Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présentée par :

BENZAAZA CHAHIRA
BENZAAZA SYLIA

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Systémes Dynamiques**

Thème

Résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires

---

Soutenu publiquement le ... juillet 2021 devant le jury composé de

BERRAH ABDELMALEK	Président
BELMECHRI FAIROUZ	Encadrant
DEKKAR KHADRA	Examinateur

Promotion **2020/2021**

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH**, qui nous donnés le courage, la volonté et la confiance pour accomplir ce modeste travail.

Nous remercions Mme **BELMECHRI FAIROUZ** pour avoir accepté de nos encadrer dans cette étude, et nous la remercions pour son implication, son soutien, et ses encouragements tout long de ce travail.

Nous exprimons nos vifs remerciements aux membres de jury :
- **Mr BERRAH Abdelmalek**.
- **Mme DEKKAR Khadra**.

Et sans oublier de remercier tous les enseignants du département de mathématique spécialement **(Dr-Benterki, Dr-Belkacem, Dr-Berkani...)**, et la promotion de mathématique **Système dynamique** 2020/2021.

<u>Dédicace</u>

Je dédie ce modeste travail spécialement :

A

La personne qui dans chaque détail de ma journée, ma force et ma soutien mon cher père **El-hachemi**.

A

La personne le plus signifiante dans ma vie, a l'espoir qui m'entoure a tout instant à chère mère **Marzaka**.

A

mes sœurs **Bouchra**, **Chaima** et mon frère **Hichem** je leur souhaite toutes les réussites, le succès et le bonheur.

A

toute la famille **Benzaaza** et **Halilou** sans exception.

A

toutes mes amies en particulière **Hadjer**, **Hamida**, **Sylia**, **Zahra**, **Nor el-imane**...

et

mes amis **Salmen**, **Bachir**, **Amine**

qui sont m'accompagne tout au long de ma carrière universitaire.

je leur souhaite le bonheur et le réussite.

⋆ ***BENZAAZA CHAHIRA*** ⋆

<u>Dédicace</u>

Je dédie ce modeste travail spécialement :

A

La personne qui dans chaque détail de ma journée, ma force et ma soutien mon cher père **Abd arahmane**.

A

La personne le plus signifiante dans ma vie, a l'espoir qui m'entoure a tout instant à chère mère **Fatma**.

A

mes sœurs **Anissa**, **Kenza**, **Fairouz** et mes frères **Mohamed**, **Brahim** je leur souhaite toutes les réussites, le succès et le bonheur.

A

toute la famille **Aili** et **Benzaaza** spécialement je le dédie a mon mari **Hichem** et sa famille sans exception.

A

toutes mes amies en particulière **Hadjer**, **Chahira**, **Zahra**, **Nor el-imane**...
qui sont m'accompagne tout au long de ma carrière universitaire.
je leur souhaite le bonheur et le réussite.

⋆ ***BENZAAZA SYLIA*** ⋆

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, thermo dynamique, électromagnétisme, etc), ces lois sont généralement écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des équations différentielles ordinaires ou par des équations aux dérivées partielles.

L'étude des EDP est un sujet de recherche très actif en mathématiques et elles sont a l'origine de la création de beaucoup de concepts mathématiques comme par example la transformée de Fourier et la théorie des distributions. Dans la plupart des cas il est très difficile de proposer ou bien de découvrir les solutions d'une équations aux dérivées partielles. Dans certains cas on arrive a montrer que le problème est bien posé (c'est a dire qu'il admet une solution unique et stable par rapport aux données du problème) et on peut parfois calculer des approximations numérique des solutions.

Les équations d'évolution non linéaire (EENL) sont des équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaire du premier ou du second ordre par rapport au temps. L'étude analytique de ces EENL est pertinente car la connaissance de leurs solutions exactes facilite la vérification des solveurs numériques et aide à l'analyse de stabilité des solutions. L'étude des solutions d'ondes progressives pour ces équations joue un rôle important dans l'étude d'une grande variété des phénomènes physiques non linéaires, où le phénomène des ondes non linéaires apparait dans divers domaines scientifiques et techniques, comme la mécanique des fluides, la physique des plasmas, la géochimie et la biologie. Il s'agit notamment des phénomènes de dispersion des ondes non linéaires, de dissipation, de diffusion, de réflexion, de diffraction et de réfraction.

Dans la littérature, les chercheurs utilisent habituellement des méthodes distinctes pour analyser les EENL. Les méthodes vont du raisonnable au difficile et exigent un travail énorme. Il n'existe pas une méthode unifiée qui peut être utilisée pour tous les types d'équations d'évolutions non linéaires.

Avec le développement rapide de la science non linéaire, les scientifiques et les chercheurs sont intéressés aux techniques analytiques asymptotiques pour les problèmes non linéaires. Il est encore difficile de résoudre des problèmes non linéaires numériquement ou analytiquement. Cela est probablement du au fait que les différentes méthodes de simulation numérique s'appliquent aux technique d'itérations pour trouver leurs solutions numériques aux problèmes non linéaires, et que globalement toutes les méthodes itératives sont sensibles aux solutions initiales. Il semble donc difficile d'obtenir des résultats cohérents en cas de forte non-linéarité.

Lorsque la variable dépendante u dans l'EDP correspond à une grandeur physique (comme la hauteur de surface d'une onde d'eau, l'amplitude d'une onde électromagnétique, etc.), il est important d'étudier les propriétés de propagation ou d'agrégation de u. Cela motive l'étude des méthodes permettant de résoudre analytiquement des équations d'évolution par des méthodes symboliques. L'objectif est de trouver des solutions exactes d'ondes progressives. Si ces solutions ne changent pas de forme pendant la propagation, elles sont appelées les ondes solitaires. Ces dernières qui conservent leur forme en cas de collision sont appelées solitons. Les ondes solitaires et les solitons apparaissent en raison d'un équilibre critique entre dispersion et non-linéarité.

Ce travail est organisé en trois chapitres principaux. Dans le premier chapitre on a rappelé les notions de base et apporté des définitions concernant les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles. Le deuxième chapitre on a commencé par une introduction et définition sur les ondes progressives et leur types de solutions et on conclu ce chapitre par une description de la méthode d'expansion $\frac{G'}{G}$.

Finalement dans le troisièmement chapitre on a résolu analytiquement l'équation de Boussinseq par cette méthode.

CHAPITRE

1

NOTIONS ET PRÉLIMINAIRES

1.1 Équations différentielles ordinaires

Definition 1.1 *C'est une équation définie en termes d'une variable $x \in I$, (I intervalle real), et une fonction inconnue $y : I \mapsto \mathbb{R}$ et ses dérivées par rapport à x, en formule*

$$F(x, y(x), y^{'}(x), y^{''}(x), ...) = 0.$$

• *Une équation différentielle ordinaire est d'ordre k si elle contient les dérivées de y jusqu'à l'ordre k.*

Équations différentielles du premier ordre

Definition 1.2 *Une équation différentielle du premier ordre est une expression qui décrit une relation entre une fonction à une variable et sa dérivée première.*

$$F(x, y, y^{'}) = 0.$$

lorsque cette équation est résoluble en $y^{'}$, on peut mettre sous la forme :

$$y^{'} = f(x, y).$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est appelé solution générale.

Remarque 1.1 *Si on ajoute à une équation une condition initiale $y(x_0) = y_0$ on dit que le système*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

admet une solution particulière.

1.1.1 Types d'équations différentielles du premier ordre

Équations différentielles à variables séparables

Definition 1.3 *Une équation différentielle du premier ordre est à variables séparables si elle peut se mettre sous la forme :*

$$g(y)\, y' = f(x),$$

où f et g sont des fonctions continues.
Dans la pratique, on écrit $g(y)\, y' = f(x)$ de la façon suivante

$$g(y)\, \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$g(y)\, dy = f\,(x)\ dx.$$

on intègre les deux cotés, ce qui donne

$$\int g\,(y)\, dy = \int f\,(x)\, dx \Leftrightarrow G\,(y) = F\,(x) + K,$$

où G une primitive de g, F une primitive de f et K une constante arbitraire.

Example 1.1 *Soit l'équation*

$$y' = \frac{2xy}{(1 + x^2)}.$$

On se ramène à

$$\frac{1}{y}\, dy = \frac{2x}{1 + x^2}\, dx, \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx,$$

on intègre, on obtient

$$\ln\,(y) = \ln\left(1 + x^2\right) + C \Leftrightarrow y = k\left(1 + x^2\right).$$

Équations différentielles homogènes

Proposition 1.1 *On appelle équation différentielle du premier ordre homogène toute équation de la forme :*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0. \tag{1.1}$$

où f est définie, continue sur $I \in \mathbb{R}$.
Pour intégrer cette équation on fait le changement d'inconnue suivant $y = ux$, soit encore $u = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0$ et donc

$$y'\,(x) = u\,(x) + xu'\,(x)\,,$$

on remplace dans (1.1), on trouve

$$xu^{'}(x) = f(u) - u(x),$$

c'est une équation à variable séparable qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{u^{'}}{f(u) - u} = \frac{1}{x}.$$

Example 1.2 *Soit l'équation*

$$x^2 y^{'} = xy - y^2.$$

On a

$$x^2 y^{'} = xy - y^2 \Leftrightarrow y^{'} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

on pose : $u = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$
et donc

$$y^{'}(x) = u(x) + xu^{'}(x),$$

on remplace dans (1.1), on trouve

$$xu^{'}(x) = -u^2(x).$$

C'est une équation à variables séparables qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{u^{'}}{-u^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{-u^2} = \frac{dx}{x},$$

on intègre

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{-u^2} = \int \frac{dx}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \ln|x| + c \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x}{\ln|x| + c}. \end{aligned}$$

Équations différentielles linaires

Definition 1.4 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *toute équation différentielle de la forme :*

$$y^{'} + a(x)\,y = c(x), \tag{1.2}$$

où a *et* c *sont des fonctions continues.*
L'équation homogène associe à (1.2) est

$$y^{'} + a(x)\,y = 0. \tag{1.3}$$

1. **Méthode de résolution d'équation homogène**

$$\begin{aligned} y^{'} + a(x)\,y = 0 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)\,y \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -a(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = -A(x) + c. \end{aligned}$$

Avec A une primitive de a, donc les solutions générales de l'équation différentielle (1.3) sont les fonctions

$$y(x) = k\ \exp(-A(x)).$$

Où k est une constante réelle.

2. **Résolution de l'équation avec second membre**

- **Méthode de résolution**

Pour résoudre une équation différentielle linéaire

$$y^{'} + a(x)\, y = c(x).$$

On suit les étapes suivantes

1. Résoudre l'équation homogène associe (calcul de primitive) : $y^{'} + a(x)\, y = 0$.
2. Trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.
3. Ajouter la solution particulière à la solution générale

$$y = y_0 + k\ \exp(-A(x)).$$

La valeur de k sera déterminée par une condition initiale. Dans le cas où la solution particulière n'est pas claire, on utilise la méthode suivante :

- **Méthode de la variation de la constante**

Pour déterminer la valeur de k par la méthode de la variation de la constante, on montre si y est solution de l'équation homogène et ne s'annule pas sur I, on peut chercher une solution particulière de la forme :

$$y = k(x)\ \exp(-A(x)).$$

Comme k est dérivable, on a :

$$y^{'} = k^{'}(x)\ \exp(-A(x)) -\ k(x)\, a(x)\ \exp(-A(x)),$$

en reportant dans l'équation (1.2), on obtient

$$k^{'}\ \exp(-A(x)) = c(x),$$

alors par l'intégration

$$k(x) = \int c(x)\ \exp(A(x))dx,$$

la solution particulière est donc,

$$y(x) = k(x)\ \exp(-A(x)) =\ \exp(-A(x)) \int c(x)\ \exp(A(x)).$$

Example 1.3 *Soit l'équation différentielle*

$$y^{'} + y = \exp(x). \tag{1.4}$$

L'équation homogène est

$$y^{'} + y = 0,$$

donc,

$$y = k\exp(-x).$$

Recherchant la solution particulière par la méthode de variation de la constante

$$y^{'} = k^{'}\exp(-x) - \ k\ \exp(-x),$$

en substituant cette expression dans l'équation (1.4) *on obtient*

$$k^{'}(x) = \exp(2x),$$

par intégration

$$k(x) = \frac{\exp(2x)}{2} + c,$$

donc la solution générale est

$$y(x) = c\exp(-x) + \frac{\exp(x)}{2}.$$

Équations différentielles ordinaires du deuxième ordre à coefficients constantes

Definition 1.5 *Une équation différentielle d'ordre* 2 *est de la forme :*

$$F(x, y, y^{'}, y^{''}) = 0.$$

Definition 1.6 *On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants toute équation du type*

$$y^{''} + a\,y^{'} + b\,y = c(x), \tag{1.5}$$

où a, b *sont des réels et* $c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, et* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*.*

Definition 1.7 *L'équation*

$$y^{''} + a\,y^{'} + b\,y = 0,$$

est appelée une équation homogène (sans second membre).

1.1.2 Méthode de résolution d'équation homogène

- **Polynôme caractéristique associé**

On considère l'équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constante où $a, b \in \mathbb{R}$

$$y^{''} + a\,y^{'} + b\,y = 0.$$

On pose $y = \exp(r\,x)$

$$r^2 \exp(rx) + a\,r\ \exp(rx) + b\ \exp(rx) = 0,$$

$$\exp(rx)\left(r^2 + ar + b\right) = 0 \Leftrightarrow \left(r^2 + ar + b\right) = 0.$$

Definition 1.8 *On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle*

$$y^{''} + a\,y^{'} + b\,y = 0$$

le polynôme

$$r^2 + a\,r + b = 0.$$

$1^{ère}$ **cas : racines réelles** *c'est-à-dire* $\Delta > 0$ *:* $y_1(x) = \exp(r_1 x)$ *et* $y_2(x) = \exp(r_2 x)$ *sont des solutions de l'équation, alors la solution générale est*

$$y(x) = c_1 \exp(r_1 x) + c_2 \exp(r_2 x).$$

Où c_1 *et* $c_2 \in \mathbb{R}$.

2^{eme} **cas :racines réelles doubles** *c'est-à-dire* $\Delta = 0$ *:* $y(x) = \exp(rx)$, *alors la solution générale est*

$$y(x) = c_1\ \exp(rx) + c_2\,x\exp(rx).$$

3^{eme} **cas :racines complexes** *c'est-à-dire* $\Delta < 0$ *:* $r_1 = \alpha + i\,\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\,\beta$, *alors la solution générale est*

$$y(x) = \exp(\alpha x)\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right).$$

1.1.3 Méthode de résolution d'équation différentielle non homogène

La relation de l'équation (1.5) réside donc dans :

1. La recherche de la solution générale de l'équation homogène $y^{''} + ay^{'} + by = 0$.
2. la recherche d'une solution particulière de $y^{''} + ay^{'} + by = c(x)$, pour cela on utilise la méthode de variation de la constante

$$y(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x),$$

une solution d'équation différentielle homogène, on pose

$$y(x) = c_1(x)\,y_1 + c_2(x)\,y_2,$$

avec c_1 et c_2 deux fonctions dérivables vérifiant la condition de Cauchy

$$c_1^{'}\, y + c_2^{'}\, y = 0,$$

puis en calcule $y^{'}$ et $y^{''}$ et on remplace dans (1.5), on trouve

$$c_1^{'}(x)\, y_1^{'}(x) + c_2^{'}(x)\, y_2^{'}(x) = c(x),$$

ensuite on résoudre le système

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)\, y_1^{'}(x) + c_2^{'}(x)\, y_2^{'}(x) = c(x), \\ c_1^{'}(x)\, y(x) + c_2^{'}(x)\, y(x) = 0. \end{cases}$$

Example 1.4 *Soit l'équation différentielle*

$$y^{''} + y = \tan x.$$

L'équation homogène associée est

$$y^{''} + y = 0,$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0,$$

la solution de l'équation homogène est

$$y(x) = c_1\, \cos x + c_2\, \sin x,$$

on utilise la méthode de variation de la constante, on pose

$$y(x) = c_1(x)\, \cos x + c_2(x)\, \sin x,$$

et on résoudre le système

$$\begin{cases} -c_1^{'}(x)\, \sin x + c_2^{'}(x)\, \cos x = \tan x, \\ c_1^{'}(x)\, \cos x + c_2^{'}(x)\, \sin x = 0, \end{cases}$$

On a

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0,$$

On utilise la méthode de Cramer donc le système admet une solution

$$c_1^{'}(x) = \begin{vmatrix} \tan x & \cos x \\ 0 & \sin x \end{vmatrix}$$

$$c_2^{'}(x) = \begin{vmatrix} -\sin x & \tan x \\ \cos x & 0 \end{vmatrix}$$

donc

$$c_1^{'} = \tan x \, \sin x.$$
$$c_2^{'} = \tan x \, \cos x.$$

On trouve

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \tan x \, (\sin x) \, dx, \\ &= -\ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + \sin x + c. \\ c_2(x) &= \int -\tan x \, \cos x \, dx, \\ &= \cos x + c^{'}. \end{aligned}$$

donc la solution générale est

$$y(x) = \left(-\ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + \sin x + c \right) \cos x + \left(\cos x + c^{'} \right) \sin x.$$

1.2 Équations aux dérivées partielles

Definition 1.9 *Une équation aux dérivées partielles (noté EDP) est une relation entre une fonction de plusieurs variables (réelles) u, et ses dérivées partielles, et une fonction données f*

$$F\left(u, x_1, ...x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = f \qquad u \quad dans \quad \Omega \tag{1.6}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et F est une fonction de plusieurs variable réelles.
L'ordre de dérivation le plus élevé apparaissant dans (1.6) est appelé l'ordre de l'EDP.

Remarque 1.2 *Si la fonction f est nulle alors F est une équation homogène.*

- **Dimension et ordre d'une EDP**

— **La dimension** d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u .

— **L'ordre** d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.

1.2.1 Équations aux dérivées partielles linéaires

Definition 1.10 *Une EDP d'une inconnue u est dite linéaire si l'on peut la mettre sous la forme :*

$$L\, u = f, \tag{1.7}$$

où
L est une opérateur linéaire différentielle ,
f est une fonction de n variables indépendants définie sur un domaine de $\mathbb{R}$.
Si $f = 0$, on dit que l'équation est linéaire homogène. Sinon elle est non-homogène .

Example 1.5 *L'équation*

$$u + y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\,x\,y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1,$$

est linéaire non-homogène sur $\mathbb{R}^2$ *car elle peut s'écrire sous la forme* (1.7) *où*

$$Lu = u + y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est un opérateur linéaire différentielle et $f(x, y) = 1$.
Vérifions la linéarité de L : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et soient* u_1, u_2 *deux fonctions suffisamment régulières, on a*

$$\begin{aligned} L\left(au_1 + bu_2\right) &= (au_1 + bu_2) + y\,\frac{\partial^2(au_1 + bu_2)}{\partial y^2} + 2xy\,\frac{\partial^2(au_1 + bu_2)}{\partial x^2} \\ &= a\left(u_1 + y\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + b\left(u_2 + y\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) \\ &= aL(u_1) + bL(u_2). \end{aligned}$$

1.2.2 Équations aux dérivées partielles quasi-linéaires

Une EDP est quasi-linéaire quand elle est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre plus élève pour chacune des variables.

1.2.3 Équations aux dérivées partielles non linéaires

Une EDP est non linéaire si l'équation est non linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue .

Example 1.6

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} - u = 0,$ *est une UDP linéaire d'ordre* 2 *homogène.*
2. $xyz\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = c,$ *est une EDP quasi-linéaire d'ordre* 2 *non homogène.*
3. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - c = 0,$ *est une EDP d'ordre* 2 *non linéaire et non homogène.*

Remarque 1.3 *la solution générale d'une EDP non homogène est la somme d'une solution particulière de l'EDP non homogène et d'une solution générale de l'EDP homogène.*

classification des équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classée selon différents points de vue,

1. si le temps est l'une des variables indépendantes de la fonction cherchée, on perle à des équations d'évolutions.

2. si l'équation contient seulement les variables spatiales nous parlons à des équations stationnaires.
3. l'ordre de l'équation différentielle.
4. si l'équation constitue uniquement d'une combinaison linéaire de u et de ses dérivées, nous parlons d'une équation linéaire.
5. dans le cas contraire, on parle à des équations non linéaires.

Équations aux dérivées partielles du première ordre

Definition 1.11 *Une équation dans laquelle figure une fonction f de plusieurs variables indépendantes x_1 ,...,x_n et des dérivées partielles du 1^{er} ordre de f par rapport à ces variables, c'est-à-dire une équation de la forme :*

$$F\left(x_1, ..., x_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0,$$

est dite une équation aux dérivées partielles (EDP) du première ordre.

Remarque 1.4

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow f(x,y) = \varphi(y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow f(x,y) = \varphi(x).$$

Proposition 1.2 *Une fonction $\phi(x,y,z)$ est une intégrale première d'un système différentielle si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles associée.*

Definition 1.12 *Soit f une fonction de deux variables. Une équation aux dérivées partielles linéaire du 1^{er} ordre est une relation de la forme :*

$$P(x,y,z)\,\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,z)\,\frac{\partial f}{\partial y} = R(x,y,z),$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, y, z définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soit $z = f(x,y)$ une solution de l'équation précédent.
Posons $\phi(x,y,z) = f(x,y) - z$ On a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -1.$$

L'équation précédente s'écrit

$$p(x,y,z)\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q(x,y,z)\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + R(x,y,z)\,\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z}\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles peut être considérée comme associée au système différentiel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)},$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)},$$

ou sous forme plus symétrique

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Ce système est appelé système caractéristique de l'équation aux dérivées partielles.

Proposition 1.3 *Les solutions de l'équation aux dérivées partielles :*

$$P(x,y,z)\,\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,z)\,\frac{\partial f}{\partial y} = R(x,y,z),$$

sont définies par

$$\phi(x,y,z) = 0,$$

où ϕ représente l'intégrale première la plus générale du système caractéristique :

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Remarque 1.5 *Comme ϕ s'exprime au moyen de deux intégrales premières indépendantes ϕ_1 et ϕ_2, donc l'intégration de l'équation aux dérivées partielles se trouve ramenée à la recherche de deux intégrales premières.*

Example 1.7 *Déterminer la solution générale de l'équation*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\,\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

Le système caractéristique associe est

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{-z}.$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} &\Rightarrow \int dx = \int \frac{1}{2}\,dy\\ &\Rightarrow x + c_1 = \frac{1}{2}\,y + c_2\\ &\Rightarrow 2x - y = k_1.\end{aligned}$$

Le première intégrale $u(x,y,z) = 2x - y$.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{1} = \frac{dz}{-z} &\Rightarrow \int -dx = \int \frac{1}{z}\,dz\\ &\Rightarrow -x + c_1 = \ln(z) + c_2\\ &\Rightarrow z\,\exp(x) = k.\end{aligned}$$

Le deuxième intégrale $v(x, y, z) = z \exp(x)$.
Par conséquent, la solution général s'écrit

$$f(2x - y, z \exp(x)) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} z \exp(x) &= g(2x - y) \\ z &= \exp(-x) g(2x - y). \end{aligned}$$

f *et* g *sont des fonctions arbitraires.*

Équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

Definition 1.13 *Soit* f *une fonction de deux variable* x *et* y*. On appelle équation aux dérivées partielles du* $2^{\text{éme}}$ *ordre, une relation de la forme :*

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0,$$

faisant intervenir f *et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre* 2.

1.2.4 Classification des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

Une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables x et y sous la forme générale est donnée par

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + d \frac{\partial f}{\partial x} + e \frac{\partial f}{\partial y} + g f = k, \tag{1.8}$$

où a, b, c, d, e, g et k sont des constants ou des fonctions à deux variables x et y. Une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre (1.8) est généralement classée en trois classes

1. **Parabolique :**l'équation parabolique est une équation qui satisfait la propriété

$$b^2 - 4ac = 0.$$

   Des exemples d'équations parabolique est une l'équation de la chaleur,

$$u_t = k u_{xx}.$$

2. **Hyperbolique :** l'équation hyperbolique est une équation qui satisfait la propriété

$$b^2 - 4ac > 0.$$

   Des exemples d'équation hyperbolique sont les équations des ondes,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

3. **Elliptique :** l'équation elliptique est une équation qui satisfait la propriété

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Des exemples d'équation elliptique sont l'équation de Laplace,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Example 1.8 *Classez les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre suivants comme hyperbolique , parabolique ou elliptique :*

1. $u_t = 4u_{xx}$.
   $a = 4, \quad b = 0, \quad c = 0,$
   alors
   $$b^2 - 4ac = 0,$$
   donc l'équation est parabolique.
2. $u_{tt} = 4u_{xx}$.
   $a = 4, \quad b = 0, \quad c = -1,$
   alors
   $$b^2 - 4ac = 16 > 0,$$
   donc l'équation est hyperbolique.
3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
   $a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1,$
   alors
   $$b^2 - 4ac = -4 < 0,$$
   donc l'équation est elliptique.

CHAPITRE

2

ONDES PROGRESSIVES ET MÉTHODE D'EXPANSION $\left(G'/G\right)$

En 1834, [Russell, 1844] fut le premier à observer les ondes solitaires. Il a observé une grande émergence d'eau déplaçant lentement sur le canal d'Edimbourg-Glasgow sans changement de forme. Le renflement d'eau, qu'il observait et appelait "grande onde de translation". L'onde s'est déplacée le long du canal d'eau pendant une longue période de temps tout en conservant sa forme. Cette seule onde bosselée de renflement d'eau s'appelle maintenant onde solitaire ou soliton.
Les solitons localisée, des ondes très stables qui conservent leur identité (forme et vitesse).
La découverte remarquable a motivé Russell à mener des expériences de laboratoire physique pour mettre l'accent sur son observation et d'étudier ces ondes solitaires Il a établi la relation

$$c^2 = g(h + a)$$

qui déterminer la vitesse c de l'onde solitaire, où a est l'amplitude maximale au-dessus de la surface de l'eau, h est la profondeur finie et g est l'accélération de la gravité. Les ondes solitaires sont donc appelées les ondes de gravité.[5]

2.1 Définitions

Il est intéressant maintenant de donner quelques définitions de certains concepts de la théorie mathématiques des ondes.

2.1.1 Onde progressive

La définition physique d'une onde est un mouvement de haut en bas ou d'avant en arrière. L'onde est aussi une perturbation qui transmet l'énergie d'un endroit à un autre. La caractéristique principale de l'onde progressive est que la perturbation se retrouve identique à elle-même après une durée T (période temporelle de propagation) et à une distance de X (période spatiale ou propagation ou longueur d'onde). Il faut pour cela que le milieu de propagation ait une extension infinie ou, tout du moins, une taille très grande devant celle de la longueur d'onde.
L'équation de propagation d'onde la plus simple est donnée par

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

où $u(x,t)$ représente l'amplitude de l'onde, et c est la vitesse de l'onde.
Cette équation a la solution générale d'Alembert

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

où f et g sont des fonctions arbitraires qui représentent respectivement des ondes de propagation droit et gauche. Les deux ondes distinctes f et g se propagent sans changer leur identité. Les fonctions f et g sont habituellement déterminées en utilisant les valeur initiales $u(x,0)$ et $u_t(x,0)$ qui sont habituellement prescrites. Comme l'équation d'onde est linéaire, les deux solutions peuvent être additionnées selon le principe de superposition. Avec $g = 0$, l'onde se propage dans la bonne direction uniquement comme dans l'équation $u_t + u_x = 0$ avec $u(x,t) = f(x-t)$ et vitesse $c = 1$.
D'autre part, une onde progressive est une onde dans laquelle le milieu se déplace dans la direction de propagation de l'onde. Les ondes progressive apparaissent dans l'étude des EDPs non linéaire où les ondes sont représentées par la forme $u(x,t) = f(x-ct)$, où $u(x-ct)$ décrit une perturbation déplaçant dans la direction x négative ou positive $c < 0$ ou $c > 0$ respectivement.[5]

2.1.2 Types de solutions d'ondes progressives

La solution d'onde progressive est une solution de forme permanente déplaçant avec une vitesse constante. Les solutions d'ondes progressives sont généralement obtenues en réduisant les EENLs en équations différentielles ordinaires (EDOs) associées, qui sont résolues par plusieurs méthodes appropriées. Ceci est principalement géré en utilisant $u(x,t) = u(\zeta)$, $\zeta = x - ct$, c'est la vitesse de l'onde.

Il existe de nombreux types des solutions d'ondes progressives qui présentent un intérêt particulier pour la théorie des ondes solitaires qui se développe rapidement dans de nombreux domaines scientifiques, comme les ondes d'eau en eaux peu profondes à la physique des plasmas. Les ondes progressives apparaissent dans de nombreux types, et certains d'entre eux seront pris en compte.[5]

2.1.2.1 Ondes solitaires et solitons

Les ondes solitaires sont des ondes progressives localisées qui se déplacent à des vitesses constantes et prennent une forme asymptotiquement nulle sur de grande distance. a définit l'onde solitaire comme un onde de gravité localisée qui maintient sa cohérence, elle a une amplitude finie et se propage avec une vitesse et une forme constante. Les solitons sont des types particuliers des ondes solitaires. Le soliton est une solution spatialement localisée, d'où $u^{'}(\zeta)$, $u^{''}(\zeta)$, $u^{'''}(\zeta)$, et $u(\zeta) \rightarrow 0$ tel que $\zeta \rightarrow \pm\infty$, $\zeta = x - ct$.

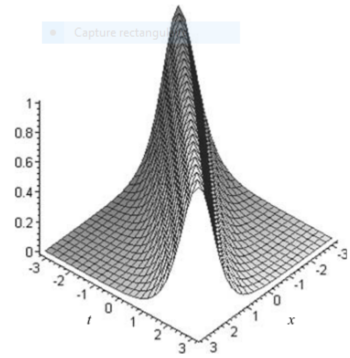

Figure 1 : Une solution de soliton $u(x,t) = sech^2(x-t)$

L'équation de KdV est le modèle pionnier qui donne naissance aux solitons. La figure 1 montre un graphe d'une solution de soliton $u(x,t) = sech^2(x-t)$ en forme de cloche caractérisée par des ailes infinies ou des queues infinies.
Il n'est pas facile de trouver une définition précise d'un soliton. Cependant, ont définit un soliton comme toute solution d'une équation non linéaire qui :

1. est une onde solitaire de forme permanente.
2. est localisé, de sort qu'il décoit ou s'approche d'une constante à l'infini.
3. peut interagir fortement avec d'autres solitons et conserve son identité.
4. est dû à un équilibre délicat entre les effets non linéaire et dispersifs.

Dans la littérature physique, la différence entre les ondes solitaires et les solitons est devenue floue. Les ondes solitaires peuvent être définies comme des solutions de type soliton d'EENLs décrivant des processus d'ondes dans des milieux dispersifs et dissipatifs.

2.1.2.2 Ondes périodiques

Les ondes périodiques sont des ondes progressives où le mouvement de la source est périodique, il se répète au bout du temps t.
L'équation d'onde standard $u_{tt} = u_{xx}$ donne des solutions périodiques.

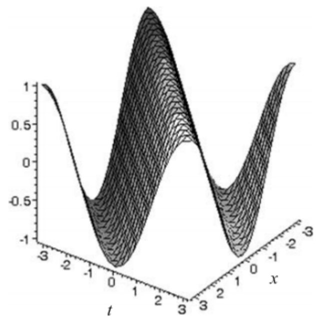

Figure 2 : Une solution périodique $u(x,t) = \cos(x-t)$

La figure 2 montre une solution périodique $u(x,t) = \cos(x-t)$ pour une équation d'onde standard.

2.1.2.3 Kinks

Les kinks sont des ondes solitaires qui montent ou descendent d'un état asymptotique à un autre. La solution de kink approche d'une constante à l'infini.
L'équation de bergers standard $u_t + u\,u_x = \rho u_{xx}$, où ρ est le coefficient de viscosité, est une équation bien connue qui donne des solutions de kinks.

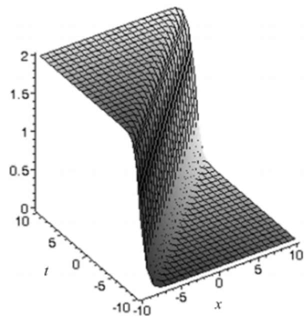

Figure 3 : Une solution de kink $u(x,t) = 1 - \tanh(x-t)$

La figure montre une solution de kink $u(x,t) = 1 - \tanh(x-t)$ pour l'équation de burgers avec $\rho = \dfrac{1}{2}$.

2.1.2.4 Peakons

Les peakons sont des ondes solitaires avec des points. Dans ce cas, les solutions d'ondes progressives sont lisses à l'exception d'un point sur un coin de sa crête.
Les peakons sont les points auxquels les dérivées spatiales changent de signe de sorte que les peakons ont un saut fini dans la première dérivée de la solution $u(x,t)$.
Cela signifie que les peakons ont des discontinuités dans la dérivée x mais que les deux dérivées unilatérales existent et ne diffèrent que par un signe.
Les équations intégrables Camassa-Holm (CH) et Degasperis-Procesi (DP)

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)uu_x = bu_xu_{xx} + uu_{xxx}$$

pour $b = 2$ et $b = 3$ respectivement, admettent des solutions de peakons.

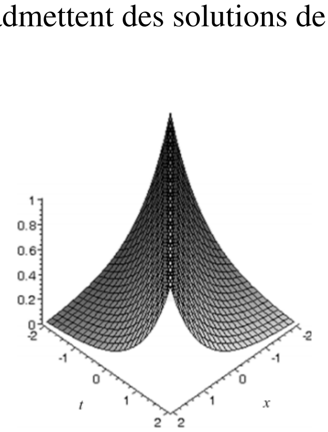

Figure 5 : Une solution de peakon $u(x,t) = \exp(-|x-t|)$

la figure 5 montre une solution de peakon $u(x,t) = c\exp(-|x-t|)$ pour l'équation CH avec $c = 1$, où c est la vitesse de l'onde.

2.1.2.5 cuspons

Les cuspons sont d'autres formes des ondes solitaires où la solution présente des cuspides à leurs crêtes. Contrairement aux peakons où les dérivées aux pointes ne diffèrent que par un signe, les dérivées au saut d'un cuspon divergent.

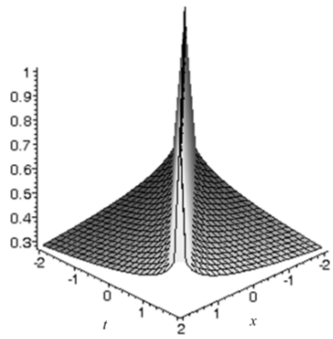

Figure 4 : Un cuspon $u(x,t) = \exp\left(- \mid x-t \mid^{\frac{1}{6}}\right)$

La figure 4 montre un graphique virtuel d'un cuspon qui n'est pas obtenu à partir d'un modèle bien connu. L'hypothèse est que le cuspon peut être représenté comme suit

$$u(x,t) = c\ \exp\left(- \mid x-t \mid^{\frac{1}{n}}\right), \quad n > 1$$

2.2 La méthode d'expansion (G'/G)

Ces dernières années, de nombreuses approches ont été utilisées pour trouver les solutions exactes des équations aux dérivées partielles non linéaire. Une de ces méthodes est connue sous le nom méthode d'expansion (G'/G) et a été proposée par Roshid et Al.
la méthode d'expansion (G'/G) est simple et outil mathématique puissant pour la construction de solutions d'ondes progressives d'équations d'évolutions non linéaires qui surviennent dans les domaines des sciences de l'ingénieur, de la physique mathématique et des application en temps réel.

2.3 Principe de la méthode d'expansion (G'/G)

Dans ce travaille, nous décrivons la méthode d'expansion (G'/G) pour trouver les solutions des équations aux dérivées partielles non linéaire, avec deux variables x et t, qui s'écrit sous la forme :

$$p(u\,,u_t,\,u_x,\,u_{xt},\,u_{tt},\,u_{xx}...)=0, \tag{2.1}$$

où $u=u(x,t)$
le résumé de cette méthode ce distingue en cinq étapes suivantes :

étape 1 : On utilisant la variable d'onde progressive

$$u(x,t)=u(\zeta),\quad \zeta=x-ct, \tag{2.2}$$

Cette variable permet de réduire (2.1) à une EDO en terme de ζ,

$$p\,(u,\,cu^{'},\,u^{'},\,cu^{''},\,c^2u^{''},\,u^{''}...)=0. \tag{2.3}$$

étape 2 : Supposons que la solution de (2.3) peut être exprimée par un polynôme à coefficients $\left(\frac{G'}{G}\right)$ comme suit :

$$u(\zeta)=\sum_{i=0}^{m}a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^i, \tag{2.4}$$

tel que $G=G(\zeta)$ satisfait l'équation différentielle linéaire de deuxième ordre.

$$G^{''}(\zeta)+\lambda\,G'(\zeta)+\mu\,G(\zeta)=0 \tag{2.5}$$

$G^{'}=\frac{dG}{d\zeta}$, $G^{''}=\frac{d^2G}{d\zeta^2}$ et $a_i(i=1...n)$, λ et μ sont des constants réelles à déterminer ultérieurement.
Utilisant la solution générale de l'équation (2.5) on obtient :

- **si** $\Delta=\lambda^2-4\mu>0$
  On obtient deux racines réels
  $$G_1=\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2},\quad G_2=\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2},$$
  alors la solution générale est
  $$G(\zeta)=k_1\,\exp(G_1\zeta)+k_2\,\exp(G_2\zeta)$$
  où $k_1,\ k_2$ sont des constants .
  $$G(\zeta)=k_1\,\exp\left(\Big(\frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\,\zeta\right)+k_2\,\exp\left(\Big(\frac{-\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\,\zeta\right).$$
  Nous dérivons G par rapport à ζ donc,
  $$G^{'}(\zeta)=k_1\Big(\frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\,\exp\left(\Big(\frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\zeta\right)+k_2\Big(\frac{-\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\,\exp\left(\Big(\frac{-\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\zeta\right).$$

d'où

$$\frac{G'}{G} = \frac{\exp(\frac{-\lambda}{2}\zeta)\left[k_1\left(\frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\exp(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+k_2\left(\frac{-\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\exp(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)\right]}{\exp(\frac{-\lambda}{2}\zeta)\left[k_1\exp(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+k_2\exp(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)\right]},$$

$$= \frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{k_1\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)-k_2\exp\left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)}{k_1\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)+k_2\exp\left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)}\right),$$

On a

$$\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) = \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right).$$

$$\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) = \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)-\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right).$$

donc,

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{A}{B}\right)$$

avec $\begin{cases} A = K_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+K_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)-K_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+K_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) \\ B = K_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+K_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+K_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)-K_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) \end{cases}$

où

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{(k_1-k_2)\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+(k_1+k_2)\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{(k_1+k_2)\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+(k_1-k_2)\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right),$$

On pose que : $k_1+k_2=c_1, \quad k_1-k_2=c_2$ alors

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right).$$

- si $\Delta = \lambda^2-4\mu < 0$

  On obtient deux racines complexes

  $$G_1 = \frac{-\lambda+\sqrt{-\lambda^2+4\mu}\,i}{2}, \quad G_2 = \frac{-\lambda-\sqrt{-\lambda^2+4\mu}\,i}{2},$$

  alors la solution générale est

  $$G(\zeta) = \exp\left(\alpha\,\zeta\right)\left(c_1\cos\beta\,\zeta+c_2\sin\beta\,\zeta\right).$$

  où $\alpha = \frac{-\lambda}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu}}{2}$ alors

$$
\begin{aligned}
G(\zeta) &= \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\left(c_1\cos\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu}}{2}\zeta + c_2\sin\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu}}{2}\zeta\right),\\
&= C_1\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) + C_2\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right).
\end{aligned}
$$

Nous dérivons G par rapport à ζ donc,

$$
\begin{aligned}
G^{'}(\zeta) &= -C_1\frac{\lambda}{2}\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) - c_1\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)\\
&- c_2\frac{\lambda}{2}\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) + C_2\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right).
\end{aligned}
$$

on a

$$
\frac{G'}{G} = \frac{\exp^{\frac{-\lambda}{2}\zeta}(A)}{\exp^{\frac{-\lambda}{2}\zeta}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)\right)},
$$

avec

$A = -c_1\dfrac{\lambda}{2}\cos(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) - c_1\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\sin(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) - c_2\dfrac{\lambda}{2}\sin(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\cos(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta),$

où

$$
\begin{aligned}
\frac{G'}{G} &= \frac{-\lambda}{2}\left(\frac{c_1\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + C_2\sin(\frac{\sqrt{\Delta})}{2}\zeta}{c_1\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)\\
&+ \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{-c_1\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right),
\end{aligned}
$$

alors

$$
\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{-c_1\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right).
$$

- si $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = 0$
  On obtient une racine double $G_0 = -\dfrac{\lambda}{2}$, alors la solution générale est

$$
G(\zeta) = c_1\exp\Big(G_0\zeta\Big) + c_2\zeta\exp\Big(G_0\zeta\Big).
$$

où c_1, c_2 sont des constants .

$$
\begin{aligned}
G(\zeta) &= c_1\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big) + c_2\,\zeta\,\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big).\\
G'(\zeta) &= \frac{-\lambda}{2}C_1\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big) + c_2\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big) - \frac{\lambda}{2}c_2\,\zeta\,\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{G'}{G} &= \frac{\frac{-\lambda}{2} C_1 \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right) + c_2 \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right) - \frac{\lambda}{2}\, c_2\, \zeta \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)}{c_1 \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right) + c_2 \zeta \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)}, \\
&= \frac{-\lambda}{2}\, \frac{\left(c_1 \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\right) + c_2\, \zeta\, \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\right)\right)}{\left(c_1 \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\right) + c_2\, \zeta\, \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\right)\right)} + \frac{\left(c_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\,\zeta\right)\right)}{\left(c_1 \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\right) + c_2\, \zeta\, \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\right)\right)},
\end{aligned}
$$

alors

$$
\frac{G'}{G} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\,\zeta}.
$$

Donc on trouve le système :

$$
\frac{G'}{G} = \begin{cases}
\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\dfrac{c_1 \sinh\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\zeta\right\} + c_2 \cosh\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\zeta\right\}}{c_1 \cosh\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\zeta\right\} + c_2 \sinh\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\zeta\right\}}\right) & \lambda^2 - 4\mu > 0, \\
\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\dfrac{-c_1 \sin\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\zeta\right\} + c_2 \cos\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\zeta\right\}}{c_1 \cos\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\zeta\right\} + c_2 \sin\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\zeta\right\}}\right), & \lambda^2 - 4\mu < 0, \\
\left(\dfrac{c_2}{c_1 + c_2\zeta}\right) - \dfrac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu = 0,
\end{cases}
$$

Après la simplicité on trouve :

$$
\frac{G'}{G} = \begin{cases}
\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-4\mu+\lambda^2}}{2} \tanh\left\{\frac{\sqrt{-4\mu+\lambda^2}}{2}\,\zeta\right\} & \lambda^2 - 4\mu > 0, \\
\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \tan\left\{\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\,\zeta\right\} & \lambda^2 - 4\mu < 0, \\
\left(\frac{c_2}{c_1 + c_2\,\zeta}\right) - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu = 0.
\end{cases} \tag{2.6}
$$

étape 3 : L'entier positif m peut être déterminer par l'égalité entre les dérivées d'ordre le plus élevé et les termes non linéaire apparaissant dans l'équation (2.3) comme suit : si nous définissons le degré de $u(\zeta)$ comme $D[u(\zeta)] = m$, alors le degré des autres expressions est défini par

$$D\left(\frac{d^q u}{d\zeta^q}\right) = m + q,$$

$$D\left(u^r\left(\frac{d^q u}{d\zeta^q}\right)^s\right) = mr + s\left(q + m\right).$$

étape 4 : En substituant l'équation (2.4) dans l'équation (2.3), utilisons la solution générale de l'équation (2.5), en rassemblant tous les termes de même puissance puis en égalant chaque coefficient du polynôme obtenu à zéro, on obtient un ensemble d'équations algébriques pour a_i, c, λ, μ.

étape 5 : En résolvant les équations algébriques nous obtenons les valeurs a_i, c, λ, μ. Par substitution de ces valeurs dans l'équation (2.4), on obtient les solutions d'ondes progressives d'EDP non linéaire (2.1).

CHAPITRE

3

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE BOUSSINESQ

3.1 Équation de Boussinesq

Les équations de Boussinesq en mécanique des fluides désignent un système d'équations d'ondes obtenue par approximation des équations d'Euler pour des écoulements incompressibles irrationnels à surface libre.
Elles permettent de prévoir les ondes de gravité comme ondes cnoidales, ondes de stokes, solitons, etc. Ces équations ont été introduites par joseph Boussinesq en 1872 et sont un exemple d'équations aux dérivées partielles dispersive.
Dans cette partie, nous avons obtenu des solutions d'ondes progressives exactes de l'équation aux dérivées partielles non linéaire, à savoir l'équation de Boussinesq du quatrième ordre impliquant des paramètres via la méthode d'expansion (G'/G) . Dans cette méthode, la solution générale de l'équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre à coefficient constants est mise en œuvre.
De plus, les solitons et les solutions périodique sont décrits à travers trois familles différentes.

3.2 Résolution numérique de l'équation de Boussinesq

On considère l'équation de Boussinesq sous la forme :[2]

$$u_{tt} - u_{xx} - \left(u^2\right)_{xx} + u_{xxxx} = 0. \tag{3.1}$$

On utilise la transformation $u(x,t) = u(\zeta)$, avec $\zeta = x - ct$ on trouve :

$$c^2u^{''} - u^{''} - \left(u^2\right)^{''} + u^{''''} = 0$$
$$\left(c^2 - 1\right)u^{''} - \left(u^2\right)^{''} + u^{''''} = 0 \tag{3.2}$$

d'après l'intégration de (3.2) on obtient :

$$\left(c^2 - 1\right)u - u^2 + u^{''} = 0 \tag{3.3}$$

On considère l'équilibre homogène entre la dérivée d'ordre le plus élevé et le terme non linéaire, donc :

$$2m = m + 2 \Rightarrow m = 2$$
$$u(\zeta) = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \Rightarrow u(\zeta) = a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2. \tag{3.4}$$

d'après l'équation (2.5) et (3.4) on trouve :

$$u^2(\zeta) = a_0^2 + 2a_0a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \left(a_1^2 + 2a_0a_2\right)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2a_1a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + a_2^2\left(\frac{G'}{G}\right)^4. \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} u^{''}(\zeta) &= \lambda\mu a_1 + 2\mu^2 a_2 + \left(\lambda^2 a_1 + 2a_1\mu + 6\lambda\mu a_2\right)\left(\frac{G'}{G}\right) \\ &+ \left(3\lambda a_1 + 4\lambda^2 a_2 + 8\mu a_2\right)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (2a_1 + 10\lambda a_2)\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + 6a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^4. \end{aligned} \tag{3.6}$$

On substituant (3.4), (3.5) et (3.6) dans (3.3)

$$(c^2-1)a_0 + (c^2-1)a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + (c^2-1)a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - a_0^2 - 2a_0a_1\left(\frac{G'}{G}\right) - (a_1^2 + 2a_0a_2)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - 2a_1a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 - a_2^2\left(\frac{G'}{G}\right)^4 + 6a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (2a_1 + 10\lambda a_2)\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (3\lambda a_1 + 4\lambda^2 a_2 + 8a_2\mu)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (\lambda^2 a_1 + 2a_1\mu + 6\lambda\mu a_2)\left(\frac{G'}{G}\right) + \lambda\mu a_1 + 2\mu^2 a_2.$$

On collectons les termes de même ordre, puis le mise a zero et on ressoude le système algébrique pour trouvé $a_0,\ a_1,\ a_2,\ c.$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : c^2a_0 - a_0 - a_0^2 + \lambda\mu a_1 + 2\mu^2 a_2 = 0.$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : c^2a_1 - a_1 - 2a_0a_1 + \lambda^2 a_1 + 2a_1\mu + 6\lambda\mu a_2 = 0.$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : c^2a_2 - a_2 - a_1^2 - 2a_0a_2 + 3\lambda a_1 + 4\lambda^2 - a_2 + 8\mu a_2 = 0.$$

$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : -2a_1a_2 + 2a_1 + 10\lambda a_2 = 0.$

$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : -a_2^2 + 6a_2 = 0.$

Donc

$$a_0 = 6\mu, \qquad a_1 = 6\lambda, \qquad a_2 = 6, \qquad c = \sqrt{1 + 4\mu - \lambda^2}, \tag{3.7}$$

où

$$a_0 = \lambda^2 + 2\mu, \qquad a_1 = 6\lambda, \qquad a_2 = 6, \qquad c = \sqrt{1 - 4\mu + \lambda^2}. \tag{3.8}$$

Où λ et μ sont des constants arbitraires .

On substituant (3.7) dans (3.4) alors :

$$u_1(\zeta) = 6\mu + 6\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 6\left(\frac{G'}{G}\right)^2; \qquad \textit{avec} : \zeta_1 = x - \sqrt{1 - \lambda^2 + 4\mu}\, t. \tag{3.9}$$

On substituant (3.8) dans (3.4) alors :

$$u_2(\zeta) = \lambda^2 + 2\mu + 6\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 6\left(\frac{G'}{G}\right)^2; \quad \textit{avec} : \zeta_2 = x - \sqrt{1 + \lambda^2 - 4\mu}\, t. \tag{3.10}$$

Utilisant la solution générale de l'équation (2.5) on obtient :

- **si** $\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$

  donc $G_1 = \dfrac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$; $G_2 = \dfrac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$

  alors la solution générale est :

$$G(\zeta) = k_1 \exp\big(G_1\,\zeta\big) + k_2 \exp\big(G_2\,\zeta\big).$$

  où k_1, k_2 sont des constants.

$$G(\zeta) = k_1 \exp\left(\left(\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\zeta\right) + k_2 \exp\left(\left(\frac{-\lambda}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\zeta\right).$$

$$G'(\zeta) = k_1\Big(\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\exp\left(\Big(\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\zeta\right) + k_2\Big(\frac{-\lambda}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\exp\left(\Big(\frac{-\lambda}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\zeta\right).$$

  alors

$$\frac{G'}{G} = \frac{\exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\left[k_1\left(\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) + k_2\left(\frac{-\lambda}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\exp\left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)\right]}{\exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\left[k^1 \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) + k_2 \exp\left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)\right]},$$

$$= \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{k_1 \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) - k_2 \exp\left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)}{k_1 \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) + k_2 \exp\left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right)}\right).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\exp\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta\Big) &= \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta\right). \\
\exp\Big(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta\Big) &= \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta\right).
\end{aligned}$$

donc,

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Big(\frac{A}{B}\Big)$$

avec $\begin{cases} A = K_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + K_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) - K_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + K_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) \\ B = K_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + K_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + K_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) - K_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) \end{cases}$

où

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{(k_1-k_2)\,\cosh(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta) + (k_1+k_2)\,\sinh(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta)}{(k_1+k_2)\,\cosh(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta) + (k_1-k_2)\,\sinh(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta)}\right),$$

On pose que : $k_1 + k_2 = c_1, \quad k_1 - k_2 = c_2$ alors

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta) + c_2\cosh(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta)}{c_1\cosh(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta) + c_2\sinh(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\,\zeta)}\right). \tag{3.11}$$

- cas 1 : où $\quad \zeta_1 = x - \sqrt{1-\lambda^2+4\mu}\,t.$

  On substituant (3.11) dans (3.9) on obtient :

$$
\begin{aligned}
u_{(1,1)}(\zeta) = \;& 6\mu + 6\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 6\left(\frac{G'}{G}\right)^2, \\
= \;& 6\mu + 6\lambda\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right) \\
& +6\left[\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)^2\right], \\
= \;& 6\mu - 3\lambda^2 + 3\lambda\sqrt{\Delta}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right) \\
& +6\Big[\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\Delta}{4}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)^2 \\
& -\frac{2\lambda\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)\Big], \\
= \;& 6\mu - 3\lambda^2 + 3\lambda\sqrt{\Delta}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right) + \frac{3}{2}\lambda^2 \\
& +\frac{3\Delta}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)^2,
\end{aligned}
$$

alors

$$
u_{(1,1)}(\zeta) = 6\mu - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{2}\left(\lambda^2 - 4\mu\right)\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)^2.
$$

- cas 2 : où $\zeta_2 = x - \sqrt{1+\lambda^2-4\mu}\,t.$
  On substituant (3.11) dans (3.10) on obtient :

$$
\begin{aligned}
u_{(1,2)}(\zeta) = \; & \lambda^2 + 2\mu + 6\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 6\left(\frac{G'}{G}\right)^2, \\
= \; & \lambda^2 + 2\mu + 6\lambda\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right) \\
& +6\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)^2, \\
= \; & \lambda^2 + 2\mu - 3\lambda^2 + 3\lambda\sqrt{\Delta}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right) \\
& +6\Bigg(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\Delta}{4}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)^2 \\
& -\frac{\lambda\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)\Bigg), \\
& = 2\mu - 2\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3\Delta}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)^2,
\end{aligned}
$$

alors

$$
u_{(1,2)}(\zeta) = 2\mu - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{3\Delta}{2}\left(\frac{c_1\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cosh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sinh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)^2.
$$

- si $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = 0$

donc $G_0 = -\dfrac{\lambda}{2}$ alors la solution générale est :

$$G(\zeta) = c_1 \exp\Big(G_0\Big) + c_2\,\zeta \exp\Big(G_0\Big).$$

où c_1, c_2 sont des constants.

$$G(\zeta) = c_1 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big) + c_2\,\zeta\,\exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big).$$

$$G'(\zeta) = \frac{-\lambda}{2}\,C_1 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big) + c_2 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big) - \frac{\lambda}{2}\,c_2\,\zeta \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big).$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{\frac{-\lambda}{2}C_1 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big) + c_2 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big) - \frac{\lambda}{2}c_2\,\zeta \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big)}{c_1 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big) + c_2\,\zeta \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big)},$$

$$= \frac{-\lambda}{2}\,\frac{\left(c_1 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\,\zeta\Big) + c_2\zeta \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\right)}{\left(c_1 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big) + c_2\zeta \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\right)} + \frac{\left(c_2 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\right)}{\left(c_1 \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big) + c_2\zeta \exp\Big(\frac{-\lambda}{2}\zeta\Big)\right)},$$

donc

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{-\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\zeta}. \tag{3.12}$$

- cas 1 : où $\zeta_1 = x - \sqrt{1 + 4\mu - \lambda^2}\,t.$
On substituant (3.12) dans (3.9) on trouve :

$$u_{(2,1)}(\zeta) = 6\mu + 6\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 6\left(\frac{G'}{G}\right)^2,$$

$$= 6\mu + 6\lambda\left(\frac{-\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\zeta}\right) + 6\left(\frac{-\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\zeta}\right)^2,$$

$$= 6\mu - 3\lambda^2 + \frac{6\lambda c_2}{c_1 + c_2\zeta} + 6\left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2\zeta)^2} - \frac{\lambda c_2}{c_1 + c_2\zeta}\right),$$

alors

$$u_{(2,1)}(\zeta) = 6\mu - 3\lambda^2 + 6\frac{c_2^2}{(c_1 + c_2\zeta)^2}.$$

- cas 2 : où $\zeta_2 = x - \sqrt{1+\lambda^2-4\mu}\,t.$
  On substituant (3.12) dans (3.10) on trouve :

$$\begin{aligned} u_{(2,2)}(\zeta) &= \lambda^2 + 2\mu + 6\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 6\left(\frac{G'}{G}\right)^2, \\ &= \lambda^2 + 2\mu + 6\lambda\left(\frac{-\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\zeta}\right) + 6\left(\frac{-\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\zeta}\right)^2, \\ &= \lambda^2 + 2\mu - 3\lambda^2 + \frac{6\lambda c_2}{c_1 + c_2\zeta} + 6\left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2\zeta)^2} - \frac{\lambda c_2}{c_1 + c_2\zeta}\right), \end{aligned}$$

  alors

$$u_{(2,2)}(\zeta) = 2\mu - \frac{\lambda^2}{2} + 6\frac{c_2^2}{(c_1 + c_2\zeta)^2}.$$

- si $\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0$
  On obtient deux racines complexes

$$G_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}\,i}{2}, \quad G_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}\,i}{2},$$

  alors la solution générale est

$$G(\zeta) = \exp\left(\alpha\,\zeta\right)(c_1 \cos\beta\,\zeta + c_2 \sin\beta\,\zeta).$$

  où $\alpha = \dfrac{-\lambda}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu}}{2}$ alors

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu}}{2}\zeta + c_2 \sin\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu}}{2}\zeta\right), \\ &= C_1 \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) + C_2 \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right). \end{aligned}$$

  Nous dérivons G par rapport à ζ donc,

$$\begin{aligned} G'(\zeta) &= -C_1\frac{\lambda}{2}\exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) - c_1\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) \\ &- c_2\frac{\lambda}{2}\exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right) + C_2\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\exp\left(\frac{-\lambda}{2}\zeta\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta\right). \end{aligned}$$

  on a

$$\frac{G'}{G} = \frac{\exp^{\frac{-\lambda}{2}\zeta}(A)}{\exp^{\frac{-\lambda}{2}\zeta}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)\right)},$$

  avec
  $A = -c_1\frac{\lambda}{2}\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) - c_1\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) - c_2\frac{\lambda}{2}\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta) + c_2\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta),$

où

$$\begin{aligned}\frac{G'}{G} &= \frac{-\lambda}{2}\left(\frac{c_1\ \cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+C_2\ \sin(\frac{\sqrt{\Delta})}{2}\zeta}{c_1\ \cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+c_2\ \sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right)\\ &+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{-c_1\ \sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+c_2\ \cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\ \cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+c_2\ \sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right),\end{aligned}$$

alors

$$\frac{G'}{G}=\frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{-c_1\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+c_2\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}{c_1\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)+c_2\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta)}\right). \tag{3.13}$$

- cas 1 : où $\zeta_1 = x-\sqrt{1+4\mu-\lambda^2}\,t.$
  On substituant (3.13) dans (3.9) on trouve :

$$\begin{aligned}u_{(3,1)}(\zeta) &= 6\mu+6\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+6\left(\frac{G'}{G}\right)^2,\\ &= 6\mu+6\lambda\left(\frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{-c_1\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta+c_2\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}{c_1\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta+c_1\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}\right)\right)\\ &+6\left(\frac{-\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{-c_1\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta+c_2\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}{c_1\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta+c_2\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}\right)\right)^2,\end{aligned}$$

alors

$$u_{(3,1)}(\zeta)=6\mu-3\lambda^2+\frac{3}{2}(-\lambda^2+4\mu)\left(\frac{-c_1\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta+c_2\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}{c_1\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta+c_2\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}\right)^2.$$

- cas 2 : où $\zeta_2 = x - \sqrt{1+\lambda^2-4\mu}\,t.$

On substituant (3.13) dans (3.10) on trouve :

$$
\begin{aligned}
u_{(3,2)}(\zeta) &= 2\mu + \lambda^2 + 6\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 6\left(\frac{G'}{G}\right)^2, \\
&= 2\mu + \lambda^2 + 6\lambda\left(\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{-c_1\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta + c_2\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}{c_1\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta + c_2\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}\right)\right) \\
&\quad +6\left(\frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{-c_1\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta + c_2\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}{c_1\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta + c_2\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}\right)\right)^2,
\end{aligned}
$$

alors

$$
u_{(3,2)}(\zeta) = 2\mu - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{3}{2}(-\lambda^2+4\mu)\left(\frac{-c_1\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta + c_2\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}{c_1\cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta + c_2\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta}\right)^2.
$$

CONCLUSION

Les équations d'évolution non linéaires (EENLs) possèdent beaucoup de structures d'ondes progressives intéressantes. Dans l'étude des équations modélisant les phénomènes d'ondes, l'un des objectifs fondamentaux est les solutions d'ondes progressives, que leurs expressions soient explicites ou implicites, sont très intéressantes du point de vue des applications. Ces types d'ondes ne modifieront pas leur profile pendant la propagation et sont donc faciles à identifier

le but de notre travail est de déterminer le comportement des solutions d'ondes progressives en résolvant des EENLs.

On peut observer qu'il existe différents types de solution d'ondes progressive. Cette étude montre que la méthode a prouvé efficacité pour l'application aux équations d'évolution non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.F.Alzaidy, The (G'/G)-Expansion Method for Finding Traveling Wave Solutions of Some Nonlinear Pdes in Mathematical Physics, Mathematics Departement, Faculty of science, Taif University, Kingdom of Saudi Arabia.

[2] A. bekit, Application of the (G'/G) expansion method for nonlinear evolution equations, Dumlupinar Univercity, Art-Science Faculty,Department of Mathematics, Kutahya, Turkey,Reeived 5 December 200 ; received in revised from 22 January 2008 ; accepted 30 January 2008.

[3] A. kelleche, Équation de la physique mathématique, Université Djilali Bounaama, October 10,2020.

[4] A. lesfari, Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles, Ellipses Édition Marketing S.A., Avril 2015 97-286.

[5] A. majid wazwaz, Partial Differential Equations and solitary waves theory, Department of Mathematics, Saint Xavier University Chicago, IL 60655, USA 2009.

[6] S. nicaise, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles Cours et problèmes résolus, Achevé d'imprimer sur les presses de la SNEL S.A. Mars 2000 10-145.

[7] R. Hedli, Quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaire, Université Ferhat Abbas - Sétif 1, Thèse Pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences, $19/09/2020$.

Abstract

In this work, we established travelling wave solutions for some nonlinear evolution equations. The ravelling wave solutions are expressed by the hyperbolic functions, the trigonometric functions and the rational functions.
This study shows that the proposed method is effective and gives mor solutions for nonlinear evolutions equations.

Key Words : $(\frac{G'}{G})$-expansion method, Boussinesq equation, Travelling wave.

Résumé

Dans ce travail on a étudié les solutions d'ondes progressives pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ces solutions sont exprimées par des fonctions hyperboliques, trigonométriques, rationnelles.

Cette étude montre que la méthode proposée est assez efficace et pratiquement bien adaptée à être utilisée pour trouver des solutions exactes des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Mots Clés : Méthode d'expansion $(\frac{G'}{G})$, Équation de boussinesq, ondes progressives.

ملخص

تتمثل هذه المذكرة في دراسة حلول الموجات المنتقلة للمعادلات التفاضلية الغير خطية، و يتم التعبير عن هذه الحلول من خلال الدوال المثلثية، ناطقة...
توضح هذه الدراسة ان الطريقة التوسع $(\frac{G'}{G})$ مناسبة لاستخدامها في ايجاد حلول دقيقة للمعادلات التفاضلية الجزئية الغير خطية.

الكلمات المفتاحية: موجات الانتقالية، معادلة بوسينسك، طريقة التوسع $(\frac{G'}{G})$