RÉPUBLIQUE ALGÉRIÈNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI
Faculté des Mathématiques & Informatique

Mémoire

Présenté par

LAMARA Madiha & SAADOUNE Youssra

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : ***Mathématiques***
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Théme : Contrôlabilité des systèmes paraboliques avec un seul contrôle

---

Soutenu publiquement le ***.... / 07 / 2021*** *devant le jury composé de :*

ADDOUNE Ismail.	Président
BENNOUR Abdelaziz."Dieu repose son âme"	Encadrant
BERKANI Amirouche.	Co-Encadrant
HAMMANI Fatima.	Examinateur

Promotion 2020/2021

Remerciements

Au début et avant tout, nous remercions Dieu tout puissant qui nous a aidé à terminer ce travail.

Nous remercions notre encadreur Dr. BENNOUR Abdelaziz, pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans laquel ce travail n'aurait pas piètrement au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité. "Dieu repose son âme".

Nous remercions notre encadreur Dr. BERKANI Amirouche, pour l'aide qu'il nous a apporté soutien et son encouragement.

Nous tenons aussi à exprimer nos remercierons les plus respectueux à messieurs les membres de jury : ADDOUNE Ismail et HAMMANI Fatima.

Nous adressons nos sincères remerciements à faculté des mathématiques.

Merci beaucoup aux parents pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et économique, qui nous permis de réaliser les études que nous voulions et par conséquent ce mémoire. et nous remercions nos frères, et tout les amis.

Dédicaces


- رحمة الله عليك يا أستاذ-
خطفتك منا المنية قبل أن نكمل معا البقية
إذا كان الإهداء جزءا من الوفاء نهديك هذا التخرج
إلى روح أستاذي الطاهرة- رحمة الله عليه-
لم نجد من هو أكثر منك شوقا لقراءة هذه المذكرة
فلا يوجد من هو أحق منك نهديها
إليك . . يا من كنت على صفحاتك حرفا ويا من عشت أيامك صبرا
إليك . . يا من علمتنا معنى الكفاح ويا من أذقتنا طعم النجاح
إليك . . يا من أعطيتنا درسا المجد للأقوى نفسا
إلى طيب القلب الذي علمنا بمثاليته وتواضع صفاته
" بنور عبد العزيز"
ستبقى ذكراك في القلوب حية

Table des matières

Introduction générale

La contrôlabilité des équations aux dérivées partielles est un sujet en plein développement. Son histoire a commencé avec le cas de la dimension finie, son extension à la dimension infinie a connu plusieurs temps. La théorie de la contrôlabilité aux trajectoires a été développé, dans les années 70', en particulier autour des systèmes parabolique. Le contrôle des systèmes d'équations aux dérivées partielles constitue un champ mathématique en plein essor. Même si de grandes avancées ont été effectuées ces dernières années, de nombreuses questions restent encore ouvertes. Le contrôle consiste à agir sur une partie de la dynamique afin d'orienter l'évolution. L'objectif général de la théorie de contrôle est d'obtenir des systèmes plus fiables, plus économiques et plus rapides. Pour un système biologique. La contrôlabilité peut réduire la douleur et de prolonger la vie. Par exemple, on étudie un régulateur de pression sanguine destiné à maintenir cette pression à niveau constant et convenable, un autre exemple l'étude de la thérapie des tumeurs au cerveau (Modèle de glioblastome) qui est modélisé par un système de deux équations paraboliques couplées avec un seul contrôle.
Le but de ce travail est d'étudier la contrôlabilité des systèmes paraboliques avec un seul contrôle, les outils utilisés pour atteindre ce but sont essentiellement la méthodes des moments et inégalité de type Ingham.

Ce mémoire est organisé comme suit : Dans le premier chapitre ; on rappelle quelques notions préliminaires d'analyse fonctionnelle, les théorèmes et les définition nécessaires et utiles pour aborder les autres chapitres, ainsi que les espace fonctionnelles, les espaces de Sobolev, et semi-groupe.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons les définitions et les divers caractérisations liées à la notion de la contrôlabilité de système linéaire (contrôlabilité exacte, approche et à zéro) et l'inégalité d'observabilité de système.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous considérons le problème de contrôlabilité pour deux équations paraboliques couplées.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des définitions et des notions qui seront utilisées dans les deux chapitres et d'introduire des résultats et des théorèmes utiles pour étudier les espaces de Hilbert, L^p et les espaces de Soboleve.

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Définitions élémentaires

Définition 1.1. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive.*

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle u, v\rangle| \leq |\langle u, u\rangle|^{\frac{1}{2}} |\langle v, v\rangle|^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u, v \in H.$$

Rappelons aussi qui

$$\|u\|_2 = |\langle u, u\rangle|^{\frac{1}{2}}$$

est un norme associe ou produit scalaire.

Définition 1.2. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $|\langle u, v\rangle|$ et qu'est complet pour la norme associée $\|\cdot\|$.*

Théorème 1.1. *(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) Étant donné $\varphi \in H'$ il existe $f \in H$ unique telle que*

$$\langle \varphi, v\rangle = (f, v) \qquad \forall v \in H.$$

De plus on a

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Démonstration. voir[7] □

1.1.2 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.3. *[7] On dit qu'un forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est*

(i) continue : s'il existe une constante C telle que $|a(u, v)| \leq C |u| |v| \quad \forall u, v \in H,$

(ii) coercive : s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $a(v, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H.$

Théorème 1.2. *(Lax-Miligram) Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique telle que :*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

1.2 Espace $L^p(\Omega)$

1.2.1 Définitions élémentaires

Dans la suite, Ω sera un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.4. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$: on pose*

$$L^p(\Omega) = \Big\{ \ f : \Omega \longrightarrow R \ , \ f \ \textit{mesurable et} \ |f|^p \in L^1(\Omega) \Big\}$$

on note.

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$:

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ f$ *mesurable et existé une constante C telle que* $|f(x)| \leq c$ *p.p sur* $\Omega \}$.

Notation 1. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on dit que q est l'exposant conjuguée de p si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1.2.2 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Young

Théorème 1.3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $p, q \in]1, +\infty[$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors,*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \quad a \geq 0, \ b \geq 0.$$

Démonstration. : On sait que la fonction ln est concave $\forall \lambda \in]0,1[\ \forall \ x, y \in \mathbb{R}$:

$$\ln(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda \ln x + (1-\lambda) \ln y$$

on pose : $\lambda = \frac{1}{p} \Rightarrow (1-\lambda) = \frac{1}{q}$, $x = a^p$, $y = b^q$, donc

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) &\geq \frac{1}{p} \ln(a)^p + \frac{1}{q} \ln(b)^q \\ &= \ln(a) + \ln(b) \\ &= \ln(ab) \end{aligned}$$

la fonction exp est croissante, donc

$$e^{\left(\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)\right)} \geq e^{\ln(ab))}$$

$$\textit{donc} \qquad \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \geq ab.$$

□

Inégalité de Hölder

Théorème 1.4. *Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, $fg \in L^1$ et*

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Young 1.3 on a

$$|fg| \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q, \text{ p.p } x \in \Omega.$$

Si $\|f\|_p > 1$ et $\|g\|_q > 1$. Alors on pose

$$F = \frac{f}{\|f\|_p} \text{ et } G = \frac{g}{\|g\|_q} \quad \text{donc} \quad \|F\|_p = 1 \quad \text{et} \quad \|G\|_q = 1.$$

Alors d'après Young 1.3

$$|FG| \leq \frac{1}{p}|F|^p + \frac{1}{q}|G|^q$$

$$\left|\frac{f}{\|f\|_p}\frac{g}{\|g\|_q}\right| \leq \frac{1}{p}\left|\frac{f}{\|f\|_p}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{g}{\|g\|_q}\right|^q$$

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int|fg|\,dx \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int|f|^p\,dx + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int|g|^q\,dx$$

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\|g\|_q^q$$

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

donc

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q .$$

□

Remarque 1. *Le cas particulier où $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder, donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Inégalité de Minkowski

Théorème 1.5. *Soient f et g de $L^p(\Omega)$, alors $f+g \in L^p(\Omega)$ et*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int|f+g|^p \\
&= \int|f+g|^{p-1}|f+g| \\
&\leq \int|f+g|^{p-1}|f| + \int|f+g|^{p-1}|g| ,
\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder on aura

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\int |f+g|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |f+g|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ on a $p=q(p-1)$, donc

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\|f\|_p + \|g\|_p\right]$$

et par suite

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

$\square$

Proposition 1. *Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont la mesure de Lebesgue est finie : $\mu(\Omega)<+\infty$. Pour tout $1\leq p<\infty$, notons $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f:\Omega\to\mathbb{C}$ telle que $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ module l'équivalence $f\sim g \Leftrightarrow f-g=0$ μ- p.p. L'espace des fonctions essentiellement bornées sera note $L^\infty(\Omega)$.*

(i) *Si $f\in L^\infty(\Omega)$, alors*

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p\,dx \leq \|f\|_\infty^p\,\mu(\Omega) < \infty,$$

ainsi $L^\infty(\Omega)\subset L^P(\Omega)$ pour tout p et $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$. Montrons que si $q\leq p$, alors

$L^p(\Omega)\subset L^q(\Omega)$. Soit $f\in L^p(\Omega)$, on par exemple :

$$\begin{aligned}
\|f\|_q^q &= \int_\Omega |f(x)|^q\,dx \\
&= \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^q\,dx + \int_{\{|f|<1\}} |f|^q\,dx \\
&\leq \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p\,dx + \int_{\{|f|<1\}} 1dx \\
&\leq \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty.
\end{aligned}$$

Ou encore, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjuguées $r=\frac{p}{q}>1$ et $r'=\frac{p}{p-q}$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_q^q &= \int_\Omega |f(x)|^q\,dx \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)|^{q\frac{p}{q}}\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}}\,dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&= \|f\|_p^q\,\mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}}
\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p\,\mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}} .$$

En conclusion, pour $1<q<2<p$:

$$L^\infty(\Omega)\subset L^p(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset L^q(\Omega)\subset L^1(\Omega).$$

1.3 Espace de Sobolev

1.3.1 Les espaces $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

On appelle espace de Sobolev d'ordre un sur l'ouvert Ω, et que l'on note par $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant des dérivées au sens des distributions dans $L^2(\Omega)$. En d'autre terme

$$H^1(\Omega) = \left\{ u;\ u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, ..., n \right\},$$

ou les dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, .., n$ sont prises au sens des distributions.

Il est clair que $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x).v(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

et dont la norme est définie par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\langle u, u\rangle_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |u|^2\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.6. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour son produit scalaire.*

Démonstration. u_n une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q > N_\varepsilon,\ \text{ on a } \|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

En d'autre terme

$$\|u_p - u_q\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_p - u_q\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

D'où les suites u_n et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ sont de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, qui est un espace complet, il en résulte l'existence d'une fonction u de $L^2(\Omega)$ limite dans $L^2(\Omega)$ de la suite u_n et une fonction v_i de $L^2(\Omega)$ limite dans $L^2(\Omega)$ de la suite $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = u$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = v_i$, dans l'espace $L^2(\Omega)$.

L'injection de l'espace $L^2(\Omega)$ dans l'espace $D'(\Omega)$

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

assure la convergence de la suite u_n vers u ainsi que la dérivée $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ vers v_i dans $D'(\Omega)$.

L'opérateur de dérivation étant continu dans $D'(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\langle\frac{\partial u_n}{\partial x_i},\varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty}-\langle u_n,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle \\
&= -\langle\lim_{n\to\infty}u_n,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle \\
&= -\langle u,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle \\
&= \langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\varphi\rangle,\ \forall\varphi\in D(\Omega).
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\to\frac{\partial u}{\partial x_i}=v_i \quad \text{dans} \quad D'(\Omega),$$

et en vertu de l'unicité de la limite dans l'espace $D'(\Omega)$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=v_i\in L^2(\Omega).$$

D'où la convergence de u_n vers u dans $H^1(\Omega)$. □

L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.5. *La fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ est un sous espace de $H^1(\Omega)$ noté $H_0^1(\Omega)$.*

Proposition 2. *$H_0^1(\Omega)$ muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Proposition 3. *Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière $\Gamma=\partial\Omega$,*

$$H_0^1(\Omega)=\left\{u/u\in H^1(\Omega);\ u=0 \quad sur \quad \partial\Omega=\Gamma\right\}.$$

Théorème 1.7. *(de Rellich) Si Ω est un ouvert borné de class C^1, alors l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, i.e. tout ensemble borné de $H_0^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On écrit :*

$$H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega) \ \ \textit{est compact} \ \ (\hookrightarrow \ \ \textit{injection continue}).$$

On peut identifier $L^2(\Omega)$ est son dual, alors on a les inclusions :

$$H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et dense.

1.3.2 Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $1\le p\le\infty$.

Définition 1.6. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p \;\middle|\; \begin{array}{l}\exists g_1,g_2,...,g_n\in L^p(\Omega) \ \ tels\ que \\ \int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=-\int_\Omega g_i\phi \quad \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i=1,2,...N\end{array}\right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^P}$$

ou parfois de la norme équivalent (si $1 \leq p < \infty$*)*

$$\left(\|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^P} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 4. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,*

$W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$\langle u; v \rangle_{W^{1,2}} = \int_{\Omega} u(x).v(x)\,dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x); \nabla v(x) \rangle dx.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$

Plus généralement, on peut définir des espace $W^{m,p}(\Omega)$ pour un entier $m \geq 0$ et pour un réel $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.7. *Pour tout entier* $m \geq 0$, *l'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ telle que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha u \in L^p\},$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha u$ *est à prendre au sens faible.*

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\begin{cases} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^P(\Omega)} \right)^{\frac{1}{P}} & si\ 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$

1.4 L'espace $L^p(0,T;X)$

Définition 1.8. *Pour tout* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$, *on désigne pour* $L^p(0,T;X)$ *l'espace des fonctions u fortement mesurable sur* $]0,T[$ *à valeurs dans X telle que :*

c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Si X est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_X$, $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X dt.$$

1.5 L'espace $W(0,T)$

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$, V' (resp.H') est le dual de V (resp. H). On suppose

$$\begin{cases} V & \hookrightarrow H \quad , \\ V \text{ dense dans } H. \end{cases}$$

identifier H à son dual, on peut alors identifier H à un sous espace de V' de sorte que

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue. On introduit l'espace $W(0,T)$:

$$W(0,T) = \left\{ y/y \in L^2(0,T;V), \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;V') \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|y\|_{W(0,T)} = \left(\|y\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|y'\|^2_{L^2(0,T;V')} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemma 1.5.1. *Toute fonction $y \in W(0,T)$ est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0,T] \to H$. En écrira en bref*

$$W(0,T) \subset C^0([0,T];H)$$

où $C^0([0,T];H)$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans H, munit du norme de la convergence uniforme.

1.6 Définition de la notion de semi-groupe :

Définition 1.9. *Un famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ linéaires bornés définis sur H est dite semi-groupe si :*

(i) $S(0) = Id$,

(ii) $\forall (t_1, t_2)$, $S(t_1 + t_2) = S(t_1) S(t_2)$,

(iii) Un semi-groupe contraction vérifie de plus :

$$t \geq 0, \left\| S(t)_{(H)} \right\| \leq 1,$$

(iv) On dit qu'un semi-groupe est fortement continu si et seulement si :

$$\forall \epsilon \in H, \quad \| \, S(t)\, \epsilon - \epsilon \, \|_H \rightarrow_{t\to 0} 0.$$

Définition 1.10. *On appelle générateur d'un opérateur non borné S, l'application A : $D(A) \to H$ où $D(A)$ est sous espace de u où $S(t)\,u$ est dérivable à droit avec :*

$$Au = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)\,u - u}{t} = -\frac{d}{dt}\left(S(t)\,u\right)_{/t=0^+}.$$

Chapitre 2

Controlabilité des systèmes paraboliques

Le problème de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré à priori. Dans ce chapitre, nous défini de manière générale les notions de contrôlabilité approchée, à zéro et exacte pour des systèmes parabolique, et expliquons quelle relation existe entre différents concepts pour de tels systèmes.

2.1 Description du système

Soit V, H, W et U quatre espace de Hilbert réels séparables, on identifie H, W et U à leurs espaces duaux. On suppose que V est dense dans H tel que les inclusions suivantes sont vérifiées

$$V \subset H \subset V' \tag{2.1}$$

où l'inclusion de V dans H est continue.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)u \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

tel que :

- $y_0 \in H$ est la donné initial.
- $y(t) \in H$ l'état du système à l'instant t.
- $u \in L^2(0, T; U)$ est le contrôle.
- $A(t) : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur non bornée.
- $B(t) : D(B) \subset H \to H^{-1}$ est un opérateur non bornée entre deux espaces de Hilbert U et H^{-1}.

Avec $D(\cdot)$ la domaine de définition de l'opérateur.

On considère le système adjoint A^* de l'opérateur A telle que φ la solution :

$$\begin{cases} -\frac{d\varphi}{dt} = A^*(t)\varphi \\ \varphi(t) = \varphi_0 \end{cases}$$

vérifie :

$$(\exists t_0 \in [0, T] \text{ tel que } \varphi(t_0) = 0) \Rightarrow (\varphi = 0 \text{ sur } [0, T])$$

Le système (2.2) admet un unique solution pour $u \in L^2(0, T; U)$, $y_0 \in H$ s'écrit sous la forme :

$$y(t) = S^*(t-s)\, y_0 + \int_0^t S^*(t-s)\, B^* u(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T] \tag{2.3}$$

où $\left(S(t)_{t \geq 0}\right)$ est le semi groupe engendré par l'opérateur A.

On appelle solution classique de (2.2) toute fonction $y \in C(0,T;H) \cap C^1(0,T;H)$ tel que $y \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$ et vérifiant (2.3) dans $[0,T]$.

Théorème 2.1. *Soit $t > 0$, alors pour tout $y_0 \in H$ et pour toute $u \in L^2(0,T;U)$ le problème (2.2) admet un solution unique y, telle qu'il existe une constant $C > 0$ indépendante de $y_0 \in H$ et $u \in L^2(0,T;U)$ on a :*

$$\| y(\tau) \|_H \leq C(\| y_0 \|_H + \| Bu \|_{L^2(0,T;U)}) \quad \forall \tau \in [0,T] \tag{2.4}$$

Démonstration. voir [8] □

2.2 Définition de la contrôlabilité

Un système est dit contrôlable s'il existe un vecteur de commande $u(t)$ qui transfère le système à partir de tout état initial $y(t_0)$ à un état finale $y(t_f)$ en un temps fini.

2.2.1 Contrôlabilité exacte :

définition 2.2.1. *Soit $T > 0$, le système (2.2) de contrôle est exactement contrôlable au temps T, si pour tout $y_0 \in H$ et tout $y_r \in W$, il existe un contrôle $u \in L^2(0,T;U)$ telle que :*

$$y(T) = y_r$$

2.2.2 Contrôlabilité à zéro :

définition 2.2.2. *Soit $T > 0$, le système (2.2) de contrôle est à zéro contrôlable au temps T, si pour tout $y_0, \hat{y}_0 \in H$, il existe un contrôle $u \in L^2(0,T;U)$ telle que :*

$$y(T) = 0$$

2.2.3 Contrôlabilité approchée :

définition 2.2.3. *On dit que le système (2.2) de contrôle est faible contrôlable au temps T, si pour tout y_0, $y_r \in L^2(\Omega)$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $u \in L^2(0,T;U)$ telle que la solution y du problème vérifié :*

$$\| y(T) - y_r \|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

2.3 Dualité contrôlabilité-observabilité :

Un système est dit observable si l'état du système $x(t)$ peut être déduite de façon exacte par l'observation de la sortie $y(t)$ et l'entrée $u(t)$ sur un temps fini.

Dans la suite, l'opérateur $S_T \in \mathcal{L}(H)$ et défini par $S_T y_0 = y(T; y_0, 0)$ pour tout $y_0 \in H$ et $L_T : L^2(0;T,U) \to H$ l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_T u = \int_0^T S(t-s) Bu(s)\, ds \quad \forall u \in L^2(0;T,U).$$

2.3.1 Contrôlabilité exacte :

Théorème 2.2. *Soit $T > 0$ le système (2.2) de contrôle est exactement contrôlable au temps T si et seulement s'il existe $C > 0$ telle que :*

$$\int_0^T \| B^* S^* (T) \varphi \|_U^2 \, dt \geq C \| \varphi \|_H^2 \ \forall \varphi \in D (A^*) \tag{2.5}$$

2.3.2 Contrôlabilité approchée :

Proposition 5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1 *Le système (2.2) est faiblement contrôlable sur* $[0, T]$,

2 $\overline{Im}(L_T) = H$,

3 $Ker\ (L_T^*) = Ker\, (L_T^* L_T) = \{0\}$,

4 $(< B^* S^*(s)y, v >_H = 0, \forall s \in [0;T]$ *et* $\forall v \in U) \Longrightarrow y = 0$

5 *Si le semi groupe* $(S\,(t))_{t>0}$ *est analytique alors on a :*$\overline{\cup_{n \in N} (A^n S\,(t-s)\, B)} = H, \quad \forall s \in [0, T]$.

2.3.3 Contrôlabilité à zéro :

Proposition 6. *Soit $T > 0$ le système (2.2) de contrôle est à zéro contrôlable au temps T si et seulement s'il existe $C > 0$ telle que :*

$$\int_0^T \| B^* S^* (t-s) \varphi \|_U^2 \, dt \geq C \| S^* (t-s) \varphi \|_H^2 \ \forall \varphi \in D (A^*)$$

2.4 Quelques outils pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes parabolique :

Dans le carde de la dimension finie i.e. pour le cas d'un système d'équations différentielles ordinaires, on va voir que toutes cas notions de contrôlabilité coïncident et qu'elles peuvent être caractérisées par un condition algébrique sur les coefficients du système appelée condition de **Kalman**.

2.4.1 Le critère de Kalman :

On suppose que $A\,(t) = A$ et $B\,(t) = B$ sont des matrices constantes sur $[0, T]$ et on note : $[A \backslash B] = [B, AB, ..., A^{n-1}B] \in M^{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont constituées par celles $B, AB, ..., A^{n-1}B$.

Théorème 2.3. *Soient $H = \mathbb{R}^n$ et $T > 0$. l'équation (2.2) est contrôlable si et seulement si*

$$rang \left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right] = n. \tag{2.6}$$

Pour le cas général (2.2), il y a le critère de **kalman** aussi. Si on définit $B_0\,(t) = B\,(t)$ et $B_{k+1}\,(t) = B_k\,(t) - A\,(t)\, B_k\,(t)$, ou le résultat suivant :

Théorème 2.4. *Supposons qu'il existe $t \in [0,T]$ tel que :*

$$\dim \{B_k(t)\, v; k \in N, v \in \mathbb{R}^m\} = n$$

alors le système (2.2) est contrôlable.

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

rang de la matrice de contrôlabilité :

$$rang\,(C) = rang \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$rang\,(C) = 2$$

d'où le système (2.2) est contrôlable.

2.4.2 La méthode des moments pour l'équation de la chaleur :

Pour être plus précis, considérons

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & & \text{dans} & (0,T) \times (0,1)\,, \\ y\,(0,t) = v\,(t)\,, & y\,(t,1) = 0 & \text{sur} & (0,T)\,, \\ y\,(0) = y_0 & & \text{dans} & (0,1)\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

où y est l'état, y_0 est la donnée initiale, v est le contrôle.

Le système (2.7) admet une unique solution (faible) $y \in C^0\left([0,T]\,; L^2\,(0,1)\right)$ pour tout $y_0 \in L^2\,(0,1)$et $v \in L^2\,(0,T)$ qui dépend continument des données : il existe une constante $C > 0$ (indépendante de T) telle que

$$\|y\|_{C^0([0,T];L^2(0,1))} \leq C \left(\|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(Q_T)} \right).$$

De plus, la régularité parabolique nous dit aussi que $y \in L^2\left(0,T; H^2(0,1) \cap H_0^1\,(0,1)\right)$ si $y_0 \in H_0^1\,(\Omega)\,.$

On introduit le système adjoint à (2.7), c'est-à-dire l'équation rétrograde en temps

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{dans} & (0,T) \times (0,1)\,, \\ \varphi = 0 & \text{sur} & (0,T)\,, \\ \varphi\,(T) = \varphi_T & \text{dans} & (0,1)\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

On rappelle que pour tout $\varphi_T \in L^2\,(0,1)$ il existe une unique solution faible $C^0\left([0,T]\,; L^2\,(0,1)\right)$ qui dépend continument des données. En effectuant des intégrations par parties on obtient la relation fondamentale entre la solution y du problème initial (2.7) et la solution φ du problème adjoint (2.8) :

$$\langle y\,(T)\,, \varphi_T \rangle_{H^{-1},H_0^1} - \langle y_0, \varphi\,(0) \rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_0^T v\,(t)\, \partial_x \varphi\,(t,0)\, dt.$$

Pour tout $\varphi_T \in H_0^1\,(0,1)\,,$ où φ est toujours la solution du système adjoint (2.8). Il est alors facile de voir que l'équation (2.7) est contrôlable à zéro au temps T si, seulement si, pour tout $y_0 \in H^{-1}(0,1)$, il existe un contrôle $v \in L^2(0,T)$ tel que

$$-\langle y_0, \varphi(0)\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_0^T v(t)\,\partial_x\varphi(t,0)\,dt.$$

En décomposant maintenant y_0 et φ en séries de Fourier dans la base de fonctions propres $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ de $-\partial_x^2$ (avec condition au bord de Dirichlet), la relation précédente est équivalente à

$$c_k = \int_0^T v(T-t)\,e^{-\lambda_k t}dt, \forall k \geq 1. \tag{2.9}$$

Où on a posé $c_k = \frac{-e^{-\lambda_k t}}{\partial_x\phi_k(0)}\langle y_0, \phi_k\rangle_{H^{-1},H_0^1}$, $\partial_x\phi_k(0) \neq 0$. Le problème des moments est alors le suivant état une suite $(c_k) \in \ell^2$ est-il possible de trouver $v \in L^2(0,T)$ tel que la relation (2.9) soit vérifiée.

Pour le résoudre, on construit une famille $\{q_k\}_{k\geq 1} \in L^2(0,T)$ biorthogonale à la famille des exponentielles $\left\{e^{-\lambda_k t}\right\}$, c'est-à-dire tel que

$$\langle q_k, e^{-\lambda_l t}\rangle_{L^2(0,T)} = \delta_{kl},$$

et qui vérifie de plus l'estimation

$$\| q_k \|_{L^2(0,T)} \leq \rho_T e^{C\sqrt{\lambda t}}, \forall k \geq 1, \tag{2.10}$$

où $\rho_T > 0$ est une constante qui dépend de T. Une fois cette famille construite (c'est la tache la plus difficile), il suffit de prendre v de la forme

$$v(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k q_k(T-t).$$

Vérifions que cette série converge bien dans $L^2(0,T)$. De l'estimation (2.10) et l'inégalité de Young $C\sqrt{\lambda t} \leq \frac{\lambda_k T}{2} + \frac{C^2}{2T}$ on a

$$\begin{cases} \| q_k \|_{L^2(0,T)} \leq \rho_T e^{\frac{\lambda_k T}{2}+\frac{C^2}{2T}}, \\ | c_k | \leq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda_k T} \| y_0 \|_{H^{-1}(0,1)}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\| v \|_{L^2(0,T)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_T e^{\frac{C^2}{2T}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda_k T}{2}}\right) \| y_0 \|_{H^{-1}(0,1)}.$$

Comme $\lambda_k = k^2\pi^2$, cette série est comparable à l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-\frac{\pi^2 T}{2}x^2}dx$, qui vaut $\sqrt{\frac{1}{2\pi T}}$.

Par ailleurs, sachant qu'on peut en fait prendre $\rho_T = Ce^{\frac{C}{T}}$.

2.4.3 Théorème d'Ingham

[16] Soit $(\omega_k)_{k\in Z}$ une famille de nombres réels, satisfaisant la condition d'écart uniforme

$$\gamma := \inf_{k\neq n} | \omega_k - \omega_n | > 0.$$

Si I est un intervalle borné de longueur $\mid I \mid > \frac{2\pi}{\gamma}$, alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ tel que :

$$C_1 \sum_{k \in Z} \mid x_k \mid^2 \leq \int_I \mid x(t) \mid^2 dt \leq C_2 \sum_{k \in Z} \mid x_k \mid^2$$

pour toutes les fonctions données par la somme

$$x(t) = \sum_{k \in Z} x_k e^{i\omega_k t},$$

avec des coefficients complexes x_k de carré sommable.

Exemple 1. *On considére l'équation des Ondes en un dimension d'espace sur le domaine* $\Omega =]0, \pi[$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \partial_{xx} y(x,t) & & (x,t) \in]0,\pi[\times]0,T[, \\ y(0,t) = 0, & y(\pi,t) = v(t) & t \in]0,T[, \\ y(x,0) = y^0(x) & \frac{dy}{dt}(x,0) = y^1(x) & t \in]0,T[, \end{cases} \tag{2.11}$$

telle que v est le contrôle recherché. On appelle que (2.11) est exactement contrôlable au temps T si, et seulement s'il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1 \times L^2(0,\pi)$ la solution ϕ du système adjoint :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,t) = \partial_{xx} \phi(x,t) & & (x,t) \in]0,\pi[\times]0,T[, \\ \phi(0,t) = 0, & \phi(\pi,t) = 0 & t \in]0,T[, \\ \phi(x,0) = \phi^0(x) & \frac{d\phi}{dt}(x,0) = \phi^1(x) & t \in]0,T[, \end{cases} \tag{2.12}$$

vérifié :

$$\| \left(\phi^0, \phi^1\right) \|^2_{H_0^1 \times L^2(0,\pi)} \leq C_T \int_0^T (\partial_x \phi(\pi,t))^2 \, dt. \tag{2.13}$$

Les valeurs propres de l'opérateur $A : D(A) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ définie par $D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ et $A = -\partial_{xx}$ sont les entiers de la forme n^2, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonction définie par $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ pour tout $x \in [0,\pi]$. est un base Hilbertienne de $L^2(0,\pi)$ formée de vecteurs propres de l'opérateur A associés à la suite de valeurs propres $(n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Décomposons ϕ^0 et ϕ^1 dans la base Hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont la forme

$$\phi^0 = \sum_{n\geq 1} \alpha_n^0 e_n, \quad \phi^1 = \sum_{n\geq 1} \alpha_n^1 e_n,$$

avec $\sum_{n\geq 1} n^2 (\alpha_n^0)^2 < +\infty$ et $\sum_{n\geq 1} (\alpha_n^1)^2 < +\infty$, on a alors :

$$\| \left(\phi^0, \phi^1\right) \|^2_{H_0^1 \times L^2(0,\pi)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (n^2 (\alpha_n^0)^2 + (\alpha_n^1)^2). \tag{2.14}$$

On applicons l'inégalité d'Ingham à la contrôlabilité :

D'autre parti, il est facile de vérifier que la solution ϕ de (2.12) donnée par :

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\left(\alpha_n^0 - i\frac{\alpha_n^1}{n} \right) e^{int} + \left(\alpha_n^0 + i\frac{\alpha_n^1}{n} \right) e^{-int} \right] \sin(nx) \ \ \forall (x,t) \in]0,\pi[\times]0,T[.$$

En dérivant cette égalité par rapport à la variable x, on obtent

$$\partial_x \phi(t,\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu_n = n$,

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \left(n\alpha_n^0 - i\alpha_n^1 \right) & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \left((-n)\alpha_{-n}^0 - i\alpha_{-n}^1 \right) & n \leq -1. \end{cases}$$

Remarquons que, d'après (2.14) :

$$\parallel \left(\phi^0, \phi^1 \right) \parallel^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \mid^2 .$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu_{n+1} - \mu_n = (n+1) - n = 1$. Donc le théorème d'Ingham s'applique avec $\lambda = 1$ et donne, pour tout $T > 2\pi$, l'existence de deux constantes $C_1 = C_1(T) > 0$ et $C_2 = C_2(T) > 0$ telle que pour tout suit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2$ on ait :

$$C_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \mid^2 \leq \int_0^T \mid f(t) \mid^2 dt \leq C_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \mid^2, \tag{2.15}$$

où

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{i\mu_n t}.$$

En appliquant l'inégalité de gauche de (2.15) à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $x_n = a_n$, on obtent

$$\forall T > 2\pi, C_1 \frac{1}{\pi} \parallel \left(\phi^0, \phi^1 \right) \parallel^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \leq \int_0^T \left(\partial_x \phi(t,\pi) \right)^2 dt$$

ce qui démontre l'inégalité d'observabilité (2.13) avec $C_T = \frac{\pi}{c_1}$, pour tout $T > 2\pi$. Notons que (2.13) est encore vraie si $T = 2\pi$ d'aprés l'identité de Parseval. En effet, l'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \mid^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \mid^2,$$

signifie exactement que :

$$\parallel \left(\phi^0, \phi^1 \right) \parallel^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\partial_x \phi(\pi, t) \right)^2 dt.$$

Chapitre 3

Contrôlabilité des systèmes parabolique avec un seul contrôle

Ce chapitre est reprise de l'article [5], qui porte le titre " New phenomena for the null controllability of parabolic systèms : Minimal time and geometrical dependence".

3.1 Introduction et principaux résultats

Dans ce chapitre traite la contrôlabilité des équations paraboliques non scalaires avec un nombre réduit de contrôles. Le contrôle des systèmes paraboliques est une question difficile, qui a suscité l'intérêt de la communauté de contrôle au cours de la dernière décennie. Ces systèmes paraboliques apparaissent, par exemple, dans l'étude des réactions chimiques et dans une grande variété de biologie mathématique et de situations physiques. Plus précisément, le but de ce chapitre est d'étudier la relation entre la localisation des commandes et l'action des termes de couplage.

Pour cela, soient $T > 0$ et $\omega = (a, b) \subset (0, \pi)$ et considérons les problèmes de contrôle suivants :

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x) A_0 y = 0 & \text{dans} \quad Q_T := (0, \pi) \times (0, T), \\ y(0, .) = Bu, \quad y(\pi, .) = 0 & \text{sur} \quad (0, T), \\ y(., 0) = y_0 & \text{dans} \quad (0, \pi), \end{cases} \tag{3.1}$$

et

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x) A_0 y = Bv 1_\omega & \text{dans} \quad Q_T, \\ y(0, .) = 0, \quad y(\pi, .) = 0 & \text{sur} \quad (0, T), \\ y(., 0) = y_0 & \text{dans} \quad (0, \pi), \end{cases} \tag{3.2}$$

où $A_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $B \in \mathbb{R}^2$ sont respectivement donnés par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Dans la systèmes (3.1) et (3.2), $q \in L^\infty(0, \pi)$ est une fonction, y_0 donnée initiale et $u \in L^2(0, T)$ et $v \in L^2(Q_T)$ sont les fonctions de contrôle.

Remarquons que pour tout $u \in L^2(0, T)$ (resp, $v \in L^2(Q_T)$) et $y_0 \in H^{-1}(0, \pi; \mathbb{R}^2)$ (resp, $y_0 \in \mathbb{L}(0, \pi; \mathbb{R}^2)$), système (3.1) (resp, système (3.2)) possède une solution unique définie par transposition (resp, une solution faible unique) que satisfait

$$y \in L^2\left(Q_T; \mathbb{R}^2\right) \cap C^0\left([0, T]; \ H^{-1}\left(0, \pi; \mathbb{R}^2\right)\right)$$

$$(\text{resp.}, \ y \in L^2\left(0, T; H_0^1\left(0, \pi; \mathbb{R}^2\right)\right) \cap C^0\left([0, T]; \ L^2\left(0, \pi; \mathbb{R}^2\right)\right))$$

et dépend en continu des données u et y_0, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C = C(T) > 0$ telle que :

$$\|y\|_{L^2(Q_T;\mathbb{R}^2)} + \|y\|_{C^0([0,T];\ H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2))} \leq C\left(\|y_0\|_{H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)} + \|u\|_{L^2(0,T)}\right)$$

$$(\text{resp., } \|y\|_{L^2\left(0,T;\ H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)\right)} + \|y\|_{C^0([0,T];\ L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2))} \leq C\left(\|y_0\|_{L^2(0,\pi;\ \mathbb{R}^2)}\right) + \|v\|_{L^2(Q_T)})).$$

Rappelons que la fonction $y^* \in L^2(Q_T;\mathbb{R}^2) \cap C^0([0,T];H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2))$ (resp., la fonction $y^* \in L^2(0,T;H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)) \cap C^0([0,T];L^2(0,\pi;\ \mathbb{R}^2)))$ est une trajectoire du système (3.1) (resp.,du système (3.2)) si y^* est la solution de (3.1) (resp., de (3.2)) correspondant aux données $u^* \in L^2(0,T)$ et $y_0^* \in H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ (resp., $v^* \in L^2(Q_T)$ et $y_0^* \in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$). Avec les notions précédentes, on définit :

(i) On dit que le système (3.1) (resp., le système (3.2)) est approximativement contrôlable en $H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ (resp., en $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$) au temps T si pour chaque $y_0,\ y_d \in H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ (resp., $y_0,\ y_d \in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$) et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $u \in L^2(0,T)$ (resp., $v \in L^2(Q_T)$) tel que la solution y de (3.1) (resp., de (3.2)) satisfait

$$\|y(.,T) - y_d\|_{H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon \quad (\text{resp.}, \|y(.,T) - y_d\|_{L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon).$$

(ii) On dit que le système (3.1) (resp., le système (3.2)) est nul contrôlable au temps T si pour tout $y_0 \in H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ (resp., $y_0 \in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$), il existe un contrôle $u \in L^2(0,T)$ (resp., $v \in L^2(Q_T)$) tel que la solution y à (3.1) (resp., à (3.2)) vérifie

$$y(.,T) = 0 \text{ dans } H^{-1}\left(0,\pi;\mathbb{R}^2\right) \ (\text{resp., dans } L^2\left(0,\pi;\mathbb{R}^2\right)).$$

(iii) Enfin, on dit que le système (3.1) (resp., le système (3.2)) est exactement contrôlable aux trajectoires au temps $T > 0$ si pour tout $y_0 \in H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ et toute trajectoire y^* du système (3.1) (resp., pour chaque $y_0 \in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ et chaque trajectoire y^* du système (3.2)), il existe un contrôle $u \in L^2(0,T)$ (resp., $v \in L^2(Q_T)$) tel que la solution y de (3.1) (resp., de (3.2)) satisfait

$$y(\cdot,T) = y^*(\cdot,T) \quad \text{dans} \quad H^{-1}\left(0,\pi;\mathbb{R}^2\right) \quad (\text{resp., dans } L^2\left(0,\pi;\mathbb{R}^2\right)).$$

Dans ce chapitre, nous nous intréssons à l'étude des propriétés de contrôlabilité des systèmes (3.1) et (3.2). Observons qui nous n'exerçons qu'une seul force de contrôle sur le système (une frontière ou contrôle déstribué) mais nous voulons contrôler l'état y correspendant qui à deux composantes. On fait, la première équation en (3.1) et (3.2) est indirectement controle au moyen du terme $q(x)\,y_2$. Bien entendu ce term de complage doit être différent de zéro, c'est-a-dire $q \neq 0$. Par contre, en utilisant la linéarité des systèmes (3.1) et (3.2), il est facile de voir que la propriété de contrôlabilité nulle au temps T du systéme précédent est équivalente à la contrôlabilité exacte des trajectoires au temps T pour ces système.

Les systèmes (3.1) et (3.2) sont des classes particulières des systèmes de contrôle paraboliques plus généraux $n \times n$ de la forme :

$$\begin{cases} y_t - D\Delta y + A(x,t)\,y = Bv1_\omega & \text{dans} \quad Q_T := \Omega \times (0,T)\,, \\ y = Cu1_{\Gamma_0} & \text{sur} \quad \sum_T := \partial\Omega \times (0,T)\,, \\ y(.,0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

où ω et Γ_0 sont, respectivement, des sous-ensembles ouverts du domaine lisse $\Omega \in \mathbb{R}^N$ et de sa frontière sur $\partial\Omega$, $D = diag(d_1,...,d_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{nn})$, avec $n \geq 1$, est un matrice positive, B,

$C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{nn})$, avec $m < n$, donne des matrice, et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} \in L^\infty(Q_T, (\mathbb{R}^n))$ est une fonction matricielle. Lorsque $m < n$, l'enjeu pour ce système est de contrôle l'ensemble des composants du système avec une fonction de contrôle agissant, localement dans l'espace au sur un partie de la frontière, uniquement sur certains d'entre eux.

On pose φ_k les valeurs propres normalisés du laplacien de Dirichlet en $(0,\pi)$, c'est-à-dire

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \quad \forall x \in (0,\pi), \quad k \geq 1.$$

Par contre, les valeurs propres correspondantes sont donnée par k^2, $k \geq 1$.

Pur tout $k \geq 1$, on associe à la fonction $q \in L^\infty(0,\pi)$ vérifiant

$$supp(q) \cap \omega = \emptyset \tag{3.5}$$

les suites $\{I_k(q)\}_{k\geq 1}$ et $\{I_{i,k}(q)\}_{k\geq 1}$, $i = 1, 2$, donnée par

$$\begin{cases} I_{1,k}(q) := \int_0^a q(x) \mid \varphi_k(x) \mid^2 dx, & I_{2,k}(q) := \int_b^\pi q(x) \mid \varphi_k(x) \mid^2 dx, \\ I_k(q) := I_{1,k}(q) + I_{2,k}(q) = \int_0^\pi q(x) \mid \varphi_k(x) \mid^2 dx. & \end{cases} \tag{3.6}$$

Pressentons non résultats de contrôle aux limites c'est-à-dire notre résultat principal lié au système (3.1).

Théorème 3.1. *Considérons A_0 et B donnés par (3.3) et $q \in L^\infty(0,\pi)$, une fonction donnée. Alors on a :*

(i) Le système (3.1) est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si :

$$I_k(q) \neq 0 \quad \forall k \geq 1. \tag{3.7}$$

(ii) Supposons que la condition (3.7) défini par

$$\tilde{T}_0(q) := \limsup \frac{-\log |I_K(q)|}{k^2} \in [0, \infty]. \tag{3.8}$$

Alors, si $T > \tilde{T}_0(q)$ le système (3.1) est contrôlable par zéro au temps T. Par contre, si $T < \tilde{T}_0(q)$ n'est pas contrôlable par zéro au temps T.

Ce résultat a été annoncé en [3]

Remarque 2. *Le résultat de la contrôlabilité approximative énoncée dans le théorème 3.1 ne dépend pas du temps final T : la contrôlabilité approximative du système (3.1) à un instant $T_0 > 0$. Sur le d'autre part, la condition (3.7) caractérise la propriété de contrôlabilité approximative du système (3.1). Donc, (3.7) est une nécessité condition de contrôlabilité du nulle au temps $T > 0$ de ce système.*

Remarque 3. *Notez que les séquence $\{I_{i,k}(q)\}_{k\geq 1}$, $i = 1, 2$, et $\{I_k(q)\}_{k\geq 1}$ sont convergentes et à partir d'un simple calcule on a :*

$$\lim I_k(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x)\, dx, \quad \lim I_{1,k}(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^a q(x)\, dx, \quad \lim I_{2,k}(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x)\, dx.$$

Théorème 3.2. *[6] Considérons A_0 et B donée par (3.3) et $q \in L^\infty(0,\pi)$, une fonction satisfaisant Supp $q \cap \omega = \emptyset$. Ensuite, le système (3.2) est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si seulement si*

$$|I_k(q)| + |I_{1,k}(q)| \neq 0 \quad \forall k \geq 1. \tag{3.9}$$

par souci d'exhaustivité, ce résultat sera prouvée dans la section 4.

Remarque 4. *Comme dans le cas limite, le résultat de contrôlabilité approximative pour le système (3.2) ne dépend pas du temps final T que le système (3.2) est approximativement contrôlable à la fois $T_0 > 0$ si et seulement s'il est approximativement contrôlable à tout moment $T > 0$.*

Pour énoncer le résultat de contrôlabilité pour le système (3.2) lorsque $q \in L^\infty(0,\pi)$ satisfait $Supp\ q \cap \omega = \emptyset$, nous avons besoin de quelques définition et notations. Tout d'abord, définissons les

$$\begin{cases} \Lambda := \{k \geq 1 : I_k(q) \neq 0\} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2, \\ \Lambda_1 := \{k \in \Lambda : I_{1,k}(q) \neq 0\}, \qquad\qquad \Lambda_2 := \{k \in \Lambda : I_{1,k}(q) = 0\} \text{ et} \\ \Lambda_3 := \{k \geq 1 : I_k(q) = 0\}, \end{cases} \tag{3.10}$$

où $I_k(q)$ et $I_{1,k}(q)$ sont donnés en (3.6). Observez que Λ_1, Λ_2 et Λ_3 sont des ensembles disjoints et bien sur $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 = \Lambda \cup \Lambda_3 = N^*$.

D'autre part, supposons que la fonction $q \in L^\infty(0,\pi)$ est telle que la condition (3.9) est vérifiée.

Ainsi, nous pouvons introduit les quantités $-\log|I_{1,k}(q)|$ et $-\log|I_k(q)|$ où nous utiliserons la notation $-\log|x| = \infty$ quand $x = 0$. Avec cette notation et sous l'hypothèse (3.9), nous en déduisons

$$\min\{-\log|I_{1,k}(q)|, -\log|I_k(q)|\} \in \mathbb{R}, \quad \forall k \geq 1.$$

L'un a :

Théorème 3.3. *Considérons $A_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $B \in \mathbb{R}^2$, donnés par (3.3), et $q \in L^\infty(0,\pi)$ un fonction satisfaisant $Supp\ q \cap \omega = \emptyset$. Supposons également la condition (3.9) et définissons :*

$$T_0(q) := \limsup \frac{\min\{-\log|I_{1,k}(q)|, \ -\log|I_k(q)|\}}{k^2}. \tag{3.11}$$

Alors étant donné $T > 0$ on a :

(i) Supposons que $T > T_0(q)$. Alors le système(3.2) est contrôlable à zéro àl'instant T.

(ii) Si $T < T_0(q)$, alors le système (3.2) n'est pas contrôlable par zéro au temps T.

Comme dans le cas limite, la condition (3.9) caractérise la contrôlabilité de contrôle approximative distribuée du système (3.2). Cela implique que (3.9) est un condition nécessaire pour la contrôlabilité du nulle distribue au temps $T > 0$ de (3.2). Nous terminons la présentation de non principaux résultats par quelques remarques.

Remarque 5. *Sous la condition (3.9), le temps minimal $T_0(q)$ est bien défini et prend en compte la remarque (3,3) satisfait $T_0(q) \in [0,\infty]$. Nous véréifierons dans la section 7 que érant donnée intervalle de contrôle $\omega = (a,b)$, il existe des fonction $q \in L^\infty(0,\pi)$, qui remplissent la condition $Supp\ q \cap \omega = \emptyset$, pour laquelle $T_0(q) > 0$ et même $T_0(q) = \infty$. Pour de telles fonction, le système (3.2) est approximativement contrôlable à tout instant T positif mais il n'est pas contrôlable à zéro à l'instant T si $T \in (0, T_0(q))$. Encore une fois et contrairement au cas scalaire, la propriété approximative distribuée n'est pas équivalente, en général, à la propriété de contrôlabilité nulle distribuée dans le cas non scalaire. Aussi, en suivant le raisonnement de la remarque (3,4) du théorème (3,3) on déduit que lorsque $q \in L^\infty(0,\pi)$ satisfait $Supp\ q \cap \omega = \emptyset$ et $T_0(q) > 0$, la version hyperbolique du système(3.2) n'est pas contrôlable dans l'espace nature associe au système à tout temps $T > 0$.*

Remarque 6. *Fixons une fonction $q \in L^{\infty}(0,\pi)$ et un intervalle de contrôle ω qui satisfont Supp $q \cap \omega = \emptyset$. En tenant compile du fait que la condition (3.7) implique (3.9) et l'inégalité $T_0(q) \leq \tilde{T}_0(q)$, la contrôlabilité aux limites au temps $T > 0$ du système (3.1) implique la contrôlabilité distribuée au temps $T > 0$ du système (3.2) à condition que la l'intervalle de contrôle ω satisfait Supp $q \cap \omega = \emptyset$. Mais il est intéressant de noter qu'il existe des fonction $q \in L^{\infty}(0,\pi)$ et des intervalle de contrôle remplissant la condition Supp $q \cap \omega = \emptyset$ pour lesquels $T_0(q) \leq \tilde{T}_0(q)$. Cela fournit une autre différence avec la limite de cas scalaire et la contrôlabilité distribuée n'est pas équivalente dans le cadre parabolique non scalaire. Cependant, si $\omega = (a,b)$ et $q \in L^{\infty}(0,\pi)$ tel que Supp $q \subset [0,a]$ ou Supp $q \subset [b,\pi]$, alors $T_0(q) = \tilde{T}_0(q)$ et le système (3.1) est nulle contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si le système (3.2) est également contrôlable au temps T.*

Remarque 7. *Le temps minimal $T_0(q)$ (voir (3.11)) dépond de la fonction q mais aussi de la position de l'intervalle de contrôle ω (satisfait Supp $q \cap \omega = \emptyset$). Ce fait fournit un phénoméne nouveau dans le cadre de la contrôlabilité distribuée des problèmes paraboliques non scalaires la dépendance du résultat de contrôlabilité de la position de l'ensemble de contrôle. Étant donnée $\tau_0 \in (0,\infty]$, il existe une fonction $q \in L^{\infty}(0,\pi)$ et des intervalles de contrôle ω_1, $\omega_2 \subset (0,\pi)$ satisfait Supp $q \cap \omega = \emptyset$ telle que (3.9) est vrai pour ω_1 et ω_2, et*

$$T_0^{(1)}(q) = 0 \quad \text{et} \quad T_0^{(2)}(q) = \tau_0 > 0.$$

Dans les inégalités précédentes $T_0^{(i)}(q)$ dans le temps minimal associé à la fonction q et à l'intervalle ω_i. En conclusion le système (3.2) est nulle contrôlable à chaque instant T positif, si le contrôle est exerce sur ω_1, mais il n'est pas nulle contrôlable au temps T si $T \in (0,\tau_0)$ et le contrôle est exercé sur ω_2. C'est une autre grande différence avec le cas parabolique scalaire. Cette dépendance de la zone de contrôle , dans le cas de la contrôlabilité approximative du système (3.2).

Remarque 8. *Sous une hypothèse $q \neq 0$ et $q \geq 0$ ou $q \leq 0$ dans $(0,\pi)$ sur la fonction q, les condition (3.7) et (3.9) sont valables pour tout intervalle $\omega \subset (0,\pi)$ satisfait Supp $q \cap \omega = \emptyset$. Cela signifie que les systèmes (3.1) et (3.2) sont approximativement contrôlables à tout instant positif T. En fait, en tenant compte de la remarque 3, on obtient que $\tilde{T}_0(q) = T_0(q)$ et le système (3.1) et (3.2) sont également nulle contrôlable à tout instant positif T.*

3.2 Quelques résultats préliminaires :

Dans cette section, nous donnerons quelques propriétés qui seront utilisées ci-dessous. Considérons l'opérateur vectoriel

$$L := -\frac{d^2}{dx^2}Id + q(x)A_0 : D(L) \subset L^2\left(0,\pi;\mathbb{R}^2\right) \to L^2\left(0,\pi;\mathbb{R}^2\right) \tag{3.12}$$

avec domaine $D(L) = H^2(0,\pi;\mathbb{R}^2) \cap H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ et aussi son adjoint L^*. Nous désignerons toujours par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire standard de $L^2(0,\pi;\mathbb{R})$ ou $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$, par $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X',X}$ l'appariement de dualité entre l'espace de Hilbert X et son dual X'.

On s'intéresse à l'étude du spectre des opérateurs L et L^*. Pour cela étant donnée une fonction $q \in L^{\infty}(0,\pi)$, on considère la quantité $I_k(q)$ donnée par (3.6), $k \geq 1$. Cette notation l'un a :

Proposition 7. *Soit A_0 donnée par (3.3) et considérons l'opérateur L donnée par (3.12) et son adjoint L^*. Ensuite*

(i) Les spectres de L et L^* sont donnée par

$$\sigma(L) = \sigma(L^*) = \left\{k^2 : k \geq 1\right\}.$$

(ii) Étant donnée $k \geq 1$ si

$$\Phi_{1,k} = \begin{pmatrix} \varphi_k \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Phi_{2,k} = \begin{pmatrix} \psi_k \\ \varphi_k \end{pmatrix},$$

(reps., si

$$\Phi_{1,k}^* := \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix}, \Phi_{2,k}^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k \end{pmatrix}),$$

où la solution unique du problème non-homogène de Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} -\psi_{xx} - k^2\psi = [I_k(q) - q(x)]\varphi_k \quad \text{dans} \quad (0,\pi), \\ \psi(0) = 0, \quad \psi(\pi) = 0, \\ \int_0^\pi \psi(x)\varphi_k(x)\,dx = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

en suit,

$$\left(L - k^2Id\right)\Phi_{1,k} = 0 \quad \text{et} \quad \left(L - k^2Id\right)\Phi_{2,k} = I_k(q)\Phi_{1,k} \tag{3.14}$$

(reps.,

$$\left(L^* - k^2Id\right)\Phi_{1,k}^* = I_k(q)\Phi_{2,k}^* \quad \text{et} \quad \left(L^* - k^2Id\right)\Phi_{2,k}^* = 0). \tag{3.15}$$

En particulier, si $k \in \Lambda$ alors k^2 est une valeur propre simple et $\Phi_{1,k}$ et $\Phi_{2,k}$ (reps., $\Phi_{2,k}^*$ et $\Phi_{1,k}^*$) sont respectivement, une fonction propre généralisée de l'opérateur L (resp., L^*) associé à k^2, tandis que si $k \in \Lambda_3$ alors $\Phi_{1,k}$ et $\Phi_{2,k}$ sont toutes deux des fonction propres de L (resp., L^*) associé à k^2.

Démonstration. D'abord on peut écrire

$$L = \begin{pmatrix} -\Delta & q \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}$$

où $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ avec domaine $D(\Delta) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ et comme on le sait, inversible borné avec l'inverse compact. Nous pouvons vérifier que :

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & -(-\Delta)^{-1}\circ q\circ(-\Delta)^{-1} \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix}$$

ce qui implique volontiers qu'il L^{-1} s'agit d'un opérateur compact sur $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$. Ainsi, le spectre de L réduit à son spectre ponctuel. Nous devons maintenant résoudre le problème des valeurs propres :

$$\begin{cases} -y_1'' + qy_2 = \lambda y_1 & \text{dans} \quad (0,\pi), \\ -y_2'' = \lambda y_2 & \text{dans} \quad (0,\pi), \\ y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0. \end{cases}$$

Si $y_2 \equiv 0$ alors $\lambda = k^2$ est une valeur propre de L et en prenant $y_1 = \varphi_k$ nous obtenons $\Phi_{1,k}$ comme une hypothèse propre associé de L. Si nous supposons à nouveau que $y_2 \neq 0$, alors, encore $\lambda = k^2$ et $y_2 = \varphi_k$ est une solution (normalisé) à la seconde a.d.e observe que la première l'équation admet une solution si et seulement si $k \in \Lambda_3$, i.e., $I_k(q) = 0$. Dans ce cas, $\Phi_{2,k}$ est une deuxième fonction propre associée de L. En conclusion, si $k \in \Lambda_3$, alors k^2 est une valeur propre de L.

D'après la considération ci-dessus, il est clair que si $I_k(q) \neq 0$, alors la valeur propre k^2 de L simple et $\Phi_{1,k}$ est une fonction propre associée. Observez que, en prenant $\Phi_{2,k} = (y_1, y_2)$, l'équation $(L - k^2 I_d)\,\Phi_{2,k} = c\Phi_{1,k}$ écrit :

$$\begin{cases} -y_1^{''} - k^2 y_1 = c\varphi_k - q y_2 & \text{dans} \quad (0,\pi), \\ -y_2^{''} - k^2 y_2 = 0 & \text{dans} \quad (0,\pi), \\ y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, encore une fois, en choisissant $y_2 = \varphi_k$ et en insérant cette expression dans la première équation, on obtient pour y_1 :

$$\begin{cases} -y_1^{''} - k^2 y_1 = [c - q]\varphi_k, \\ y_1(0) = y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le précédent problème de Strum-Liouville non homogène avoir une solution est que :

$$\int_0^\pi [c - q(x)]\,|\varphi_k(x)|^2\,dx = 0, \quad \text{i.e.,} \quad c = I_k(q).$$

Avec cette valeur de c, le problème de Strum-Liouville a un continuum de solutions données $y_1 = \gamma\varphi_k + \psi_k$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ est arbitraire et ψ_k est la solution unique de (3.13). Ceci prouve que, pour $k \in \Lambda$, $\Phi_{2,k}$ est une fonction propre personnalise de L associé à k^2.

Notez que puisque les valeurs propres de L sont réelles, alors $\sigma(L^*) = \sigma(L)$ et les espaces propres correspondants ont la même dimension. Enfin, en raisonnant comme précédemment, il n'est pas difficile de prouver les affirmations concernant L^*. □

Dans le résultat suivant, nous allons donner une expression explicite et quelques propriétés de la fonction ψ_k. Cette expression et ces propriétés seront utilisées plus tard et seront cruciales dans la preuve de théorème 3.1, 3.2 et 3.3**.** on a :

Proposition 8. *Prenons $q \in L^\infty(0,\pi)$ et prenons $k \geq 1$. On a alors :*

$$\begin{cases} \psi_k(x) = \alpha_k\varphi_k(x) - \frac{1}{k}\int_0^x \sin(k(x-\xi))\,[I_k(q) - q(\xi)]\,\varphi_k(\xi)\,d\xi, \\ \alpha_k = \frac{1}{k}\int_0^\pi\int_0^x \sin(k(x-\xi))\,[I_k(q) - q(\xi)]\,\varphi_k(\xi)\,\varphi_k(x)\,d\xi dx. \end{cases} \tag{3.16}$$

De plus, il existe un constante $C > 0$ telle que

$$|\alpha_k| \leq \tfrac{C}{k}, \quad \|\psi_k\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq \tfrac{C}{k}, \quad \left\|\psi_k'\right\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq C, \quad \forall k \geq 1. \tag{3.17}$$

Preuve. Fixons $k \geq 1$. A partir des formules (3.16), il est simple de ψ_k satisfaire (3.13).

Enfin, les propriétés (3.17) peuvent être facilement déduites des formules (3.16). Ceci finaliste l'utilisation preuve. En utilisant les fonctions propres et les fonctions propres généralisées des opérateurs L et L^* (voir 7), nous allons construire deux bases de l'espace $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$. A cette fin, laissez-nous considérer les ensembles

$$\begin{cases} B = \{\Phi_{1,k}, \Phi_{2,k} : k \in N^*\}, \\ B^* = \left\{\Phi_{1,k}^*, \Phi_{2,k}^* : k \in N^*\right\}, \end{cases} \tag{3.18}$$

où $\Phi_{i,k}$ et $\Phi_{i,k}^*$, $i = 1, 2$, sont donnés dans l'énoncé de proposition 7. Le résultat suivant indique que B et B^* sont des bases pour l'espace $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$. On a :

Lemma 3.2.1. *Étant donnés une fonction $q \in L^\infty(0,\pi)$, les séquences B et B^* sont des Riesz biorthogonales : bases dans $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que B et B^* sont des familles biorthogonales. □

En effet, en utilisant (3.14) et (3.15), il découle aisément de l'inégalité :

$$\langle \left(L - k^2 I_d\right) \Phi_{\mu,k}, \Phi^*_{\nu,j}\rangle = \langle \Phi_{\mu,k}, \left(L^* - k^2 I_d\right) \Phi^*_{\nu,j}\rangle$$

cette

$$\delta_{2\mu} I_k (q) \langle \Phi_{1,k}, \Phi^*_{\nu,j}\rangle = \left(j^2 - k^2\right) \langle \Phi_{\mu,k}, \Phi^*_{\nu,j}\rangle + \delta_{1\nu} I_j (q) \langle \Phi_{\mu,k}, \Phi^*_{2,j}\rangle \tag{3.19}$$

où k, $j \geq 1$, ν, $\mu \in \{1,2\}$ et $\delta_{\mu\nu}$ est le symbole de Kronecker (égal à 1 si $\mu = \nu$, et à 0 sinon). Nous prétendons que

$$j \neq k \Longrightarrow \langle \Phi_{\mu,k}, \Phi^*_{\nu,j}\rangle = 0, \quad \text{pour} \quad \nu, \mu \in \{1,2\}\,.$$

En fait, si $j \neq k$, le réglage $(\mu,\nu) = (1,2)$ dans (3.19) conduit à $\langle \Phi_{1,k}, \Phi^*_{2,j}\rangle = 0$ et le réglage $(\mu,\nu) = (1,1)$ donne $\langle \Phi_{1,k}, \Phi^*_{1,j}\rangle = 0$. En utilisant ceci et en considérant les cas $(\mu,\nu) = (2,2)$ puis $(\mu,\nu) = (2,1)$ donnent les autres relations d'orthogonalité. Pour $j = k$, les calculs directs montrent que $\langle \Phi_{\nu,k}, \Phi^*_{\mu,k}\rangle = \delta_{\nu\mu}$ pour $\nu, \mu = 1, 2$.

Montrons que B est complet dans $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$. En effet, si $f = (f_1, f_2)$ est tel que

$$\langle f, \Phi_{\nu,k}\rangle = 0, \quad \forall k \geq 1, \quad \forall \nu = 1, 2,$$

alors en particulier

$$\forall k \geq 1, \quad \begin{cases} \langle f_1, \varphi_k\rangle = 0, \\ \langle f_1, \psi_k\rangle + \langle f_2, \varphi_k\rangle = 0. \end{cases}$$

Ceci implique que $f_1 = f_2 = 0$ (puisque $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ est une base orthonormée dans $L^2(0,\pi)$) et prouve la complétude de B. On prouve de la même manière que B^* est complet dans $L^2(0,\pi,\mathbb{R}^2)$.

Nous sommes maintenant prêts à montrer que B est une base de Riesz pour l'espace $L^2(0,\pi,\mathbb{R}^2)$. À cette fin, nous utiliser le résultat suivant qui peut être trouvé dans [13] et [12] par exemple :

Lemma 3.2.2. *Soit $\{x_k\}_{k\geq 1}$ une suit dans un espace de Hilbert X. Alors les énoncés suivant sont équivalent,*

(i) $\{x_k\}_{k\geq 1}$ est une base de Riesz en X.

(ii) $\{x_k\}_{k\geq 1}$ est une séquence complète de Bessel dans X et possède un système biorthogonal $\{y_k\}_{k\geq 1}$ c'est aussi une séquence complète de Bessel dans X.

On rappelle que la suite $\{x_k\}_{k\geq 1}$ dans l'espace de Hilbert X est un suite de Bessel si elle satisfait

$$\sum_{K\geq 1} \left|\langle x, x_k\rangle_X\right|^2 < \infty, \quad \forall x \in X.$$

En conséquence du lemme précédant, la tache consiste à montrer que les séries

$$S_1 = \sum_{K\geq 1} \left[\langle f, \Phi_{1,k}\rangle^2 + \langle f, \Phi_{2,k}\rangle^2\right] \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{K\geq 1} \left[\langle f, \Phi^*_{1,k}\rangle^2 + \langle f, \Phi^*_{2,k}\rangle^2\right]$$

convergent pour tout $f \in L^2(0,\pi,\mathbb{R}^2)$.

Il est facile de voir que :

$$S_1 = \sum_{k\geq 1} \left[|f_{1,k}|^2 + |\langle f_1, \psi_k\rangle + f_{2,k}|^2\right], \quad S_2 = \sum_{k\geq 1} \left[|f_{1,k} + \langle f_2, \psi_k\rangle|^2 + |f_{2,k}|^2\right]$$

où $f_{i,k}$ est le coefficient de Fourier de la fonction f_i par rapport à φ_k. La relation (3.17) permet de borne S_i $(i = 1, 2)$ comme suit :

$$S_i \le C \sum_{k \ge 1} \left(|f_{1,k}|^2 + |f_{2,k}|^2 + \frac{1}{k^2} \right) < \infty.$$

Ceci prouve la convergence des séries S_1 et S_2 et termine la preuve.

Remarque 9. *Il est intéressant de souligner qu'en effet, B est quadratique-ment proche de la base orthonormée canonique de $L^2(0, \pi; \mathbb{R}^2)$:*

$$\tilde{B} = \left\{ \Theta_{1,k} = \begin{pmatrix} \varphi_k \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Theta_{2,k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k \end{pmatrix} \right\}_{k \ge 1}$$

puisque, grâce à (3.17)

$$\sum_{k \ge 1} \left(\|\Phi_{1,k} - \Theta_{1,k}\|^2_{L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)} + \|\Phi_{2,k} - \Theta_{2,k}\|^2_{L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)} \right) = \sum_{k \ge 1} \|\psi_k\|^2_{L^2(0,\pi)} < \infty.$$

Corollaire 1. *Étant donnée une fonction $q \in L^\infty(0, \pi)$, alors B^* est une base dans $H_0^1(0, \pi; \mathbb{R}^2)$, biorthogonale à $B \subset H^{-1}(0, \pi; \mathbb{R}^2)$, où B^* et B sont donnés en (3.18).*

Preuve. On prend $L^2(0, \pi; \mathbb{R}^2)$ comme espace pivot puis

$$H_0^1\left(0, \pi; \mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow L^2\left(0, \pi; \mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow H^{-1}\left(0, \pi; \mathbb{R}^2\right) = \left(H_0^1\left(0, \pi; \mathbb{R}^2\right)\right)'.$$

Premièrement, il est clair que $B^* \subset H_0^1(0, \pi; \mathbb{R}^2)$ et est complet dans cet espace puisqu'il est dans $L^2(0, \pi; \mathbb{R}^2)$. Par contre, par définition de l'appariement de dualité, $\langle \Phi_{\nu,k}, \Phi^*_{\mu,j} \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle \Phi_{\nu,k}, \Phi^*_{\mu,j} \rangle = \delta_{\nu\mu}\delta_{kj}$ pour $k, j \ge 1$ et $\nu, \mu \in \{1, 2\}$. Ainsi $B \subset H^{-1}(0, \pi; \mathbb{R}^2)$ est biorthogonal à B^* et B^* est minimal dans $H_0^1(0, \pi; \mathbb{R}^2)$. Il reste à prouver que pour tout $f = (f_1, f_2) \in H_0^1(0, \pi; \mathbb{R}^2)$, la série

$$\left\{ \sum_{k \ge 1} \langle f, \Phi_{1,k} \rangle \Phi^*_{1,k} + \sum_{k \ge 1} \langle f, \Phi_{2,k} \rangle \Phi^*_{2,k} \right\} = \sum_{k \ge 1} \begin{pmatrix} f_{1,k}\varphi_k \\ f_{1,k}\psi_k + \left(\int f_1(x)\psi_k(x)\,dx + f_{2,k}\right)\varphi_k \end{pmatrix}$$

converge en $H_0^1(0, \pi; \mathbb{R}^2)$. Mais $\sum_{k \ge 1} f_{i,k}\varphi_k$, $i = 1, 2$, converge en $H_0^1(0, \pi)$ ($f_{i,k}$ est le coefficient de Fourier de la fonction $f_i \in H_0^1(0, \pi)$ par rapport à φ_k). D'autre part, la série $\sum_{k \ge 1} f_{1,k}\psi_k$ converge aussi dans $H_0^1(0, \pi)$. En effet, depuis $f_1 \in H_0^1(0, \pi)$, on a

$$\sum_{K \ge 1} |f_{1,k}| \left\| \psi_k' \right\|_{L^2(0,\pi)} \le C \sum_{K \ge 1} |f_{1,k}| \le C \left(\sum_{K \ge 1} k^2 |f_{1,k}|^2 + \sum_{K \ge 1} \frac{1}{k^2} \right) < \infty,$$

où nous avons utilisé les propriétés de (3.17). Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\left| \int_0^\pi f_1(x)\psi_k(x)\,dx \right| \le \frac{C}{K^2}, \quad \forall k \ge 1, \tag{3.20}$$

est valable pour toute fonction $f_1 \in H_0^1(0, \pi)$. Cela implique que la série

$$\sum_{k \ge 1} k^2 \left| \int_0^\pi f_1(x)\psi_k(x)\,dx \right|^2$$

converge et assure la convergence en $H_0^1(0,\pi)$ de la série

$$\sum_{k\geq 1}\left(\int_0^\pi f_1(x)\,\psi_k(x)\,dx\right)\varphi_k.$$

Ceci complète la preuve de la convergence en $H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ de la série en (3.2) et finaliste la démonstration. Où nous voir (3.20) pour un fonction $f_1\in H_0^1(0,\pi)$:

$$\int_0^\pi f(x)\,\psi_k(x)\,dx=-\int_0^\pi f'(x)\int_0^x\psi_k(s)\,dsdx.$$

A partir de l'expression de ψ_k (voir (3.16) et (3.17)), on obtient $\psi_k(x)=\alpha_k\varphi_k(x)-\frac{1}{k}H_k(x)$ avec $\mid\alpha_k\mid\leq C/k$ et

$$H_k(x)=\sin(kx)\int_0^x\cos(k\xi)\,h_k(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi-\cos(kx)\int_0^x\sin(k\xi)\,h_k(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi,$$

avec $h_k=I_k(q)-q$, par conséquent la fonction h_k est uniformément délimitée dans $(0,\pi)$. Aussi, nous avons

$$\int_0^x\psi_k(s)\,ds=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha_k}{k}(1-\cos(kx))-\frac{1}{k}\int_0^xH_k(s)\,ds,$$

et

$$\int_0^xH_k(s)\,ds=-\frac{1}{k}\cos(kx)\int_0^x\cos(k\xi)\,h_k(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi+\frac{1}{k}\int_0^x\cos^2(k\xi)\,h_k(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi$$
$$-\frac{1}{k}\sin(kx)\int_0^x\sin(k\xi)\,h_k(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi+\frac{1}{k}\int_0^x\sin^2(k\xi)\,h_k(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi.$$

par conséquent, pour une constant positif C

$$\mid\int_0^x\psi_k(s)\,ds\mid\leq\frac{C}{k^2},\quad\forall x\in(0,\pi),\quad k\geq 1.$$

En combinant les formules de prévision, nous obtenons (3.20). Terminons cette section en donnant une expression en ω de la fonction φ_k la solution de (3.13). Cette expression sera cruciale dans la démonstration (3,3).

Proposition 9. *En $q\in L^\infty(0,\pi)$ une fonction satisfaisant Supp $q\cap\omega=\emptyset$ avec $\omega=(a,b)\subset(0,\pi)$, soit nous considéronségalement la fonction décrite dans la proposition 7. Ensuite, pour tout $k\geq 1$:*

$$\psi_k(x)=\tau_k\varphi_k(x)+g_k(x),\quad\forall x\in\omega,$$

avec

$$\tau_k=\alpha_k+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k}\int_0^a q(\xi)\,\varphi_k(\xi)\cos(k\xi)\,d\xi,$$

et

$$g_k(x)=-\frac{I_k(q)}{k}\int_0^x\sin(k(x-\xi))\,\varphi_k(\xi)\,d\xi-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{I_{1,k}(q)}{k}\cos(kx),\quad\forall x\in\omega,$$

où les quantités α_k, $I_k(q)$ et $I_{1,k}(q)$ sont respectivement donnés en (3.16) et (3.6).

Démonstration. Fix $k\geq 1$. La fonction ψ_k est donnée par (3.16). Compte tenu de *Supp* $q\cap\omega=\emptyset$, si $x\in\omega$ on obtient des formules (3.16)

$$\psi_k(x)=\alpha_k\varphi_k(x)-\frac{I_k(q)}{k}\int_0^x\sin(k(x-\xi))\,\varphi_k(\xi)\,d\xi+\frac{1}{k}\int_0^a\sin(k(x-\xi))\,q(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi$$

$$= \tau_k \varphi_k(x) + g_k(x)$$

où τ_k et g_k sont donnés ci-dessus. □

3.2.1 Problème de contrôlabilité des limites

Dans cette section, nous prouverons le théorème 3.1. Pour cela, soit $q \in L^\infty(0,\pi)$ et A_0 donnés par (3.3). Nous introduisons le problème adjoint arrière associé aux systèmes (3.1) et (3.2) :

$$\begin{cases} -\theta_t - \theta_{xx} + q(x) A_0^* \theta = 0 & \text{dans} \quad Q_T, \\ \theta(0,.) = 0, \quad \theta(\pi,.) = 0 & \text{sur} \quad (0,\pi), \\ \theta(.,T) = \theta_0 & \text{dans} \quad (0,\pi), \end{cases} \tag{3.21}$$

où $\theta_0 \in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ est une donnée initiale. Voyons d'abord que ce problème est bien posé. L'un a :

Proposition 10. *Supposons que $\theta_0 \in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ est donnée. Alors,système (3.21) admet une solution unique $\theta_0 \in L^2(0,T;H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)) \cap C^0([0,T];L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2))$ qui écrit*

$$\theta(.,t) = \sum_{k\geq 1} e^{-k^2(T-t)}(\langle\theta_0,\Phi_{1,k}\rangle\left(\Phi_{1,k}^* - (T-t) I_k(q)\varphi_{2,k}^*\right) + \langle\theta_0,\Phi_{2,k}\rangle\Phi_{2,k}^*) \tag{3.22}$$

et en plus satisfait

$$\| \theta \|_{L^2\left(0,T;H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)\right)} + \| \theta \|_{C^0([0,T];L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2))} \leq C \| \theta_0 \|_{L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)},$$

pour une constante positif C indépendante de θ_0. De plus, si $\theta_0 \in H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ alors la solution θ du problème adjoint (3.21) satisfait :

$$\theta_0 \in L^2\left(0,T;H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2\right) \cap H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)) \cap C^0\left([0,T];H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)\right)$$

et

$$\| \theta \|_{L^2\left(0,T;H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)\cap H^2(0,\pi;R^2)\right)} + \| \theta \|_{C^0\left([0,T];H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)\right)} \leq C \| \theta_0 \|_{H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)},$$

pour une nouvelle constante C indépendante de θ_0.La proposition suivante fournit une relation enter les système (3.1) et (3.21) :

Proposition 11. *Considérons A_0 et B donnée par (3.3) et $q \in L^\infty(0,\pi)$. Alors, pour tout $y_0 \in H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)$,$u \in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ et $\theta_0 \in H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ on possédé*

$$\int_0^T u(t) B^* \theta_x(0,t)\, dt = \langle y(.,T),\theta_0\rangle_{H^{-1},H_0^1} - \langle y_0,\theta(.,0)\rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

où $y \in L^2(Q_T,\mathbb{R}^2) \cap C^0([0,T];H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2))$ et $\theta \in L^2(0,T;H^2(0,\pi;\mathbb{R}^2) \cap H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)) \cap C^0([0,T];H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2))$ sont resp, les solution de (3.1) et (3.21) associées à (u,y_0) et θ_0.

Pour une prouve des résultats précédents, voir par exemple [18] et [11]. La contrôlabilité du système (3.1) peut être caractérisée en termes de propriétés appropriées des solution au problème adjoint (3.21). Plus précisément, nous avons :

Proposition 12. *Sous les hypotèses précédentes on a :*

(i) Le système (3.1) est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si la propriété de continuation unique suivante est vérifiée : “Soit $\theta_0 \in H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ est donnée et soit θ la solution correspondante de l'adjoint problème (3.21). Alors, si $B^*\theta_x(0,t) = 0$ sur $(0,T)$, on a $\theta_0 = 0$ dans $(0,\pi)$.”

(ii) Le système (3.1) est nulle contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement s'il existe une constante positif C telle que l'inégalité d'observabilité

$$\| \theta(.,0) \|^2_{H^1_0(0,\pi;\mathbb{R}^2)} \leq C \int_0^T | B^*\theta_x(0,t) |^2 \, dt \tag{3.23}$$

vaut pour tout $\theta_0 \in H^1_0(0,\pi;\mathbb{R}^2)$. Dans (3.23), θ est l'état adjoint associé θ_0. Là encore, ce résultat est bien connu.

3.2.2 Contrôlabilité approximative des limites

Cette sous-section est consacrée à prouver la contrôlabilité approximative du système (3.1), c'est-à-dire le premier point du théorème 3.1. Pour cela, nous allons applique le point 1 de proposition 12. Rappelons que $A_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^2$ sont donnés en (3.3) et $q \in L^\infty(0,\pi)$ est une fonction donnée.

Condition nécessaire : Par contradiction, disons que la condition (3.7) ne tient pas, le qu'il y a $k_0 \geq 1$ pour le quel $I_{k_0}(q) = 0$. Soit nous voyons que l'unique propriété de continuation pour le système adjoint (3.21) n'est plus valide. En effet, prenons a $\theta_0 = a\Phi^*_{1,k_0} + b\Phi_{2,k_0} \in H^1_0(0,\pi;\mathbb{R}^2)$, avec $a, b \in R$ a déterminer. Dans ce cas $k_0 \in \Lambda_3$ (voir (3.10)) et les fonctions Φ^*_{1,k_0} et Φ^*_{2,k_0} des fonctions propres de l'opérateur L^* (voir proposition 7) associées à la valeur propre k_0^2. Ainsi, il est tout à fait difficile de voir que la solution correspondante au problème adjoint (3.21) est donnée par :

$$\theta(.,t) = e^{-k_0^2(T-t)}\left[a\Phi^*_{1,k_0} + b\Phi^*_{2,k_0}\right] = e^{-k_0^2(T-t)}\begin{pmatrix} a\varphi_{k_0} \\ a\psi_{k_0} + b\varphi_{k_0} \end{pmatrix} \quad \text{dans} \quad Q_T. \tag{3.24}$$

par conséquent

$$B^*\theta_x(0,t) = e^{-k_0^2(T-t)}\left(a\psi'_{k_0}(0) + bk_0\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \quad \forall t \in (0,T).$$

En prenant juste un $a = k_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et $b = -\psi'_{k_0}(0)$ nous obtenons $B^*\theta_x(0,.) = 0$ sur $(0,T)$ mais $\theta \neq 0$. Donc, le système (3.1) n'est pas contrôlable approximativement au temps $T > 0$. Ceci prouve la partie nécessaire du premier point du 3.1.

Condition suffisante : Supposons maintenant que la condition (3.7) soit vérifiée. La tache est maintenant de prouver que l'unique propriété de continuation pour les solution du problème adjoint (3.21) est valable. Pour cela, prenons $\theta_0 \in H^1_0(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ et supposons que la solution correspondant θ de (3.21) satisfait :

$$B^*\theta_x(0,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T).$$

D'après le corollaire 1, nous savons que B^* est un base pour $H^1_0(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ (pour l'expression de B^* voir (3.18)). Par conséquent

$$\theta_0(x) = \sum_{k\geq 1}(a_k\Phi^*_{1,k}(x) + b_k\Phi^*_{2,k}(x)),$$

où la série précédente converge dans $H^1_0(0,\pi;R^2)$. Dans cette série les coefficients sont donnés par $a_k = \langle \theta_0, \Phi_{1,k}\rangle$ et $b_k = \langle \theta_0, \Phi_{2,k}\rangle$ pour tout $k \geq 1$. Au vu de (3.22) dans la proposition 10, on a :

$$\theta(x,t) = \sum e^{-k^2(T-t)}\left[a_k(\Phi^*_{1,k} - (T-t)\, I_k(q)\, \Phi^*_{2,k}) + b\Phi^*_{2,k}\right].$$

Cette série converge en $C^0\left([0,T]\,;H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)\right)$ et cette propriété nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} B^*\theta_x\left(0,t\right)=\sum\limits_{k\geq 1}e^{-k^2(T-t)}\left\{\left[a_kB^*\Phi_{1,k,x}^*\left(0\right)+b_kB^*\Phi_{2,k,x}^*\left(0\right)\right]-\left(T-t\right)I_k\left(q\right)B^*\Phi_{2,k,x}^*(0)\right\} \\ \qquad\qquad =\sum\limits_{k\geq 1}e^{-k^2(T-t)}\left[a\psi_k'\left(0\right)+b_kk\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]-\sum\limits_{k\geq 1}\left(T-t\right)e^{-k^2(T-t)}I_k\left(q\right)a_kk\sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{cases}$$

pour tout $t\in(0,T)$. Par contre, à partir des résultats prouvés dans [11] et [5] sur les familles hi-orthogonales aux exponentielles, nous en déduisons que la famille $\left\{e^{-k^2t},te^{-k^2t}\right\}_{k\geq 1}\subset L^2\left(0,T\right)$ est minimale dans $L^2\left(0,T\right)$. Rappelons que nous avons supposé $B^*\theta_x\left(0,.\right)\equiv 0$ sur l'intervalle $(0,T)$. Ensuite, l'expression de $B^*\theta_x\left(0,.\right)$ ainsi que la propriété des exponentielles impliquent $a_k=b_k=0$ pour tout $k\geq 1$. Cela prouve la propriété de continuation pour les solutions aux problème adjoint (3.21) et grâce à la 12, la contrôlabilité approximative du système (3.1) à tout instant positif T.

3.2.3 Contrôlabilité des limites nulles :

Dans cette sous-section, nous étudierons les propriétés de contrôlabilité nulles du système (3.1), c'est-à-dire que nous prouverons le deuxième élément du théorème 3.1. Observons d'abord que la condition (3.7) est une condition nécessaire pour avoir la propriété de contrôlabilité nulle du système (3.1) au temps $T>0$. Cela implique en particulier que $\Lambda=\mathbb{N}^*$(l'ensemble Λ est donnée en (3.10) et $\tilde{T}_0\left(q\right)$ donnée par (3.8), est bien défini et $\tilde{T}_0\left(q\right)\in\left[0,\infty\right]$.

Résultat positif de contrôlabilité des limites :

Supposons que $T>\tilde{T}_0\left(q\right)\in\left[0,\infty\right)$ (voir (3.8)). Notre objectif est de prouver que le système (3.1) est exactement contrôlable à zéro au temps T. Pour cela, $y_0\in H^{-1}\left(0,\pi;\mathbb{R}^2\right)$, nous reformulerons le problème de contrôlabilité de l'unsine comme un problème de moment.

En utilisant les propositions 10 et 11, on en déduit que le contrôle $u\in L^2\left(0,\pi\right)$ condition la solution de (3.1) à zéro au temps T si et seulement si $u\in L^2\left(0,\pi\right)$ satisfait :

$$\int_0^T u\left(t\right)B^*\theta_x\left(0,t\right)dt=-\langle y_0,\theta\left(\cdot,0\right)\rangle_{H^{-1},H_0^1}\quad\forall\theta_0\in H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2).$$

Où $\theta\in C^0\left([0,T]\,;H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)\right)$ est la solution de système adjoint (3.21) associé à θ_0. Puisque B^* est une base de $H_0^1(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ (voir corollaire 1), la propriété de contrôlabilité de l'usine au temps T pour le système (3.1) équivaut à trouver $u\in L^2\left(0,\pi\right)$ telle que

$$\int_0^T u\left(t\right)B^*\theta_x^{i,k}\left(0,t\right)dt=-\left\langle y_0,\theta^{i,k}\left(\cdot,0\right)\right\rangle_{H^{-1},H_0^1},\quad\forall k\geq 1,\quad\forall i=1,2,\tag{3.25}$$

où $\theta^{i,k}$ est la solution du système (3.21) associée à $\theta_0=\Phi_{i,k}^*$ (pour l'expression du fonction $\Phi_{i,k}^*$, voir proposition 7). Prenons

$$u\left(t\right)=v\left(T-t\right),\quad t\in\left(0,T\right).$$

En développant l'inégalité (3.25), on a :

(i) Si nous prenons $\theta_0=\Phi_{2,k}^*$a solution du problème adjoint est $\theta^{2,k}\left(.,t\right)=e^{-k^2(T-t)}\Phi_{2,k}^*$ et (3.25) devient :

$$\int_0^T e^{-k^2t}v\left(t\right)dt=-\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-k^2T}\langle y_0,\Phi_{2,k}^*\rangle_{H^{-1},H_0^1}:=e^{-k^2T}\tilde{M}_1^{(k)}\left(y_0\right),\quad\forall k\geq 1,$$

il est facile de voir que

$$\mid \tilde{M}_1^{(k)}(y_0) \mid \leq C \parallel y_0 \parallel_{H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)}, \quad \forall k \geq 1. \tag{3.26}$$

(ii) Prenons maintenant $\theta_0 = \Phi_{1,k}^*$,dans ce cas la solution du problème adjoint (3.21) est

$$\theta^{1,k}(\cdot,t) = e^{-k^2(T-t)}\Phi_{1,k}^* - (T-t)\, I_k(q)\, e^{-k^2(T-t)}\Phi_{2,k}^*$$

et alors, l'inégalité (3.25) se transforme en $(u(t) = v(T-t), t \in (0,t))$.

$$\begin{cases} \psi_k'(0) \int_0^T e^{-k^2 t} v(t)\, dt - I_k(q)\, \varphi_k'(0) \int_0^T t e^{-k^2 t} v(t)\, dt \\ = -e^{-k^2 T} \left[\langle y_0, \Phi_{1,k}^* \rangle_{H^{-1},H_0^1} - T I_k(q) \langle y_0, \Phi_{2,k}^* \rangle_{H^{-1},H_0^1} \right]. \end{cases}$$

Ainsi, la commande $u = v(T-.)$ doit également satisfait :

$$\int_0^T t e^{-k^2 t} v(t)\, dt = \frac{e^{-k^2 T}}{I_k(q)} \tilde{M}_2^{(k)}(y_0), \quad \forall k \geq 1.$$

où

$$\tilde{M}_2^{(k)}(y_0) := \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \psi_k'(0)\, \tilde{M}_1^{(k)}(y_0) + \left[\langle y_0, \Phi_{1,k}^* \rangle_{H^{-1},H_0^1} - T I_k(q) \langle y_0, \Phi_{2,k}^* \rangle_{H^{-1},H_0^1} \right] \right\}.$$

En utilisant les propriétés de la fonction ψ_k énoncés dans la proposition 8 (voir (3.17)), on a

$$\mid \tilde{M}_2^{(k)}(y_0) \mid \leq C \parallel y_0 \parallel_{H^{-1}(0,\pi;\mathbb{R}^2)}, \quad \forall k \geq 1, \tag{3.27}$$

pour une nouvelle constante positif C indépendant de$k$ et y_0.

En résumé, nous avons prouvé que $u \in L^2(0,\pi)$ est telle que la solution y du système (3.1) satisfait $y(.,T) = 0$ dans $(0,\pi)$ si et seulement si $v = u(T-.) \in L^2(0,T)$ satisfait

$$\begin{cases} \int_0^T e^{-k^2 t} v(t)\, dt = e^{-k^2 T} \tilde{M}_1^{(k)}(y_0), \\ \int_0^T t e^{-k^2 t} v(t)\, dt = \frac{e^{-k^2 T}}{I_k(q)} \tilde{M}_2^{(k)}(y_0), \quad \forall k \geq 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

avec $\tilde{M}_1^{(k)}(y_0)$ et $\tilde{M}_2^{(k)}(y_0)$ satisfait (3.26) et (3.27).

Nous pouvons conclure que la séquence

$$\left\{ e_{1,k} := e^{-k^2 t},\ e_{2,k} := t e^{-k^2 t} \right\}_{k \geq 1}$$

admet une famille biorthogonale $\{q_{1,k}, q_{2,k}\}_{k \geq 1}$ sur $L^2(0,T)$ est une famille $\{q_{1,k},\ q_{2,k}\}_{k \geq 1}$ sur $L^2(0,T)$ satisfait

$$\int_0^T e_{r,k} q_{s,j}(t)\, dt = \delta_{kj}\delta_{rs}, \quad \forall k,\ j \geq 1, \quad 1 \leq r,\ s \leq 2, \tag{3.29}$$

ce que vérifie d'ailleurs que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_{\varepsilon,T} > 0$ telle que

$$\parallel q_{i,k} \parallel_{L^2(0,T)} \leq C_{\varepsilon,T} e^{\varepsilon k^2}, \quad \forall k \geq 1, \quad i = 1, 2. \tag{3.30}$$

En utilisant le formula de (3.28) et la propriété (3.29), nous en déduisons qu'un solution formelle explicite du problème de moment (3.25) est donnée par

$$u\left(T-t\right)=v\left(t\right)=\sum_{k\geq 1}e^{-k^{2}T}\left(\tilde{M}_{1}^{(k)}\left(y_{0}\right)q_{1,k}\left(t\right)+\frac{1}{I_{k}\left(q\right)}\tilde{M}_{2}^{(k)}\left(y_{0}\right)q_{2,k}\left(t\right)\right).$$

voyons que cette série définit un élément de $L^{2}\left(0,T\right)$ lorsque $T>\tilde{T}_{0}\left(q\right)$, c'est-à-dire que les caties précédentes convergent dans $L^{2}\left(0,T\right)$ si $T>\tilde{T}_{0}\left(q\right)$. En effet, à partir de la définition du temps minimal $\tilde{T}_{0}\left(q\right)$ (voir (3.8)) et pour tout $\varepsilon>0$ fixe, on peut déduire qu'il existe une constante positif C_{ε} telle que

$$\frac{1}{\mid I_{k}\left(q\right)\mid}\leq C_{\varepsilon}e^{k^{2}\left(\tilde{T}_{0}(q)+\varepsilon\right)},\quad \forall k\geq 1.$$

Par contre, on peut utiliser la borne (3.30) et obtenir une nouvelle constante positif $C_{\varepsilon,T}$ pour laquelle

$$\begin{cases}\parallel e^{-k^{2}T}\left(\tilde{M}_{1}^{(k)}\left(y_{0}\right)q_{1,k}\left(t\right)+\frac{1}{I_{k}(q)}\tilde{M}_{2}^{(k)}\left(y_{0}\right)q_{2,k}\left(t\right)\right)\parallel_{L^{2}(0,T)}\leq C_{\varepsilon,T}\frac{e^{-k^{2}T}e^{\varepsilon k^{2}}}{|I_{k}(q)|}\\ \qquad\qquad\leq C_{\varepsilon,T}e^{-k^{2}\left(T-\tilde{T}_{0}(q)-2\varepsilon\right)}.\end{cases}$$

Cette dernière inégalité prouve la convergence absolue de la série qui définit le contrôle u puisque ε peut être choisie arbitrairement petite. Ceci prouve la contrôlabilité nulle du système (3.1) au temps T lorsque $T>\tilde{T}_{0}\left(q\right)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité les notions de la contrôlabilité et l'observabilité des système parabolique formé d'un équation de la chaleur en dimension finie. Pour cela il existe un caractérisation très simple de la contrôlabilité due à Kalman. On commence par rappeler des résultats généraux sur la contrôlabilité, puis on présente deux outils l'inégalité de Ingham et la méthode des moments permettant d'établir un l'inégalité d'observabilité.

Bibliographie

[1] ▷ R. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York San Francisco London, 1975.

[2] ▷ G. Allaire. *Analyse Numérique et Optimisation.* Éditions de l'École Polytechnique. Paris, 2005.

[3] ▷ F. AMMAR-KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZALEZ-BURGOSI. DETERESA. *Minimal time of controllability of two parabolic equations with disijoint control and coupling domains,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. **I 352** (2014), no.5, 391-396.

[4] ▷ F. AMMAR-KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZALEZ-BURGOSI. DE TERESA. *The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials,* J. Math.Pures Appl.(9) **96 (**2011),no. 6, 555-590.

[5] ▷ F. AMMAR-KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZALEZ-BURGOSI. and Luz Teresa. *New phenomena for the null controllability of parabolic systems : Minimal time and geometricl dependence,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier, 2016, Volume 444 (Issue 2), pp.1071-1113. hal-01165713.

[6] ▷ F. BOYER AND G. OLIVE, *Approximate controllobility conditions for seme linear 1D parabolic systems with space-dependent coefficients, Math. Control* Relat.Fields **4** (2014), no 3, 263-287.

[7] ▷ H. BREZIS. *Analyse Fonctionnelle- Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[8] ▷ J.-M. CORON, *Control and nonlinearity.Mathematical Surveys and Monographs,* American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[9] ▷ M Duprez, *Contrôlabilité dequelques systèmes gouvernés par des équations paraboliques ,* Université de franche-Conté, 2015.

[10] H.O. FATTORINI AND D.L. RUSSELL, *Exact controllability theorems for linear parabolic equation in one space dimension.* Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971) 272-292.

[11] ▷ E. Feranandez-Cara, M. Gonzalez-burgos, l. de Teresa, *boundary controlabiliy of parabolic coupled equation,* J. Funct. Anal. **259** (2010), no. 7, 1720-1758.

[12] ▷ CH. HEIL, *A Basis Theory Primer, Expanded Edition, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser/Springer,* New York, 2011.

[13] ▷ I. GOHBERG, M. KAERIN, *Introdiction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Translation of Mathematical Monographs,* Vol. 18, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[14] ▷ A. YA. KHINCHIN, *Continued eractions,* The University of chicago Press, Chicago, Ill.-London 1964.

[15] ▷ V. KOMORNIK AND P. LORETI, *Fourier Series in control theory.* Springer, New York, (2005).

[16] ▷ K MAUFFREY, *Contrôlabilité de systèmes gouvernés par des équation aux dérivées partielles* ,Mathématiques générales , Université de franche-Conté, 2015.

[17] ▷ MICHEL MEHRENBERGER, *Inégalités d'Ingham et schémas semi-lagrangiens pour l'équation de Vlasov,* Equation aux dérivées partielles. Université de strasbourg, 2012.

[18] ▷ P. MOIREAU-S. FLISS, *Cours de DEA Analyse Numérique,* Sep 2003-Avr 2004.

[19] ▷ I. REZZOUG*, Eude théorique et numérique des problèmes d'identification des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles,* Doctorat en sciences, 2015.

[20] ▷ M. TUCSNAK, G. WEISS, *Observation and Control for Operator Semigroups, Birkhäuser Adanced Texts : Basler Lehrbücher,* Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

Abstract

In this memory, we present some methods in order to study the controllability of systems of partial differential equations.

We consider the null controllability problem for two coupled paraboic equation with a space-depending coupling term. we analyze both boundary and distributed null controllability. In each case, we exhibit a minimal time of control, that is to say, a time $T_0 \in [0, \infty]$ such that the corresponding system is null controllable at any time $T > T_0$ and is not if $T < T_0$. In the distriduted case, this minimal time depends on the relative position of the control interval and the support of the coupling term. We also prove that, for a fixed control interval and a time $\tau_0 \in [0, \infty]$, there exist coupling terms such that the associated minimal time is τ_0.

Keywords : Existence and uniqueness, parabolic system, the method of moments and the inequality of Ingham, inequality of observability, Approximate controllability, exact controllability.

Résumé

Dans cette mémoire, nous présentons quelques méthodes dans le but étudier la contrôlabilité des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Nous considérons le problème de contrôlabilité nulle pour deux équations parabolique couplées avec un terme de couplage dépendant de l'espace. Nous analysons à la fois la contrôlabilité nulle aux limites et distribuée. Dans chaque cas, on exhibe un temps de pilotage minimale, c'est-à-dire un temps $T_0 \in [0, \infty]$ et n'est pas $T < T_0$. Dans le cas distribué, ce temps minimal dépende de la position relative de l'intervalle de contrôle et du support du terme de couplage. Nous montrons également que pour tout un intervalle de contrôle fixe et un temps $\tau_0 \in [0, \infty]$, il existe des termes minimal associé est τ_0.

Mots clés : Existence et unicité, système parabolique, la méthode des moments et l'inégalité de Ingham, Inégalité d'observabilité, Contrôlabilité approchée, Contrôlabilité exact.