Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

REMILI ABD ELDJALIL & FADEL HOUDA

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques appliquées
Spécialité : Analyse mathématique applications

Thème

Sur Le calcul fonctionnelle dans l'espace de Besov critique

Soutenu publiquement Juillet 2021 devant le jury composé de

Benterki Djamila	Président
Bensaid Fares	Encadrant
Benaissa Soria	Examinateur

Promotion 2020/2021

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail et adresse ma profonde gratitude
A celle qui a tant prié pour moi, à la source de bienveillance et de tendresse, à la femme la plus merveilleuse qui existe, ma tendre mère, " Khoukha "

A celui qui m'a tout donné, à celui qui a œuvré pour mon confort et mon succès, à l'homme le plus grand et le plus cher de l'univers, mon cher père " Layachi ".

A ceux qui m'ont soutenu et aidé avec tout ce qu'ils ont, ce sont mes frères "MUHAMMAD ,DARADJI, HUSSEIN,AMEUR " et sœurs"NASSIRA ,ZAINAB, HAFSA, NADIA" pour toujours

Aux personnes qui comptent pour moi, qui m'ont comblé d'amour, m'ont rendu meilleur par leurs appréciations, conseils et orientation, mes "professeurs"

A ceux qui ont partagé ma réussite, " mes amis et camarades"

A toute la famille "REMILI " et " SILEM ".

REMILI ABDELDJALIL

Dédicaces

A mon très cher père

Tout l'encre du monde ne pourrait suffire pour exprimer mes sentiments envers un être très cher. Vous avez toujours été mon école de patience, de confiance et surtout d'espoir et d'amour.

Vous êtes et vous resterez pour moi ma référence, la lumière qui illumine mon chemin. Ce travail est le résultat de l'esprit de sacrifice dont vous avez fait preuve, de l'encouragement et le soutien que vous ne cessez de manifester, j'espère que vous y trouverez les fruits de votre semence et le témoignage de ma grande fierté de vous avoir comme père.

A ma très chère mère

Aucune dédicace très chère maman, ne pourrait exprimer la profondeur des sentiments que j'éprouve pour vous, vos sacrifices innombrables et votre dévouement firent pour moi un encouragement.

Vous m'avez aidé et soutenu pendant de nombreuses années avec à chaque fois une attention renouvelée.

J'implore Dieu, tout puissant, de vous accorder tout les deux une bonne santé, une longue vie et beaucoup de bonheur.

A ma sœur et mes chers frère

A mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de sucées.

A mon oncle et mes tantes paternels et leurs conjoints

A mes oncles et tantes maternels et leurs conjoints

A mes cousins et cousines

A mon boule de bonheur Kimo

A toute personne qui occupe une place dans mon cœur

FADEL HOUDA

Remerciements

On remercie Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr Bensaid, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent à M.Benterki Djamila, pour la gentillesse et avoir répondu à toutes nos questions, pour son aide pratique et son soutien moral et pour tous les conseils et les programmes qu'elle nous a données, et aussi pour nous avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Nous aimerions aussi exprimer notre gratitude à Benaissa Soria d'avoir bien accepté d'examiner le contenu du présent travail.

Nos remerciement s'adressent également à tout nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académique et professionnelles..

Résumé

Dans ce mémoire on va étudier la composition dans l'espace de Besov critique $(s = n/p)$ dans le sens suivant : Si g une fonction de la variable réelle qui opère, par composition à gauche, sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ où $0 < s < 1$, $s = n/p$, $1 \leq p, q \leq \infty$, alors g est globalement lipschitzienne.

Table des matières

Notations

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- $C(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espaces des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- $\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$.
- $\text{supp }(fg) \subset \text{supp} f \cap \text{supp} g$.
- $C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp} f \text{ est compact}\}$.
- on rappelle que si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, on note
$$\partial^\alpha \Phi = \frac{\partial^{|\alpha|}\Phi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\Phi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n, x^\alpha = x_1^\alpha \cdots x_2^\alpha$$
- On définit le produit de convolution de fonctions par
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$
- Pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$, on définit la transformé de Fourier de f par
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx$$
et la transformé de Fourier inverse de f par
$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)d\xi$$
.
- La transformée d'une distribution T (notée $\mathcal{F}(T)$),

en posant $<\mathcal{F}(T), f>=<T, \mathcal{F}(f)>$ ou

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\varepsilon} f(x)dx$$

- le nombre de combinaisons de m objet pris parmi l et sans remise est :

$$C_m^l = \frac{m!}{l!(m-l)!}$$

- pour $1 \leq p \leq \infty$, on note p' le nombre réel tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. ($p'$ est l'exposant conjugué de p).
- soient $0 < p \leq \infty$ et $0 < q \leq \infty$ si $f_k(x)$ est une suite de fonctions à valeurs complexes dans $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|f_k\|_{L_p(\ell_q)} = \| \, \|f_k\|_{\ell_q} \, \|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\sum_0^\infty |f_k(x)|^q)^{\frac{p}{q}} dx \right).$$

- inégalité de Maximum
  Si f est une fonction localement Lebesgue-intégrable et à valeurs complexe sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$(\mathcal{M}f)(x) = sup \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \, dy$$

est la fonction maximale de Hardy-Littlewood, où le *sup* est pris sur toutes les boules centrées en x.

Introduction

Au cours des dernière décennies, la théorie des espaces fonctionnels a connue un développement considérable et a été largement appliquée dans de nombreuses branches différentes de l'analyse moderne telles que l'analyse harmonique, les équations aux dérivées partielles, la théorie de l'approximation, etc. L'espace de Besov est généralement considéré comme une échelle très générale d'espaces de fonctions. Il couvre différents types d'espaces fonctionnels classiques comme cas particuliers, dont les espaces Lebesgue, espaces de Sobolev, espaces de Hardy,...(Voir par exemple [9]).

L'étude de la caractérisation des fonctions qui opèrent sur un espace fonctionnel E est appelée calcul fonctionnel dans E. De nombreux mathématiciens ont étudié le problème de la composition dans les différents espaces fonctionnels. Pour les espaces $B^s_{2,2}(\mathbb{R})$ avec $0 < s < 1/2$, cette étude a été commencée en 1965 par Igari [15], ce résultat est étendu aux espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ par G.Bourdaud [4], [5], [6] et W. Sickel [16] et D.Kateb [2] aussi par Moussai et ses collègues [11]. L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier l'opérateur de composition défini par $T_g := g \circ f,$ telle que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $g(0) = 0$ *et* $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres.
Le premier chapitre contient des notions de bases, quelques propriétés des espaces L^p de Lebesgue, Schwartz $\mathcal{S}$ et des distributions tempérées.
Dans le deuxième chapitre, on donne la décomposition de Littlewood-Paley puis on définit l'espace Besov avec quelques propriétés telles que : les inclusions, relations avec d'autres espaces et des normes équivalentes.
Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'opérateur de composition à gauche sur l'espace de Besov critique, c'est à dire lorsque $s = n/p$, dans le sens :

$$T_g := g \circ f, \text{ telle que } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ avec } g(0) = 0 \textit{ et } f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

avec $0 < s < 1$ et $p, q \in [1, \infty[$.

Chapitre 1

Généralités

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles dans un cadre général les espaces de Lebesgue, quelques inégalités classiques dans ces espaces et les propriétés et les outils que nous allons utiliser.
Nous introduisons aussi l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et quelques propriétés essentielles. Nous donnerons ensuite la transformée de Fourier et la formule d'inversion de Fourier, et leur propriétés dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1 (Espace $L_p(\Omega)$)**.**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On note L_1 l'espaces des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$$L_1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \ \textit{est mesurable et} \int_\Omega |f(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

Muni de la norme :

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx,$$

pour $p \neq \infty$, on pose :

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \ \textit{est mesurable et} \, |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Muni de la norme :

$$\|f\|_{L_p} = \left[\int |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on a :

$$L_\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \ \textit{est mesurable} : \exists\, C > 0 \ \textit{telle que} \ |f| \leq \ C \ \textit{p.p sur}\Omega \},$$

on définit :

$$\|f\|_\infty = \inf\{ C : |f(x)| \leq C \ \textit{p.p.sur} \ \Omega \}.$$

Remararque 1.1. Si $f \in L_\infty$ alors $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ p.p. sur Ω.
La remarque ci-dessus implique que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

Exemple 1.1.
- Si f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}$. On a $f\notin L_1(]0,1[)$.
- Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x(1-|\ln x|)}.$$

On a $f\in L_1(]0,1[)$ mais $f\notin L_p(]0,1[)$ pour $1<p<+\infty$.
- Toute fonction f, continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ est de L_∞.
- Toute fonction f, continue sur compacts est de L_∞.

On va donner maintenant quelques inégalités classiques dans les espaces L_p, et qui seront utiles pour la suite.

Soit $p\in]1,+\infty[$, il existe un unique $q\in]1,+\infty[$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. En effet, il suffit de prendre $q=\frac{p}{p-1}$. Notons que l'on a $(p-1)q=p$ et $(q-1)(p-1)=1$. Notons aussi que si $p=2$, alors on a $q=2$.

Lemme 1.
Soient $p,q\in]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. pour tout $s\geq 0$ et $t\geq 0$ on a :

$$st\leq \frac{1}{p}s^p+\frac{1}{q}t^q,$$

$$st=\frac{1}{p}s^p+\frac{1}{q}t^q\Longleftrightarrow s^p=t^q.$$

Proposition 1.1. *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1\leq p,\ q\leq+\infty$. Alors $f.g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ et

$$\|fg\|_1\leq \|f\|_p\,\|g\|_q\,.$$

Démonstration. Si $\|f\|_p=0$ ou $\|g\|_q=0$, l'inégalité est triviale, donc on suppose $\|f\|_p\neq 0$ et $\|g\|_p\neq 0$. D'après le lemme 1, on a :

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q}\leq \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q},$$

donc on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\,\|g\|_q}\right)dx &\leq \frac{1}{p\,\|f\|_p^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx+\frac{1}{q\,\|g\|_q^q}\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^q\,dx\\
&= \frac{1}{p\,\|f\|_p^p}\,\|f\|_p^p+\frac{1}{q\,\|g\|_q^q}\,\|g\|_q^q\\
&= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|\,dx\leq \|f\|_p\,\|g\|_q\,.$$

□

Remararque 1.2. Le cas particulier où $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder, donne l'inégalité de Cauchy- Schwarz.

Théorème 1.2. *(Inégalité d'interpolation)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, alors $f \in L_r(\Omega)$ pour tout $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ et $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \, \|f\|_q^{1-\alpha}.$$

Démonstration. On a $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ donc $1 = \frac{r\alpha}{p} + \frac{r(1-\alpha)}{q}$, on pose $k = \frac{p}{r\alpha}$ et $t = \frac{q}{r(1-\alpha)}$ et $|g| = |f|^r$ donc $\int_\Omega |g(x)| \, dx = \int_\Omega |g(x))|^\alpha \, |g(x)|^{1-\alpha} \, dx$ et $1 = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$.
Appliquons l'inégalité de Hölder 1.1

$$\int_\Omega |g(x)|^\alpha \, |g(x)|^{1-\alpha} \, dx \leq \left(\int_\Omega |g(x)|^{k\alpha} \, dx \right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{t(1-\alpha)} \, dx \right)^{\frac{1}{t}},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)|^r \, dx \quad &\leq \quad \left(\int_\Omega |f(x)|^{\frac{p}{r\alpha} r\alpha} \, dx \right)^{\frac{r\alpha}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)|^{\frac{q}{r(1-\alpha)} r(1-\alpha)} \, dx \right)^{\frac{r(1-\alpha)}{q}} \\ &= \quad \|f\|_p^{r\alpha} \, \|f\|_q^{r(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|f\|_r \leq \|f\|^\alpha \, \|f\|^{1-\alpha}.$$

□

Proposition 1.3. *(Inégalité de Minkowski)*
Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ alors $f + g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p \, dx \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{p-1} \, |f(x) + g(x)| \, dx \\ &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)| + |g(x)|) \, |f(x) + g(x)|^{p-1} \, dx \\ &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, |f + g|^{p-1} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, |f + g|^{p-1} \, dx. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Hölder 1.1, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, |f(x)d + g(x)|^{p-1} \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} \, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, |f(x) + g(x)|^{p-1} \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} \, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

par conséquent, on a :

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)(\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}).$$

D'où on a

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$

Et puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ on a $p=q(p-1)$ et $q=\frac{p}{p-1}$, donc

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$

□

Remararque 1.3. (Inégalité de Young)
Soient $p,q,r \in [1,\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$, avec $r \geq p$ et $r \geq q$ alors pour tout $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, on a

$$f * g \in L_r(\mathbb{R}^n) \ et \ \|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \, .$$

Démonstration. Voir [8] □

Proposition 1.4. *(Inégalité de Bernstein)*
Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C(\alpha,p,q,n) \geq 0$ telle que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $supp\mathcal{F}(f) \subset \{x \in R, |x| \leq M\}$, on a

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_q \leq CM^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p \, .$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi)=1$ si $|\xi| \leq 1$ on pose : $\varphi_M(\xi)=\varphi(\frac{\xi}{M})$, telle que $\varphi_M(\xi)=1$ si $|\xi| \leq M$, on a :

$$\varphi_M(\xi)\widehat{f^{(\alpha)}} = \widehat{f^{(\alpha)}},$$

on pose : $\varphi_M(\xi)=\widehat{g}(\xi)$ on a :

$$\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f^{(\alpha)}) = \mathcal{F}(f^{(\alpha)}), \tag{1.1}$$

en appliquant l'inverse de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f^{(\alpha)})) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f^{(\alpha)})) \\ g * f^{(\alpha)} &= f^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

et on a $g=\mathcal{F}^{-1}(\varphi_M)$, donc

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi_M) * f^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}$$
$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi_M)^{(\alpha)} * f = f^{(\alpha)}.$$

D'après l'inégalité de Young 1.3, on obtient

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_q \leq \left\|\mathcal{F}\varphi_M^{(\alpha)}\right\|_r \left\|f^{(\alpha)}\right\|_p ; \ avec \ \frac{1}{q}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi_M)^{(\alpha)}(x) = M^n(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}(xM),$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\left\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_M)^{(\alpha)}\right\|_r &= M^n\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(Mx)\right)^{(\alpha)r}dx\right)^{\frac{1}{r}}\\
&= M^n\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)e^{iy.Mx}dy\right)^{(\alpha)r}dx\right)^{\frac{1}{r}}\\
&= M^n\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(iy)^{|\alpha|}M^{|\alpha|}\varphi(y)e^{iy.Mx}dy\right)^{r}dx\right)^{\frac{1}{r}}\\
&= M^{n+|\alpha|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(iy)^{|\alpha|}\varphi(y)e^{iy.Mx}dy\right)^{r}dx\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

On pose $Mx = z$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_M)^{(\alpha)}\right\|_r &= M^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(iy)^{|\alpha|}\varphi(y)e^{iy.z}dy\right)^{r}dz\right)^{\frac{1}{r}}\\
&= M^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(z)\right)^{(\alpha)r}dz\right)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

donc

$$\left\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_M)^{(\alpha)}\right\|_r = M^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}}\left\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}\right\|_r,\ \textit{telle que}\ \left\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi^{(\alpha)}\right\|_r = C.$$

Alors

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_q \leq CM^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left\|f\right\|_p.$$

□

Théorème 1.5. *$L_p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Démonstration. On applique la remarque 1.1 dans le cas $p = \infty$ et la proposition 1.3 dans le cas $1 \leq p < \infty$. □

Théorème 1.6 (Riesz-Fischer)**.**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$. L_p est un espace de Banach.

Démonstration. Voir [8]. □

Théorème 1.7. *Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Si Ω est de mesure finie i.e $|\Omega| \leq \infty$, alors on a*

$$L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega).$$

Démonstration. Voir [8]. □

Remararque 1.4. Si la mesure de Ω n'est pas finie alors

$$L_q(\Omega) \not\subseteq L_p(\Omega).$$

Exemple 1.2. Si f est une fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. On va montrer que $f \in L_q(\Omega)$, on a

$$\int_1^\infty |f(x)|^q\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha q}}dx < \infty,$$

d'après Intégrales de Riemann, on a $q\alpha > 1$ donc $\alpha > \frac{1}{q}$.
Si $\frac{1}{p} > \alpha > \frac{1}{q}$ alors

$$f \in L_q \; et \; f \notin L_p.$$

Définition 1.2. Espace $\ell_p(\mathbb{N})$
Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$
Si $p \neq \infty$, on pose :

$$\ell_p(\mathbb{N}) = \Big\{(x_i) \in \mathbb{C} : \|x\|_p = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}.$$

Si $p = \infty$, on pose :

$$\ell_\infty(\mathbb{N}) = \left\{(x_i) \in \mathbb{C} : \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\right\}.$$

Proposition 1.8. *(Inégalité de Hölder)*
Pour $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit $(u_n) \in \ell_p$ et $(v_n) \in \ell_q$, alors

$$\sum_{n\geq 0} |u_n v_n| \leq \|u_n\|_p \|v_n\|_q.$$

Proposition 1.9. *(Inégalité de Minkowski)*
Pour $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit $(u_n) \in \ell_p$ et $(v_n) \in \ell_p$, alors

$$\|u_n + v_n\|_p \leq \|u_n\|_p + \|v_n\|_p.$$

Proposition 1.10.
1. *Pour tout $p \in [1, \infty]$, ℓ est un K-espace vectoriel et l'application $x \longrightarrow \|x\|_p$ est une norme sur ℓ_p.*
2. *L'espace $(\ell_p, \|\|_p)$ est de Banach.*
3. *Pour tous $p, q \in [1, \infty]$, on a $\ell_p \subset \ell_q$ si et seulement si $p \leq q$.*
4. *Si $1 \leq p \leq q < \infty$, alors pour tout $x \in \ell_p$, on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$.*
5. *On a*
$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Démonstration. Voir [3]. □

1.2 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz

1.2.1 Définition et propriétés

Définition 1.3. On dit qu'une fonction Φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ est à décroissance rapide si, pour tout $p \geq 0$ on a

$$N_p(\Phi) = \sup_{0\leq|\alpha|\leq p} \sup_{0\leq|\beta|\leq p} \left\| x^\alpha \frac{\partial^\beta \Phi}{\partial x^\beta}(x) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide. Avec

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\Phi \in C^\infty : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \longrightarrow \infty} \left| x^\alpha \Phi^{(\beta)}(x) \right| = 0\}.$$

Remararque 1.5. Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telle que pour $|\alpha| = p$

$$C_1(1+|x|)^p \leq |x^\alpha| \leq C_2(1+|x|)^p.$$

On aurait donc pu, au lieu de la famille N_p, choisir les semi-normes

$$\widehat{N_p} = \max_{|\beta| \leq p} \left\| (1+|x|)^p \Phi^{(\beta)}(x) \right\|_{L^\infty}.$$

Remararque 1.6. En dimension 1, si $\beta = 0$, alors

$$\sup_{0 \leq |\alpha| \leq p} \|x^\alpha \Phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$

donc Φ va vers 0 plus rapidement que $1/|x|^\alpha$. Si de plus $\alpha = 0$, alors on voit que $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Exemple 1.3. Dimension 1, $\Phi(x) = e^{-x^2}$, on va montrer par récurrence

$$\frac{d^\beta \Phi}{dx^\beta}(x) = P_\beta(x) e^{-x^2},$$

où P_β est un polynôme. Donc

$$x^\alpha \frac{d^\beta \Phi}{dx^\beta}(x) = x^\alpha P_\beta(x) e^{-x^2},$$

par passage à la limite

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x^\alpha \frac{d^\beta \Phi}{dx^\beta}(x) = 0,$$

et la fonction $x^\alpha \dfrac{d^\beta \Phi}{dx^\beta}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ pour tout α et β. Par conséquence, $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.4. La fonction $e^{-|x|}$ est à décroissance rapide mais n'est pas de classe C^∞, donc $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}$.

Exemple 1.5. Soit la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2} \cos(e^{2x^2})$. On a

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} |x^\alpha f(x)| = \lim_{|x| \longrightarrow \infty} \left| x^\alpha e^{-x^2} \cos(e^{2x^2}) \right|,$$

donc f est une fonction à décroissance rapide, mais elle n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puisque :
sa première dérivée n'est pas à décroissance rapide,

$$f'(x) = -2x(e^{-x^2} \cos(e^{2x^2}) + 2e^{x^2} \sin(e^{2x^2})).$$

Car : $\lim\limits_{|x| \longrightarrow \infty} |f'(x)| \neq 0$.

Définition 1.4. On dit qu'une suite Φ_n de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si :

$$\forall p \geq 0, \quad N_p(\Phi_n - \Phi) \longrightarrow 0 \;\text{ quand }\; n \longrightarrow \infty.$$

Remararque 1.7. ($D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)
Pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe une $\Phi_n \in D(\mathbb{R}^n)$ tel que ϕ_n converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers ϕ i.e.

$$N_p(\Phi_n - \Phi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \textit{pour tout } p.$$

Proposition 1.11. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes : si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors toutes les dérivées de ϕ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ainsi que les produits de ϕ par des polynômes.*
De plus, il existe une constante C telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \sup_{0\leq|\alpha|\leq p}\sup_{0\leq|\beta|\leq p}\left\| x^\alpha \frac{\partial^\beta \Phi}{\partial x^\beta}(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C N_{p+n+1}(\phi).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que :

$$N_p(\partial^\lambda \Phi) = \sup_{0\leq|\alpha|\leq p}\sup_{0\leq|\beta|\leq p}\left\| x^\alpha \partial^\beta(\partial^\lambda \Phi(x))\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq N_{p+q}(\Phi),$$

dés que $|\lambda| \leq q$. Aussi pour

$$N_p(x^\lambda \Phi) = \sup_{0\leq|\alpha|\leq p}\sup_{0\leq|\beta|\leq p}\left\| x^\lambda x^\alpha \partial^\lambda \Phi(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq N_{p+q}(\Phi).$$

□

Puisque $N_p(\Phi) \leq N_{p+n+1}(\Phi)$, on a bien sur,

$$\left\| x^\alpha \partial^\beta \Phi\right\|_{L^q} \leq C N_{p+n+1}(\Phi). \tag{1.2}$$

On notera que dans le cas $q = 1$, l'équation 2.1 donnent la même majoration

$$\left\| x^\alpha \partial^\beta \Phi\right\|_{L^1} \leq C N_{p+n+1}(\Phi). \tag{1.3}$$

Proposition 1.12. [14] $\forall 1 \leq p \leq \infty$, *l'espace* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.13. [14] *L'espace* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$.

1.2.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est bien définie Comme on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, On a le théorème suivant :
Théorème 1.14. *L'espace $\mathcal{S}$ est stable par transformé de Fourier. Autrement dit, Si $\Phi \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{F}\Phi \in \mathcal{S}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_p telle que :*

$$\forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \; N_p(\mathcal{F}\Phi) \leq C_p N_{p+n+1}(\Phi).$$

Démonstration.
En effet, d'après la proposition précédente, $\mathcal{F}\Phi \in C^\infty$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$(\mathcal{F}\Phi)^{(\alpha)}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}\left(x^\alpha \Phi\right)(\xi).$$

On a pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$

$$(i\xi)^{|\beta|}(\mathcal{F}\Phi)^{(\alpha)}(\xi) = (i\xi)^{|\beta|}(-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\Phi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}((x^\alpha\Phi)^{(\beta)})(\xi),$$

comme on a $\mathcal{F}\Phi(\xi)$ tend vers 0 et $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\xi^\beta(\mathcal{F}\Phi)^{(\alpha)}(\xi)\right| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{F}((x^\alpha\Phi)^{(\beta)})(\xi)\right| \leq \left\|(x^\alpha\Phi)^\beta\right\|_1.$$

D'après 1.3 on a

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{F}((x^\alpha\Phi)^{(\beta)})(\xi)\right| \leq CN_{p+n+1}((x^\alpha\Phi)^{(\beta)}) < \infty.$$

□

Lemme 2. *Soit $j \in \mathbb{N}^*$, i le nombre imaginaire et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ On a :*

(a)

$$\mathcal{F}(x_j\Phi)(\xi) = i\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\xi_j}\right)(\xi). \tag{1.4}$$

(b)

$$\mathcal{F}(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j})(\xi) = i\xi_j(\mathcal{F}(\Phi))(\xi). \tag{1.5}$$

(c)

$$\mathcal{F}(x^\beta\Phi)(\xi) = i^{|\beta|}\partial^\beta\mathcal{F}(\xi).$$

(d)

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha\Phi)(\xi) = (i\xi)^\alpha\mathcal{F}(\Phi)(\xi).$$

Démonstration.

1. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation à l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)e^{-ix\xi}dx$. La dérivée par rapport à ξ_j donne :

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\xi_j} = -i\int_{\mathbb{R}^n} x_j\Phi(x)e^{-ix\xi}dx.$$

puis

$$\mathcal{F}(x_j\Phi)(\xi) = i\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\xi_j}\right)(\xi).$$

2. On a :

$$\mathcal{F}(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x)e^{-ix\xi}dx,$$

par intégration par parties

$$\mathcal{F}(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j})(\xi) = i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) e^{-ix\xi} dx,$$

la fonction Φ tend vers 0 pour $x_j \longrightarrow \pm\infty$.

3. Par récurrence. Supposons qu'elle est vraie au rang β et montrons qu'elle est vraie au rang $\beta + 1$.
   On a donc
   $$\mathcal{F}(x^{\beta+1}\Phi)(\xi) = \mathcal{F}(xx^{\beta}\Phi)(\xi),$$
   d'après la première relation 1.4, on obtient
   $$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^{\beta+1}\Phi)(\xi) &= i\partial \mathcal{F}(x^{\beta}\Phi)(\xi) \\ &= i\partial \left(i^{|\beta|} \partial^{\beta} \mathcal{F}(\xi) \right) \\ &= i^{|\beta+1|} \partial^{\beta+1} \mathcal{F}(\xi). \end{aligned}$$
4. Il est clair qu'elle est vraie pour $\alpha = 1$. Par récurrence, supposons qu'elle vraie au rang α et montrons qu'elle est vraie au rang $\alpha + 1$.
   $$\mathcal{F}(\partial^{\alpha+1}\Phi)(\xi) = \mathcal{F}(\partial(\partial^{\alpha}\Phi))(\xi),$$
   d'après la deuxième relation 1.5, on obtient
   $$\begin{aligned} &= i\xi \mathcal{F}(\partial^{\alpha}\Phi)(\xi) \\ &= i\xi (i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}(\Phi)(\xi) \\ &= (i\xi)^{\alpha+1} \mathcal{F}(\Phi)(\xi). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.15. *Si une suite (Φ_k) converge dans $\mathcal{S}$ vers une fonction Φ alors $\mathcal{F}(\Phi_k)$ converge dans $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{F}(\Phi)$.*

Démonstration. Voir [1] □

1.3 L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées

Définition 1.5. On appelle distribution tempérée (ou parfois distribution à croissance lente), toute fonctionnelle linéaire continue définie sur $\mathcal{S}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $c \geq 0$ tels que :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), |\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}| \leq CN_p(\phi).$$

Remararque 1.8. Les distributions tempérées forment un espace vectoriel que l'on note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 1.6.

1) Toute distribution à support borné est tempérée.
2) δ et $vp\frac{1}{x}$ sont des distributions tempérées.

Définition 1.6. Soit (T_j) une suite de distributions tempérées. On dit que (T_j) tend vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$< T_j, \Phi > \longrightarrow < T, \Phi > .$$

Proposition 1.16. [1] *Si pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la suite $(< T_j, \Phi >)$ converge, alors il existe une distribution $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $T_j \longrightarrow T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

1.3.1 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.7. La transformée de Fourier d'une distribution tempérée T est la distribution $\mathcal{F}T$ (que l'on note aussi $\widehat{T}$) définie par :

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.17. *L'espace $\mathcal{S}'$ est stable par transformé de Fourier. Si $T \in \mathcal{S}'$, alors $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$.*

Démonstration. Voir [1] □

Remararque 1.9. De même on définit la transformée de Fourier (conjugué) $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ en posant

$$\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle.$$

Proposition 1.18.

1. *$\mathcal{F}T'(\xi) = i\xi \mathcal{F}T(\xi)$, c'est-à-dire, $\widehat{T'}(\xi) = i\xi \widehat{T}(\xi)$.*
2. *$\mathcal{F}T^{(n)}(\xi) = (i\xi)^{(n)} \mathcal{F}T(\xi)$, c'est-à-dire, $\widehat{T^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \widehat{T}(\xi)$.*
3. *$\mathcal{F}(T(x-c)) = \exp^{-i\xi c} \widehat{T}(\xi)$, $c \in \mathbb{R}$.*
4. *$\mathcal{F}(T(cx)) = \frac{1}{|c|}\widehat{T}(\frac{\xi}{c})$, $c \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Voir [1] et [14] □

Proposition 1.19. *Formule d'inversion de Fourier*
si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(w) \exp^{2\pi i w x} dw.$$

Proposition 1.20. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a*

$$\mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}\varphi) = \varphi.$$

$$\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\varphi)) = \varphi.$$

Autrement dit, dans l'espace $\mathcal{S}$ les transformées $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ sont inverses l'une de l'autre.

Proposition 1.21. *Pour tout $T \in \mathcal{S}'$, on a*

$$\mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}(T)) = T,$$

$$\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(T)) = T.$$

Autrement dit, dans l'espace $\mathcal{S}$ les transformées $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ sont inverses l'une de l'autre.

Remararque 1.10. Ici aussi, on peut remplacer dans les formules de réciprocité de Fourier ci-dessus, $\bar{\mathcal{F}}$ par la notation $\mathcal{F}^{-1}$.

Exemple 1.7. La transformée de Fourier de la distribution tempérée associée à la fonction constante 1 est égale à la distribution δ de Dirac. On a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle &= \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(x) dx, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(x) e^{2\pi i w 0} dx \\
&= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\varphi)(0) \\
&= \varphi(0) \\
&= \langle \delta, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{F}1 = \delta$.

Proposition 1.22. *Soient S et T deux distributions à supports bornés. Alors, le support du produit de convolution $S * T$ est borné et on a :*

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T).$$

Démonstration. Voir [10] □

Chapitre 2

Les espaces Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Les séries de Littlewood-Paley jouent un rôle important dans la définition des espaces de Besov. Dans ce chapitre on donnera la décomposition de Littlewood-Paley. Donc, pour une fonction $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on associé une décomposition sous la forme $f = \sum_{k \geq 0} Q_k f$. A partir de cette dernière on définit les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, puis on donne leurs propriétés (cas particuliers, normes équivalentes, ... etc), et on aborde quelques inclusions entre ces espaces, enfin nous enrichirons ce chapitre en donnant des exemples sur des fonctions de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

2.1 La décomposition de Littlewood-Paley

L'idée de base de la décomposition de Littlewood-Paley est d'écrire une fonction donnée f comme somme de fonctions élémentaires f_j telles que chaque f_j soit localisée en fréquence sur un anneau dyadique de taille 2^j.
Soit γ une fonction paire de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} \gamma(x) = 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 0 < \gamma(x) < 1 & \text{si} \quad 1 < |x| < \frac{3}{2} \\ \gamma(x) = 0 & si \quad |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Soit Φ la fonction définie par $\Phi(x) = \gamma(x) - \gamma(2x)$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose $\Phi_k(x) = \Phi(2^k x) = \gamma(2^k x) - \gamma(2^{k+1} x)$.
Les fonctions Φ_k ont les propriétés suivantes :

Proposition 2.1. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a*

1. *supp*$\Phi_k \subset \left\{ x : 2^{-(k+1)} < |x| < 3 \times 2^{-(k+1)} \right\}$
2. $\begin{cases} \Phi_k(x) = 1 & si \quad 2^{-k} < |x| \leq 3 \times 2^{-(k+2)} \\ 0 < \Phi_k(x) < 1 & si \quad 2^{-(k+1)} \leq |x| < 2^{-(k+2)} \text{ ou } 2^{-k} < |x| < 3 \times 2^{-(k+1)} \end{cases}$
3. $\Phi_k(0) = 0$

La suite $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une décomposition de l'unité, autrement dit :

Proposition 2.2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi(2^k x) = 1. \tag{2.1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{M} \Phi(2^k x) &= \gamma(2^N x) - \gamma(2^{N+1} x) \\
&+ \gamma(2^{N+1} x) - \gamma(2^{N+2} x) \\
&\vdots \\
&+ \gamma(2^M x) - \gamma(2^{M+1} x) \\
&= \gamma(2^N x) - \gamma(2^{M+1} x) \\
&= 1 \;\; \textit{quand } N \longrightarrow +\infty \textit{ et } M \longrightarrow -\infty,
\end{aligned}$$

car $\lim_{N\longrightarrow -\infty} \gamma(2^N x) = \gamma(0) = 1$ et $\lim_{M\longrightarrow +\infty} \gamma(2^{M+1} x) = 0$. □

La formule 2.1 est appelée partition homogène de l'unité.

Remararque 2.1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(2^k x) = 1,$$

on pose $x = 2^{-j}\xi$ avec $j \in \mathbb{Z}$, alors on obtient

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi(2^{-j} x) = 1.$$

En multipliant par $\widehat{f}$:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\ \Phi(2^{-j} x) = \widehat{f}.$$

Prenons la transformée de Fourier inverse des deux membres

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-jn} \mathcal{F}^{-1} \Phi(2^j x) * f = f. \tag{2.2}$$

La formule 2.2 est appelée la décomposition homogène de Littlewood-Paley correspondante à la fonction f.

On regroupe les termes d'indices $k \leq 0$ dans 2.1 pour trouver la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\Psi(x) + \sum_{k\geq 1} \Phi(2^k x) = 1 \tag{2.3}$$

avec $\Psi(x) = \sum_{k\geq 0} \Phi(2^k x) = 1 - \sum_{k\geq 1} \Phi(2^k x)$ est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ à support dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, |x| \leq \frac{3}{2}\}$.
La formule 2.3 est appelée partition non homogène de l'unité.

Remararque 2.2. Les formules 2.1 et 2.3 restent valables quand on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $x = 2^{-j}\xi$ avec $j \in \mathbb{Z}$, alors, 2.3 devient

$$\Psi(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Phi(2^{-k}\xi) = 1. \tag{2.4}$$

En multipliant par $\widehat{f}$:

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\Psi(2^j\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\Phi(2^k\xi), \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Prenons la transformé de Fourier inverse des deux membres en tenant compte de l'égalité

$$\mathcal{F}^{-1}(\Psi(2^j\xi)\widehat{f}(\xi))(x) = (2^{-jn}\mathcal{F}^{-1}(\Psi(2^j\xi))) * f(x),$$

on trouve

$$f = 2^{-jn}\mathcal{F}^{-1}(\Psi(2^j\cdot)) * f + \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{-kn}\mathcal{F}^{-1}(\Phi(2^k\cdot)) * f.$$

On définit les opérateurs de convolution S_j et Q_j par :

$$S_jf : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$Q_jf : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

telles que

$$S_jf = 2^{-jn}F^{-1}(\Psi(2^j.)) * f \qquad j = 0, 1, \cdots$$
$$Q_kf = 2^{-kn}\mathcal{F}^{-1}(\Phi(2^k.)) * f \qquad k = 1, 2, \cdots$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(S_jf) = \Psi(2^j\xi)f \qquad j = 0, 1, \cdots$$
$$\mathcal{F}(Q_kf) = \Phi(2^k\xi)f \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Théorème 2.4. *Pour toute fonction $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$f = S_jf + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_kf. \tag{2.5}$$

La formule 2.5 est appelée la série de Littlewood-Paley correspondante à la fonction f.
Pour $j = 0$, on a

$$f = S_0f + \sum_{k=1}^{\infty} Q_kf.$$

Posons $Q_0 = S_0$ pour obtenir

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} Q_kf.$$

Remararque 2.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$ on a

$$supp\ \widehat{Q_kf} \subset supp\Phi(2^k\xi) \quad et \quad supp\widehat{S_jf} \subset supp\Psi(2^j\xi).$$

2.2 Définitions et propriétés

Définition 2.1. Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$, l'espace de Besov est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_jf$ telles que

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{1/q} < \infty, & pour\ 1 \leq q < \infty \\ \sup_{j\geq 0} \left(2^{sj} \|Q_j f\|_p\right) < \infty, & pour\ q = \infty \end{cases}$$

Remararque 2.4. Les espaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sont des quasi-Banach pour $0 < p, q < 1$, et des Banach pour $p, q \in [1, +\infty]$.

Définition 2.2. Soient $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty]$, l'espace de l'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |Q_j f|^q\right)^{1/q}\right\|_p < \infty, & pour\ q \neq \infty \\ \left\| \sup_{j\geq 0} (2^{sj} |Q_j f|) \right\|_p < \infty, & pour\ q = \infty \end{cases}$$

2.3 Cas particuliers

1. $B^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n)$ (espace de Bessel). Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, \infty[$. L'espace H^s_p est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f(\xi)(\cdot)]$ soit une distribution régulière et
$$\|f\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} = \left\|\mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f(\xi)(\cdot)]\right\|.$$
2. $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ et $s \notin \mathbb{N}$. $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Hölder.
Soient $m \in \mathbb{N}$ *et* $s \in]m, m+1[$. L'espace $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ telles que
$$\|f\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x\neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x - y|^{s-m}}.$$
3. $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$(L'espace de Lizorkin-Triebel).
Soit $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espaces $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que
$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left\|\left\|\{2^{js} Q_j f\}_j\right\|_{\ell_q}\right\|_p < \infty.$$
4. $B^0_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^0_p(\mathbb{R}^n) = F^0_{p,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

2.4 Normes équivalentes

Définition 2.3. Soient $x, h \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ et f une fonction quelconque, introduisons l'opérateur des différences finies Δ_h telle que

$$\Delta_h f = \tau_{-h} f - f\ ,\ ou\ \tau_h f(x) = f(x - h),$$

et on pose

$$\Delta^1_h f(x) = \Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Les opérateurs $\Delta_h^m f$ sont définis par la relation de récurrence

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)),\ m \geq 2. \tag{2.6}$$

On déduit donc que

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h(\Delta_h^1 f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Remararque 2.5. Soient $x, h \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ et f une fonction quelconque définie dans une partie de $\mathbb{R}^n$, alors le terme général de $\Delta_h^m f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{l=0}^{m} C_m^l (-1)^{l+m} \tau_{-lh} f(x) = \sum_{l=0}^{m} C_m^l (-1)^l \tau_{(l-m)h} f(x)$$

Démonstration. Puisqu'on a

$$C_{m-1}^l + C_m^l = C_m^{l+1}$$

et

$$(-1)^{m+l} = (-1)^{m-l} = -(-1)^{m+l-1} = -(-1)^{m+l+1}$$

on déduit donc par récurrence que si $\Delta_h^m f(x) = \sum_{l=0}^m C_m^l (-1)^{m+l} \tau_{-lh} f(x)$, alors selon 2.6

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{m+1} f(x) &= \Delta_h(\Delta_h^m f(x)) = \Delta_h^m f(x+h) - \Delta_h^m f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m+k} f(x+(k+1)h) - \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m+k} f(x+kh) \\
&= \sum_{l=1}^{m+1} C_{m-1}^l (-1)^{m+l-1} f(x+lh) - \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m+k} f(x+kh) \\
&= f(x+(m+1)h) - (-1)^m f(x) + \sum_{l=1}^{m} (C_{m-1}^l (-1)^{m+l-1} - C_m^l (-1)^{m+l}) f(x+lh) \\
&= f(x+(m+1)h) - (-1)^m f(x) + \sum_{l=1}^{m} (C_m^{l+1} (-1)^{m+l+1}) f(x+lh) \\
&= \sum_{l=0}^{m+1} (C_m^{l+1} (-1)^{m+1+l}) f(x+lh) \\
&= \sum_{l=0}^{m+1} C_m^{l+1} (-1)^{(m+1)+l} \tau_{-lh} f(x)
\end{aligned}$$

donc

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k f(x+(m-k)h) = \sum_{l=0}^{m} C_m^k (-1)_{m+l} \tau_{-lh} f(x).$$

$\square$

Théorème 2.5. *Soient $m \in \mathbb{N}$, $0 < s < 1$ et $p, q \in [1, \infty]$. Alors*

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left\| \Delta_h^M f \right\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\} \textit{pour} \quad q < \infty,$$

et

$$B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \left(\|f\|_p + \sup_{h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-s} \left\| \Delta_h^M f \right\|_p \right) < \infty \right\}.$$

Dans le sens des quasi-normes équivalentes dans l'espace $B^s_{p,q}$.

Démonstration. Voir la preuve dans le livre de Triebel [9]. □

Définition 2.4. Pour $0 < s < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, on définit l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des distributions tempérées f qui vérifient :

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right)^{q/p} \frac{dh}{|h|^n} \right]^{1/q} < \infty. \tag{2.7}$$

2.5 Inclusions

Cette section est basée sur les références [9], [2] et [14].

Définition 2.5. Soit $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ deux espaces de Banach. On dit que X s'injecte dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$ si $X \subseteq Y$ et si l'application identité définie de X dans Y est continue, c'est-à-dire, s'il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in X$
on a

$$\|f\|_Y \leq C \|f\|_X .$$

Exemple 2.1. L'espace $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $\ell_q(\mathbb{R}^n)$ pour $p \leq q \leq \infty$.

$$\ell_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \ell_q(\mathbb{R}^n), \; 1 \leq p \leq q \leq \infty. \tag{2.8}$$

Proposition 2.6. *Soient* $s \in \mathbb{R}$ *et* $1 \leq p, q \leq \infty$. *Alors*

(i) $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n), \quad p \leq r \leq \infty.$

(ii) $B^{s+\varepsilon}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq r \leq \infty$ *et* $\varepsilon > 0$.

(iii) $B^s_{p,\min\{p,q\}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,\max\{p,q\}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p \leq \infty.$

Démonstration. (i) Puisqu'on a $p \leq r \leq \infty$ alors d'après 2.8 on a $\ell_q(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \ell_r(\mathbb{R}^n)$ $(\|f\|_{\ell_r} \leq C \|f\|_{\ell_q})$ d'où

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^s_{p,r}} = \left\| 2^{sj} \|Q_j f\|_p \right\|_{\ell_r} &\leq C \left\| 2^{sj} \|Q_j f\|_p \right\|_{\ell_q} \\ &= C \|f\|_{B^s_{p,q}} . \end{aligned}$$

(ii) Pour $1 \leq r \leq \infty$ arbitraire et $\varepsilon > 0$ on peut affirmer :

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^s_{p,r}} &= (\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjr} \|Q_j f\|_p^r)^{1/r} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjr} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Q_j f(x))^p dx \right)^{r/p} \right)^{1/r} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjr+jr\varepsilon-jr\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Q_j f(x))^p dx \right)^{r/p} \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{j\varepsilon} \sup \left(2^{j(s+\varepsilon)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Q_j f)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \right)^{r} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\sup 2^{j(s+\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^n} (Q_j f(x))^p dx)^{1/p} \right) (\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\varepsilon r})^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C \left(\sup 2^{j(s+\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^n} (Q_j f(x))^p dx)^{1/p} \right) \\
&\leq C \left\| f \right\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}} \leq C \left\| f \right\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,q}} .
\end{aligned}
$$

Concernant (iii), nous allons étudier deux cas :
1)Si $1 < q \leq p \leq \infty$

$$
\begin{aligned}
\left\| f_k \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n,\ell_q)} &= \left\| (\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q \right\|^{1/q}_{L_{p/q}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| f_k \right\|^q_{L_{p/q}(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/q} = \left\| f_k \right\|_{\ell_q(L_p(\mathbb{R}^n))} .
\end{aligned}
$$

Soit $f \in B^s_{p,q}$. Posons $u = \frac{p}{q}$ (donc $u > 1$), alors

$$
\begin{aligned}
\left\| f \right\|_{F_{p,q}} &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \left| Q_j f \right|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \left| Q_j f \right|^q \right)^{u} dx \right]^{\frac{1}{uq}} \\
&\leq \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 2^{sjqu} \left| Q_j f \right|^{qu} \right)^{\frac{1}{u}} dx \right]^{\frac{1}{uq}} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjp} \left\| Q_j f \right\|^q_{L_p} \right]^{\frac{1}{p}} = \left\| f \right\|_{B^s_{p,q}} .
\end{aligned}
$$

2) Puis, si $1 < p \leq q \leq \infty$, on a

$$
\begin{aligned}
\left\| f_k \right\|_{\ell_p(L_q(\mathbb{R}^n))} &= \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{\ell_q} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_k|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |f_k|^p \right\|_{\ell_{\frac{q}{p}}}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f_k\|_{\ell_{\frac{q}{p}}}^p \right)^p = \|f_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n,\ell_q)} ,
\end{aligned}$$

comme $p \leq q$, posons $v = \frac{p}{q}$, alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^s_{p,q}} &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jps} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Q_j f|^p \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 2^{jps} |Q_j f|^p \, dx \right)^{v} \right]^{\frac{1}{vp}} \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jspv} |Q_j f|^{pv} \, dx \right)^{\frac{1}{v}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} |Q_j f|^{q} \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} = \|f_k\|_{F^s_{p,q}} .
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.7. *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow W^m_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^m_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \\
B^s_{\infty,1}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow C^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^m_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Démonstration. Voir [9]

□

Proposition 2.8. *Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned}
B^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow L^\infty \quad \textit{si et seulement si } 0 < p \leq \infty \textit{ et } 0 < q \leq 1 \\
B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow L^\infty \quad s > \tfrac{n}{p} \quad 0 < p, q \leq \infty
\end{aligned}$$

Démonstration. voir [9] □

Proposition 2.9. *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \geq 1$. Si $f \in B^s_{p,q}$ alors $\partial^\alpha f \in B^{s-|\alpha|}_{p,q}$.*

Démonstration. On a $\|Q_j(\partial^\alpha f)\|_p = \|\partial^\alpha (Q_j f)\|_p$, et d'après l'inégalité de Bernstein ($p = q$), on aussi

$$\|\partial^\alpha (Q_j f)\|_p \leq C 2^{j|\alpha|} \|Q_j f\|_p ,$$

donc

$$\|Q_j(\partial^\alpha f)\|_p \leq C 2^{j|\alpha|} \|Q_j f\|_p ,$$

$$\left\| 2^{j(s-|\alpha|)} \|Q_j(\partial^\alpha f)\|_p \right\|_{\ell_q} \leq C \left\| \left\| 2^{js} Q_j f \right\|_p \right\|_{\ell_q} ,$$

d'où

$$\|\partial^\alpha f\|_{B^{s-|\alpha|}_{p,q}} \leq C\, \|f\|_{B^s_{p,q}}\,.$$

□

2.6 Exemples de fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Exemple 2.2. Soit $p \geq 1$, on a $\delta \in B^{-\frac{n}{q}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

En effet, soit $f = \delta$, donc $Q_k f = 2^{kn}\Phi(2^k\varepsilon)$, d'où

$$\|Q_k f\|_p = 2^{kn}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{F}^{-1}(\Phi(2^k\xi))\right|^p d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

En effectuant le changement de variable $x = 2^k\xi$, on trouve

$$\|Q_k f\|_p = 2^{kn-\frac{kn}{p}}\left\|\mathcal{F}^{-1}(\Phi(x))\right\|_p,$$

donc

$$2^{-kn/q}\,\|Q_k f\|_p = \left\|\mathcal{F}^{-1}(\Phi(x))\right\|_p.$$

Passant à la borne supérieure des deux côtés par rapport à k, on trouve

$$\sup_{k\geq 0} 2^{-kn/q}\,\|Q_k f\|_p = \sup_{k\geq 0}\left\|\mathcal{F}^{-1}(\Phi(x))\right\|_p,$$

$$\|\delta\|_{B^{-n/q}_{p,\infty}} = \left\|\mathcal{F}^{-1}(\Phi(x))\right\|_p < \infty,$$

d'où

$$\delta \in B^{-\frac{n}{q}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

Dans les exemples suivants, nous allons utiliser la fonction $\rho \in C^\infty$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq e^{-3} \\ 0 & si \quad x > e^{-2} \end{cases}$$

Exemple 2.3. Soit $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie par :

$$f(x) = |\log|x||^\alpha\,(\log|\log|x||)^{-\lambda}\rho(|x|).$$

On définit U_q l'ensemble des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

- $\alpha = 1 - \frac{1}{q}$ et $\lambda > \frac{1}{q}$ ou $\alpha < 1 - \frac{1}{q}$, si $1 < q < \infty$.

- $\alpha = 0$ et $\lambda > 0$ ou $\alpha < 0$, si $q = 1$.

- $\alpha = 1$ et $\lambda \geq 0$ ou $\alpha < 1$, si $q = \infty$.

Si $p, q \in [1, \infty]$, on a $f \in B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si est seulement si $(\alpha, \lambda) \in U_q$.

Exemple 2.4. Soient $\beta > 0$ et $0 < \alpha + n/p < 2(\beta + 1)$. On définit le nombre s par

$$s = \frac{1}{\beta + 1}(\alpha + \frac{n}{p}).$$

Si $g \in B^{\gamma}_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ pour certain $\gamma > s$, alors on a

$$f(x) = |x|^{\alpha} g(|x|^{\beta})\rho(|x|) \in B^{s}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Pour $g(x) = \sin^2(\frac{t}{2})$ on a $f \notin B^{s}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ pour $q < \infty$.

Chapitre 3

Composition dans les espaces de Besov critiques

3.1 Introduction

Ce chapitre contient le principal de notre mémoire qui est la composition dans les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. En se basant sur l'article [7], on va étudier l'opérateur de composition défini par

$$T_g(f) := g \circ f, \text{ tel que } g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \text{ avec } g(0) = 0 \text{ et } f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Définition 3.1. À toute fonction $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ on associe l'opérateur de composition $T_g(f) := g \circ f$. Soit E un espace de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que g opère sur E si l'on a $T_g(E) \subset E$.

3.2 Lemmes

Lemme 3.
Soit $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(0) = 0$, pour tout $f \in B^s_{p,q}$, on ait $g \circ f \in B^s_{p,\infty}$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication,

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \le \delta \ \Rightarrow \|g \circ f\|_{B^s_{p,\infty}} \le M,$$

soit vérifiée par tout fonction portée par le cube unité $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$.

Démonstration. Nous allons montrer l'existence d'un cube R et de nombres δ et M tels que, pour toute fonction portée par R, on a :

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \le \delta \ \Rightarrow \|g \circ f\|_{B^s_{p,\infty}} \le M.$$

Supposons, au contraire, que pour tout cube R et tous nombres M et δ on a :

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \le \delta \text{ et } \|g \circ f\|_{B^s_{p,\infty}} > M.$$

On considéré la suite R_j des cubes disjoints et des fonction $\varphi_j \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ telles que : $\varphi_j(x) = 1$ sur $\frac{1}{2}R_j$ et $\varphi_j(x) = 0$ en dehors de R_j.
M_j est la norme des opérateurs $T : f \longmapsto f\varphi_j$ sur $B^s_{p,\infty}$.

En choisissant des fonction f_j telles que :

$$suppf_j \subset \frac{1}{2}R_j \ , \|f_j\|_{B^s_{p,q}} < 2^{-j} \ , \|g \circ f\|_{B^s_{p,\infty}} \geq jM_j$$

on a

$$f_j = f\varphi_j$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0} f_j &= \sum_{j\geq 0} f\varphi_j \\ &= f\sum_{j\geq 0}\varphi_j \\ &= f\end{aligned}$$

et $(g \circ f)\varphi_j = g \circ f_j$. Puisque $(g \circ f)\varphi_j = g \circ f$ sur $\frac{1}{2}R_j$ et $(g \circ f)\varphi_j = 0$ en dehors de R_j

$$(g \circ f)\varphi_j = g \circ (f\varphi_j) = g \circ f_j.$$

La fonction $f = \sum_{j\geq 0} f_j$ appartient à $B^s_{p,q}$ et $(g \circ f)\varphi(j) = g \circ f_j$; il vient alors

$$\begin{aligned}jM_j < \|(g \circ f)\varphi_j\|_{B^s_{p,\infty}} &= \|T(g \circ f)\|_{B^s_{p,\infty}} \\ &\leq M_j \|g \circ f\|_{B^s_{p,\infty}}\end{aligned}$$

$$j \leq \|g \circ f\|_{B^s_{p,\infty}} \tag{3.1}$$

On pose

$$\|g \circ f\|_{B^s_{p,\infty}} = k \tag{3.2}$$

Si $j > k$, 3.1 et 3.2 conduisent à une contradiction. □

Lemme 4. *Pour tout entier $N \geq 1$, la function $f(x) = \sum_{|k_j|\leq N} \varphi(x-k)$ appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et on a $\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq CN^{\frac{n}{p}}$ (la somme étant étendue à l'ensemble des K de $\mathbb{Z}^n$ tels que $|K_j| \leq N$ pour tout $j = 1, \cdots, n$).*

Démonstration. Nous utiliserons l'équivalence de la norme Besov de N_1 avec :

$$N_1 = \|f\|_p + \left[\int_V |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx\right)^{q/p} dh/h^n\right]^{1/q}.$$

En prenant $V = (h \in \mathbb{R};\ |h_j| \leq 1/6;\ j = 1, \cdots, n)$. Les fonction $\varphi(\cdot - k)$ ayant des supports disjoints, on a :

$$\|f\|_p^p = \sum_{|k_j|\leq N} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-k)|^p \, dx = (2N+1)^n \|\varphi\|_p^p.$$

Pour h dans V, la fonction $\varphi(\cdot + h - k) - \varphi(\cdot - k)$ est portée par $Q + k$; de sorte que les différentes fonction $\varphi(\cdot + h - k) - \varphi(\cdot - k)$ ont leurs supports disjoints ; cela nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx &= \sum_{|k_j| \leq N} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+h-k) - \varphi(x-k)|^p \, dx \\ &= (2N+1)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \, dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C N^{n/p}.$$

□

Lemme 5. *Dans le cas sous-critique et critique, il existe une suite* $(\theta_v)_{v \geq 1}$ *de function* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^n$*, portées par* Q*, telles que* $\theta_v(x) = 1$ *sur le cube* $2^{-v}Q$ *et* $\lim_{v \longmapsto \infty} \|\theta_v\|_{B^s_{p,q}} = 0$.

Démonstration. Donnons-nous une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & sur \;\; (1/2)R_j. \\ 0 & hors \;\; R_j. \end{cases}$

Dans le cas $s < n/p$ est très simple : On pose $\theta_v(x) = \varphi(2^v x)$;

$$\begin{aligned}\|\theta_v\|_{B^s_{p,q}} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|Q_j \theta_v\|_p^q \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} (\int_{\mathbb{R}^n} |Q_j \varphi(2^\nu t)|^p \, dt)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} 2^{-n\nu q/p} (\int_{\mathbb{R}^n} |Q_j \varphi(y)|^p \, dy)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &= 2^{-n\nu/p + s\nu - s\nu} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} (\int_{\mathbb{R}^n} |Q_j \varphi(y)|^p \, dy)^{q/p} \right)^{1/q}, \; avec \;\; \rho = n/p - s \\ &\leq 2^{-\nu\rho} \|\varphi\|_{B^s_{p,q}}.\end{aligned}$$

L'estimation $\|\theta_\nu\|_{B^s_{p,q}} \leq 2^{-\nu\rho} \|\varphi\|_{B^s_{p,q}}$ permet de conclure.
Dans le cas $s = n/p$:
On a $R_j \cap R_k = \emptyset \; si \;\; j \neq k \;\; et \;\; R_j \subset Q$, ce qui nous donne $Q = \cup Rj$. Posons maintenant

$$\theta_\nu(x) = \nu^{-1} \sum_{j=1}^{\nu} \varphi(2^j x);$$

On a aussitôt $\theta_\nu(x) = \begin{cases} 1 & sur \;\; (1/2)Q. \\ 0 & hors \;\; Q. \end{cases}$
pour estimer les normes des θ_ν. On applique alors le théorème 3.1 de [12] et le théorème 5.3 de [13] qui s'écrivent alors

$$\|\theta_v\|_{B^s_{p,q}} \leq C \; v^{\frac{1}{q}-1}.$$

$$\lim_{v \longmapsto 0} \|\theta_v\|_{B^s_{p,q}} \leq \lim_{v \longmapsto 0} C \; v^{\frac{1}{q}-1} = 0.$$

□

3.3 La composition dans $B^{n/p}_{p,q}$

Théorème 3.1.

Soient $1 < p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$. Pour une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) g opère, par composition à gauche, sur $B^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) il existe un $r \in]1, q[$ tel que, pour tout $f \in B^{\frac{n}{p}}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$, on ait $g \circ f \in B^{\frac{n}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$;

(iii) g est globalement lipschitzienne et $g(0) = 0$.

Démonstration. D'après le lemme 3, $(i) \Longrightarrow (ii)$.
Montrons que (ii) implique (iii). Si g vérifie (ii), il existe un $\delta > 0$ et un $M > 0$ tels que, pour tout fonction f porté par Q, vérifiant $\|f\|_{B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta$, on ait $\|g \circ f\|_{B^{n/p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M$.
Soient a et b deux nombre complexes et φ est la fonction plateau on pose

$$f(x) = (b-a) \sum_{|k_j| \leq N} \varphi(\frac{x}{\lambda} - k) + a\theta_v(x);$$

La somme $\sum_{|k_j \leq N|} \cdots$ est étendue aux $k \in \mathbb{Z}^n$ tels que $|k_j| \leq N$, pour tout $j \in 1, \cdots, n$, le nombre $\lambda \in]0, 1[$ et les entiers positifs N et v seront fixes dans un instant.
Le lemme nous autorise à choisir v tel que

$$|a| \, \|\theta_v\|_{B^{n/p}_{p,q}} \leq \frac{\delta}{2}.$$

D'après le lemme 4, on a

$$\sum_{|k_j| \leq N} \varphi(\frac{x}{\lambda} - k) \leq CN^{\frac{n}{p}}.$$

Choisissons l'entier $N \geq 1$ tels que

$$CN^{\frac{n}{p}} \, |b-a| = \frac{\delta}{2}.$$

Désignons par Q^+ le cube $[0, 1/2]$ et posons $h = (1/3, 0 \cdots, 0)$. Alors, pour $x \in \frac{1}{3}Q^+$, on a $x + h \in Q$ et $x + h \notin \frac{2}{3}Q$.
Autrement dit, pour tout x dans $\lambda(\frac{1}{3}Q + k)$, on a $f(x + \lambda h) = a$ et $f(x) = b$

$$g(f(x + \lambda h)) - g(f(x)) = g(a) - g(b)$$

Cela donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(f(x+\lambda h)) - g(f(x))|^p \, dx \geq \sum_{|k_j| \leq N} \int_{\lambda(\frac{1}{3}Q^+ + k)} |g(a) - g(b)|^p \, dx$$

avec $\lambda(\frac{1}{3}Q^+ + k_j) \cap \lambda(\frac{1}{3}Q^+ + k_i) = \emptyset,\ i \neq j$

$$\begin{aligned}
\sum_{|k_j|\leq N} \int_{\lambda(\frac{1}{3}Q^+ + k)} |g(a) - g(b)|^p \, dx &= (2N+1)^n \, |g(a) - g(b)|^p \, vol[\lambda(\frac{1}{3}Q^+ + k] \\
&= (2N+1)^n \, |g(a) - g(b)|^p \, 6^{-n} \lambda^n \\
&\geq CN^n \left(|g(a) - g(b)|\right)^p .
\end{aligned}$$

D'après 2.7, on a

$$\begin{aligned}
M \geq \|g \circ f\|_{B^s_{p,\infty}} &\geq |\lambda h|^{-s/n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(f(x + \lambda h)) - g(f(x))|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= CN^{n/p} \, |g(a) - g(b)| \\
&= \frac{C\delta}{|a-b|} \, |g(a) - g(b)| .
\end{aligned}$$

Finalement

$$|g(a) - g(b)| \leq C \, |b - a| .$$

On veut montrer que g(0)=0. On a $T_f(g) = g \circ f$

$$\|T_f(g)\|_{B^s_{p,\infty}} \leq C \, \|f\|_{B^s_{p,\infty}} .$$

Si $f = 0$

$$\|g(0)\|_{B^s_{p,\infty}} \leq 0$$

cela implique que $\|g(0)\|_{B^s_{p,\infty}} = 0$. Alors $g(0) = 0$. □

Conclusion

Dans ce mémoire, on a vu les conditions pour lesquelles l'opérateur de composition à gauche T_g opère sur les espaces de Besov $B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Ces conditions sont énoncé dans le Théorème 3.1.

Ce résultat peut être étendu à d'autres cas, par exemple les cas où $s \neq n/p$ ou $s > 1$. Il peut être aussi étudié sur d'autres espaces fonctionnels tels que : Hölder, Lizorkin-Triebel, ...

La composition dans les espaces de Besov, particulièrement dans les cas critiques, est utilisée dans de nombreux domaines des mathématiques, les équations de Navier-Stokes par exemple.

Bibliographie

[1] Ahmed Lesfari, *Analyse de Fourier et Transformation de Laplace*, Ellipses Marketing, (2012).

[2] D.Kateb, *On the boundedness of the mapping* $\rightarrow |f|^{\mu}, \mu > 1$*, on Besov Spaces*, Math.Nachr 248-249 (2003), 110-128.

[3] El Hage Hassan Nawfal, *Topologie générale et espaces normés.*Dunod,2011.

[4] G.Bourdaud and M.Lanza de Cristoforis, *Functional calculus in Hölder-Zygmund spaces*, Trans. Amer. Math. Soc.354(2002), 4109-4129.

[5] G.Bourdaud, M.Lanza de Cristoforis and W.Sickel, *Superposition operators and functions of bounded p-variation* Rev. Mat. Iberoamer (Fév,2004), (to appear). Prépublication 362. Institut de Mathématiques de Jussieu. Unité Mixte de Recherche 7586. Université Paris VI et Paris VII / CNRS. www.institut.math.jussieu.fr.

[6] G.Bourdaud, Massimo Lanza de Cristoforis, and W. Sickel, *Superposition operators and functions of bounded p-variation II*, Nonlinear Analysis Series A Volume. 62 (2005), 483-518.

[7] G. Bourdaud, *Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique*,American Mathematical society,volume 116, Number 4, december 1991

[8] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle - Théorie et application*, Université Pierre et Marie Curie et Ecole Polytechnique paris, 1987.

[9] H.Triebel, *Theory of function spaces*, masson, Birkhauser Verlag, Basel, 1983.

[10] H.Triebel, *theory of function spaces 2*, Birkhauser Verlag, Basel,Boston.Berlin 1992.

[11] M.Moussai, *The composition in Lizorkin-Triebel spaces via para-differential operators*, MATH. REPORTS 13(63), 2 (2011), p.151-170.

[12] M.frazier et B.Jawerth, *Décomposition of Besov spaces*, indiana Univ. Math.J.84(1985).P.777-799

[13] M.frazier et B.Jawerth, *A discrete transform and applications to distribution spaces*, J.Funct.anal.93(1990).P.34-170

[14] L.Schwartz. *Théorie des distributions*, Hermann, 1997.

[15] S.Igari, *Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace* $\widehat{A^2}$, Ann.Inst. Fourier. Grenoble 15/21 (1965), p.525-533.

[16] W.Sickel, *Necessary conditions on composition operators acting on Sobolev spaces of fractional order*,Forum Math.9(1997), p.267-302.