Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

BENZIANE MOUNA
BEN KARA MAHAMMED AHLEM

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Systéme Dynamique**

Thème

Classification des Algèbres de Poisson non commutative en dimension 2

Soutenu publiquement le 6 juillet 2021 devant le jury composé de

BOUREMEL HASSANE	Président
ADIMI HADJER	Encadrant
SIDHOUME KARIMA	Examinateur

Promotion 2020/2021

Remerciements

Nous tenons à rendre grâce tout d'abord à Dieu, le Tous Puissant, de nous avoir donné le courage d'entamer et de finir ce mémoire.
Nous tiens à remercier en tout premier lieu mon directrices de mémoire, madame Adimi Hadjer, professeure chercheure à l'université de Bordj Bouareridj, Nous avons eu l'honneur d'être parmi vos étudiants et nous vous remercions d'accepter de nous accompagner dans la réalisation de ce projet de fin d'étude Nous tenons à gratifier aussi les membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.
Jadresse aussi nos remerciements à Mr Ben saide chef de département de mathématique et à tous les enseignants de la filière de mathématique . Enfin, on adresse nos sincères sentiments de gratitudes et de reconnaissances a toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dèdicace

Tous les mots nesauraient exprimer la gratitude, l'amour , le respect...

Ainsi, je dédie ce travail

⋆A MES CHERS PARENTS⋆

A mon exemple éternel, mon soutien moral et source de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, papa que j'adore

A la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur, ma mère.

⋆A MES CHERS FRERES⋆

Amine , Oussama , Habib llrahman , Malke llfirdaous et Sarah

⋆A TOUTE MA FAMILLE⋆

≪ Benziane ≫ et ≪ Belbouabe ≫

et surtout ma grande mere Zohra et mon cousin Khalil

⋆À ma chère binôme Ahlem.⋆

⋆A MES CHERS AMIS⋆

Afrahe , Kanza , Lamis , Hafida , Imane et Silya

Hadjer , Zohra , Chahira, Amani , Bachir , Selmane et Amine.

tous mes enseignants qui m'ont fait part de leur savoir tout au long de mon cursus scolaire.

DE BENZIANE MOUNA

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...

Je dédie ce modeste travail à :

A LA MEMOIRE DE MON GRAND PERE ET DE Mes GRANDES MERES

≪ Mahammed ≫ et ≪ kamir ≫ et ≪ mama malika ≫

J'aurais tant aimé qu'ils soient présents. Que Dieu ait vos âmes dans sa sainte miséricorde.

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études...

A mon cher grand − pére Mohamde Benbraham

A mes chers frères, Ayoub , Oussama etAcharf, pour leur appui et leur encouragement.

A mes chères soeurs Ilhem Amira pour leurs encouragements permanents, et leur soutiens moral,

À ma chère binôme Mouna qui a été compréhensive et Patiente

A mes chers amis enfance et ètudes.

À une personne exceptionnelle que j'apprécie vraiment ses efforts, son attention, sa motivation, son encouragement au long de la rédaction de ce travail, merci une encore fois d'être toujours là pour moi.

DE BEN KARA MAHAMMED AHLEM

Table des matières

Notations

$\mathcal{L}$	: Algèbre *de Lie*
[,]	: *Crochet de Lie*
$\mathcal{A}$	: Algèbre *Associative*
μ	: *Associateur de la multiplication*
$\mathcal{P}$	: Algèbre *de Poisson*
$sl(n)$	: *L'ensemble des matrices de trace* zèro
$gl(n)$	: *L'ensemble des endomorphismes*
Der	: *L'ensemble des drivation*

INTRODUCTION

Algèbre a d'abord été une branche des mathématiques qui concernait les règles d'opérations sur les nombres et la résolution d'équations pour devenir en suite une théorie d'opérations tirant des propriétés sur les êtres mathématiques en général. L'algèbre est basée sur des structures algébriques, comme la topologie. Plusieurs types d'algèbres existent et ont été étudés de manière approfondie, notamment les algèbres de Lie, les algèbres associatives, les algèbres de Poisson....

La théorie des groupes et algèbres de Lie commence à la fin du 19 ème siècle [10] **avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie (1842-1899). Il a participé à la création de la théorie des symétries continue, qu'il a appliquées à la gé ométrie et aux équations différentielles. On lui doit la cré ation de la notion d'algèbre de Lie, ainsi que des groupes de Lie .Une algèbre associative est un espace vectoriel dans lequel est aussi dé finie une multiplication des vecteurs, qui possè de les propriété s de distributivité et d'associativité** [1]**. Un espace vectoriel** P **est appelé une algèbre de Poisson si en plus de l'addition, il possè de deux** $\mathbb{K}$**-bilinéaires opérations qui sont liées par dérivation. Premièrement, en ce qui concerne la multiplication,** P **est une algèbre associative commutative, on désigne la multiplication par** $\mu(a,b)$ **(ou** $a \cdot b$ **ou** ab**), où** $a, b \in P$ [11]**.**

Deuxièmement, P **est une algèbre de Lie. Les algèbres de Poisson sont la clé pour retrouver la mécanique hamiltonienne et sont également centrales dans l'étude des groupes quantiques.l'étude des groupes quantiques. Les algèbres de Poisson apparaissent naturellement dans différents domaines de l'algèbre, de la topologie et de la physique mathématique et ont re çu une importance considérable au fil des ans. L'algèbre de Poisson est généralement définie comme une algèbre commutative avec une crochet de Lie, et ces opérations sont né cessaires pour satisfaire la règle de Leibniz. L'objectif de ce mé moire est de classifier les algèbres de poisson dans le cas commutative et non commutative en dimension 2. Nous décrivons aussi les structures de Poisson en**

termes d'une seul application bilinéaire. On s'intéresse aussi aux classifications en dimensions deux.

Le mémoire comporte troix chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle les bases de la théorie des espaces vectoriels ainsi que les applications linéaires ullistrés par quelques exemples. Le deuxième chapitre contient les notions sur les algébres de Lie et les algèbres associatives né cessaires pour l'étude des algèbres de poisson, nous décrivons les algèbres de Poisson en utilisant une seule opération bilinéaire via le principe de polarisation-dé polarisation, Nous montrons que, les algèbres de Poisson admissibles, et seulement ces algèbres, donnent lieu à des algèbres de Poisson via la polarisation. Dans le dernier chapitre, nous donnons la classification des algèbres de Poisson en dimensions deux.

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

1.1 Définition d'un espace vectoriel

On considère un ensemble $\mathbb{E}$ muni d'un loi de composition interne (+).

$$(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to x + y \in \mathbb{E},$$

et muni d'un loi de composition externe (sur le corps $\mathbb{K}$).

$$(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E} \to \alpha \cdot x \in \mathbb{E}.$$

Définition 1.1.1. *[5] On dit que $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si :*

1. $(\mathbb{E}, +)$ est un groupe commutatif.
2. La loi externe $(\cdot)$ possède les propriétés suivantes :
   (a) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{E}^2 \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$
   (b) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$
   (c) $\forall x \in \mathbb{E} \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

les éléments de $\mathbb{E}$ sont appelés vecteurs et les élément de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Brillamment diplômé de l'université de Turin en 1880, Peano y enseigna toute sa vie, obtenant la chaire de calcul infinitésimal (calcul différentiel et calcul intégral) de son maître Angelo Genocchi (1817-1889) en 1890. Il professa parallèlement à l'Académie militaire de Turin de 1886 à 1901.

Ce célèbre mathématicien fut également linguiste : entre 1903 et 1915, il tenta de faire ratifier une langue internationale proche du latin recouvrant l'italien, le français, l'allemand et l'anglais ! Dès 1925, Peano oriente son enseignement sur les fondements des mathématiques (les italiens parlent de *matematiche complementari*).

Ses travaux portèrent essentiellement sur la *logique mathématique*, la théorie des ensembles, l'axiomatisation de l'ensemble des entiers naturels. On lui doit la création d'un système de notations susceptibles d'énoncer et de démontrer les propositions mathématiques en utilisant un minimum de signes compatibles avec le raisonnement déductif reposant sur des notions premières acceptées (axiomes).

C'est à Peano que l'on doit aussi, dès 1888 dans son *Calcolo geometrico*, la notion d'espace vectoriel (réel) abstrait généralisant les travaux de Grassmann sur le calcul vectoriel (appelé à l'époque *calcul géométrique* : *Calcolo geometrico*).

C'est au mathématique et logicien italien Giuseppe Peano que nous devons la première définition axiomatique d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.1. *[5]*

1. *Afin de faciliter la distinction entre les scalaires et les vecteurs, nous avons convenu de noter en gras les vecteur par exemple, les élément x, y, z, a, b, c désignent des vecteurs et $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ des scalaires.*
2. *On note $O_{\mathbb{E}}$ le vecteur nul. C'est un vecteur de $\mathbb{E}$, C'est-à-dire $O_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}$ .Il ne faut pas le confondre avec le zéro du corps $\mathbb{K}$.*
3. *On vérifie que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même, tout $\mathbb{R}$-espace est aussi un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.*

1.2 Principaux exemples d'espaces vectoriels

L'ensemble produit

[5] Considérons les espaces $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $+_{E_i}$ et $\cdot_{E_i}$ les deux lois relatives à l'espace E_i. On peut alors enrichir l'ensemble produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ défini par :

$$E_1 \times \ldots \times E_n \stackrel{déf}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}$$

d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il suffit de munir $E_1 \times \ldots \times E_n$ des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ et pour tout $(y_1, \ldots, y_n)$ appartenant à $E_1 \times \ldots \times E_n$ et pour tout α appartenant à $\mathbb{K}$ par :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \stackrel{déf}{=} \left(x_1 +_{E_1} y_1, \ldots, x_n +_{E_n} y_n\right) \ (loi\ interne)$$
$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) \stackrel{déf}{=} \left(\alpha \cdot_{E_1} x_1, \ldots, \alpha \cdot_{E_n} x_n\right) \ (loi\ externe)$$

Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ainsi défini est alors qualifie d'**espace produit** des $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$. En notant l'élément neutre de E_i pour l'addition $+_{E_i}$ pour $i \in (1, \ldots, n)$, l'élément $0_{\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_n}$ de $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ défini par :

$$0_{\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_n} \stackrel{déf}{=} \left(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n}\right)$$

est l'élément neutre de $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ pour l'addition $+$.

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La loi de composition interne sur $\mathbb{K}[X]$ est l'addition de polynômes et la loi de composition externe est la multiplication d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$. Les vecteurs de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes et les scalaires sont les élément de $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est le polynôme

$$0_{\mathbb{K}[X]} \overset{déf}{=} (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, ..., 0_{\mathbb{K}} ....) \in \mathbb{K}[X]$$

cas particule :

L'ensemble $\mathbb{K}$ des n-uplets

[5] Soit n un entier non nul. On munit l'ensemble $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$\mathbb{K}^n \overset{déf}{=} \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1 \in \mathbb{K}, ..., x_n \in \mathbb{K}\}.$$

des deux lois + et · définies pour tout $(x_1, ..., x_n)$ et pour tout $(y_1, ..., y_n)$ appartenant à $\mathbb{K}^n$ et pour tout $a \in \mathbb{K}$ par :

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) \overset{déf}{=} (x_1 +_{\mathbb{K}} y_1, ..., x_n +_{\mathbb{K}} y_n) \ (loi \ \ interne),$$
$$\alpha \cdot (x_1, ..., x_n) \overset{déf}{=} (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} x_1, ..., \alpha_n \cdot_{\mathbb{K}} x_n) \ (loi \ \ externe).$$

muni de ces deux lois, l'ensemble produit $\mathbb{K}^n$ possède une structure de $\mathbb{K}-espace$ vectoriel. Il est qualifié d'**espace produit** un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est un n-uplet et on le note $x = (x_1, ..., x_n)$. L'élément neutre pour l'addition est le vecteur $0_{\mathbb{K}^n} = (0_{\mathbb{K}}, ..., 0_{\mathbb{K}}) \in \mathbb{K}^n$ que l'on note plus simplement $0 = (0, ..., 0)$. Le corps $\mathbb{K}$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La loi interne est l'addition définie sur $\mathbb{K}$ et la loi externe est la multiplication définie sur $\mathbb{K}$. On ne peut pas, dans ce cas faire la distinction entre les vecteurs (de l'espace$\mathbb{K}$) et les scalaires (du corps $\mathbb{K}$).

L'ensemble des applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$

[5] Soit $\mathcal{I}$ un ensemble non vide. Considérons l'ensemble des application de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$, que l'on note $A(\mathcal{I}, \mathbb{K})$, muni des deux loi (+) et (·) .

1. La première loi (+) est une loi de composition interne. À partir des applications $f : \mathcal{I} \to \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{I} \to \mathbb{K}$, on définit une nouvelle application $f + g : \mathcal{I} \to \mathbb{K}$ de la manière suivante :

$$x \in \mathcal{I} \ (f + g)(x) \overset{déf}{=} f(x) +_{\mathbb{K}} g(x).$$

2. La deuxième loi (·) est une loi de la composition externe sur $\mathbb{K}$. À partir d'une application $f : \mathcal{I} \to \mathbb{K}$ et d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit la nouvelle application $\alpha f : \mathcal{I} \to \mathbb{K}$ comme suite :

$$x \in \mathcal{I} \ (\alpha \cdot f)(x) \overset{déf}{=} \ \alpha \times_{\mathbb{K}} f(x).$$

l'ensemble $A(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (s'en convaincre. Les vecteurs de $A(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ sont ici les applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$ et les scalaires sont les éléments du corps $\mathbb{K}$. Il ne faut pas confondre une application $f : \mathcal{I} \to \mathbb{K}$ (c'est un vecteur de $A(\mathcal{I}, \mathbb{K})$) avec sa valeur $f(x)$ en un élément x de $\mathcal{I}$, qui est un scalaire. Le vecteur nul est l'application qui a tout $x \in \mathcal{I}$ associe

$0_{\mathbb{K}}$. On l'appelle l'application nulle. Plus généralement, considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni des lois $+_E$ (loi interne) et $\cdot_E$ (loi externe). L'ensemble $A(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ des applications de $\mathcal{I}$ vers E muni de deux opérations + et $\cdot$ définies par tous f,g $\in A(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in \mathcal{I} \quad \left((f+g)(x) \overset{déf}{=} f(x) +_{\mathbb{E}} g(x) \quad et \quad (\alpha \cdot f) \overset{déf}{=} \alpha \cdot_{\mathbb{E}} f(x)\right).$$

possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est l'application $x \in \mathcal{I} \to 0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}$.

1.3 Propriétés élémentaires

Proposition 1.3.1. *[5] Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel on a :*

- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \;\; \alpha \cdot 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}}$,
- $\forall x \in \mathbb{E} \;\; 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{E}}$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \;\; \forall x \in \mathbb{E} \;\; (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$,
- $\alpha \in \mathbb{K} \;\; \forall x \in \mathbb{E} \;\; (\alpha \cdot x = 0_{\mathbb{E}} \Longleftrightarrow (\alpha = 0_{\mathbb{K}} \; ou = x = 0_{\mathbb{E}}))$.

1.4 Définition d'un Sous-espaces vectoriels

Définition 1.4.1. *[13] Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{V}$ si les quatres conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\mathbb{E} \subset \mathbb{V}$.
2. $\mathbb{E}$ *non vide.*
3. $\mathbb{E}$ *est stable pour l'addition vectorielle dans* $\mathbb{V}$*, c'est-à-dire que :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{E}^2 \;\; u + v \in \mathbb{E}.$$

4. $\mathbb{E}$ *est stable pour la multiplication scalaire dans* $\mathbb{V}$*, c'est-à-dire que :*

$$\forall (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E} \;\; \lambda u \in \mathbb{E}.$$

Il est important de remarquer qu'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{V}$ est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour les opération interne et externe sur $\mathbb{V}$.
Le théorème qui suit donne une caractérisation des sous-espace vectoriels, de façon peu plus condensée.

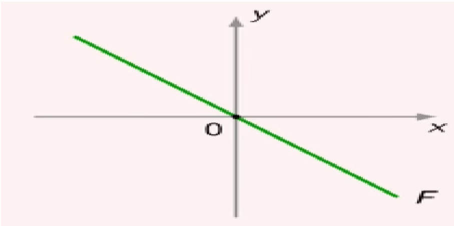
Théorème 1.4.1. *[13] Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriels sur $\mathbb{K}$. Pour un sous-espace vectoriel de $\mathbb{V}$, il faut et il suiffait que les trois conditions suivantes soient satisfaites :*

- $\mathbb{E} \subset \mathbb{V}$ *;*
- $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{E}$ *;*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \;\; \forall (u, v) \in \mathbb{E}^2, \;\; \lambda u + \mu v \in \mathbb{E}$.

Exemples et contre-exemple de sous-espaces vectoriels.

Exemple 1.4.1.

— $F = \{(x+y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x+y=0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*.(voir figure 1)*



"Figure 1"

1. $(0,0) \in F$,
2. (a) *Si* $u = (x_1, y_1)$ *et* $v = (x_2 + y_2)$ *appartiennent à* F.
   (b) *Alors* $x_1 + y_1 = 0$ *et* $x_2 + y_2 = 0$,
   (c) *Donc* $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$,
   (d) *et ainsi* $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ *appartient à* F,
3. (a) *Si* $u = (x+y) \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) *Alors* $x + y = 0$ *donc* $\lambda x + \lambda y = 0$,
   (c) *d'ou* $\lambda u \in F$,

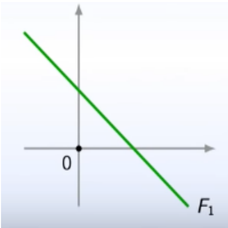
— *Les seul sous-espaces vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *sont* 0, $\mathbb{R}^2$ *et les droit qui passent par l'origine.*

— *pour tout entier naturel* n*, à l'ensemble* $\mathbb{K}_n[t]$ *des fonctions polynomiales de degré* n *, à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $\mathbb{K}[t]$.

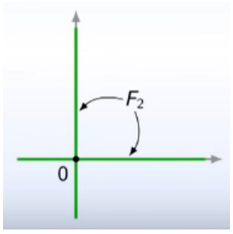
Contre-exemples

Exemple 1.4.2.

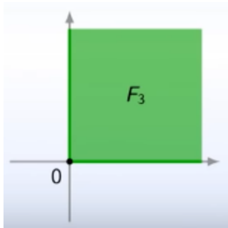
1. $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x+y=2\}$ *n'est pas un s.e.v de* $\mathbb{R}^2$*. En effet le vecteur nul* $(0,0)$ *n'appartient pas à* F_1*. (voir figure 2).*
2. $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x=0 \text{ ou } y=0\}$ *n'est pas un s.e.v de* $\mathbb{R}^2$*. En effet* $u = (1,0), v = (0,1) \in F_2$*, mais* $u + v = (1,1) \notin F_2$ *(voir figure 3)*
3. $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ *n'est pas un s.e.v de* $\mathbb{R}^2$*. (voir figure 4).*



"Figure 2"



"Figure 3"



"Figure 4"

1.4.1 Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels

On appelle famille de sous-ensemble de $\mathbb{E}$ toute application

$$i \in I \to F_i \in \mathrm{P}(E).$$

Elle se note $(F_i)_{i \in I}$.

Proposition 1.4.1. *[4] Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E. l'ensemble $\cap_{i \in I} F_i$ est un sous-espaces vectoriel de E.*

1.5 Indépendance linéaire

1.5.1 Famille liée et famille libre

Commençons par donner la définition d'une famille liée et celle d'une famille libre dans le cas ou la famille est finie.

Définition 1.5.1. *[4] Soit $f = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$.*

- *La famille f est dite **liée**. si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ appartenant à $\mathbb{K}$, dont un au moins est non nul tels que :*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p = 0_E$$

  On dit également les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_p$ sont linéairement dépendants .
- *Si la famille n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre** (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants).*

En d'autres termes, on dit qu'une famille finie $f = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre si la seule possibilité pour que la combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p$ soit nulle, est que les coefficients $\alpha_1, ..., \alpha_p$ soient tous nuls. En pratique,pour montrer que La famille $f = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre, on montre que la relation (appelée relation de liaison)

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p = 0_E,$$

entraine que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

1.6 Espace vectoriel de dimension finie

1.6.1 Familles génératrices et base

Définition 1.6.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, ..., u_p)$ une famille de vecteurs de E La famille $(u_1, ..., u_p)$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, ..., u_p$, c'est-à-dire si pour tout vecteur $u \in E$, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^P$ tel que :*

$$u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_p u_p.$$

Définition 1.6.2. *On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.*

Remarque 1.6.1. *[4]*

- *Si $B = (x_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors tout $x \in E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire .*

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$$

  *Les scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ s'appellent les **coordonnées** de x dans la base B.*
- *Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de F, alors il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. De plus,*
  - *u est injective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille libre de F ;*
  - *u est surjective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F ;*
  - *u est bijective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est une base de F.*

1.6.2 Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.6.3. *On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice **fine** de vecteurs de E. Dans le cas contraire, on dit que l'espace est de **dimension infinie**.*

Proposition 1.6.1. *[5] Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base finie et toutes les bases d'un même espace de dimension finie ont même cardinal.*

1.6.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du plus petit sous-espace vectoriel contenant tous ces vecteurs.

Soient E Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v_1, ..., v_p$ une famille finie de vecteurs de E. Le sous-espace vectoriel Vect $(v_1, ..., v_p)$ engendré par $v_1, ..., v_p$ étant de dimension finie, on peut donc donner la définition suivante :

Définition 1.6.4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $v_1, ..., v_p$ une famille finie de vecteurs de E. Le **rang** de la famille $v_1, ..., v_p$ est la dimension du sous-espace vectoriel Vect $(v_1, ..., v_p)$ engendré par les*

vecteurs $v_1,...,v_p$.
Autrement dit :

$$\boxed{rg(v_1,...,v_p) = dim\ vect\,(v_1,...,v_p)}$$

1.7 Les applications linéaires

Définition 1.7.1. *[5] Soient E,F deux* $\mathbb{K}$*-espace vectoriels. On appelle* ***application de*** E ***vers*** F *tout application* $f : E \longrightarrow F$ *vérifiant :*

- $\forall x, x' \in E \qquad f(x +_E x') = f(x) +_F f(x')$,
- $\forall x \in E \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad f(\alpha \cdot_E x) = \alpha \cdot_F f(x)$.

Une application linéaire est encore appelée ***morphisme d'espaces vectoriels****. On note* $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *l'ensemble des application linéaire de* E *dans* F*. On appelle* ***forme linéaire*** *une application linéaire d'un* $\mathbb{K}$*-espace* E *dans* $\mathbb{K}$ *.*

1.7.1 Morphismes

Définition 1.7.2. *Soient* E, F *deux* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*

- ⋆ *Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F *. Si* f *est bijective alors on dit que* f *est un isomorphisme d'espace vectoriel et que* E *et* F *sont isomorphes par* f*.*
- ⋆ *On appelle endomorphisme de* E *une application linéaire de l'espace* E *dans lui-même. On note* $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ *l'ensemble des endomorphismes de* E*.*
- ⋆ *En particulier .Si un endomorphisme* f *est bijective alors on dit que* f *est un automorphisme de* V *l'espace* E*. On note* $gl_{\mathbb{K}}(E)$ *l'ensemble des automorphismes de* E*.*

Exemple 1.7.1. *L'application* ψ *qui a un couple* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *scalaire* $x+iy$ *de* $\mathbb{C}$ *est un morphisme du* $\mathbb{R}$*-espace* $\mathbb{C}$ *puisque d'une part, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et pour* $(x',y') \in \mathbb{R}^2$*.*

$$\begin{aligned}
\psi((x,y) +_{\mathbb{R}^2} (x',y')) &= \psi((x+x',y+y')) \\
&= (x+x') + i(y+y') = x+iy+x'+iy' \\
&= \psi((x,y)) +_{\mathbb{C}} \psi((x',y'))
\end{aligned}$$

et d'autre part , pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha \cdot_{\mathbb{R}^2} (x,y)) &= \psi((\alpha x, \alpha y)) \\
&= \alpha x + i(\alpha y) = (\alpha(x+iy) \\
&= \alpha \times_{\mathbb{C}} \psi((x,y))
\end{aligned}$$

remarquons que l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *est injective. En effet, de* $\psi((x,y)) = \psi((x',y'))$*, c'est-à-dire de* $x+iy = x'+iy'$*. il vient immédiatement* $x = x'$ *et* $y = y'$ *c'est-à-dire*

$$(x,y) = (x',y')$$

L'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *est aussi surjective puisque à tout* $z \in \mathbb{C}$ *on peut associer le couple* $(Re(z), Im(z)) \in \mathbb{R}^2$ *tel que :*

$$\psi((Re(z), Im(z))) = Re(z) + i \times Im(z) = z.$$

L'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *est donc bijective. C'est un isomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{C}$*. Les deux* $\mathbb{R}$*-espace vectoriels* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{C}$ *sont isomorphes.*

1.8 Image et noyau

1.8.1 Image d'une application linéaire

Soit f une application de E dans F et A une sous-ensemble de E. On rappelle que l'image par f de A, que l'on note $f(A)$ est le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Si l'ensemble A ne possède aucune structure algébrique particulière et si f est une application quelconque alors, a priori, l'ensemble $f(A)$ ne possède lui non plus aucune structure algébrique remarquable. En revanche, la situation est différente si A possède une structure de sous-espace vectoriel et si f est une application linéaire. On a le résultat suivant :

Proposition 1.8.1. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Si* A *est un sous-espace vectoriel de* E *et si* f *est une application linéaire de* E *dans* F *alors* $f(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* F*.*

Corollaire 1.8.1. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Si* f *est une application linéaire de* E *dans* F *alors* Imf *est un sous-espace vectoriel de* F*.*

1.8.2 Noyau d'une application linéaire

Définition à présent le noyau d'une application linéaire

Définition 1.8.1. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* f *est une application linéaire de* E *dans* F*. L'ensemble des vecteurs de* E *qui ont pour image* $\mathbf{0}_F$ *par* f *est appelé* ***noyau de*** f *et se note* $Kerf$*. En d'autres termes :*

$$Kerf = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

La propriété de linéarité de l'application f nous assure que l'ensemble $Kerf$ n'est jamais vide. En effet ,

$$0_E \in Kerf.$$

De la linéarité de f, on déduit également la propriété suivant.

Proposition 1.8.2. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Si* f *est une application linéaire de* E *dans* F *alors* $Kerf$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Exemple 1.8.1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$.*

- *Commençons par déterminer le noyau de f.*
  $(x,y) \in Kerf$ si et seulement si $f(x,y) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \end{cases}$$

On déduit que $Ker(f) = (0,0)$, et en particulier que f est injective.
On déterminons maintenant l'image de f.
Un vecteur (u,v,w) est dans l'image de f si et seulement si :

$$\exists\,(x,y) \in R^2, (u,v,w) = f(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \exists\,(x,y) \in R^2, \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \\ w = x+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,(x,y) \in R^2, \begin{cases} u = x+y \\ u+v = 2x \\ w-v = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,(x,y) \in R^2, \begin{cases} \dfrac{u-v}{2} = y \\ \dfrac{u+v}{2} = x \\ w-u = 0 \end{cases}$$

On déduit que $Im(f) = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3; u-w=0$.
En particulier, $(1,1,0)$ n'est pas dans $Im(f)$.

1.8.3 Théorème du rang

Le théorème suivant est fondamental en algèbre linéaire. Nous l'utiliserons à de multiples reprises.

Théorème 1.8.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nécessairement de dimension finie. Pour tout application linéaire f de E dans F, on a :*

$$dim_{\mathbb{K}}(E) = dim_{\mathbb{K}}(Imgf) + dim_{\mathbb{K}}(Kerf)$$

Remarque 1.8.1.

$$dim_{\mathbb{K}}(Imgf) = rg(f)$$

Chapitre 2

Algèbres de Poisson

2.1 Algèbres

Définition 2.1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle $\mathbb{K}$-**algèbre** tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une loi de composition interne $(x,y) \longmapsto xy$ appelée **multiplication** telle que l'application*
$A \times A \longmapsto A$, $(x,y) \longmapsto xy$, soit $\mathbb{K}$-bilinéaire.
On dit que :

1 *L'algèbre est **associative** si la multiplication est associative.*

2 *L'algèbre est **commutative** si la multiplication est commutative*

3 *L'algèbre est **unitaire** si la multiplication possède un élément unité.*

Toute algèbre associative unitaire est un anneau

Exemple 2.1.1. *[6] $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

Exemple 2.1.2. *[6] Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Alors l'espace $\mathscr{L}(E)$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathbb{E}$ dans lui–même muni de la composition des applications est une $\mathbb{K}$-algèbre unitaire.*

Exemple 2.1.3. *[6] Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Alors l'espace $\mathscr{L}(E)$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathbb{E}$ dans lui-même muni du produit appelé **crochet** $[f,g] = f\circ g - g\circ f$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Cette algèbre n'est ni associative, ni commutative, ni unitaire si $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E} \geq 2$.*

Définition 2.1.2. *[6] Soit A et B deux $\mathbb{K}$-algèbres associatives unitaires. On appelle*

(a) ***homomorphisme** de A dans B toute application $\mathbb{K}$-linéaire $f : A \longrightarrow B$ qui soit aussi un homomorphisme d'anneaux.*

(b) ***isomorphisme** de A dans B toute bijection $f : A \longrightarrow B$ telle que f soit un homomorphisme d'algèbres ; dans ce cas f^{-1} est aussi un homomorphisme d'algèbres*

Définition 2.1.3. *[6] Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire. On appelle **sous-algèbre** de A tout sous-espace vectoriel B de A qui soit en même temps un sous-anneau de A.*

Proposition 2.1.1. *Si A est* ***une*** $\mathbb{K}$***-algèbre unitaire non nulle****, l'application $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow A$, $\lambda \longmapsto \lambda \cdot 1_A$ est* ***un monomorphisme*** *de $\mathbb{K}$-algèbres. On peut donc dans ce cas identifier $\mathbb{K}$ à une sous-algèbre de A ; moyennant cette identification, la loi externe $\mathbb{K} \times A \longrightarrow A$ est la restriction à $\mathbb{K} \times A$ de la multiplication de A , c-à-d :*

$$\lambda \cdot x = (\lambda \cdot 1_A)\ x.$$

Preuve En effet on a
$\varphi(\lambda + \mu) = (\lambda + \mu) \cdot 1_A = \lambda \cdot 1_A + \mu \cdot 1_A = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu)$ par définition d'un espace vectoriel.
$\varphi(\lambda\mu) = (\lambda\mu) \cdot 1_A = (\lambda\mu) \cdot (1_A 1_A) = (\lambda \cdot 1_A)(\mu \cdot 1_A) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)$ par bilinéarité de la multiplication.
$\varphi(1_k) = 1_k \cdot 1_A = 1_A$ par définition d'un espace vectoriel.
Prouvons maintenant que φ est injectif. Supposons que $\varphi(\lambda) = 0$; alors $\lambda \cdot 1_A = 0$; si $\lambda \neq 0$, on a $\lambda - 1 \cdot (\lambda \cdot 1_A) = 0$ d'où $1_A = 0$ et par suite $A = 0$ contrairement à l'hypothèse ; donc $\lambda = 0$.
Enfin par bilinéarité on a $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (1_A x) = (\lambda \cdot 1_A)x$.

2.2 Définitions de Base et Propriétés

2.2.1 Algèbres de Lie

Définition 2.2.1. *[10] Une algèbre de Lie (réelle ou complexe) est un espace vectoriel $\mathcal{L}$ a valeurs dans $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une opération $[\ ,\ ] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ qui jouit des propriétés suivantes :*

1 Bilinéarité pour tout $a, b \in \mathbb{K}$ $\quad \forall x, y, z \in \mathcal{L}$:

(a) Bilinéarité à gauche

$$[ax + by, z] = a[x,z] + b[y,z],$$

(b) Bilinéarité à droite

$$[x, az + by] = a[x,z] + b[x,y],$$

2 Antisymétrique pour tout $x, y \in \mathcal{L}$:

$$[x,y] = -[y,x],$$

3 Pour tout $x, y, z \in \mathcal{L}$:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Le produit $[x,y]$ est appelé le crochet ou le commutateur de x et y. L'identité (3) est appelé l'identité de Jacobi.

$$\circlearrowleft_{x,y,z} [[x,y],z] = 0.$$

Exemple 2.2.1. *[10] Tout espace vectoriel $\mathbb{E}$ peut être muni d'une structure d'algèbre de lie en posant :*

$$\forall x, y \in \mathbb{E},\ [x,y] = 0.$$

Une telle algèbre de Lie, où le crochet de Lie est identiquement nul, est appelée abélienne.

Proposition 2.2.1. *Le crochet $[x,y]$ est une fonction bilinéaire alternée de x,y. On a donc :*

1. *La propriété $[x,y] = -[y,x]$ est équivalent à $[x,x] = 0$,*
2. *De sorte que l'identité de Jacobi peut s'écrire :$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$.*

Démonstration 2.2.1.

1.
   — *La première implication on pose : $y = x$.*

   — *La deuxième En effet;pour tout $x, y \in \mathcal{L}$, on a :*

$$[x+y, x+y] = 0,$$

par la bilinéarité :

$$[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y] = 0,$$

on sait que $[x,x] = 0$ et $[y,y] = 0$.
Donc :

$$[x,y]+[y,x] = 0$$

d'où

$$[x,y] = -[y,x].$$

2.

$$\begin{aligned} [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= 0 \\ \Leftrightarrow [x,[y,z]] &= -[y,[z,x]]-[z,[x,y]] \\ \Leftrightarrow [x,[y,z]] &= [[x,y],z]+[y,[x,z]]. \end{aligned}$$

2.2.2 Sous algèbres de Lie ,idéaux

Définition 2.2.2. *[10] Une $\mathbb{K}$-sous algèbre de Lie h de $\mathcal{L}$ est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de $\mathcal{L}$ stable pour le crochet $[\ ,\ ]$ telle que :*

$$[h,h] \subset h, \text{ où encore } \forall x,y \in h, [x,y] \in h.$$

Exemple 2.2.2. *[1] Soit $sl(n)$ le sous-espace de $gl(n)$ constitué de matrices dont la trace est nulle. Puisque $Tr(AB) = Tr(BA)$, l'ensemble $sl(n)$ est fermé sous $[x,y]\ = xy - yx$, et est donc une algèbre de Lie.*

Définition 2.2.3. *[10] Un idéal de algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est un $\mathbb{K}$-sous espace I de $\mathcal{L}$ tel que :*

$$[I,\mathcal{L}] \subseteq I \text{ (c'est-à-dire) } \forall x \in I, y \in \mathcal{L}, [x,y] \in I.$$

Exemple 2.2.3. *L'algèbre de Lie des matrice de trace nulle $sl(n,\mathbb{C})$ est un idéal de l'algèbre des matrices $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$, puisque*

$$[\mathcal{M}(n,\mathbb{C})\ ,\ \mathcal{M}(n,\mathbb{C})] = sl(n,\mathcal{C}).$$

2.2.3 Morphisme d'algèbres de Lie

[10] Un morphisme d'algèbres de Lie (entre deux algèbres de Lie) $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ est une application linéaire φ qui conserve le crochet de Lie , $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ telle que :

$$\varphi([a,b]_1) = [\varphi(a), \varphi(b)]_2, \qquad \forall a, b \in \mathcal{L}$$

1 **Un isomorphisme** (d'algèbres de Lie) est un morphisme bijectif , son inverse étant alors un morphisme bijectif . Deux algèbres de Lie sont dite isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'une sur l'autre .

2 **Un automorphisme** (d'algèbres de Lie) est isomorphisme d'une algèbre de Lie dans elle-même.
On note **Aut($\mathcal{L}$)** le groupe des automorphismes d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$.

2.2.4 Dérivation d'algèbres de Lie

Définition 2.2.4. *[10] Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie , une dérivation de $\mathcal{L}$ est une application linéaire D : $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ vérifiant la propriété suivante :*

$$D([x,y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] \quad pour\ tout\, x, y \in \mathcal{L},$$

où même

$$D(xy) \ = \ D(x)y \ + \ xD(y) \quad pour\ tout\, x, y \in \mathcal{L}.$$

Notation
L'espace des dérivations de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{K}$ noté par $Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$.

Remarque 2.2.1. *[10] On vérifie sans peine que l'ensemble $Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ des dérivation d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est lui-même.*

Proposition 2.2.2.

- *La dérivation des somme égal a somme des dérivation*

$$D(x+y, z) = D(x,y) + D(y,z),$$

- *La dérivation de αxy est égal a α dérivation xy*

$$D(\alpha xy) = \alpha D(xy).$$

Démonstration 2.2.2.

1. *Par la définition de la dérivation d'une algèbre de Lie ,on a :*

$$\begin{aligned} D(x+y,z) &= (x+y)D(z)+D(x+y)z \\ &= xD(z)+yD(z)+D(x)z+D(y) \\ &= xD(z)+D(x)z+yD(z)+D(y) \\ &= D(x,y)+D(y,z). \end{aligned}$$

2. *Pour obtenir le deuxième égalité $D(\alpha xy)=\alpha D(xy)$, on a :*

$$\begin{aligned} D(\alpha xy) &= \alpha xD(y)+D(\alpha x)y \\ &= \alpha xD(y)+\alpha D(x)y \\ &= \alpha(xD(y)+D(x)y) \\ &= \alpha D(xy). \end{aligned}$$

2.3 Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

On suppose désormais que toutes les algèbres de Lie sont de dimension finie.
Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie. Si $\mathbb{H}$ et $\mathbb{K}$ sont deux sous-espaces de $\mathcal{L}$, on note $[\mathbb{H},\mathbb{K}]$ le sous-espace de $\mathcal{L}$ engendré par les vecteurs $[x,y]$, où $x \in h$ et $x \in h$. Ainsi par exemple, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est abélienne si et seulement si $[\mathbb{H},\mathbb{K}]=0$.

2.3.1 Algèbres de Lie nilpotentes

Définition 2.3.1. *Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. On pose pour tout entier $j \geq 0, \mathcal{L}_{j+1}=[\mathcal{L},\mathcal{L}_j]$ avec $\mathcal{L}_0=\mathcal{L}$. La suite décroissante d'idéaux $\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1,...,\supseteq \mathcal{L}_j \supseteq,...$ est appelée la suite centrale déscendante de $\mathcal{L}$.*

Définition 2.3.2. *Une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{K}$ est nilpotente si la suite centrale descendante s'annule à partir d'un certain rang, i,e s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathcal{L}_k=0$. Si $\mathcal{L}_{k-1} \neq \{0\}$ et$\mathcal{L}_k=\{0\}$, on dit que $\mathcal{L}$ est nilpotente de rang k*

Exemple 2.3.1. *Tout algèbre de Lie abélienne est nilpotente.*

Corollaire 2.3.1. *Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie nilpotent sur . Il existe une chaîne d'idéaux de $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}_0=\{0\} \subset \mathcal{L}_1 \subset ... \subset \mathcal{L}_r=\mathcal{L}$ tels que $dim(\mathcal{L}_j=j$ et $[\mathcal{L},\mathcal{L}_j] \subset \mathcal{L}_{j-1}$ pour tout j Autrement dit, il existe une base de $\mathcal{L}$ dans laquelle tout endomorphisme $\rho(X), X \in \mathcal{L}$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont nuls.*

Remarque 2.3.1. *Évidemment si T est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$, Alors il existe une base B de $\mathbb{V}$ dans laquelle T prend la forme d'une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont nuls.*

2.3.2 Algèbre de lie rèsolubles

Définition 2.3.3. *Soit $\mathcal{L}$ une Algèbre de Lie sur K. On pose pour tout . La suite décroissante d'idéaux est appelée la suite dérivée de $\mathbb{K}$. On pose pour tout $j \geq 0$, $\mathcal{L}^{(j+1)} = [\mathcal{L}^{(j)}, \mathcal{L}^{(j)}]$ avec $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$. La suite décroissante d'idéaux $\mathcal{L}^{(0)} \supseteq \mathcal{L}^{(1)} ... \supseteq \mathcal{L}^{(j)} \supseteq ...$ est appelée la suite dérivée de $\mathcal{L}$*

Définition 2.3.4. *Une Algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est résoluble si la suite des commutateurs s'annule à partir d'un certain rang, i,e s'il existe un entier $k \neq 1$ tel que $\mathcal{L}^k = \{0\}$.*

Exemple 2.3.2.

— *Toute Algèbre de Lie nilpotente est résoluble, puisque $\mathcal{L}^j \subseteq \mathcal{L}_j$ pour tout j*

— *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieures (ou inférieurs) est résoluble (et nilpotente si tous les termes diagonaux sont nuls).*

Proposition 2.3.1. *Soit $\mathcal{L}$ une Algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$*

1. *Si $\mathcal{L}$ est résoluble alors $\mathcal{L} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$.*
2. *Si $\mathcal{L}$ est résoluble alors $\mathcal{L}$ contient un idéal de codimension 1.*
3. *Si $\mathcal{L}$ est résoluble, tout sous-algèbre de $\mathcal{L}$ est résoluble. En particulier un idéal dans une algèbre de résoluble est résoluble.*
4. *La somme de tout les idéaux résoluble $\mathcal{L}$ est l'unique idéal résoluble de $\mathcal{L}$ contenant tout les résoluble de $\mathcal{L}$.*

2.3.3 Algèbre Associatives

Définition 2.3.5. *Soient $\mathcal{A}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et une application bilinéaire :*

$$\mu : \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \ \mathcal{A}.$$

le couple $(\mathcal{A}, \mu)$ est appelé algèbre associative si la propriété suivante est vérifiée :

$$\text{pour tous } x, y, z \in (\mathcal{A}),\ \mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z) \quad (associativit\acute{e}\ ).$$

Remarque 2.3.2.

$$Si: \quad \mu(x, y) = \mu(y, x) \quad \text{on dit que l'algèbre associativité est est commutative.}$$

Exemple 2.3.3. *L'espace des endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$ muni de la loi $\circ$, $(End\,(V), \circ)$ est une algèbre associative.*

Exemple 2.3.4. *Pour Q un élément de l'espace des matrices carrées d'ordre n, $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ on définit sur ce dernier l'application bilinéaire $\times_Q$ tel que :*

$$\times_Q : \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \ \times \ \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \ \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$$

$$\text{pour tous } A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}), \ \ A \times_Q B = AQB$$

alors on a $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$ une algèbre associative.

Exemple 2.3.5. *L'espace des fonctions de classes $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ muni de la loi classique produit " $\cdot$ ", $(\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}),\cdot)$, est une algèbre associative.*

2.3.4 Sous algèbres Associatives, idéaux

Définition 2.3.6. *Un sous espace vectoriel h d'une algèbre associative $(\mathcal{A},\mu)$est dit sous algèbre associative de $\mathcal{A}$ si :*

$$\text{pour tous } x,\ y \in h, \mu(x,y) \in h$$

qui équivalent à :

$$\mu(h,h) \subset h$$

Définition 2.3.7. *Un sous espace vectoriel I d'une algèbre associative $\mathcal{A}$ est dit idéal de $\mathcal{A}$ si :*

$$\text{pour tout } x \in I \text{ et pour tout } y \in V,\ \mu(x,y) \ \in \ h$$

qui est équivalent à :

$$\mu(I,\mathcal{A}) \subset I$$

2.3.5 Morphismes d'algèbres associatives

Définition 2.3.8. *Un morphisme d'algèbres associatives est une application linéaire,*

$$\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$$

où $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux algèbres associatives munis respectivement du produit μ_1 et μ_2, tel que :

$$\text{pour tous } x,\ y \in V, \varphi(\mu_1(x,y)) = \mu_2(\varphi(x),\varphi(y)).$$

Remarque 2.3.3. *Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux algèbres associatives sur un corps K, et soit*

$$\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$$

un morphisme d'algèbres associatives.

1. ***Le noyau** d'un morphisme d'algèbres associatives, $Ker(\varphi) = \{x \in \mathcal{A}/\varphi(x) = 0\}$, est un idéal de $\mathcal{A}_1$.*
2. ***L'image** d'un morphisme d'algèbres associatives, $Im(\varphi) = \{\varphi(x), x \in \mathcal{A}\}$, est une sous algèbre de $\mathcal{A}_2$.*

Remarque 2.3.4. *De toute algèbre associative $\mathcal{A}$ on peut construire une algèbre de Lie sur le même espace vectoriel en définissant*

$$[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x).$$

.

2.3.6 Dérivation d'algèbre associatives

Définition 2.3.9. *Une dérivation d'une algèbre associative $(\mathcal{A}, \mu)$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une application linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$*

$$D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A},$$

tel que :
Pour tout $x, y \in \mathcal{A}$,

$$D(\mu(x, y)) = \mu(Dx, y) + \mu(x, Dy).$$

L'ensemble des dérivation de $\mathcal{A}$ est noté $Der_{\mathbb{K}}\mathcal{A}$.

Exemple 2.3.6. *Soit $(\mathcal{A}, \mu)$ une algèbre associative triviale, tout morphisme de $\mathcal{A}$ dans lui même (endomorphisme de $\mathcal{A}$)est une dérivation de $\mathcal{A}$. Ainsi, $Der_{\mathbb{K}}\mathcal{A} = End(\mathcal{A})$.*

2.4 Algèbres associatives nilpotentes

Définition 2.4.1. *[2] Une algèbre associative $\mathcal{A}$ est nilpotente si la chaîne des idéaux $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}^2 \supset \mathcal{A}^3$........ est finie, si $\mathcal{A}^s \neq \{0\}$, et $\mathcal{A}^{s+1} = \{0\}$ alors s est le nilindice de $\mathcal{A}$.*

2.4.1 Algèbre de Poisson

Définition 2.4.2. *[11] Une algèbre de Poisson $\mathcal{P}$ est une algèbre associative commutative avec équipée d'un crochet de Lie $[\ ,\ ]$ qui satisfait à la règle de Leibniz :*

$$[\mu(x, y), z] = \mu(x, [y, z]) + \mu(y, [x, z]) \quad x, y, z \in \mathcal{P},$$

Pour tout x, y, z dans $\mathcal{L}$. Cette condition signifie que, par rapport à chacune des deux variables, le crochet de Poisson se comporte comme une dérivation par rapport à la multiplication. Nous désignons une algèbre de Poisson par $(\mathcal{P}, [,], \mu)$.

Remarque 2.4.1. *Si l'algèbre associativité est commutative alors l'algèbre de poisson est dit commutative.*

2.4.2 Morphisme d'algèbres de Poisson

Définition 2.4.3. *soit $(\mathcal{P}_1, [,]_1, \mu_1)$, $(\mathcal{P}_2, [,]_2, \mu_2)$ deux algèbre de Poisson, une application $\varphi :\ \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ est un morphisme d'algèbre de Poisson si et seulement si :*

$$\forall x, y \in \mathcal{P}_1 : \begin{cases} 1)\ \varphi\left([x, y]_1\right) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2, \\ 2)\ \varphi(\mu_1(x, y)) = \mu_2(\varphi(x), \varphi(y)). \end{cases}$$

Remarque 2.4.2.

1. *Si la algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est nilpotent alors la algèbre de poisson associe est nilpotent.*

2.4.3 Polarisation des $\mathbb{K}$-algèbres

Définition 2.4.4. *La technique de polarisation, introduite dans [15] , consiste à représenter une K-algèbre à une opération donnée K-algèbre $(\mathrm{A}, *)$, sans symétrie particulière, comme une algèbre à deux opérations, l'une commutative et l'autre anticommutative. Explicitement, dans ce qui suit, nous décomposerons la K-algèbre $(\mathrm{A}, *)$, en utilisant :*

1 $\mu(x, y) = x * y + y * x$ *sa partie symétrique.*

2 $[x, y] = x * y - y * x$ *sa partie antisymétrique.*

Pour $x, y \in \mathrm{A}$ *: Le triplet* $(\mathrm{A}, \mu, [,])$ *sera appelé la polarisation de* $(\mathrm{A}, *)$ *: La technique de polarisation de [15] relie les algèbres faiblement associatives aux algèbres de Poisson non associatives.*

Définition 2.4.5. *[7] Soit* $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ *une application bilinéaire sur* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathcal{P}$*. L'associateur* A *de* $\cdot$ *est la carte trilinéaire sur* $\mathcal{P}$ *donnée par :*

$$\mathrm{A}(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z).$$

Dans tout le mémoire, nous ne supposons pas que les algèbres sont associatives. Une telle algèbre est appelée une algèbre non-associative (alors une algèbre non-associative peut être associative).

Proposition 2.4.1. *[7] Soit* $(\mathcal{P}, \cdot)$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre. Définissons les opérations* $[,]$ *et* μ *à valeur* $\mathcal{P}$ *sur* $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ *par*

$$[x, y] = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x). \tag{2.1}$$

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x). \tag{2.2}$$

Alors $(\mathcal{P}, [,], \mu)$ *est une algèbre de Poisson si et seulement si l'opération* $x \cdot y$ *satisfait à l'identité :*

$$3\mathrm{As}(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z + (y \cdot z) \cdot x - (y \cdot x) \cdot z - (z \cdot x) \cdot y. \tag{2.3}$$

Démonstration 2.4.1. *voir [8]*

Définition 2.4.6. *[7] Nous appelons une $\mathbb{K}$-algèbre non-associative $(\mathcal{P},\cdot)$ dont l'associateur satisfait à l'équation (2.3) une algèbre de Poisson admissible.*

Remarque 2.4.3. *[7] Soit $(\mathcal{P},\cdot)$ et $(\mathcal{P},\star)$ des algèbres de Poisson admissibles définissant la même algèbre de Poisson $(\mathcal{P},[,],\mu)$. Alors*

$$\begin{cases} x\cdot y - y\cdot x = x\star y - y\star x = 2\,[x,y], \\ x\cdot y + y\cdot x = x\star y + y\star x = 2\mu\,(x,y). \end{cases}$$

et $x\cdot y = x\star y$ car la caractéristique de K n'est pas 2.

Proposition 2.4.2. *Chaque algèbre de Poisson $(\mathcal{P},[,],\mu)$ est associée à précisément une algèbre de Poisson admissible $(\mathcal{P},\cdot)$. C'est-à-dire les algèbres de Poisson admissibles et les algèbres de Poisson ordinaires sont homomorphes.*

Démonstration 2.4.2. *D'après la proposition* 2.2.1 *et la remarque précédente, nous avons une correspondance entre les algèbres de Poisson et les algèbres de Poisson admissibles.Il s'agit d'une correspondance individuelle parce que si $(\mathcal{P},[,],\mu)$ et $(\mathcal{P},[,]_1,\mu)$ donner la même algèbre de Poisson admissible alors*

$$\begin{cases} x\cdot y - y\cdot x = 2\,[x,y] = 2[x,y]_1 \quad , \\ x\cdot y + y\cdot x = 2\mu\,(x,y) = 2\mu(x,y)_1 \end{cases}$$

Étant donné une algèbre de Poisson $(\mathcal{P},[,],\mu)$, nous dirons que $(\mathcal{P},\cdot)$ où

$$x\cdot y = [x,y] + \mu\,(x,y).$$

Notation :

Nous appellerons le produit $x\cdot y$ le produit Poisson admissible ou le produit Poisson (ce qui est justifié par la Proposition (2.4.2) et nous désignerons (lorsqu'aucune confusion n'est possible) le produit Poisson par XY au lieu de $x\cdot y$.

Proposition 2.4.3. *Une algèbre de Poisson admissible $(\mathcal{P},\cdot)$ est flexible, c'est-à-dire que l'associateur satisfait à*

$$\mathrm{A}\,(x,y,x) = 0.$$

pour tout $x,y\in\mathcal{P}$.

Chapitre 3

Classification des Algèbre non commutatives de Poisson en dimension 2

3.1 Variétés algébriques des algèbres

Soit A un K-espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de A. Une structure d'algèbre sur A avec un produit μ est déterminer par **les constantes de structure** C_{ij}^k,

$$\text{où} \quad \mu\left(e_i, e_j\right) = \sum_{k=0}^{n} C_{ij}^k e_k.$$

3.1.1 Variétés algébriques des algèbres de Lie

Si on veut que cette structure algébrique soit une structure d'algèbres de Lie , alors l'ensemble des constantes de structure (C_{ij}^k) doit vérifier les conditions suivantes,

1. **antisymétrique**

$$\left[e_i, e_j\right] = -\left[e_j, e_i\right] \quad \Rightarrow \quad \left[e_i, e_j\right] + \left[e_j, e_i\right] = 0 \tag{3.1}$$

avec

$$\begin{cases} \left[e_i, e_j\right] = \sum_{s=1}^{n} C_{ij}^s e_s \\ \left[e_j, e_i\right] = \sum_{s=1}^{n} C_{ji}^s e_s \end{cases}$$

Alors l'équation (2.1) peut s'écrire comme :

$$\sum_{s=1}^{n} C_{ij}^s e_s + \sum_{s=1}^{n} C_{ji}^s e_s = 0$$

Comme $\{e_1,...,e_n\}$ est une base alors les coefficients de $\sum\limits_{s=1}^{n}\left(C_{ij}^s + C_{ji}^s\right)e_s = 0$ sont nuls.
C-à-d :

$$C_{ij}^s + C_{ji}^s = 0$$

2. **Identité de Jacobi**

$$\underbrace{\left[e_i,\left[e_j,e_k\right]\right]}_{I_1}+\underbrace{\left[e_j,\left[e_k,e_i\right]\right]}_{I_2}+\underbrace{\left[e_k,\left[e_i,e_j\right]\right]}_{I_3}=0 \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} I_1 = \left[e_i,\sum_{l=1}^{n}C_{jk}^l e_l\right] &= \sum_{l=1}^{n}C_{jk}^l\left[e_i,e_l\right] \\ &= \sum_{l=1}^{n}C_{jk}^l\sum_{s=1}^{n}C_{il}^s e_s \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}C_{jk}^l C_{il}^s e_s \\ I_2 = \left[e_j,\sum_{l=1}^{n}C_{ki}^l e_l\right] &= \sum_{l=1}^{n}C_{ki}^l\left[e_j,e_l\right] \\ &= \sum_{l=1}^{n}C_{ki}^l\sum_{s=1}^{n}C_{jl}^s e_s \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}C_{ki}^l C_{jl}^s e_s \\ I_3 = \left[e_k,\sum_{l=1}^{n}{}_{ij}^{l} e_l\right] &= \sum_{l=1}^{n}C_{ij}^l\left[e_k,e_l\right] \\ &= \sum_{l=1}^{n}C_{ij}^l\sum_{s=1}^{n}C_{kl}^s e_s \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}C_{ij}^l C_{kl}^s e_s \end{aligned}$$

Alors l'équation (2.2) peut s'écrire comme :

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}C_{jk}^l C_{il}^s e_s + \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}C_{ki}^l C_{jl}^s e_s + \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}C_{ij}^l C_{kl}^s e_s = 0$$

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(C_{jk}^{l}C_{il}^{s}+C_{ki}^{l}C_{jl}^{s}+C_{ij}^{l}C_{kl}^{s}\right)e_s=0$$
$$\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\left(C_{jk}^{l}C_{il}^{s}+C_{ki}^{l}C_{jl}^{s}+C_{ij}^{l}C_{kl}^{s}\right)\right)e_s=0$$

Comme $\{e_1,...,e_n\}$ est une base alors :

$$\sum_{l=1}^{n}\left(C_{jk}^{l}C_{il}^{s}+C_{ki}^{l}C_{jl}^{s}+C_{ij}^{l}C_{kl}^{s}\right)=0$$

Exemple 3.1.1. *[1] Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie et $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ est une base fixée de $\mathcal{L}$. La classification des algèbres de Lie de dim $n\leq 4$ est donnée par :*

1. *Dimension "2" :*
   $\mathcal{L}_2^1:[x_1,x_2]=x_2$
2. *Dimension "3" :*
   $\mathcal{L}_3^1:[x_1,x_2]=x_3$
   $\mathcal{L}_3^2:[x_1,x_2]=x_2,[x_1,x_3]=\alpha x_3,\quad \alpha\neq 0$
   $\mathcal{L}_3^3:[x_1,x_2]=x_2+x_3,[x_1,x_3]=x_3$
3. *Dimension "4" :*
   $\mathcal{L}_4^1:x_2,[x_1,x_3]=\alpha x_3,[x_1,x_4]=(1+\alpha)x_4,[x_2,x_3]=x_4$
   $\mathcal{L}_4^8:[x_1,x_2]=x_3,[x_1,x_3]=x_4$
   $\mathcal{L}_4^9:[x_1,x_2]=2x_2,[x_1,x_3]=-2x_3$

3.1.2 Variétés algébriques des algèbres Associatives

Si on veut que cette structure algébrique soit une structure d'algèbres associative , alors l'ensemble des constantes de structure (D.$_{ij}^{k}$) doit vérifier les conditions suivantes,

$$\mu\left(e_i,\mu\left(e_j,e_k\right)\right)=\mu\left(\left(e_i,e_j\right),e_k\right)\Rightarrow\underbrace{\mu\left(e_i,\mu\left(e_j,e_k\right)\right)}_{A_1}-\underbrace{\mu\left(\left(e_i,e_j\right),e_k\right)}_{A_2}=0 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}A_1=\mu\left(e_i,\sum_{l=1}^{n}D_{jk}^{l}e_l\right)&=\sum_{l=1}^{n}D_{jk}^{l}\mu\left(e_i,e_l\right)\\&=\sum_{l=1}^{n}D_{jk}^{l}\sum_{s=1}^{n}D_{il}^{s}e_s\\&=\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}D_{jk}^{l}D_{il}^{s}e_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = \mu\left(\sum_{l=1}^{n} D_{ij}^{l} e_l, e_k\right) &= \mu\left(\sum_{l=1}^{n} D_{ij}^{l} e_l, e_k\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} D_{ij}^{l} \mu(e_l, e_k) \\ &= \sum_{l=1}^{n} D_{ij}^{l} \sum_{s=1}^{n} D_{lk}^{s} e_s \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} D_{ij}^{l} D_{lk}^{s} e_s \end{aligned}$$

Alors l'équation (3.3) peut s'écrire comme :

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} D_{jk}^{l} D_{il}^{s} e_s - \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} D_{ij}^{l} D_{lk}^{s} e_s = 0$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(D_{jk}^{l} D_{il}^{s} - D_{ij}^{l} D_{lk}^{s}\right) e_s = 0$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(D_{jk}^{l} D_{il}^{s} - D_{ij}^{l} D_{lk}^{s}\right)\right) e_s = 0$$

Comme $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base alors :

$$\sum_{l=1}^{n} \left(D_{jk}^{l} D_{il}^{s} - D_{ij}^{l} D_{lk}^{s}\right) = 0$$

Exemple 3.1.2. *[14] Tout algèbre associative de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \mu_1 \{e_1, e_1\} = e_1 \\ \mu_1 \{e_1, e_2\} = e_2 \\ \mu_1 \{e_2, e_1\} = e_2 \\ \mu_1 \{e_2, e_1\} = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} \mu_2 \{e_1, e_1\} = e_1 \\ \mu_2 \{e_1, e_2\} = e_2 \\ \mu_2 \{e_2, e_1\} = e_2 \\ \mu_2 \{e_2, e_1\} = e_2 \end{cases}$$

Exemple 3.1.3. *[14] Toute algèbre associative de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

$$
(\mathrm{I}_1)\begin{cases}\mu_1(e_1,e_1)=e_1\\ \mu_1(e_1,e_2)=e_2\\ \mu_1(e_2,e_1)=e_2\\ \mu_1(e_2,e_2)=e_2\\ \mu_1(e_1,e_3)=e_3\\ \mu_1(e_3,e_1)=e_3\\ \mu_1(e_2,e_3)=e_3\\ \mu_1(e_3,e_2)=e_3\\ \mu_1(e_3,e_3)=e_3\end{cases}
\quad
(\mathrm{I}_2)\begin{cases}\mu_2(e_1,e_1)=e_1\\ \mu_2(e_1,e_2)=e_2\\ \mu_2(e_2,e_1)=e_2\\ \mu_2(e_2,e_2)=e_2\\ \mu_2(e_1,e_3)=e_3\\ \mu_2(e_3,e_1)=e_3\\ \mu_2(e_2,e_3)=e_3\\ \mu_2(e_3,e_2)=e_3\\ \mu_2(e_3,e_3)=0\end{cases}
\quad
(\mathrm{I}_3)\begin{cases}\mu_3(e_1,e_1)=e_1\\ \mu_3(e_1,e_2)=e_2\\ \mu_3(e_2,e_1)=e_2\\ \mu_3(e_2,e_2)=e_2\\ \mu_3(e_1,e_3)=e_3\\ \mu_3(e_3,e_1)=e_3\\ \mu_3(e_2,e_3)=0\\ \mu_3(e_3,e_2)=0\\ \mu_3(e_3,e_3)=0\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{I}_4)\begin{cases}\mu_4(e_1,e_1)=e_1\\ \mu_4(e_1,e_2)=e_2\\ \mu_4(e_2,e_1)=e_2\\ \mu_4(e_2,e_2)=0\\ \mu_4(e_1,e_3)=e_3\\ \mu_4(e_3,e_1)=e_3\\ \mu_4(e_2,e_3)=0\\ \mu_4(e_3,e_2)=0\\ \mu_4(e_3,e_3)=0\end{cases}
\quad
(\mathrm{I}_5)\begin{cases}\mu_5(e_1,e_1)=e_1\\ \mu_5(e_1,e_2)=e_2\\ \mu_5(e_2,e_1)=e_2\\ \mu_5(e_2,e_2)=e_2\\ \mu_5(e_1,e_3)=e_3\\ \mu_5(e_3,e_1)=e_3\\ \mu_5(e_2,e_3)=e_3\\ \mu_5(e_3,e_2)=0\\ \mu_5(e_3,e_3)=0\end{cases}
$$

3.1.3 Variétés algébriques des algèbres de Poisson

Pour le crochet de Lie et l'associativité les equations sont données .
La règle de Leibniz :

$$
\begin{aligned}
&\left[\mu\left(e_i,e_j\right),e_k\right]=\mu\left(e_i,\left[e_j,e_k\right]\right)+\mu\left(e_j,[e_i,e_k]\right)\\
\Rightarrow\ &\underbrace{\left[\mu\left(e_i,e_j\right),e_k\right]}_{L_1}-\underbrace{\mu\left(e_i,\left[e_j,e_k\right]\right)}_{L_2}-\underbrace{\mu\left(e_j,[e_i,e_k]\right)}_{L_3}=0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
L_1=\left[\sum_{l=1}^{n}D_{ij}^{l}e_l,e_k\right]&=\sum_{l=1}^{n}D_{ij}^{l}\,[e_l,e_k]\\
&=\sum_{l=1}^{n}D_{ij}^{l}\sum_{s=1}^{n}C_{lk}^{s}e_s\\
&=\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}D_{ij}^{l}C_{lk}^{s}e_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2 = \mu\left(e_i, \sum_{l=1}^{n} C_{jk}^{l} e_l\right) &= \sum_{l=1}^{n} C_{jk}^{l} \mu(e_i, e_l) \\
&= \sum_{l=1}^{n} C_{jk}^{l} \sum_{s=1}^{n} D_{il}^{s} e_s \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{jk}^{l} D_{il}^{s} e_s \\
L_3 = \mu\left(e_j, \sum_{l=1}^{n} C_{ik}^{l} e_l\right) &= \sum_{l=1}^{n} C_{ik}^{l} \mu\left(e_j, e_l\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} C_{ik}^{l} \sum_{s=1}^{n} D_{jl}^{s} e_s \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{ik}^{l} D_{jl}^{s} e_s
\end{aligned}
$$

Alors l'équation (2.4) peut s'écrire comme :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} D_{ij}^{l} C_{lk}^{s} e_s - \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{jk}^{l} D_{il}^{s} e_s - \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{ik}^{l} D_{jl}^{s} e_s = 0 \\
&\sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \left(D_{ij}^{l} C_{lk}^{s} - C_{jk}^{l} D_{il}^{s} - C_{ik}^{l} D_{jl}^{s}\right) e_s = 0 \\
&\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(D_{ij}^{l} C_{lk}^{s} - C_{jk}^{l} D_{il}^{s} - C_{ik}^{l} D_{jl}^{s}\right)\right) e_s = 0
\end{aligned}
$$

Comme $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base alors :

$$
\sum_{l=1}^{n} \left(D_{ij}^{l} C_{lk}^{s} - C_{jk}^{l} D_{il}^{s} - C_{ik}^{l} D_{jl}^{s}\right) = 0
$$

3.1.4 Classification des Algèbres de Poisson non commutatives en dimension 2

Soit $\{e_1, e_2\}$ une base de l'espace vectoriel sous-jasent.

3.2 Déroulement du programme

Rentrer la dimension et déclarer les constantes de structure du crochet de Lie et de la multiplication.

3.2.1 Cas non Commutativité

$n = 2$

$$\begin{aligned} \mathrm{CC} &= \mathrm{Flatten}[\mathrm{Table}[c[i,j,k],[i,1,n],[j,1,n],[k,1,n]]]; \\ \mathrm{DD} &= \mathrm{Flatten}[\mathrm{Table}[d[i,j,k],[i,1,n],[j,1,n],[k,1,n]]]; \end{aligned}$$

- **Antisymétrie**

$$\begin{aligned} \mathrm{AntiC[i\_,j\_,k\_]} &:= (c[i,j,k]+c[j,i,k]); \\ \mathrm{AntiCSyst} &= \mathrm{Union}[\mathrm{Flatten}[\mathrm{Table}[\mathrm{Simplify}[\mathrm{AntiC}[i,j,k]],\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\}]]]; \\ \mathrm{Length}[\mathrm{AntiCSyst}] & \end{aligned}$$

- **Identité de Jacobi**

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac[i\_,j\_,k\_,t\_]} &:= \sum_{s=1}^{n}(c[j,k,s]c[i,s,t]+c[k,i,s]c[j,s,t]+c[i,j,s]c[k,s,t]); \\ \mathrm{JacSyst} &= \mathrm{Union}[\mathrm{Flatten}[\mathrm{Table}[\mathrm{Simplify}[\mathrm{Jac}[i,j,k,t]],\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\},\{t,n\}]]]; \end{aligned}$$

- **Associativité**

$$\begin{aligned} \mathrm{Ass[i\_,j\_,k\_,t\_]} &:= \sum_{s=1}^{n}(d[i,k,s]d[i,s,t]-d[i,j,s]d[s,k,t]); \\ \mathrm{AssSyst} &= \mathrm{Union}[\mathrm{Flatten}[\mathrm{Table}[\mathrm{Simplify}[\mathrm{Ass}[i,j,k,t]],\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\},\{t,n\}]]]; \end{aligned}$$

- **Compatibilité**

$$\begin{aligned} \mathrm{Comp[i\_,j\_,k\_,t\_]} &:= \sum_{q=1}^{n}(d[i,j,q]c[q,k,t]-c[i,k,q]d[q,j,t]-c[j,k,q]d[i,q,t]); \\ \mathrm{CompSyst} &= \mathrm{Union}[\mathrm{Flatten}[\mathrm{Table}[\mathrm{Simplify}[\mathrm{Comp}[i,j,k,t]],\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\},\{t,n\}]]]; \end{aligned}$$

Résolution

ZeroCD=Flatten[Table[0,i,1,n,j,1,n,k,1,n]] ;
(* fonction pour choisir les solutions acceptables *)
SolAcp[sol_] :=Module[q,st=}},
Forq=1,q ≤ Length[sol],q+ ++,
If [((CC//.ToRules[sol[[q]]]) ===ZeroCD|(DD//.ToRules[sol[[q]]]) ===ZeroCD),st=Union[st,q}] ;] ;

;st=Table[st[[i]],i,Length[st]] ; st=Delete[sol,st]
;

Sol=Union[Sol] ;
Length[Sol] ;

Filtration

TousRuls=Reduce[Sol==0,Variables[Sol]]//LogicalExpand ;
TousRuls=(SolAcp[TousRuls])//ToRules} ;(*zidt pour filtrer les solutions zeros*)
Print[Style["Le nombre total de solutions du système global apré filtration est : ",15,Red,Bold,Background → Green],Length[TousRuls]] ;
Le nombre total de solutions du système global apré filtration est : 2)

For[q=1,q≤ Length[TousRuls],q++,Print["*************** Algèbre (",q,") ************* "] ;
For $[i = 1, i \leq n, i{+}{+},$
For $[j = 1, j \leq n, j++$,Print[e,i,"*",e,j, " =", $Sum[(c[i,j,k]$ //.TousRuls[[q]] $e[k], k, 1, n]$,"/",'{",e,i,",",e, j,"}"," =", $Sum[(d[i,j,k]//.TousRuls[[q]])e[k],k,1,n]]]]]$

********************************** Algèbre (1) **********************************
$\mathrm{e1} * \mathrm{e1} = \mathrm{e}[1]c[1,1,1]/\{\mathrm{e1},\mathrm{e1}\} = 0$
$\mathrm{e1} * \mathrm{e2} = \mathrm{e}[2]c[1,1,1]/\{\mathrm{e1},\mathrm{e2}\} = \mathrm{e}[1]d[1,2,1] - \mathrm{e}[2]d[1,2,1]$
$\mathrm{e2} * \mathrm{e1} = \mathrm{e}[1]c[1,1,1]/\{\mathrm{e2},\mathrm{e1}\} = -\mathrm{e}[1]d[1,2,1] + \mathrm{e}[2]d[1,2,1]$
$\mathrm{e2} * \mathrm{e2} = \mathrm{e}[2]c[1,1,1]/\{\mathrm{e2},\mathrm{e2}\} = 0$
********************************** Algèbre (2) **********************************
$\mathrm{e1} * \mathrm{e1} = \mathrm{e}[1]c[1,1,1]/\{\mathrm{e1},\mathrm{e1}\} = 0$
$\mathrm{e1} * \mathrm{e2} = \mathrm{e}[1]c[1,1,1]/\{\mathrm{e1},\mathrm{e2}\} = \mathrm{e}[1]d[1,2,1] - \mathrm{e}[2]d[1,2,1]$
$\mathrm{e2} * \mathrm{e1} = \mathrm{e}[2]c[1,1,1]/\{\mathrm{e2},\mathrm{e1}\} = -\mathrm{e}[1]d[1,2,1] + \mathrm{e}[2]d[1,2,1]$
$\mathrm{e2} * \mathrm{e2} = \mathrm{e}[2]c[1,1,1]/\{\mathrm{e2},\mathrm{e2}\} = 0$

Donc les algèbres de Poisson non commutative en dimension 2 sont :

- **Algèbre 1**

$$\begin{aligned}
\mu_1(e_1,e_1) &= \mu_1(e_2,e_1) = \alpha e_1 \\
\mu_1(e_1,e_2) &= \mu_1(e_2,e_2) = \alpha e_2 \\
[e_1,e_1] &= [e_2,e_2] = 0 \\
[e_1,e_2] &= -[e_2,e_1] \\
&= -\beta(e_1 - e_2)
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha = C_{11}^1 \qquad \beta = D_{12}^1$$

- **Algèbre 2**

$$\begin{aligned}
\mu_2(e_1,e_1) &= \mu_2(e_1,e_2) = \alpha e_1 \\
\mu_2(e_2,e_1) &= \mu_2(e_2,e_2) = \alpha e_2 \\
[e_1,e_1] &= (e_2,e_2) = 0 \\
[e_1,e_2] &= -[e_2,e_1] \\
&= -\beta(e_1 - e_2)
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha = D_{11}^1 \qquad \beta = C_{12}^1$$

3.2.2 Cas Commutativité

Classification des algèbres de Poisson on dim 2 commutative
$n = 2$;

$$\begin{aligned}
\mathrm{CC} &= \mathrm{Flatten[Table}[c[i,j,k],[i,1,n],[j,1,n],[k,1,n]]]; \\
\mathrm{DD} &= \mathrm{Flatten[Table}[d[i,j,k],[i,1,n],[j,1,n],[k,1,n]]];
\end{aligned}$$

- **Antisymétrie**

$$\begin{aligned}
\mathrm{AntiC[i_,j_,k_]:} &= (d[i,j,k] + d[j,i,k]); \\
\mathrm{AntiCSyst} &= \mathrm{Union[Flatten[Table[Simplify[AntiC}[i,j,k]],\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\}]]]
\end{aligned}$$

- **Identité de Jacobi**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Jac[i_,j_,k_,t_]:} &= \sum_{s=1}^{n}(d[j,k,s]d[i,s,t] + d[k,i,s]d[j,s,t] + d[i,j,s]d[k,s,t]); \\
\mathrm{JacSyst} &= \mathrm{Union[Flatten[Table[Simplify[Jac}[i,j,k,t]],\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\},\{t,n\}]]]
\end{aligned}$$

- **Comutativité ass**

$$\begin{aligned}\text{Comas[i\_,j\_,k\_]}: &= (c[i,j,k]-c[j,i,k]);\\ \text{CommasSyst} &= \text{Union[Flatten[Table[Simplify[Comas}[i,j,k]],\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\}]]]\end{aligned}$$

- **Associativité**

$$\begin{aligned}\text{Ass[i\_,j\_,k\_,t\_]}: &= \sum_{s=1}^{n}(c[i,k,s]c[i,s,t]-c[i,j,s]c[s,k,t]);\\ \text{AssSyst} &= \text{Union[Flatten[Table[Simplify[Ass}[i,j,k,t]],\{i,n\},\{j,n\}\},\{k,n\},\{t,n\}]]]\end{aligned}$$

- **Compatibilité**

$$\begin{aligned}\text{Com[i\_,j\_,k\_,t\_]}: &= \sum_{q=1}^{n}(c[i,j,q]d[q,k,t]-d[i,k,q]c[q,j,t]-d[j,k,q]c[i,q,t]);\\ \text{ComSyst} &= \text{Union[Flatten[Table[Simplify[Com}[i,j,k,t]],\{i,n\},\{j,n\},\{k,n\},\{t,n\}]]]\end{aligned}$$

Résolution

ZeroCD=Flatten[Table[0,i,1,n,j,1,n,k,1,n]] ;

SolAcp[sol_] :=Module[q,st=}},
For[q=1,q ≤ Length[sol],q++,
If [((AA//.ToRules[sol[[q]]])===ZeroAB |(BB//.ToRules[sol[[q]]])===ZeroAB |(CC//.ToRules[sol[[q]]])
===ZeroCD |
(DD//.ToRules[sol[[q]]]) ===ZeroCD),st=Union[st,q] ;] ;
] ;st=Table[st[[i]]},i,Length[st]] ;st=Delete[sol,st]
] ;

Sol=Union[Sol] ;

Filtration

TousRuls = Reduce[Sol== 0,Variables [Sol]] // LogicalExpand ;

Print [Style["Le nombre total de solutions du système global apré filtration est : ",15,Red,Bold,Background → Green],Length[TousRuls]] ;
Le nombre total de solutions du système global apré filtration est : 0

Remarque 3.2.1. *on a pas des algèbres de poisson commutative en dimension 2.*

Conclusion

Ce mémoire, conçu en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématique

présente quelque propriétés des algèbres de poisson

Nous avons donner dans ce travail la classification des algèbres de poisson

et on va trouver deux algèbre dans le cas non commutative et zero algèbre dans le cas commutative.

Bibliographie

[1] H .Adimi , Sur les indices des algèbres de Lie et algèbres associatives , universite Ferhat Abbas de Setif, (2004-2005) (64).

[2] H. Adimi , Les indices des algèbres de Lie et algèbres Hom-Lie ,universite Ferhat Abbas de Setif 1 (2016) 92.

[3] H.Amri , Deformation et quantification des algèbres n-aires ,universite Badji Mokhtar Annaba,2016 ,115.

[4] A. D. Ahmed Zahari , Étude et Classification des algèbres Hom-associatives , Université des Comores LMIS de UDC, Université de Haute Alsace LMIA de UHA (2017) 144

[5] S.Balac , F.Sturn, Algèbre et analyse,presses Polytechniques et universitaires romandes (559)

[6] J. P. DAX , Algèbre, Université Paul Verlaine de Metz,(2007) 87.

[7] K.R goodearl and s. launoi ,Poisson catenarity in Poisson nilpotent algebras ,[math.AC]28 May 2021

[8] M. Goze, E. Remm ,Poisson algebras in terms of non-associative algebras ,Journal of Algebra 320 (2008) 294–317.

[9] L. J. Louis, une version non Commutative Des Algèbres De Lie : Les Algèbres De Leibniz ,L'enseignement Mathèmatique t.39(1993),p.269-293.

[10] M.kray ,Algèbre de lie applications aux paraticules èlèmentaires ,Universite louis pasteur se strasbourg,Juillet 2008.

[11] S. Siciliano .H. Usef Solvability of Poisson algebras, a Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi", Università del Salento, Via Provinciale Lecce–Arnesano, 73100–Lecce, Italy b Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL, A1C 5S7, Canada,Journal of Algebra 568(2021)349-361

[12] D. Yau ,Non-Commutative Hom-Poisson Algèbres [math.RA] 17 octobre 2010

[13] A.G. Zafindratafa, J. M. Morvan, Espace vectoriels Matrices, 31100.Toulose-France ,

[14] Z.Chebel ,sur les bialagères faibles et les algèbres de hopf faibles,universite des frères mentouri constantine 1,21 octobre 2018,86.

[15] E.Remm , weakly associative algebras,Poisson albebras and deformation quantization, Taylor-francis,10 may 2021,(24).

résumé

Le but de notre mémoire est de classifier les algèbre de poisson dans le cas commutative et non commutative ,pour définir une algèbre de Poisson on a besoin de définir l'algèbre de lie et l'algèbre associative . On donne aussi les variété algébrique pour chaque algèbre. Nous classifions les algèbres de Poisson en dimension deux dans le cas commutative et non commutative.

abstract

The aim of our paper is to classify the Poisson algebra in the commutative and non commutative case, to define a Poisson algebra we need to define the Lie algebra and the associative algebra. We also give the algebraic variety for each algebra.

ملخص

الهدف من عملنا هو تصنيف جبر بواسون في الحالة التبادلية وغير تبادلية ، لتحديد جبر بواسون نحتاج الى تعريف جبر لي و الجبر التجميعي. نعطي ايضا المتنوعات الجبرية لكل جبر.