \leq K \leq n - 1$. On en déduit rapidement que T_n atteint ses extremums sur l'intervalle $[-1, 1]$, aux points x'_k et qu'en ces points

$$T_n(x'_k) = \cos k\pi = (-1)^k, 1 \leq k \leq n$$

de plus

$$T_n(x'_k) = T_n(1) = 1 \text{ et } T_n(x'_0) = T_n(-1) = (-1)^n$$

On peut remarquer que les racines de T_n sont symétriques par rapport à 0 et que pour n grand, elles sont plus denses aux extrémités qu'au centre de l'intervalle $[-1, 1]$. Ces racines sont souvent utilisées comme points d'interpolation pour des fonctions continues sur $[-1, 1]$.

- 6) Propriété de minimisation. Les polynômes de Chebyshev jouent un rôle important en théorie de l'approximation. Cela tient à ce que, comme l'a montré Chebyshev, ce sont là les polynômes s'écartant le moins de zéro sur le segment $[-1, 1]$. Autrement dit, si l'on désigne par P_n l'ensemble des polynômes de degré n unitaires (c'est-à-dire dont le terme de plus haut degré est x^n) on a :

$$\forall q \in P_n, \sup_{|x| \leq 1} |q(x)| \geq \sup_{|x| \leq 1} \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

[3]

1.4 Polynômes de Legendre

prenons $I = (-1, 1)$ et $W = 1$. la famille $x^n; 0 \leq n$ est totale dans l'espace de Hilbert $L^2(I; dx)$ et le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt donne

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x, \quad \text{car } \langle 1, x \rangle = 0,$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad \text{car } \langle 1, x^2 \rangle = \frac{1}{3}, \quad \|1\|^2 = 2 \text{ et } \langle x, x^2 \rangle = 0,$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x, \quad \text{car } \langle x, x^3 \rangle = \frac{2}{5}, \quad \text{et } \|x\|^2 = \frac{2}{3}.$$

La figure (FIG2) représente les graphes des polynômes P_n pour $0 \leq n \leq 3$.

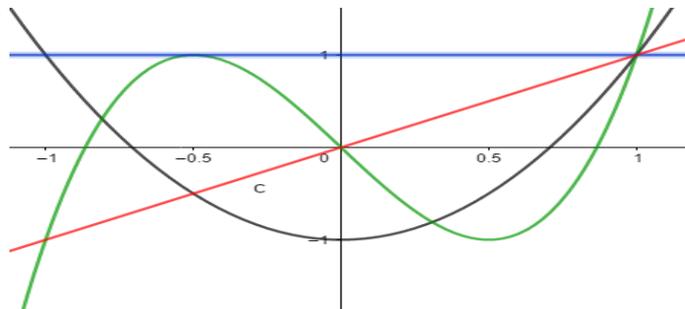


FIG (2)

La formule suivante, dite formule de Rodrigues, donne l'expression de P_n Pour tout entier $n \geq 0$.

Pour tout entier n , p_n est un polynôme unitaire de degré n et on a

$$p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

et on a pour tout $n \geq 0$ on a $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

1.4.1 Propriétés des polynômes de Legendre

- 1) Pour tout entier naturel n et pour tout x , on a
 $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, en particulier $P_n(-1) = (-1)^n$.
- 2) Relation de récurrence.

$$\frac{n+1}{2n+1} p_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} p_{n-1}(x) = x p_n(x).$$

- 3) Fonction génératrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$

- 4) Équation différentielle. Pour tout entier naturel n , on a

$$(1-x^2)p_n''(x) - 2xp_n'(x) + n(n+1)p_n(x) = 0.$$

- 5) Propriété de minimisation. Les polynômes de Legendre sont caractérisés par la propriété de minimum suivante : Parmi tous les polynômes unitaires de degré n , p_n est l'unique qui réalise le minimum de la distance quadratique à 0, c'est-à-dire que pour tout polynôme unitaire q de degré n :

$$\int_{-1}^1 |p_n(x)|^2 dx \leq \int_{-1}^1 |q(x)|^2 dx,$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $q = p_n$.

1.5 Polynômes de Laguerre

Considérons l'espace $L^2((0, \infty), e^{-x} dx)$ des (classes de) fonctions de carré sommable pour la mesure de densité $W(x) = e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $(0, +\infty)$. Le produit scalaire et la norme sur $L^2((0, \infty), e^{-x} dx)$ sont donnés par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx,$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x} dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

L'espace de Hilbert $L^2((0, \infty), e^{-x} dx)$ est séparable, puisque la famille $1, x, \dots, x^n, \dots$ est totale. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à cette famille fournit une base orthogonale formée de polynômes \tilde{L}_n , avec $\deg \tilde{L}_n = n$. Les calculs dans ce cas sont particulièrement simples et utilisent l'égalité suivante

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$$

Ainsi on trouve par exemple que :

$$\begin{aligned}\tilde{L}_0(x) &= 1, & \tilde{L}_1(x) &= x - 1, \\ \tilde{L}_2(x) &= x^2 - 4x + 2, & \tilde{L}_3(x) &= x^3 - 9x^2 + 18x - 6, \\ \tilde{L}_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24,\end{aligned}$$

Ce qui est convenu d'appeler polynômes de Laguerre sont obtenus à partir des \tilde{L}_n par la relation n :

$$\tilde{L}_n(x) = \left(\frac{(-1)^n}{n!}\right) \tilde{L}_n(x),$$

Les polynômes de Laguerre forment donc une base orthogonale de l'espace $L^2((0, \infty), e^{-x} dx)$. On peut les exprimer à l'aide de la formule de Rodrigues suivante, pour tout entier n on a :

$$\tilde{L}_n(x) = \frac{e^x d^n}{n! dx^n} (x^n e^{-x}).$$

1.6 Polynômes d'Hermite

Prenons $I = \mathbb{R}$, $W(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et soit $L^2(\mathbb{R}, w(x) dx)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommables pour la mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Le produit scalaire et la norme seront notés respectivement \langle, \rangle et $\| \cdot \|$ Pour f et g dans $L^2(\mathbb{R}, w(x) dx)$:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

La densité a été choisie de façon que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1.$$

La famille $\{x^n; n \in \mathbb{N}\}$ est totale dans l'espace $L^2(\mathbb{R}, w(x) dx)$ et le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt fournit une base orthogonale formée de polynômes unitaires, appelés polynômes d'Hermite, que nous noterons dans la suite par (H_n)

Théorème 1.6.1. *Les polynômes d'Hermite sont donnés par la formule de Rodrigues*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}}).$$

1.7 Interpolation

Définition 1.7.1. *Soit M_n un sous espace de $C[a, b]$ de dimension fini et $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ n points de $[a, b]$ telle que la seule fonction $f \in M_n$ vérifiant :*

$$\forall_i \in \{1, 2, \dots, n\}, f(x_i) = 0$$

soit la fonction nul On dit que notre ensemble est unisolvant.

Théorème 1.7.1. *Etant donné M_n et les points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ présentés au dessus, si on donne une fonction $g \in C([a, b])$, il existe une fonction unique $f \in M_n$ qui interpole g aux x_i i.e*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad f(x_i) = g(x_i)$$

Remarque 4. *L'opérateur d'interpolation $P_n : C[a, b] \rightarrow M_n$ qui à une fonction $g \in C([a, b])$ associé $f \in M_n$ est un opérateur de projection continu. En notons $\Pi_n^{GL} f$ le polynôme de degré $n + 1$ qui interpole f aux noeuds et en supposant que les dérivées $f^{(k)}$ d'ordre $k = 0, 1, \dots$ de la fonction f sont dans L^2 avec $s \geq 1$, on peut montrer que l'erreur d'interpolation est majorée par :*

$$\| f - \Pi_n^{GL} f \| \leq C n^{-s} \| f_s \| \quad \text{pour } s \geq 1$$

Exemple 4. *soit la fonction $f(x) = \cos(x)$ est interpolé par polynômes de Chebyshev de degré 10 représenté les résultat dans le tableau suivante avec la figure :*

xi	yi exacte	yi appro	erreur
-1	cos(1)	0.54	5.2410^{-10}
-0.6	cos(3/5)	0.825	4.810^{-10}
-0.2	cos(1/5)	0.98	2.3310^{-10}
0.2	cos(1/5)	0.98	2.3310^{-10}
0.6	cos(3/5)	0.825	4.810^{-10}
1	cos(1)	0.54	5.2410^{-10}

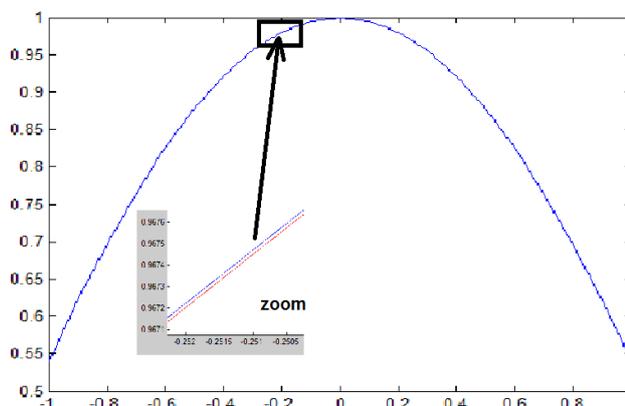


FIG 3

Équation intégral

2.1 Opérateurs intégraux

Dans le domaine du physique il y a plusieurs problèmes traduits sur une équation intégrale, cette équation pousse les mathématiciens à étudier les opérateurs intégraux qui sont les meilleurs exemples d'un opérateur compact.

Pour résoudre ces équations :

Soit G un ensemble compact de R^n et soit K une fonction continue de $G \times G$ dans C . Alors l'opérateur linéaire A défini de $C(G)$ dans $C(G)$ par :

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in G$$

Est appelé opérateur intégral à noyau K

Cet opérateur est borné de norme $\|A\|$ donnée par :

$$\|A\| = \max_{x \in G} \int_G |K(x, y)| dy.$$

2.2 Applications linéaires compactes

Définition 2.2.1. Soient E et F deux espaces de Banach, une application linéaire continue $T \in L(E, F)$ est dite compacte si l'image $T(\overline{B}_E)$ par l'application T de la boule unitaire fermée \overline{B}_E de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F . On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F . On pose $K(E) = K(E, E)$.

La proposition suivante donne des propriétés fondamentales de stabilité des opérateurs compacts.

Proposition 3. Soient E et F deux espaces de Banach, l'ensemble $K(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(E, F)$. Soient E, F et G des espaces de Banach, $S \in L(E, F)$ et $T \in L(F, G)$, si S ou T est compacte alors T_s est compacte. En particulier $K(E)$ est un idéal bilatère de $L(E)$.

Remarque 5. *Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact . en effet l'ensemble $T(\overline{B}_E)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, toute limite T en norme d'opérateur d'une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs de rang fini est compacte. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.*

Proposition 4. *Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$. notons B_E la boule unité fermée de E . Supposons T compact , alors pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E convergeant faiblement vers 0 la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0.*

Théorème 2.2.1. *Soit E un espace de Banach. Pour $T \in L(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

- a) $T \in K(E)$
- b) $T^* \in K(E^*)$.

Théorème 2.2.2. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. notons \overline{B}_H la boule unité fermée de H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *l'opérateur T est adhérent (en norme dé opérateur) à l'espace des applications linéaires continues de rang fini .*
- 2) *l'opérateur T est compact de H dans H .*
- 3) *l'ensemble $T\overline{B}_H$ est compact (en norme) dans H .*
- 4) *pour toute suite (x_n) de points de H convergeant faiblement vers 0, la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0 .*
- 5) *pour tout système orthonormal $(e_n)_{n \geq 0}$ dans H on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(e_n)\| = 0.$$

[4]

2.2.1 Équations à opérateurs compacts

Soit \mathcal{A} un opérateur compact d'un espace normé X danx lui même alors l'opérateur $T = I - \mathcal{A}$ défini l'équation de second espèce par :

$$\varphi - \mathcal{A}\varphi = f, \varphi.f \in X$$

Où f est est une fonction donnée et φ la fonction inconnue

Théorème 2.2.3. *Le noyau de l'opérateur T défini par :*

$$N(T) = \{\varphi \in X, T(\varphi) = \varphi - \mathcal{A}\varphi = 0\}$$

est un sous espace fermé et dimension finie.

preuve 1. En effet le noyau $N(T)$ d'un opérateur linéaire est sous espace vectoriel de plus, soit $\varphi_n \in N(T)$ une suite convergente vers φ . alors de la continuité de l'opérateur T on obtient

$$T\varphi_n = 0 \Rightarrow T\varphi = 0$$

d'où le noyau $N(T)$ est fermé. d'autre part, toute fonction $\varphi \in N(T)$ satisfait l'équation $\mathcal{A}\varphi = \varphi$ d'où la restriction de l'opérateur \mathcal{A} à l'ensemble $N(T)$ coïncide avec l'identité, \mathcal{A} étant compact de X dans X il est de même de $N(T)$ dans $N(T)$ et par conséquent $N(T)$ est de dimension finie car l'identité ne peut être compact que dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.2.4. La suite d'ensemble des noyau $N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$ est une suite croissante stationnaire, autre ment dit elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts c'est-à-dire il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\{0\} \subset N(T) \subset N(T^2) \subset \dots \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = \dots \quad (2.1)$$

le nombre p est appelé le nombre de riesz de l'opérateur \mathcal{A} pour l'ensemble des noyaux $N(T^n)$

preuve 2. L'inclusion des ensembles est évidente car on a :

$$\varphi \in N(T^n) \Rightarrow T^n\varphi = 0 \Rightarrow T(T^n\varphi) = T^{n+1}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \in N(T^{n+1})$$

. d'où l'inclilusion $N(T^n) \subset N(T^{n+1})$

Supposons qu'il n'existe pas un entier p tel que la suite $N(T^n)$ soit stationnaire c'est-à-dire $N(T^m) \neq N(T^n)$. pour tout entier $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n > m$ En particulier $N(T^{n-1}) \subset N(T^n)$ il existe alors un élément $\varphi_n \in N(T^n)$, avec $\|\varphi_n\| = 1$ tel que :

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| > 1 - \varepsilon \quad (2.2)$$

pour tout $\varphi_{n-1} \in N(T^{n-1})$ et $\varepsilon \in [0, 1]$

En général pour tout suite $\varphi_n \in N(T^n)$, on a la relation suivante :

$$\|\mathcal{A}\varphi_n - \mathcal{A}\varphi_m\| = \|\varphi_n - T\varphi_n - \varphi_m + T\varphi_m\| > 1 - \varepsilon, \forall n > m$$

car les éléments de la suite $(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n)$ appartiennent au sous espace $N(T^{n-1})$ En effet par composistion par T^{n-1}

$$T^{n-1}(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n) = T^{n-1}\varphi_m - T^n\varphi_m + T^n\varphi_n = 0$$

et cela due à la relation :

$$\varphi_m \in N(T^m) \subset N(T^{n-1}) \subset N(T^n), \text{ et } \varphi_n \in N(T^n)$$

la suite φ_n étant bornée, en vertu de la compacité de l'opérateur \mathcal{A} , on peut extraire de la suite $\mathcal{A}\varphi_n$ qu'est une sous suite convergente. Contradiction avec (2.2). Il est à remarque qu'on a montré que $N(T^{n-1}) = N(T^n)$, il reste à démontrer que : $N(T^n) = N(T^{n+1})$. En effet on prend :

$$\varphi \in N(T^{n+1}) \Rightarrow T^{n+1}\varphi = T^n(T\varphi) = 0, \text{ d'ou } T\varphi \in N(T^n) = N(T^{n-1})$$

cela signifie que :

$$T\varphi \in N(T^{n-1}) \Rightarrow T^{n-1}(T\varphi) = T^n\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \in N(T^n)$$

donc $N(T^{n+1}) \subset N(T^n)$

L'inclusion inverse est toujours vraie d'après (2.1) d'où l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$N(T^p) = N(T^{p+1}) = N(T^{p+2}) \dots$ ou l'entier $p \in \mathbb{N}$ est donné par :

$$p = \min k \in \mathbb{N} \text{ tel que } N(T^k) = N(T^{k+1})$$

Théorème 2.2.5. L'image de l'opérateur T défini par :

$$R(X) = \{\Psi = T\varphi \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé.

preuve 3. Il est aisé de voir que l'image de l'opérateur linéaire T est un sous espace. Soit f un élément de la fermeture de $\overline{T(X)}$ alors il existe une suite f_n de l'ensemble $T(X)$ telle que converge vers f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

En d'autres termes il existe une suite φ_n de X telle que :

$$T\varphi_n = f_n,$$

avec la relation : $\lim_{n \rightarrow \infty} T\varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ Aussi pour chaque φ_n on peut choisir une fonction meilleur approximation X_n de l'espace $\mathbb{R}(T)$ telle que : $\|\varphi_n - X_n\| = \inf_{x \in \mathbb{N}(T)} \|\varphi_n - X\|$ la suite $\tilde{\varphi}_n$ définie par $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - X_n$ pour $n \in \mathbb{N}$: est une suite bornée. En effet supposons que $\tilde{\varphi}_n$ est non bornée alors il existe une suite $\varphi_{n(k)}$ telle que $\|\tilde{\varphi}_n\| \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$: Définissons la suite bornée n donnée par :

$$\Psi_k = \frac{\tilde{\varphi}_{n(k)}}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|}, \quad k \in \mathbb{N}$$

et de la norme égal à l'unité $\|\Psi_k\| = 1$: L'opérateur \mathcal{A} étant compact il existe alors une sous suite $\Psi_{k(j)}$ soit convergente

$\mathcal{A}\Psi_{k(j)} \rightarrow \Psi \in X$, lorsque $j \rightarrow \infty$ de plus on a :

$$\|T\Psi_k\| = \frac{\|T\tilde{\varphi}_{n(k)}\|}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \leq \frac{\|T\tilde{\varphi}_{n(k)}\|}{k} \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow \infty$$

La convergence de la suite $T\varphi_n$ implique celle $T\tilde{\varphi}_n$ qui donne en particulier la convergence et de la sous suite $T\tilde{\varphi}_{n(k)}$ D'où la tondance de la suite $T\Psi_k$ l'élément nul.

Autrement dit pour tout sous suite $\Psi_{k(j)}$ on a la convergence des suites $A\Psi_{k(j)}$ vers l'élément

$$T\Psi_{K(j)} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } j \longrightarrow \infty$$

ce qui implique d'après l'expresssion $T = I - \mathcal{A}$ la convergence de la sous suite $\Psi_{k(j)}$

$$\Psi_{k(j)} = (T\Psi_{K(j)} + \mathcal{A}\Psi_{k(j)}) \longrightarrow \Psi, \text{ lorsque } j \longrightarrow \infty$$

due à la continuité de l'opérateur T et à l'équation précédente on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T\Psi_{k(j)} = T\Psi = 0$$

Aussi de la relation : $(X_{n(k)} + \|\tilde{\varphi}_{n(k)}\| \longrightarrow \Psi) \in N(T), \forall k \in \mathbb{N}$ on trouve :

$$\begin{aligned} \|\Psi_k - \Psi\| &= \left\| \frac{\tilde{\varphi}_{n(k)}}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} - \Psi \right\| = \left\| \frac{\varphi_{n(k)} - X_{n(k)}}{\|\varphi_{n(k)}\|} - \Psi \right\| \\ &= \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \|\varphi_{n(k)} - X_{n(k)} - \Psi\|\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\| \\ &= \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \|\varphi_{n(k)} - [X_{n(k)} + \Psi\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|]\| \\ &\geq \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \inf_{x \in N(T)} \|\varphi_n - X\| \\ &= \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \|\varphi_n - X_n\| = 1 \end{aligned}$$

cela oppose le fait que $\Psi_{k(j)} \longrightarrow \Psi \in X$ lorsque $k \longrightarrow \infty$

donc la suite $\tilde{\varphi}_n$ est bornée et puisque \mathcal{A} est compact on peut trouver une sous suite $\tilde{\varphi}_{n(k)}$ telle que : $\mathcal{A}\tilde{\varphi}_{n(k)}$ converge lorsque $j \longrightarrow \infty$.

Du fait que $T\tilde{\varphi}_{n(k)} \longrightarrow f$ lorsque $k \longrightarrow \infty$ et de la relation

$$\tilde{\varphi}_{n(k)} = T\tilde{\varphi}_{n(k)} - \mathcal{A}\tilde{\varphi}_{n(k)}$$

on obtient la convergence suivante : $\tilde{\varphi}_{n(k)} \longrightarrow \varphi \in X$, lorsque $k \longrightarrow \infty$

La continuité de l'opérateur T nous donne : $T\tilde{\varphi}_{n(k)} \longrightarrow T\varphi \in X$,

lorsque $k \longrightarrow \infty$ d'où $f = T\varphi \in T(X)$ Il en résulte :

$$\overline{T(X)} = T(X)$$

Théorème 2.2.6. La suite d'ensemble des images $R(T), R(T^2), \dots R(T^n) \dots$ est une suite décroissante et ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts.

Autrement dit il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que :

$$X \supset R(T) \supset R(T^2) \supset \dots \supset R(T^q) = R(T^{q+1}) = \dots$$

le nombre q est appelé le nombre de Reisz de l'opérateur compact A pour l'ensemble des images $R(T^n)$, est donné par :

$$q = \min k \in N, \text{ tel que } R(T^k) = R(T^{k+1})$$

Lemma 2.2.1. *Le nombre de Reisz p pour l'ensemble des noyaux $N(T^p)$ et le nombre de Reisz q pour l'ensemble des images $R(T^q)$ sont égaux, autrement dit :*

$$p = q = r$$

Théorème 2.2.7. *Les sous espaces $N(T^r)$ et $R(T^r)$ sont supplémentaires, autrement dit que : $X = N(T^r) \oplus R(T^r)$ où r est le nombre de Riesz.*

preuve 4. *Pour tout élément $\Psi \in X$ on a :*

$$\Psi \in X \Rightarrow T^r \Psi \in R(T^r) = \dots = R(T^{2r})$$

d'où l'existence d'une fonction φ_1 telle que :

$$T^r \Psi = T^{2r} \varphi_1 = T^r (\Psi - T^r \varphi_1) = 0 \Rightarrow \varphi_2 = [\Psi - T^r \varphi_1]$$

d'où il vient :

$$\Psi = \varphi_2 + T^r \varphi_1, / \varphi_2 \in N(T^r) \text{ et } T^r \varphi_1 \in R(T^r).$$

et pour tout élément $\Psi \in N(T^r) \cap R(T^r)$, on a $\Psi \in N(T^r)$ et $\Psi \in R(T^r)$ l'existence d'une fonction φ telle que :

$$\Psi = T^r \varphi \Rightarrow T^r \Psi = T^{2r} \varphi = 0 \text{ donc } \varphi \in N(T^{2r}) = \dots = N(T^r)$$

d'où il vient $\Psi = T^r \varphi = 0$

Lemme 1. 1) *L'opérateur $T = I - \mathcal{A}$ est injectif si seulement si, T^r est injectif pour tout $r \in N$*

2) *L'opérateur $T = I - \mathcal{A}$ est surjectif si seulement si, $r \in N$ est surjectif pour tout $r \in N$*

Théorème 2.2.8. *Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors L'opérateur $T = I - \mathcal{A}$ est injectif si et seulement si, il est surjectif, et de plus l'opérateur nverse $T^{-1} = (I - \mathcal{A})^{-1}$ défini de X dans X est borné.*

preuve 5. *Supposons que l'opérateur T injectif alors l'opérateur T^r est aussi injectif pour tout entier $r = p = q$*

$$\{0\} = N(T) = N(T^2) = \dots = N(T^r) = \dots$$

et avec la relation suivante $X = N(T^r) \oplus R(T^r)$ l'injectivité de l'opérateur T nous assure celle de l'opérateur T^r d'après le lemme précédent, d'où la surjectivité de l'opérateur T^r qui nous assure celle de T

Théorème 2.2.9. *Soit \mathcal{A} un opérateur compact d'un espace normé X dans lui-même alors, pour que l'équation non homogène :*

$$T\varphi = \varphi - \mathcal{A}\varphi = f, \quad (2.3)$$

pour que l'équation non homogène : $\varphi \in X$ pour tout $f \in X$, il faut et suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - \mathcal{A}\varphi = 0 \quad (2.4)$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$

preuve 6. *En effet, supposons que l'équation (2.3) admette une solution pour tout $f \in X$, cela veut dire que l'opérateur T est surjectif et le nombre de Riesz r est nul. D'où l'injectivité de l'opérateur T , autrement dit l'équation (2.4) admette la solution triviale $\varphi = 0$. Réciproquement, supposons que l'équation (2.4) admette uniquement la solution triviale $\varphi = 0$, cela veut dire que l'opérateur T est injectif et le nombre de Riesz r est nul. D'où l'injectivité de l'opérateur T et par conséquent la bijectivité de cet opérateur. Autrement dit l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.3).*

2.3 La compacité des opérateurs intégraux

Désignons B la boule unité de $C[a, b]$, de montrer que notre opérateur \mathcal{A} est compact on s'inspire du théorème d'Arzela-Ascoli, il suffit d'établir que :

- 1) $\mathbb{H} = \mathcal{A}(B)$ est équicontinu.
- 2) pour tout $x \in [a, b]$, l'ensemble $\mathbb{H} = \varphi(x)/\varphi \in \mathbb{H}$ est relativement compact.

On remarque en premier que K est uniformément continue sur $[a, b][a, b]$:
Pour tout $x, x' \in [a, b]$ et tout φ de B et tout $x, x' \in [a, b]$, on écrit :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}\varphi(x) - \mathcal{A}\varphi(x')| &= \left| \int_a^b [K(x, y) - K(x', y)]\varphi(y) dy \right| \\ &\leq \int_a^b |[K(x, y) - K(x', y)]||\varphi(y)| dy \\ &\leq \int_a^b |[K(x, y) - K(x', y)]| dy \end{aligned}$$

La continuité uniforme de la noyau K sur $[a, b][a, b]$ permet d'associer à tout réel $\varepsilon > 0$ et autre réel $\alpha > 0$ sorte que :

$$|x - x'| \leq \alpha \Rightarrow |K(x, y) - K(x', y)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \exists x, x' \in [a, b] : |x - x'| \leq \alpha \Rightarrow |\mathcal{A}\varphi(x) - \mathcal{A}\varphi(x')| \leq \varepsilon, \forall \varphi \in B$$

ce qui signifie que \mathbb{H} est équicontinu.

Passons à la seconde condition

Pour que l'ensemble $\{\mathbb{H} = g(x) = \mathcal{A}\varphi(x), \varphi \in B\}$ soit relativement compact. Il suffit qu'il soit borné calculons à cet effet :

$$|g(x)| = |\mathcal{A}\varphi(x)| = \left| \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy \right| \leq \int_a^b \sup_{x, y \in G} |K(x, y)| dy \leq (b-a)M$$

$$\text{Où :} \quad M = \sup_{x, y \in G} |K(x, y)|$$

Il apparait ainsi que \mathbb{H}_x est borné, ce qui achève la démonstration.

2.4 Classification des equations integrales

2.4.1 equations integrales lineaires

Définition 2.4.1. (*equations integrales lineaires*) On appelle *équation intégrale de Fredholm* une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt$$

où $f(x)$, $K(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe. La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$ on a écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt = 0$$

et s'appelle *équation intégrale de Fredholm de première espèce*.

ii) Si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$ on a écrit :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt$$

et s'appelle *équation intégrale de Fredholm de seconde espèce*.

iii) Si $h(x) \neq 0$, est appelée *équation intégrale de Fredholm de troisième espèce*.

Remarque 6. 1) si $f(x) = 0$ est une homogène.

2) si $f(x) \neq 0$ est une non homogène.

Définition 2.4.2. On appelle *équation intégrale linéaire de Volterra* une équation de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt$$

i) On appelle *équation intégrale de Volterra de première espèce*, si $h(x) = 0$, on a écrit ;

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt = 0$$

ii) On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $h(x) = u =$ constante $\neq 0$ on a écrit :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt$$

iii) Si $h(x) \neq 0$, est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 7.

- 1) si $f(x) = 0$ est une homogène.
- 2) si $f(x) \neq 0$ est une non homogène.

Remarque 8. L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K vérifie la condition $K(x, t) = 0$, pour $x < t$:

Définition 2.4.3. (Equation intégrale de Wiener-Hoph)

On appelle équation intégrale de Wiener-Hoph une équation de la forme :

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_0^\infty K(x-t)\varphi(t) dt = f(x)$$

Définition 2.4.4. (Equation intégrale de Renwal)

L'équations intégrales de la forme :

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_0^\infty K(x-t)\varphi(t) dt = f(x)$$

sont appelées équation intégrale de Renwal.

Définition 2.4.5. (Equation intégrale d'Abel)

On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation de la forme

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x)$$

ù est une constante, $0 < \alpha < 1$.

2.4.2 Équation intégrales non linéaires

Définition 2.4.6. (Équation intégrale de Fredholm)

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prendre la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = 0$$

et second espèce :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt$$

où $u =$ constante $\neq 0$

et troisième espèce de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt$$

Définition 2.4.7. (*Équation intégrale de Volterra*)

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prendre la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt$$

et second espèce :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt$$

et troisième espèce de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

Remarque 9. 1) si $f(x) = 0$, donc l'équation est dite homogène.

2) si $f(x) \neq 0$, donc l'équation est dite non homogène.

Définition 2.4.8. (*Equation intégrale de Hammerstein*)

On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de la forme :

$$h(x)\varphi(x)\lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

Définition 2.4.9. (*Equation intégrale d'Abel*) On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(\varphi(t)) dt$$

où $0 < \alpha < 1$ et $g : [0, \infty]$ telque : $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$.

Définition 2.4.10. (*Equation intégrale de Lalesco*)

On appelle équation intégrale de Lalesco une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x [K_1(x, t)\varphi(t) + K_2(x, t)\varphi^2(t) + \dots K_n(x, t)\varphi^n(t)] dt$$

Définition 2.4.11. (*Equation intégrale de Bratu*) L'équation intégrale non linéaire de Bratu prendre la forme :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) e^{\varphi(t)} dt \quad (2.5)$$

b est un nombre positif donné et $G(x, t)$ désigne la fonction de Green

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{(b-x)(t-a)}{b-a}, & t \leq x \\ \frac{(b-t)(x-a)}{b-a}, & t \geq x \end{cases}$$

Proposition 5. Le solution de (2.5) comme solution l'équation $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda e^\varphi = 0$
 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Théorème 2.4.1. (*Théorème de Bratu*) Pour chaque valeur de λ comprise entre 0 et $\lambda_1 = \frac{(1,8745\dots)^2}{b^2}$ l'équation (2.5) a deux solutions réelles et distinctes.

2.5 Existence l'unicité

2.5.1 Contraction de l'opérateur

Soit l'opérateur intégral T donne par :

$$T\varphi = \varphi - A\varphi$$

l'existence et l'unicité de la solution peut être donnée par la série de Neumann, pourvu que l'opérateur A soit une contraction ($\|A\| < 1$)

Théorème 2.5.1. *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace Banach X dans lui-même, avec ($\|A\| < 1$) et I est un l'opérateur identique dans X . alors $(I - A)$ admette un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann :*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^n A^k$$

de plus :

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

De la relation ($\|A\| < 1$) on a la convergence absolue :

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^n \|A^k\| = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Dans l'espace de Banach $L(X; X)$, par conséquent la série de Neumann converge en norm et définit un opérateur linéaire borné S :

$$S = \sum_{k=0}^n A^k$$

Avec $\|S\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$ de plus S est l'inverse de $(I - A)$. En effet utilisant les notations ($A_0 = I, A_k = AA_{k-1}$) on peut voir que :

$$S(I - A)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n A^k \right] (I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I,$$

$$\begin{aligned} \text{aussi :} \quad (I - A)S &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A) \left[\sum_{k=0}^n A^k \right], \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I. \end{aligned}$$

puisque $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

2.5.2 Alternative de Fredholm

Définition 2.5.1. *Soit Deux espaces normés X et Y , munis d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle : XY \rightarrow C$ sont appelés système dual, et est noté par $\langle X, Y \rangle$:*

Théorème 2.5.2. Soit $G \subset \mathbb{R}$ Alors $\langle C(G); C(G) \rangle$ muni de la forme bilinéaire :

$$\langle \varphi, \Psi \rangle = \int_G \varphi(x) \Psi(x) dx, \varphi, \Psi \in C(G).$$

est un système dual.

Définition 2.5.2. Soient $\langle X_1, X_2 \rangle$ et $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ deux systèmes duaux, Alors deux opérateurs

$$\langle A\varphi, \Psi \rangle = \langle \varphi, B\Psi \rangle$$

$A : X_1 \longrightarrow X_2, B : Y_1 \longrightarrow Y_2$ sont dit adjoint si pour tout $\varphi \in X_1, \Psi \in Y_2$

Théorème 2.5.3. Soient $\langle X_1, X_2 \rangle$ et $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ deux systèmes duaux. Si un opérateur $A : X_1 \longrightarrow X_2$ admet un adjoint $B : Y_1 \longrightarrow Y_2$, alors B est unique, de plus A et B sont linéaires.

Théorème 2.5.4. Soit k un noyau continu ou faiblement continu. Alors, les opérateurs intégraux suivants :

$$(A\varphi)(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in G$$

$$B(\Psi)(x) = \int_G K(y, x) \Psi(y) dy, \quad x \in G.$$

sont adjoints dans le système dual $\langle C(G), C(G) \rangle$

Théorème 2.5.5. (Alternative de Fredholm) Soient $A : X \longrightarrow X, B : Y \longrightarrow Y$ deux opérateurs compacts adjoints dans un système dual $\langle X, Y \rangle$ Alors, ou bien $I - A$ et $I - B$ sont bijectives ou bien ont des noyaux non triviaux de dimension finie

$$\dim N(I - A) = \dim N(I - B) \in N$$

et leurs images sont données par :

$$(I - A)(x) = f \in x : \langle f, \Psi \rangle = 0, \Psi \in N(I - B).$$

et :

$$(I - A)(y) = g \in y : \langle g, \varphi \rangle = 0, \varphi \in N(I - A).$$

Corollaire 5. Soit $G \subset \mathbb{R}^m$ et soit k un noyau continu ou faiblement singulier. Alors, ou bien les équations intégrales homogènes

$$\varphi(x) - \int_G K(x, y) \varphi(y) dy = 0, \quad x \in G$$

et

$$\Psi(x) - \int_G K(y, x) \Psi(y) dy = 0, \quad x \in G$$

n'ont que les solutions triviales $\varphi = 0$ et $\Psi = 0$ et dans ce cas les équations inhomogènes

$$\varphi(x) - \int_G K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in G$$

et

$$\Psi(x) - \int_G K(y, x)\Psi(y)dy = g(x), \quad x \in G.$$

admettent une solution unique $\varphi \in C(G)$ et $\Psi \in C(G)$ respectivement pour chaque $m \in N$ de solutions linéairement indépendantes et dans ce cas les équations intégrales inhomogènes correspondantes sont résolubles si et seulement si :

$$\int_G f(x)\varphi(x) dx = \int_G g(x)\Psi(x) dx = 0$$

pour toute solution Ψ de l'équation homogène adjointe et toute solution φ de l'équation homogène respectivement.

Étude numérique d'équation intégral

Les méthodes spectrale consistent une classe de la discrétisation spatiale des équations différentielles, intégrales et intégréo-différentielles. Elles cherchent des solutions en termes d'une série des fonctions connues et régulières. A partir de ses fonctions on peut distinguer deux types de méthodes, à savoir Galerkin, et Collocation Une première des applications des méthodes spectrale aux EDPs est celle de Silberman pour la modélisation de la météorologie par l'approche de Galerkin. Cependant, cette méthode n'est pas devenue pratique pour la résolution des problèmes non linéaires. Après, Orszag et Eliassen, Ma-chenhauer et Rasmussen ont développé des méthodes de transformations pour évaluer la somme de convolution (termes non linéaires).

Dans ce chapitre, on présente les méthodes spectrale (Galerkin et Collocation) pour la résolution numérique des équations intégrales Nous exposons à la fois la formulation intrinsèque de ces méthodes et leur application pratique à l'aide des exemples pour des domaines bornés. Le but de dernière partie est de décrire des méthodes efficaces pour la résolution numérique ces équations. En premier lieu, on présente la méthode de collocation par les polynômes pour les équations intégrales linéaires Fredholm . On présente en second lieu, la méthode de collocation par les polynômes de Chebyshev pour les équations intégrales de Fredholm du deuxième espèce. En dernier lieu, on présente la méthode de collocation par les polynômes de Legendre pour les mêmes équations.

3.1 Principe des méthodes spectrale

On considère l'équation intégrale de la forme :

$$u(x) = (Au)(x) + g(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.1)$$

où $(Au)(x) = \int_{\Omega} K(x, t)u(t)dt$ et Ω est un fermé borné et X un espace complet tel que : $X = \tilde{L}^2(\Omega)$ (ou bien $X = C(\Omega)$) Les méthodes spectrale permettent de traiter la dépendance spatiale, en décomposant les éléments de X sur une

base des fonctions $\{\varphi_j\}_{j \geq 1}$ et on cherche :

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

élément de l'espace B_N engendré par les N premières de base de telle sorte que cette fonction approche la solution exacte de l'équation.

On définit le résidu associé à l'approximation u_N par :

$$R_N(x) = u_N(x) - (Au_N) - g(x).$$

donc :

$$R_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \left\{ \varphi_j(x) - \int_{\Omega} K(x,t) \varphi_j dt \right\} - g(x),$$

ce résidu serait nul si u_N était la solution exacte. On cherche donc à le rendre petit. Pour cela on impose que R_N soit nul en projection sur un sous-espace de X de dimension N .

3.2 Convergence spectrale

Théorème 3.2.1. *Pour tout $u \in L_w^2(I)$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - P_N u\|_{L_w^2} = 0.$$

Quand I est borné, la preuve est directe. Lorsque I n'est pas borné, la preuve est plus délicate pour plus de détails. [2]

On considère le cas de $I = [-1, 1]$ avec la fonction de poids $w(x) = 1$ les polynômes de Legendre $P_n(x)$. La projection orthogonale pour tout $u(x) \in L_w^2(I)$ est

$$P_N u(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k P_k(x), \quad \hat{u}_k = \frac{1}{\|P_k\|_{L_w^2}^2} \langle u, P_k \rangle_{L_w^2}.$$

Théorème 3.2.2. *Pour tout $u(x) \in L_w^2[-1, 1]$, $p \geq 0$, il existe une constante C indépendante de N telle que :*

$$\|u - P_N u\|_{L_w^2[-1,1]} \leq C N^{-p} \|u\|_{L_w^2[-1,1]}.$$

3.3 Méthodes de spectrale

L'objectif de cette section est de présenter des méthodes numériques basées sur une approximation spectrale pour les équations intégrales. ces méthodes cherchent des solutions en termes d'une série des fonctions de la base polynomiale.

3.3.1 Méthode de Galerkin

On applique la méthode de Galerkin lorsque a conditions le noyau d'intégrale est régulière Soient $X = L^2(\Omega)$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur X Dans cette méthode les $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ forment une base de X_n . En cherchant u_N dans X_n engendré par les $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, on est sûr de trouver une solution vérifiant l'équation Soit P_N la projection orthogonale de X sur X_n . La méthode de Galerkin consiste à résoudre le problème approché suivant :

$$\begin{aligned} u_N &\in X_n \\ \text{telle que } P_N R_N &= 0 \\ \text{avec } R_N &= u_N - Au_N - g. \end{aligned}$$

[5]

3.3.2 Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'équation opérateur

$$\varphi - A\varphi = f \tag{3.2}$$

consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.2) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation. En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X, n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C(G)$ ou de $L^2(G)$ soit $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$ une base de X_n . On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$ de la forme :

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \Psi_j(x), \quad X \in G.$$

Pour déterminer les coefficients (c_j) , on substituant, cette fonction dans l'équation (3.2) et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu :

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \varphi_n(x) - \int_G K(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \Psi_j(x) - \int_G K(x, t) \Psi_j(t) dt - f(x) \right\}, \quad X \in G. \end{aligned}$$

soit nul sur un système de nœuds $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ (i.e. aux poits de collocation). Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \Psi_j(x_j) - \int_G K(x_j, t) \Psi_j(t) dt c_j = f(x_j), \quad i = \overline{1, n}.$$

de la forme $Ac = f$. Évidemment, ce système admet une solution unique si le $\det(A)$ est non nul, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

Exemple 5. On considère l'équation suivante :

$$\varphi(x) = -e^x + \int_{-1}^1 e^{x-t} \varphi(x) dx.$$

admette une solution exacte $\varphi(x) = e^x$.

Les résultats donnés sur le tableau quand utilise un Polynômes de degré 10 :

x_i	y_i exacte	y_i appro	erreur
-1	0.36788	0.36789	$6.7208e^{-6}$
-0.75	0.47237	0.47237	$2.3642e^{-7}$
-0.5	0.60653	0.60653	$1.5892e^{-6}$
-0.25	0.7788	0.7788	$2.0542e^{-6}$
0	1	1	$3.8412e^{-12}$
0.25	1.284	1.284	$2.1861e^{-6}$
0.5	1.6487	1.6487	$1.7999e^{-6}$
0.75	2.117	2.117	$2.85e^{-7}$
1	2.7163	2.7183	$8.6253e^{-6}$

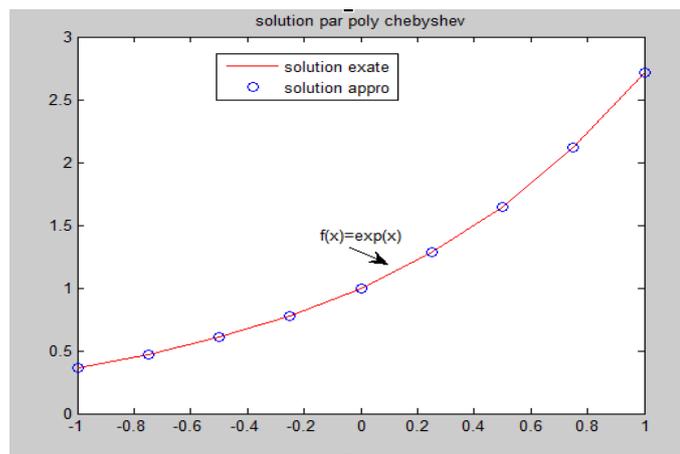


FIG (4)

[7]

Exemple 6. On considère l'équation suivante :

$$\varphi(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{15} + \int_{-1}^1 (x-t)\varphi(x) dx$$

admette une solution exacte $\varphi(x) = x^3 - 2x + 1$.

Les résultats donnés sur le tableau quand utilise un Polynômes de degré 10 :

x_i	y_i exacte	y_i appro	erreur
-1	2	2.0	$2.2041e^{-39}$
-0.75	2.0781	2.0781	0
-0.5	1.875	1.875	0
-0.25	1.4844	1.4844	$3.6734e^{-40}$
0	1	1.0	$3.6734e^{-40}$
0.25	0.5156	0.5156	$1.8367e^{-40}$
0.5	0.125	0.125	$5.5101e^{-40}$
0.75	-0.0781	-0.0781	$3.6734e^{-40}$
1	0.00	$-1.102 e^{-39}$	$1.102e^{-39}$

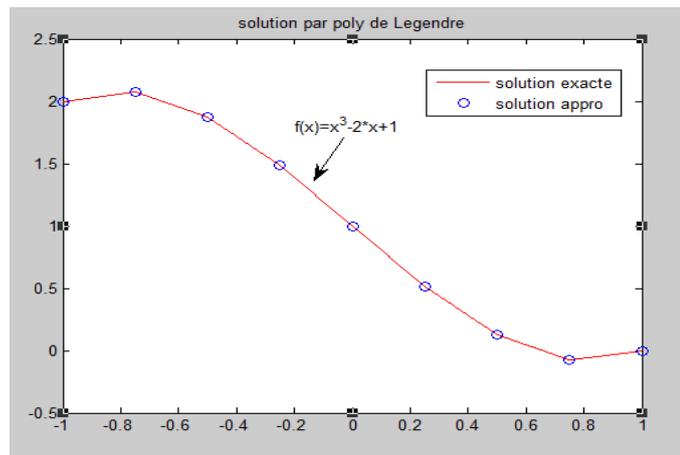


FIG (5)

Conclusion

Nous avons procédé à l'étude numérique d'une équation intégral en la comparant à des polynômes (Chebyshev et Legendre ...) et en utilisant l'aide logiciel (MATLAB).

Nous avons ainsi pu montrer que le choix des polynômes n'est pas lié à la nature de la solution mais à la forme de l'équation

Il est possible d'élargir ce travail à d'autres équations différentielles et les équations integro-différentielle.

Bibliographie

- [1] ▷ A. Kirillov , A. Gvichiani , Thèorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle ,Traduction française , Editions Mir , 1982.
- [2] ▷ Akyuz Dascioglu , A. A Chebyshev polynomials approach for linear Fredholm-Volterra integro differential equations in the most general form, Appl. Math. Comput. 181 (2006) 103112.
- [3] ▷ Biazar , J and Salehi , F Chebyshev Galerkin method for integro diferential equations of the second kind , Iranian J Num , Anal Optim 6 (2016) 3142.
- [4] ▷ M. NADIR. Cours d'analyse fonctionnelle, université de Msila Algérie 2004.
- [5] ▷ Fathy, M., El-Gamel, M. and El Azab, M S. Legendre Galerkin method for the linear Fredholm integro diferential equations, Appl. Math. and Comput. 243 (2014) 789800.
- [6] ▷ Gregory, E.F. Meshfree approximation methods with MATLAB , World Scientific Publishing , 2007.
- [7] ▷ samuel S. Holland Jr., Applied analysis by Hilbert space method, Marcel Dekker, Inc , 1990.

Abstract

This thesis is part of the mathematical field of the numerical study of equations integrals. These equations are very interesting, because there is a very close link between the latter and functional analysis and operator theory. EIs come from several fields of scientific research and mathematical modeling very varied scientific phenomena such as : the dynamics, the physics of solids, plasma physics, economics, etc. EIDs are difficult to solve analytically, so it is necessary to obtain a approximate solution. The essential objective of this work is to build methods numerical erases for the approximate resolution of these equations, such as : the method of collocation, the Galerkin method. We applied the collocation method by the Chebyshev or Legendre polynomials on the linear EIs Fredholm second species which is based on the projection methods

Key Words : Integral equations, Spectral methods, operator theory, Orthogonal polynomials

Résumé

Cette mémoire s'inscrit dans le domaine mathématique de l'étude numérique des équations intégrales. Ces équations sont très intéressantes, car il y a un lien très étroit entre ces dernières et l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs. Les EIs sont issues à partir de plusieurs domaines de la recherche scientifique et de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques très variés tels que : la dynamique, la physique des solides, la physique des plasmas, l'économie, etc. Les EIDs sont difficiles à résoudre analytiquement, il est donc nécessaire d'obtenir une solution approchée. L'objectif essentiel de ce travail est de construire des méthodes numériques effaces pour la résolution approchée de ces équations, telles que : la méthode de collocation, la méthode de Galerkin. On a appliqué la méthode de collocation par les polynômes Chebyshev ou Legendre sur les EIs linéaires Fredholm deuxième espèce qui est basée sur les méthodes de projection

Mots Clés : Équations intégrale, Méthodes spectrale, théorie des opérateur, Polynômes orthogonaux.

ملخص

تندرج هذه المذكرة ضمن المجالات الرياضية للدراسة العددية للمعادلات التكاملية

هذه المعادلات لها اهمية قصوى ، لان هناك ارتباط بينها وبين تحليل الدالي نظرية المؤثرات ، وتاتي اهميتهما كذلك من عدة مجالات البحث العلمي والنمذجة الرياضية لبعض الظواهر العلمية من بينها : ديناميك ، فيزياء الصلبة ، فيزياء الموائع ، الاقتصاد...الخ صعوبة حل هذه المعادلات تحليليا يؤدي بنا للبحث عن طرق رقمية لايجاد حل تقريبي لها مثل طريقة كالركين وطريقة عائلة النقط لحل معادلات تكاملية خطية ل فريد هولم من النوع الثاني باستعمال الكثيرات الحدود شيببيتشاف ، ليجوندر اعتمادا على طريقة الاسقاط .

الكلمات المفتاحية:

معادلات التكاملية ، طريقة الطيف ، نظريات المؤثرات ، كثيرات الحدود المتعامدة