N° d'ordre : ..../2021-ANA/MAT

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématique

Mémoire

pour l'obtention du diplôme de

Master

Filiére :

MATHÉMATIQUES

Spécialité :

Analyse mathématique et applications

Présentée par:

BENDRIS Amina

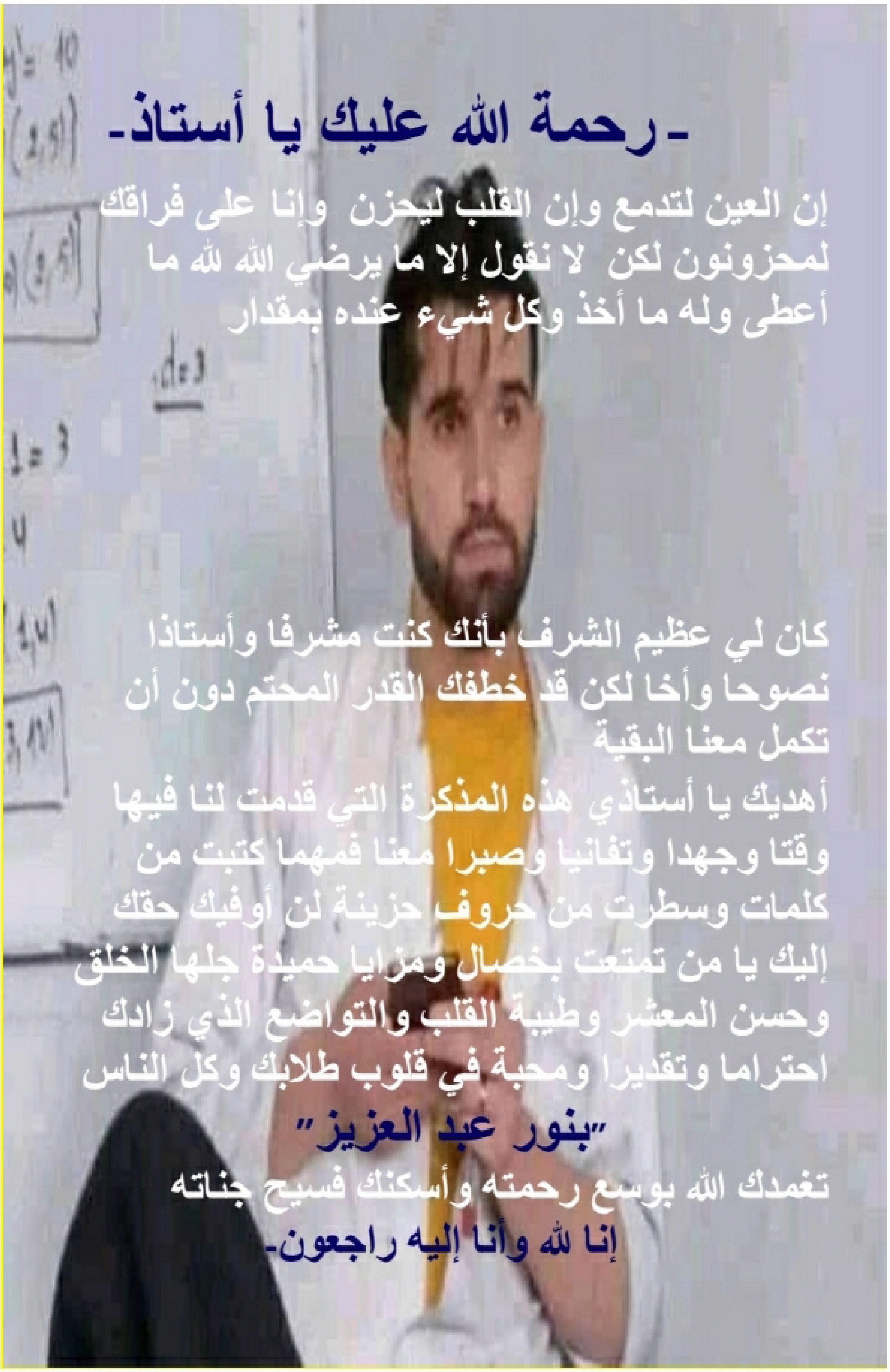
THÈME

Contrôlabilité d'un système hyperbolique

Soutenu publiquement, le .../..07./2021 devant le jury composé de :

Mr	**DERBAZI Ammar**	**présedent**
Mr	**BENNOUR Abdelaziz**	**Encadrant**
Mr	**BERKANI Amirouche**	**Encadrant**
Mm	**ZEGHDANE Rebiha**	**Examinatrice**

Promotion 2020/2021


- رحمة الله عليك يا أستاذ-
إن العين لتدمع وإن القلب ليحزن وإنا على فراقك لمحزونون لكن لا نقول إلا ما يرضي الله لله ما أعطى وله ما أخذ وكل شيء عنده بمقدار
كان لي عظيم الشرف بأنك كنت مشرفا وأستاذا نصوحا وأخا لكن قد خطفك القدر المحتم دون أن تكمل معنا البقية
أهديك يا أستاذي هذه المذكرة التي قدمت لنا فيها وقتا وجهدا وتفانيا وصبرا معنا فمهما كتبت من كلمات وسطرت من حروف حزينة لن أوفيك حقك
إليك يا من تمتعت بخصال ومزايا حميدة جلها الخلق وحسن المعشر وطيبة القلب والتواضع الذي زادك احتراما وتقديرا ومحبة في قلوب طلابك وكل الناس
"بنور عبد العزيز"
تغمدك الله بوسع رحمته وأسكنك فسيح جناته
إنا لله وإنا إليه راجعون-

REMERCIEMENT

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu *qui nous a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.*

Je remercie Dr BENNOUR Abdelaziz *, mon encadreure pour la qualité de son encadrement exceptionnel (Dieu repose son âme).*

Je remercie Dr BERKANI Amirouche*, mon encadreure pour l'aide qu'il m'a apportée, le soutien, et son encoragement.*

Je remercie également tous mes enseignant et enseignante de département du MI.

Je remercie les membres de jury: Dr R.ZAGHDAN *et* Dr A.DERBAZI *d'avoir accepter ce mémoire.*

Mes profonds remercients vont égélement à tous les membres de ma famille en particulier: mes parents, mes soeurs, mes frères et tous mes proches. Et à tous les personnes qu'ils m'ont aidés soutenus de prés ou de loin.

En fin j'adresse mes remerciements a tous mes collègues et toutes mes amis qui m'ont encouragé pour la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, je présenter quelque méthodes dans le but d'étudier la contrôlabilité d'équation aux dérivées partielles. L'objectif de ce mémoire est d'étudier la contrôlabilité exacte aux limites de deux équations d'onde unidimensionnelles couplées avec un contrôle agissant uniquement dans équation. Le problème se transforme en problème de moment.

Mots clée: équation d'onde couplées, contrôlabilité, base de Riesz, problème de moment.

Abstract

In this thesis, I present some methods in order to study the controllability of partial derivatives equation.We study the exacte boundary controllability of two coupled one dimensional wave equation with a control acting only in one equation. The problem is transformed into a moment problem.

Keywords: coupled wave equations, contollability, Riesz base, moment problem.

Table des Matières

Introduction générale

Des nombreaux phénomènes physiques, chimiques ou biologiques sont modélisés à l'aide d'équation aux dérivées partielles linéaire ou non linéaire. Un système physique peut être défini brièvement comme un ensemble d'objets interconnectés et interagissant entre eux.

La contrôlabilité des équation aux dérivées partielles est un sujets en plein développement. Son histoire a commencé avec le cas de la dimension finie, son extension à la dimension infinie a connu plusieurs temps. La théorie de contrôlabilté à été développée, dans les années 70, en particulier autour des systèmes hyperbolique.

Le contrôle des système d'équation aux dérivées partielles constitue un champs mathématique en plein essor. Même si de grandes avancée ont été effectuées ces dernières années, des nombreuses questions restent encore ouvertes. Le contrôle consiste à agir sur une partie de la dynamique afin d'orienter l'évolution. L'objectif général de la théorie de contrôle est d'obtenir des systèmes plus faibles, plus économique et plus rapides.

Le champs d'application de la contrôlabilité trés nombreux dans toutes les disciplines par exemple, guider une voiture, piloter une avion ou un satillite vers une orbite géosrationnaire, coder et décoder une image numérique ou un SmS .... La contrôlabilité peut aussi réduire la douleur, on peut aussi contrôler une épidémie comme l'étude de la thérapie des tumeurs au cerveau ou réaliser une opération chirugicale au laser.

Le but de cette mémoire est d'étudier la contrôlabilité d'un système hyperbolique avec un seul contrôle, les outils pour atteindre ce but sont essentiellement la Base de Riesz, méthode de moment et inégalité d'Ingham.

Cette mémoire est devisée a trois chapiters:

.**Chapiter 1:** *Rappelle d'analyse fonctionnelle*, nous donnons un rappel sur l'essentiels des espaces fonctionnels utilisé (espace de Hilbert, L^p, $L^p(0;T,V)$, espace de Sobolev) ainsi que des notion sur la théorie de semi groupe.

.**Chapiter 2:** *Contrôlabilité des système d'équation aux dérivées partielles*, nous donnos dans ce chapiter les définitions et les divers caractérisations liées au notion du contrôlabilité en dimension fini.

.Chapiter 3: Ce chapiter concerne la contrôlabilité de système hyperbolique linéaires couplées. On montre les resultats de contrôlabilité exacte de ce système.

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnel

Dans ce chapite, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse foctionnelle qui contient quelque notion essencielles qui concernent les espaces $\mathbf{L}^P$, **les espaces hilbert** et de **sobolev** ainsi que une partie de définitions sur les **semi-groupes**.

1.1 Les espaces

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.1 *Soit* $\mathbf{H}$ *un espace vectoriel. Un* ***produit scalaire*** $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *est une forme bilinnéaire de* $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ *dans* $\mathbb{R}$, *symétrique, définit positive.*

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u, v \in \mathbf{H}}$$

Rapellons aussi que

$$\boxed{\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}} \tag{1.1}$$

est une norme associée au produit scalaire.

Définition 1.2 *Un espace de* ***Hilbert*** *est un espace vectoriel* $\mathbf{H}$ *meni d'un produit scalaire* $\langle u, v \rangle$ *et qui est complet pour la norme* $\langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 1.3 (Lax Milgram) *a un forme bilinéaire* $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ *est continue i.e* *s'il existe une constante* $\boldsymbol{C}$ *telle que*

$$\boxed{|a(u,v)| \leq \mathbf{C}\,\|u\|\,\|v\|; \qquad \forall u,v \in H}$$

et coercive ***i.e*** *s'il existe une constante* $\alpha \geq 0$ *telle que*

$$a(u,v) \geq \alpha\,\|v\|^2\,; \qquad \forall v \in H$$

1.3 Espace $\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$

On désigne par$L^1(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ l'espace des fonctions intégrables

$$\boxed{L^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \int_\Omega |f|\,dx \leq \infty\}}$$

telles que

$$\boxed{\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\,dx}$$

Définition 1.4 *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *, on pose*

$$\boxed{L^P(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f|^p \in L^1(\Omega)\}.}$$

On note:

$$\boxed{\|f\|_{L^P} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}} \tag{1.2}$$

on vérifiera ultérieuremet que $\|.\|_{L^P}$ est une norme.

Définition 1.5 *Pour* $p = \infty$*, l'espace de* ***Banach*** $L^\infty(\Omega)$ *tel que*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et} \exists \text{ une constante } \mathbf{C} \text{ tq } |f(x)| \leq \mathbf{C} \text{ p.p sur } \Omega\}$$

on note :

$$\boxed{\|f\|_{L^\infty} = \inf\{\mathbf{C}; |f(x)| \leq \mathbf{C} \quad \text{p.p sur } \Omega\}} \tag{1.3}$$

on vérifiera ultérieurement que $\|.\|_{L^\infty}$ est une norme.

Remarque 1.6 *L'espace* $L^2(\Omega)$ *muni du produit scalaire*

$$\boxed{\langle u,v\rangle = \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx, \forall u,v \in L^2(\Omega)}$$

est un espace de hilbert .

Notation 1.7 *soit* $1 \leq p \leq \infty$ *. On désigne par* p' *l'exposant conjugué de* p *i.e :*

$$\boxed{\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p'} = 1}$$

1.3.1 Quelques inégalités

Inégalité de HŐlder

Soient $f \in L^P$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $f.g \in L^1$ et:

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{P'}}$$

lorsque $p = p' = 2$ on trouve l'inégalité de **Cauchy-Schwarz .**

Proof. : La conclusion est évidente si p=1 et si p=∞.Supposons donc que 1 $\leq p \leq \infty$. *Rappelons* l'**Inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}; \forall a, b \geq 0 \tag{1.4}$$

La démonstration de (1.4) est évidente: la fonction log étant concave sur $]0, \infty[$ on a

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log ab$$

Donc

$$\int |f(x)| |g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \text{ p.p.sur } \Omega$$

il en résulte que $fg \in L^2$ et que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^P}^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{L^{p'}}^{p'} \tag{1.5}$$

Remplaçant dans (1.5) f par λf $(\lambda \geq 0)$ il vient

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^P}^p + \frac{1}{\lambda p'}\|g\|_{L^{p'}}^{p'} \tag{1.6}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_{L^P}^{-1} \|g\|_{L^{p'}}^{\frac{p'}{p}}$

$$
\begin{aligned}
\int |f|\,|g| &\leq \frac{\left(\|f\|_{L^p}^p \|g\|_{L^{p'}}^{\frac{p'}{p}}\right)^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\left(\|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^{p'}}^{\frac{p'}{p}}\right) p'} \|g\|_{L^{p'}}^{p'} \\
&\leq \frac{\|f\|_{L^p}}{p} \|g\|_{L^{p'}} + \frac{\|f\|_{L^p}}{p'} \|g\|_{L^{p'}} \\
&\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)
\end{aligned}
$$

et comme $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) = 1$ alors

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

■

1.4 L'espace $L^P(0,T;V)$

Définition 1.8 *Soit V un espace de Banach, on désigne par $L^P(0,T;V)$ l'espace des fonctions mesurable*

$$u :]0,T[\to V$$

tel que

$$\boxed{\|u\|_{L^P(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^P \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty ;pour 1 \leq p \leq \infty}$$

et pour $p = \infty$ on a

$$\boxed{\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V < \infty}$$

L'espace$L^p(0,T;V)$est un espace de **Banach** pour $1 \leq P \leq \infty$.

Si V est de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_V$, $L^2(0,T;V)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$\boxed{\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_V \, dt}$$

1.5 Espace de Sobolev

Définition 1.9 ***Dérivée faible:*** *soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonction $w_i \in L^2(\Omega)$*

Définition 1.10 *, pour $i \in \{1, 2..., N\}$, telles que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a*

$$\boxed{\int_\Omega v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega w_i \varphi(x)\, dx}$$

1.5.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.11 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ .L'espace de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega)$ est définit par*

$$\boxed{H^1(\Omega) = \{v \in L^2 \text{ tel que } \forall i \in \{1, ..., N\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}}$$

ou $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v.

Proposition 1.12 *Muni du produit scalaire*

$$\boxed{\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_\Omega (u(x)\, v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx} \tag{1.7}$$

et de la norme

$$\boxed{\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proof. *il est évident que (1.7) est bien un produit scalaire dans $H^1(\Omega)$. Il reste donc à montrer que $H^1(\Omega)$ est complet pour la norme associée. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Par définition de la norme de $H^1(\Omega)$, $(u_n)_{n\geq 1}$ ainsi que $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)_{n\geq 1}$ pour $i \in \{1, ..., N\}$ sont des suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe des limites u et w_i telles que u_n converge vers u et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ converge vers w_i dans $L^2(\Omega)$.Or, par définition de la dérivée faible de u_n, pour tout fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega u_n(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\, \phi(x)\, dx. \tag{1.8}$$

Passant à la limite $n \to \infty$ dans (1.8), on obtient

$$\int_\Omega u_n(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega w_i(x)\, \phi(x)\, dx,$$

ce qui prouve que u est dérivable au sens faible et que w_i est la i-ème dérivée partielle faible de u, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Donc, u appartient bien à $H^1(\Omega)$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$. ■

1.5.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.13 *Les fonction de $H_0^1(\Omega)$ sont les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontiére $\Gamma = \partial\Omega$*

$$\boxed{H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ u = 0 \text{ sur } \Gamma\}}$$

sur $H_0^1(\Omega)$ on obtient une norme donné par

$$\boxed{\|u\|_0^2 = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx}$$

1.5.3 Espace $H^{-1}(\Omega)$

on a

$$\boxed{H^{-1}(\Omega) = \text{dual topologique de } H_0^1}$$

Théorème 1.14 *(De Rellich) Si Ω est un ouvert borné de classe C^1, alors l'injection canonique $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte,**i.e.** tout ensemble borné de $H_0^1(\Omega)$est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On écrit*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \ \textit{ est compacte.}$$

On peut identifier $L^2(\Omega)$ est son dual, alors on a inclusion

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injection continue et denses.

1.5.4 Espace $H^m(\Omega)$

Définition 1.15 *Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^m(\Omega)$ est définit par*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \ \textit{ tel que },\forall\alpha \ \textit{avec} \ |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$$

muni du produit scalaire

$$\boxed{\langle u,v\rangle=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leq m}\partial^\alpha u\left(x\right)\partial^\alpha v\left(x\right)dx}$$

et de la norme

$$\begin{aligned}\left\|u\right\|_{H^m}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega\left|\partial^\alpha u\right|^2dx\\ &= \sum_{|\alpha|\leq m}\left\|\partial^\alpha u\right\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

1.5.5 L'espace de sobolev $W^{1,p}\left(\Omega\right)$

Soit $\Omega\in\mathbb{R}^N$un ouvert et soit $p\in\mathbb{R}$ avec $1\leq p\leq\infty$

Définition 1.16 *l'espace de sobolev* $\mathbf{W}^{1,P}\left(\Omega\right)$ *définit par*

$$\boxed{\mathbf{W}^{1,p}\left(\Omega\right)=\left\{u\in L^p\left(\Omega\right)\ tel\ que\ \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-\int_\Omega g_i\varphi\quad\forall\varphi\in C_c^\infty\left(\Omega\right)\ \forall i=1,2...,N\right\}}$$

Muni de la norme

$$\boxed{\left\|u\right\|_{W^{1,p}}=\left\|u\right\|_{L^p}+\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}}$$

1.5.6 L'espace de sobolev $W^{m,p}\left(\Omega\right)$

Définition 1.17 *Soit* Ω *un ouvert pour tout entier* $m\geq 0$,*l'espace de sobolev* $\mathbf{W}^{m,p}\left(\Omega\right)$ *et définit par*

$$\boxed{W^{m,p}\left(\Omega\right)=\left\{v\in L^P\left(\Omega\right)tel\ que,\ \forall\alpha\ avec\ |\alpha|\leq m,\partial^\alpha v\in L^p\left(\Omega\right)\right\}}$$

muni de la norme

$$\left\|u\right\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\left\|\partial^\alpha u\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

on vérifie que $\mathbf{W}^{m,p}\left(\Omega\right)$ *est un espace de Banach.*

On pose $H^m\left(\Omega\right)=W^{m,2}\left(\Omega\right)$

Proposition 1.18 $\mathbf{W}^{m,2}\left(\Omega\right)$ *est un espace de hilbet.*

1.6 Les Semi-groupes

Soit $(H, \|.\|_H)$ un espace de hilbet

Définition 1.19 *une famille d'operateur* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *linéaire et bornées définit sur* H *et dite semi groupe si:*

i) $S(0) = I$ *(I est l'operateur d'identité);*

ii)$S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$

et:

$$iii) \lim_{t\to 0} S(x)\,x = x, \forall x \in H. \tag{1.9}$$

Le semi groupe est fortement continu (ou de class C^0 *), ou de plus simplement* $C^0 - semi - groupe.$

Si en remplace (1.9) *par*

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \|S(t) - I\| = 0, t \geq 0}$$

il s'agit d'un semi groupe uniformément continu.

Définition 1.20 *On appelle générateur infinitésimal d'un* $C_0-semi-groupe$ $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *l'opérateur linéaire* $A : D(A) \subset H \to H$ *défini sur l'ensemble*

$$\boxed{D(A) = \{x \in H,\ \lim_{t\to 0} \tfrac{S(t)x - x}{t}\ existe\}}$$

par

$$\boxed{Ax = \lim_{t\to 0} \tfrac{S(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A)}$$

Chapitre 2

Contrôlabilité des systémes d'équations aux dérivées partielles

Le probléme de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré choisi à priori. On va introduire les notion de contrôlabilité suivant: exact, approchée et à zero.

2.1 Description du systéme

On considére le systéme linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = A(t)\,y(t) + B(t)\,v(t)\,,\ t \in [T_0, T] \\ y(T_0) = y^0, \end{cases} \tag{2.1}$$

Ou T_0 et T sont des réel positifs tel que $T_0 < T$

1. $A(t) : D(A(T)) \subset H \to H$, $B(t) : D(B(t)) \subset U \to V$ sont des opérateurs non bornés, U, H et V désignant des espacs de Hilbert séparables, H s'injectant de manière continue et dense dans V.
2. Les espaces U et V sont appelées respectivement espace des contrôles et espace des états, $v(t)$ le contrôle.
3. $v \in L^2(0, T; V)$ fonction de contrôle.
4. $v(t)$ le contrôle a l'instant t.
5. on supose pour tout $t \in [0, T]$.

6. On suppose, en outre que A est tel que pour tout $T_0 > 0$, tout $T > T_0$, tout $y_0 \in H$ et tout $f \in L^2(0,T;H)$, le problème

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t) \\ y(T_0) = y^0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Admet une solution faible unique sur $y \in C([T_0,T], H)$ qui dépend de manière continue des données y^0 et f. On note U_{T_0T} ensemble des contrôles $v \in L^2(T_0,T;U)$ tel que la solution y de (2.1) pour $y^0 = 0$ vérifie $y(t) \in H$. Pour tout $v \in U_{T_0T}$, on note $y(t;T_{0,}y^0,v)$ la solution du système (2.1) a l'instant t. Quand $T_0 = 0$,on note simplement $y(t;y^0,v)$ et on pose $U_T = U_{T_0T}$.

Remarque 2.1 *La solution générale de* (2.2) *peut se représenter sous la forme:*

$$\boxed{y_v(t) = S(t)y^0 + \int_0^t S(t-s)Bv(s)\,ds}$$

où $(S(t))_{t\geq 0}$ *est le semi groupe engendré par l'operateur* A.

On considère $L_t : L^2(0,T;U) \to H$ *l'operateur linéaire borné défini par:*

$$\boxed{L_t v = \int_0^t S(t-s)Bv(s)\,ds \ ;\forall v \in L^2(0,T;U)}$$

2.1.1 L'opérateur de contrôlabilité L_T

On définit l'operateur non borné

$$\boxed{L_T : D(L_T) \subset L^2(0,T;U) \to H,\ D(L_T) = U_T,\ \ L_T v = y(T;0,v)} \tag{2.3}$$

En d'autres termes, pour tout $v \in U_T$, $L_T v = y(T)$ où y est la solution de (2.1) pour $y^0 = 0$ et $T_0 = 0$. On suppose dans la suite que L_T est fermé de domaine dense.

2.2 Définition des différentes notions de contrôlabilité

Le principe de la contrôlabilité est le suivant: étant donnés deux états $y^0 \in H$ et $y^1 \in H$ du systéme (2.1), existe-t-il une fonction v (appelée **contrôle)** permettant de passer de l'état y^0 a l'état y^1 en un temps fixé $T > 0$. Ces différents concepts de contrôlabilité se déffinissent plus précisément de la façon suivant.

2.2.1 Cotrôlabilité exacte

Définition 2.2 *On dit que le système* (2.1) *est exactement contrôlable au temps* $T > 0$ *si*

$$\boxed{\forall\left(y^0; y\right) \in H \times H,\ \exists v \in U_T\ t.q.y\left(T; y^0, v\right) = y^1}$$

2.2.2 Contrlôabilité à zero

Définition 2.3 *On dit que le système* (2.1) *est contrôlable à zéro au temps* $T > 0$ *si*

$$\boxed{\forall y^0 \in H, v \in U_T\ \ t.q.y\left(T; y^0, v\right) = 0}$$

Remarque 2.4 *La contôrlabilité exacte implique la contrôlabilité à zéro, mais la réciproque n'est pas vraie en générale.*

2.2.3 Contrôlabilté approchée

Définition 2.5 *On dit que le système* (2.1) *est approximativement contrôlable au temps* $T > 0$ *si*

$$\boxed{\forall\left(y^0; y\right) \in H \times H, \quad \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists v \in U_T \qquad \left\|y\left(T; y^0, v\right) - y^1\right\|_H < \varepsilon}$$

2.3 Dualité contrôlabilité-observabilité

On considère maintenant le systéme (2.1) pour $T_0 = 0$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + Bv(t) \\ \qquad y(0) = y^0, \end{cases} \tag{2.4}$$

Les différentes notions de contrôlabilité admettent chacune une formulation duale équivalante. Plus précisément, étudier la contrôlabilité d'un système peut se ramener à étudier certain propriétés d'un système dit adjoint. Nous pouvons caractériser la contrôlabilité par une inégalité d'observabilité et la contrôlabilité approchée par une propriété de continuation unique.

Commençons d'abrod par remarquer que par la linéarité du système la solution de (2.4) se décompose en la somme de la solution homogène $(v = 0)$ et de la solution avec donnée initiale nulle $(y^0 = 0)$:

$$\boxed{\forall t \in [0, T],\ \ y\left(t; y^0, v\right) = y\left(t; y^0, 0\right) + y\left(t; 0, v\right).}$$

En particulier, pour $t = T$, on a

$$\boxed{y\left(T; y^0, v\right) = S_T y^0 + \mathcal{L}_T v} \tag{2.5}$$

où $\mathcal{L}_T = L_T$ est donnée par (2.3) et S_T est défini par $S_T y^0 = y\left(T; y^0, 0\right)$ pour tout $y^0 \in H$. En utilisant la décomposition (2.5), on peut réecrire les différents notions de contrôlabilité de la façon suivant:

Proposition 2.6 *Le système* (2.4) *est*

exactement contrôlable *au temps* T *si,et seulement si,* $\mathcal{L}_T$ *est surjectif,*

approximativement contrôlable *au temps* T *si, et seulement si,* $\operatorname{Im}\left(\mathcal{L}_T\right)$ *est dense dans* H,

contrôlable à zéro au temps T *si, et seulement si* $\operatorname{Im}\left(S_T\right) \subset \operatorname{Im}\left(\mathcal{L}_T\right)$.

On fait appel aux résultats d'analyse fonctionnelle suivants:

Théorème 2.7 *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* $L : D\left(L\right) \subset E \to F$ *un opérateur fermé et de domaine dense. On a*

1. $\overline{\operatorname{Im}\left(L\right)} = \left(Ker\left(L^*\right)\right)^{\perp}$. *En particulier,* $\operatorname{Im}\left(L\right)$ *est dense dans* F *si et seulement si* L^* *est injectif.*

2. L *est surjectif si, et seulement si, il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\forall x \in D\left(L^*\right), \quad \left\|x\right\|_F \leq c\left\|L^* x\right\|_E.$$

Théorème 2.8 *Soient* E, F *et* G *trois espace de Hilbert,* $K \in \mathcal{L}\left(G, F\right)$ *et* $L : D\left(L\right) \subset E \to F$ *un opérateur fermé et de domaine dense. L'inclusion*

$$\operatorname{Im}\left(K\right) \subset \operatorname{Im}\left(L\right)$$

est satisfait si, et seulement si, il existe une constante $c > 0$ *telle que*

$$\boxed{\forall x \in D\left(L^*\right),\ \left\|K^* x\right\|_G \leq c\left\|L^* x\right\|_E}$$

En appliquant les Théorèmes (2.6) et (2.7) avec $E := L^2\left(0, T; U\right)$, $F := H$, $G := H$, $L := \mathcal{L}_T$ et $S := S_T$, on peut alors exprime la contrôlabilité de (2.4) comme suit:

Corollaire 2.9 *Le système* (2.4) *est*

exactement contrôlable *au temps* T *si, et seulement si, il existe une constante* $C_T > 0$ *telle que*

$$\boxed{\forall \varphi^0 \in D\left(L_T^*\right), \quad \left\|\varphi^0\right\|_H \leq C_T \left\|L^* \varphi^0\right\|_{L^2(0,T;U)}} \tag{2.6}$$

approximativement contrôlable *au temps* T *si,et seulement si,*

$$\boxed{\forall \varphi^0 \in D\left(L_T^*\right), \quad \left(L^* \varphi^0 = 0 \Rightarrow \varphi^0 = 0\right)} \tag{2.7}$$

contrôlable à zero *au temps* T *si, et seulement si, il exixte une constante* $C_T > 0$ *telle que*

$$\boxed{\forall \varphi^0 \in D\left(L_T^*\right), \quad \left\|S_T^* \varphi^0\right\|_H \leq C_T \left\|L^* \varphi^0\right\|_{L^2(0,T;U)}} \tag{2.8}$$

Les inégalités (2.6) et (2.8) sont appelées inégalité d'observabilité recpectivement exacte et à zéro. La propriété (2.7) est appelée principe de continuation unique.

Dans la pratique on caractérise ces trois propriétés de $\mathcal{L}_T^*$ en terms du système adjoint associé à (2.4). Pour cela, on va suppose que, pour tout $\varphi^0 \in H$, le problème adjoint

$$\begin{cases} -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = A^*(t)\,\varphi(t), & t \in [0,T] \\ \varphi(T) = \varphi^0, & \end{cases} \tag{2.9}$$

Admet une unique solution faible $\varphi \in C([0,T], H)$. On peut alors facilement montrer que S_T^* est défini par

$$\boxed{\forall \varphi^0 \in H,\, S_T^* \varphi^0 = \varphi(0)},$$

ou φ est a solution (2.9) et que $\mathcal{L}_T^* : D\left(\mathcal{L}_T^*\right) \subset H \to L^2(0,T;H)$ vérifie:

$$\boxed{\forall \varphi^0 \in D\left(L_T^*\right), \text{ p.p. } t \in [0,T],\, \left(\mathcal{L}_T^* \varphi^0\right)(t) = B(t)^* \varphi(t),}$$

ou φ est la solution de (2.9).

Cela permet d'obtenir pour chacune des notions de contrôlabilité du système (2.4) une formulation en termes d'observabilité du système (2.9) qui est utilisable en pratique:

Théorème 2.10 *Le système* (2.4) *est*

exactement contrôlable *au temps* T *si, et seulement si, il existe une constante*

$C_T > 0$ *telle que pour tout* $\varphi^0 \in D(L_T^*)$, *la solution de système* (2.9) *vérifie*

$$\boxed{\|\varphi^0\|_H^2 \leq C_T \int_0^T \|B(t)^* \varphi(t)\|_U^2 \, dt,}$$

approximativement contrôlable *au temps* T *si,et seulement si,por tout* $\varphi^0 \in D(L_T^*)$ *la solution* φ *de* (2.9) *vérifie le principe de continuation unique suivant: si*

$$\boxed{B^*(.)\varphi = 0 \ \ dans \ \ L^2(0,T;U), \ alors \ \varphi^0 = 0}$$

contrôlable à zero *au temps* T *si, et seulement si, il exixte une constante* $C_T > 0$ *telle que pour tout* $\varphi^0 \in D(L_T^*)$ *la solution de système* (2.9) *vérifie*

$$\forall \varphi^0 \in D(L_T^*), \quad \|\varphi(0)\|_H^2 \leq C_T \int_0^T \|B(t)^* \varphi(t)\|_U^2 \, dt.$$

2.4 Quelques outils pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes d'évolution

Dans cette partie, on présente certaine techniques permettant d'étudier la controlabilité des système d'évolution. Afin de comprendre comment et dans quelles situation les utiliser, nous les appliquerons à des problèmes de contrôlabilité déjà résolus.

2.4.1 Contrôlabilité en dimension finie

Dans le cadre de la dimension finie i.e pour le cas d'un système d'équation différentielles ordinaire, on va voir que toutes ces notions de contrôlabilité coïncident et qu'elles peuvent être caractérisées par une condition algébrique sur les coefficients du système appelée condition de **Kalman.**

Equivalence entre les différentes notions

On se place dans le cadre de la dimension finie en posant $H = \mathbb{R}^n$ et $U = \mathbb{R}^m$ ou m et n sont des entier naturels non nuls.

Consédirons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t) = A(t)\, y(t) + B(t)\, v(t) \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{2.10}$$

où y est toujours l'état, y^0 la donnée initiale, v le contrôle et A, B sont des matrices réelles de tailles $n \times n$ et $n \times m$.

On rappele que pour tout $y^0 \in \mathbb{R}^n$ et $v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ il existe une unique $y \in C^0([0,T];\mathbb{R}^n)$ solution de (2.10) qui dépend continûment des données.

La condition de rang de Kalman En dimension finie on peut en fait complétement claculer l'image de l'operateur $\mathcal{L}_T$:

Théorème 2.11 *On a*

$$\operatorname{Im} \mathcal{L}_T = \operatorname{Im} [A : B]_n ,$$

ou

$$[A : B]_n = \left(B, AB, A^2B..., A^{n-1}B\right)$$

est une matrice de taille $n \times nm$.

On obtient que le système (2.10) est contrôlable nau temps T si, est seulement si, la condition de rang de **Kalman** est vérifiée, c'est a dire

$$ran [A : B]_n = n \tag{2.11}$$

Cette condition donne un critére algébrique simple. Par exemple, considérons le système suivant 2×2 avec un seul contrôle

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} = ay_1 + cy_2 + v \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} = by_1 + dy_2 \end{cases}$$

ou $y_1, y_2 \in [0,T] \to \mathbb{R}$ et a, b, c, d sont des constantes réeles. Dans ce cas, on se demande sous quelles conditions deux équation couplées peuvent être contrôlable au moyen d'un seul contrôle. Le critère de **Kalman** nous donne la réponse suivante: le systéme (2.10) est contrôlable si est seulement si le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{a} \\ 0 & \mathrm{b} \end{pmatrix}$$

est 2, autrement dit, si est seulement si $b \neq 0$. Cela sinifie en fait que v contrôle l'état y_1 et qu'ensuite le terme by_1 agit comme un contrôle sur l'équation en y_2.Cela montre que le coefficient de couplage b est le seul dont il faut vraiment se soucier.

2.4.2 Base de Riesz

On note ℓ^2 l'ensemble des suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$ de carré sommable et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de ℓ^2 définie par

$$e_k = \left(0, ...0, \underset{K^{\acute{e}me}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, 0, 0, ...\right), \quad \forall K \in \mathbb{N}^*$$

Définition 2.12 *On appelle base de Riesz de H toute famille $(\phi)_{K\in\mathbb{N}^*} \subset H$ pour laquelle il existe un opérateur inversible $B \in \mathcal{L}(H, \ell^2)$ tel que*

$$B\phi_K = e_K, \quad \forall K \in \mathbb{N}^*$$

on dit alors que la famille $\left(\tilde{\phi}_K\right)_{K\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\tilde{\phi}_K = B^* B\phi_K, \quad \forall K \in \mathbb{N}^*,$$

est la famille biorthogonale à la base de Riesz $(\phi_K)_{K\in\mathbb{N}^*}$.

2.5 Inégalité de Ingham

L'inégalité d'Ingham constitue une généralisation de **l'identité de Perseval** pour les fonctions de la forme

$$\boxed{f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp i\mu_n t}$$

lorsque la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$vérifie une propriété d'écart du type $\mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, avec $\gamma > 0$. Son application à la démonstration d'inégalités d'observabilité ne peut se faire que dans le cas d'opérateurs diagonalisable pour les quels on connaît suffisamment les proriétés spectrales.

Théorème 2.13 ***(Ingham 1936)***(). *Soient $(\mu_n)\, n \in z$ une suite de nombre réels et J un intervalle borné de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} &\text{1-}\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma \\ &\text{2-}|J| > \frac{2\pi}{\gamma}. \end{aligned}$$

Il existe alors deux constante $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ (ne dépendant que de $|J|$ et γ) telles *que pour toute suite complexe* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ *on ait la double inégalité*

$$c_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_j |f(t)|^2 \, dt \leq c_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \tag{2.12}$$

où f est définie par

$$f(t) = \sum a_n \exp i\mu_n t.$$

En considére la fonction

$$f(t) = \exp i\mu_n t - \exp i\mu_{n+1} t$$

cet en utilisant l'inégalité des accroissements finis $|\exp i\mu_n t - \exp i\mu_{n+1} t| \leq |t| |\mu_n - \mu_{n+1}|$, on remarque que la condition d'écart 1 du (2.13) est nécissaire pour que l'inégalité de gauche dans(2.12) ait lieu; on a dans ce cas, pour $J = [T_0, T]$,

$$|\mu_n - \mu_{n+1}| \geq \frac{6c_1}{T^3 - T_0^3}, \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dans les applications de ce résultat à la contrôlabilité de systèmes d'équation aux dérivée partielles, c'est l'inégalité de gauche dans (2.12) qui est utilisée pour démontrer les inégalités d'observabilité associées.

2.5.1 Controlabilité de l'équation des ondes

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière et $\Gamma \in \partial\Omega$. On étude la contrôlabilité frontière de l'équation des ondes sur Γ.

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 \text{ dans } Q = \Omega \times]0,T[\\ y = v \quad \text{dans} \quad \Gamma \times]0,T[\\ y(0) = y^0, \, y'(0) = y^1 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

pour $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et $v \in L^2(\Gamma \times (0,T))$ c'est le contrôle.

Définition 2.14 *On dit que y est le solution faible de* (2.13) *si y vérifié pour tout* $f \in D(\Omega \times (0,T))$ *l'égalité*

$$\int_{\Omega\times(0,T)} yf dxdt = -\langle y^0, \varphi'(0)\rangle + \langle y^1, \varphi(0)\rangle_{H'(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \int_{\Gamma\times(0,T)} v\partial_v \sigma dt$$

où φ est la solution de

$$\begin{cases} \varphi'' - \Delta\varphi = f & \Omega \times (0,T) \\ \varphi = 0 & \Gamma \times (0,T) \\ \varphi(T) = \varphi'(T) = 0 & \Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

On rappelle le théorème d'existence et d'unicité des solution de (2.14).

Pour tout $(y^0, y^1, v) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Gamma \times (0,T))$ *il existe une unique solution* y *de* (2.13) *avec*

$$y \in C\left((0,T); L^2(\Omega)\right) \cap C\left((0,T); H^{-1}(\Omega)\right).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ *telle que pour tout* $(y^0, y^1, v) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Gamma \times (0,T))$ *on a l'inégalité*

$$\boxed{\|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|y'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|y'\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2((0,T)\times\Gamma)}\right)}$$

On peut démontrer que la contrôlabilité du système (2.13) *se ramène à l'observabilité de sont système adjoint au sens du théorème suivant.*

Théorème 2.15 *Soit* $T > 0$. *Le système* (2.13) *est exactement contrôlable au temps* T *si est seulement s'il existe une constante* $C(T) > 0$ *telle que pour tout* $(\varphi^0, \varphi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *on a l'inégalité*

$$\boxed{\|(\varphi^0, \varphi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C(T) \int_0^T \int_\Gamma |\partial_v \phi(t,x)|^2 \, d\sigma dt} \tag{2.15}$$

Où φ est la solution du problème adjoint

$$\begin{cases} \varphi'' - \Delta\varphi = 0 & (0,T) \times \Omega \\ \varphi = 0 & (0,T) \times \Gamma \\ \varphi(0) = \varphi^0, \ \varphi'(0) = \varphi^1 & \Omega \end{cases} \tag{2.16}$$

2.6 Observabilité du systéme adjoint en 1D

On considère, dans la suite, l'équation des ondes en une dimension d'espace sur le domaine $\Omega = (0, \pi)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = y_{xx}(x,t) & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) \\ y(0,t) = v(t), \quad y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y^0(x), \quad \frac{dy}{dx}(x,0) = y^1(x) & t \in (0,\pi) \end{cases} \tag{2.17}$$

ou le terme v désigne le contrôle recheché. Le système (2.17) est exactement contrôlable au temps T si, est seulement si, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $(\varphi^0, \varphi^1) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$, la solution φ du système adjoint

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \varphi_{xx} = 0 \qquad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) \\ \varphi(0,t) = \varphi(\pi,t) = 0 \qquad t \in (0,T) \\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x), \qquad \varphi_t(x,0) = \varphi^1(x) \qquad t \in (0,T) \end{cases} \tag{2.18}$$

vérifie

$$\boxed{\|(\varphi^0, \varphi^1)\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \leq C_T \int_0^T (\varphi_x(0,t))^2 \, dt} \tag{2.19}$$

Théorème 2.16 () *Si $T \geq 2\pi$, alors l'équation des ondes* (2.17) *est* exactement contrôlable *au temps T.*

La téchnique utilisé dans notre travail étant trés proche de celle donnée dans la démonstration de ce théorème, nous allons la présenter de maniére assez détaillée. Pour démontrer (2.16) nous allons tout d'abord déterminer les valeurs propres de l'opérateur

$$\begin{aligned} L &: D(L) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi), \\ L &= -\partial_{xx}, \\ D(L) &= H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi). \end{aligned}$$

2.6.1 Valeur propre et fonction propre de L

Lemme 2.17 *Les valeurs propre de l'opérateur L sont égale à K^2 avec $K \in \mathbb{N}^*$. La suite $(\varphi_K)_{K\in\mathbb{N}^*}$ de fonction définies par*

$$\psi_K(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(Kx),$$

pour tout $x \in [0,\pi]$ est une base hilbertienne formé de vecteurs propre de l'opérateur L associés à la suite de valeurs propre $(K^2)_{K\in\mathbb{N}^*}$.

Proof. Remarquons que L est un opérateur auto-adjoint, positif et inversible

sur l'espace $L^2(0,\pi)$, donc ses valeur propre sont toutes strictement positives. De plus $D(L)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(0,\pi)$, donc $L^2(0,\pi)$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propre de L.

Soit λ une valeur propre de L et $\psi \in D(L) \setminus \{0\}$ une fonction propre asociée.

Alors ψ est une solution non nulle de l'équation

$$\left\{\begin{array}{c}\psi_{xx}+\lambda\psi=0\\ \psi(0)=\psi(\pi)=0\end{array}\right. \tag{2.20}$$

Donc ψ est de la forme

$$\psi(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\lambda x}\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\lambda x}\right)$$

Avec $c_1=\psi(0)=0$ et $c_2\sin\left(\sqrt{\lambda x}\right)=\psi(\pi)=0$. Puisque $\psi\neq 0$, il vient $c_2\neq 0$ donc $\sin\left(\sqrt{\lambda x}\right)\neq 0$. On déduit qu'il existe $K\in\mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{\lambda}=K$. D'où $K\in\mathbb{N}^*$, $\lambda=K^2$ et

$$\forall x\in[0,\pi]\qquad \psi(x)=c_2\sin(Kx)$$

choisissons la constante c_2 de sorte que $\|\psi\|_{L^2(0,\pi)}=1$. Puisque $\int_0^\pi\sin(Kx)\,dx=\frac{\pi}{2}$, il vient $c_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$\forall x\in[0,\pi]\qquad \psi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(Kx)$$

■

2.6.2 La solution de problème adjoint 2.18

Soit $(\varphi^0,\varphi^1)\in H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$. Décomposons φ^0 et φ^1 dans **la base Hilbertienne** $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$sous la forme

$$\varphi^0=\sum_{k\geq1}\alpha_n\psi_k\quad \text{et}\quad \varphi^1=\sum_{k\geq1}\beta_n\psi_k$$

avec $\sum_{k\geq1}K^2(\alpha_k)^2<\infty$ et $\sum_{k\geq1}(\beta_K)^2<\infty$. On a alors

$$\left\|(\varphi^0,\varphi^1)\right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)}=\sum_{k\geq1}\left(K^2(\alpha_K)^2+(\beta_K)^2\right) \tag{2.21}$$

Théorème 2.18 *La solution* φ *de* 2.18 *est donnée par*

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{K\in\mathbb{N}^*}\left[\left(\alpha_K-i\frac{\beta_K}{K}\right)\exp iKt+\left(\alpha_K+i\frac{\beta_K}{K}\right)\exp -iKt\right]\sin(Kx) \tag{2.22}$$

Proof. on écrit φ dans la base Hilbertienne $(\psi_K)_{K\in\mathbb{N}^*}$ sous la forme

$$\forall\,(x,t)\in(0,\pi)\times(0,T)\qquad \varphi\,(x,t)=\sum b_K\,(t)\,\psi_K\,(x)$$

φ est la solution de 2.18 si est seulement si

$$\forall K\in\mathbb{N}^*\quad \begin{cases} b''_K\,(t)+K^2 b_K\,(t)=0 \qquad t\in(0,T)\\ \quad b_K\,(0)=\alpha_K,\quad b\prime_K=\beta_K\end{cases} \tag{2.23}$$

Ce qui donne encore à

$$\forall K\in\mathbb{N}^*,\begin{cases} b_K\,(t)=c_{1,K}\exp\,(iKt)\;\;+c_{2,K}\exp\,(-iKt)\qquad t\in(0,T)\\ \qquad \alpha_K=c_{1,K}+c_{2,K},\quad \beta_K=iK\,(c_{1,K}-c_{2,K})\end{cases}$$

ainsi la solution de 2.18 si, et seulement si

$$\forall K\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in(0,T)\quad b_K\,(t)=\frac{1}{2}\left(\alpha_K-i\frac{\beta_K}{K}\right)\exp\,(iKt)+\frac{1}{2}\left(\alpha_K+i\frac{\beta_K}{K}\right)\exp\,(-iKt)$$

ce qui donne bien la formule annoncée pou φ. ■

2.6.3 Utilisation de théorème d'Ingham

Soit φ la solution de (2.18) donnée par (2.22). En dérivant la formule (2.22) par rapport à x on obtient pour tout $t\in(0,T)$

$$\varphi_x\,(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{K\in\mathbb{N}^*}\left[\left(\alpha_K-i\frac{\beta_K}{K}\right)\exp iKt\right]K\cos\,(Kx)\,.$$

Pour $x=0$, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi_x\,(0,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{K\in\mathbb{N}^*}\left[\left(\alpha_K-i\frac{\beta_K}{K}\right)\exp iKt+\left(\alpha_K+i\frac{\beta_K}{K}\right)\exp -iKt\right]K\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{K\in\mathbb{N}^*}\left[(K\alpha_K-i\beta_K)\exp iKt+(K\alpha_K+i\beta_K)\exp -iKt\right],\end{aligned}$$

et donc

$$\varphi_x\,(0,t)=\sum_{K\in\mathbb{N}^*}a_K\exp i\mu_K t \tag{2.24}$$

avec pour tout $K \in \mathbb{Z}$

$$\mu_K = K, \qquad a_K = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(K\alpha_K^0 - i\alpha_K^1\right) & \text{Si } K \geq 1 \\ 0 & \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(-K\right)\alpha_{-K}^0 - i\alpha_{-K}^1\right) & \text{Si } K \leq -1 \end{cases}$$

Remarquon que d'aprés (2.21)

$$\boxed{\left\|\left(\varphi^0, \varphi^1\right)\right\|_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \frac{1}{\pi} \sum_{K\in\mathbb{Z}} \left|a_K\right|^2}$$

de plus, pour tout $K \in \mathbb{Z}$, $\lambda_{K+1} - \lambda_K = (K+1) - K = 1$. Donc (**2.13**) s'applique avec $\gamma = 1$ et donne pour tout $Y > 2\pi$, l'existance de deux constantes $c_1 = c_1(T) > 0$ et $c_2 = c_2(T) > 0$ telles que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ on ait

$$\boxed{c_1 \sum_{K\in\mathbb{Z}} \left|a_K\right|^2 \leq \int_0^T \left|f(t)\right|^2 dt \leq c_2 \sum_{K\in\mathbb{Z}} \left|a_K\right|^2} \tag{2.25}$$

où

$$\boxed{f(t) = \sum_{K\in\mathbb{Z}} a_K \exp i\mu_K t.}$$

En appliquant l'inégalité de gauche de (2.25) à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$,on obtient

$$\boxed{\forall T > 2\pi, c_1 \frac{1}{\pi} \left\|\left(\varphi^0, \varphi^1\right)\right\|_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \leq \int_0^T \left(\varphi_x(0,t)\right)^2 dt,}$$

ce qui démontre l'inégalité de l'observabilité (2.19) avec $C_T = \frac{c_1}{\pi}$, pour tout $T > 2\pi$.

Notons que (2.19) est encore vrai si $T = 2\pi$ d'aprés l'identité de Perseval. L'égalité

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp i\lambda_n t\right|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|a_n\right|^2}$$

signifie exactement que

$$\boxed{\left\|\left(\varphi^0, \varphi^0\right)\right\|_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)}^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\varphi_x(0,t)\right)^2 dt.}$$

dans ce cas, l'inégalité d'observabilité est une inégalité.

En conclusion, le théorème de **Ingham**, a permis d'établir le résultat suivant: si $T \geq 2\pi$, alors l'équation des ondes (2.16) est exactement contrôlable au temps T.

2.7 La méthode des moments

Le but de la méthode de moments est de transformer un problème de contrôlabilité pour un système linéaire en un problème de moments sur le contrôle.

2.7.1 Controlabilité l'équation de la chaleur en 1D par la méthode des moments

C'est un résultat en dimension 1 avec un contrôle frontière. Pour etre plus précis, considérons

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 \qquad \text{dans } (0,T)\times(0,1) \\ y(t,0) = v(t) \qquad y(t,1) = 0 \quad \text{sur } (0,T), \\ y(0) = y_0 \qquad \text{dans } (0,1) \end{cases} \tag{2.26}$$

où y est l'état, y_0 est la donnée initiale, v est le contrôle.

On rappelle (2.26) que pour tout $y_0 \in L^2(0,1)$ et $v \in L^2(0,T)$ il existe une unique solution (faible) $y \in C^0([0,T]; L^2(0,1))$ qui dépend continûment des données: il existe une constante $C > 0$ (indépendante de T) telle que

$$\|y\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \leq C\left(\|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(Q_T)}\right).$$

De plus, la régularité, la régularité parabolic nous dit aussi que $y \in L^2(0,T; H^2(0,1) \cap H_0^1 0(0,1))$ si $y_0 \in H_0^1(\Omega)$.

On introduit le systèm adjoint à (2.26), c'est à dire l'équation rétrograde en temps

$$\begin{cases} -\phi_t - \phi_{xx} = 0 \qquad \text{dans } (0,T)\times(0,1) \\ \phi = 0 \qquad \text{sur } (0,T) \\ \phi(T) = \phi_t \qquad \text{dans } (0,1) \end{cases} \tag{2.27}$$

on rarppelle que pour tout $\phi_T \in L^2(0,1)$ il existe une unique solution faible $C^0([0,T]; L^2(0,1))$ qui dépend continuement des données. En effectuant des intégration par partie on obtient la relation fondamentale entre la solution y du problème initiale (2.26) et la solution ϕ du problème adjoint (2.27) :

$$\langle y(T), \phi_T\rangle_{H^{-1},\, H_0^1} - \langle y_0, \phi(0)\rangle_{H^{-1},\, H_0^1} = \int_0^T v(t)\,\partial_x\phi(t,0)\,dt.$$

Pour tout $\phi_T \in H_0^1(0,1)$, ou ϕ est toujours la solution du système ajoint (2.27). Il est alors facile de voirs que l'équation (2.26) est contrôlable à zero au temps T si, et seulement si, pour tout $y_0 \in H^{-1}(0,1)$, il existe un contrôle $v \in L^2(0,T)$ tel que

$$-\langle y_0, \phi(0)\rangle_{H^{-1},\, H_0^1} = \int_0^T v(t)\, \partial_x \phi(t,0)\, dt.$$

En décomposant maintenant y_0 et ϕ en séries de Fourier dans la base de fonctions propres $\{\phi_K\}_{K\geq 1}$ de $-\partial_x^2$ (avec conditions au bord de Dirichlet), la reletion précédente est équivalente à

$$c_K = \int_0^T v(T-t) \exp -\lambda_K t dt, \qquad \forall K \geq 1 \tag{2.28}$$

ou on a posé $c_K = \frac{-\exp -\lambda_K T}{\partial_x \phi_K(0)} \langle y_0, \phi_K\rangle_{H^{-1},\, H_0^1}$, $\partial_K \phi_K(0) \neq 0$. Le problème des moments est alors le suivant étant une suite $(c_K) \in \ell^2$ est-il possible de trouver $v \in L^2(0,T)$ tel que la relation (2.28) soit vérifiée.

Pour le résoudre, on construit une famille $\{q_K\}_{K\geq 1} \in L^2(0,T)$ biothogonale à la famille des exponentielles $\{\exp -\lambda_K t\}_{K\geq 1}$, c'est-à-dire telle que

$$\langle q_K, \exp -\lambda_K t\rangle_{L^2(0,T)} = \delta_K \tag{2.29}$$

et qui vérifie de plus l'estimation

$$\|q_K\|_{L^2(0,T)} \leq \rho_T \exp C\sqrt{\lambda_K}, \quad \forall K \geq 1 \tag{2.30}$$

ou ρ_T est une constante qui dépend de T. Une foix cette famille construite, il suffit de prendre v de la forme

$$v(t) = \sum_{K=1}^{\infty} c_K q_K(T-t).$$

Vérifions que cette série converge bien dans $L^2(0,T)$. De l'estimation (2.30) et **l'inégalité de Young** $C\sqrt{\lambda_K} \leq \frac{\lambda_K T}{2} + \frac{C^2}{2T}$ on a

$$\begin{cases} \|q_K\|_{L^2(0,T)} \leq \rho_T \exp \frac{\lambda_K T}{2} + \frac{C^2}{2T} \\ |C_K| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \exp -\lambda_K t \ \ \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} \end{cases}.$$

Ansi

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_T \exp \frac{C^2}{2T} \left(\sum_{K=1}^{\infty} \exp -\frac{\lambda_K T}{2} \right) \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}.$$

Comme $\lambda_K = K^2\pi^2$, cette série est comparable à l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \exp -\frac{\pi^2 T}{2} x^2 dx$, qui vaut $\sqrt{\frac{1}{2\pi T}}$.

Par ailleurs, sachant qu'on peut en fait prendre $\rho_T = C \exp \frac{C}{T}$, cela fournit aussi une estimation du coût du contrôle $C \exp \frac{C}{T}$.

Chapitre 3

Contrôlabilité aux limites exacte des équation hyperbolique couplées

Au cours des quinze dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour l'étude de la contrôlabilité des équation de même nature exerçant un contrôle sur moins d'équations que le nombre totale d'équation du système.

Soit Ω ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$ et $w, o \subset \Omega$ sous ensemble non vide et $T > 0$ on considère le système couplée

$$\begin{cases} y_{tt} - \triangle y = h_w \qquad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T) \\ y = 0 \quad \text{au } \sum \\ y(x, 0) = y^0(x), \qquad y_t(x, 0) = y^1(x) \qquad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} q_{tt} - \triangle q = yI_o \\ q = 0 \\ q(x, T) = 0, \quad q_t(x, T) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Le problème est maintenant de donner des condition sur w, o et $T > 0$ de telle sorte que pour tout $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}$ il existe un contrôle h dans un espace approprié, de telle sorte que

$$\boxed{q(x, 0) = q_t(x, 0) = 0.}$$

En utilisant une méhode d'énergie à deux niveaux , pour $\alpha > 0$ un petit paramètre, le problème de contrôlabilité aux limite suivant. Autrement dit, étant donné toute valeur initiale (y^0, q^0, y^1, q^1) et finale condition $\left(y^{0,T}, q^{0,T}, y^{1,T}, q^{1,T}\right)$ les deux dans $Y^0 = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, elle donne les conditions sur Γ_0 et $T > 0$ de telle sorte qu'il existe v tel que la solution correspondante à

$$\begin{cases} y_{tt} - \triangle y + \alpha q = 0 \quad \text{dans Q} \\ q_{tt} - \triangle q + \alpha y = 0 \quad \text{dans Q} \\ y = v \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0,T) \qquad y = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0,T) \\ q = 0 \qquad \text{sur } \sum \\ y(x,0) = y^0(x), \qquad y_t(x,0) = y^1(x) \quad \text{dans } \Omega \\ q(x,0) = q^0, \qquad q_t(x,0) = q^1 \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

satisfait

$$(y(T), q(T), y_t(T), q_t(T)) = \left(y^{0,T}, q^{0,T}, y^{1,T}, q^{1,T}\right).$$

Soit $\Omega = (0,\pi)$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0,T)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous étudirons la contrôlabilité propriérés du système:

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + \alpha q = 0 \quad \text{dans } Q \\ q_{tt} - q_{xx} + \beta y = 0 \quad \text{dans } Q \\ y(0,t) = u(t) \qquad y(\pi,t) = 0 \quad t \in (0,T) \\ q = 0 \qquad \text{sur } \sum \\ y(x,0) = y^0(x), \qquad y_t(x,0) = y^1(x) \quad \text{dans } \Omega \\ q(x,0) = q^0, \qquad q_t(x,0) = q^1 \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

Nous considérons également le cas particulier où $\alpha = 0$

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} = 0 \quad \text{dans } Q = (0,\pi) \times (0,T) \\ q_{tt} - q_{xx} + \beta y = 0 \quad \text{dans } Q \\ y(0,t) = u(t) \qquad y(\pi,t) = 0 \quad t \in (0,T) \\ q = 0 \qquad \text{sur } \sum \\ y(x,0) = y^0(x), \qquad y_t(x,0) = y^1(x) \quad \text{dans } (0,\pi) \\ q(x,0) = q^0, \qquad q_t(x,0) = q^1 \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $(y^0, q^0, y^1, q^1) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) = \vartheta$.

Théorème 3.1 () *Pour* $(y^0, q^0, y^1, q^1) \in \vartheta$. *La solution* $(y,q) = (y^u(x,t), q^u(x,t))$ *de* (3.4) *est unique et satisfait l'inclusion* $(y, q, y_t, q_t) \in C([0,T]; \vartheta)$. *Cela signifie que pour tout* $t \in [0,T]$, $(y(.,t), q(.,t), y_t(.,t), q_t(.,t)) \in \vartheta$ *est continue dans la norme sur* ϑ.

Définition 3.2 *i)Le système* (3.4) *est appelé à être exactement contrôlable dans* *l'intervalle de temps* $[0, T]$ *si pour tout* $(y^0, q^0, y^1, q^1) \in \vartheta$

$$\boxed{\{(y^u(., T), q^u(., T), y_t^u(., T), q_t^u(., T)) : u \in L^2(0, T)\} = \vartheta}$$

ii) Le système (3.4) *est appelé à être approximativement contrôlable dans l'intervalle de temps* $[0, T]$ *l'ensemble*

$$\boxed{\{(y^u(., T), q^u(., T), y_t^u(., T), q_t^u(., T)) : u \in L^2(0, T)\}}$$

est dense en ϑ.

Théorème 3.3 () *Supposons* $\beta \neq 0$, *et considérons l'égalité suivante*

$$\boxed{n^2 - \sqrt{\alpha\beta} = m^2 + \sqrt{\alpha\beta}, \quad m, n \in \mathbb{N}} \tag{3.6}$$

(i) Si (3.6) *ne se produit jamais pour* $m \neq n$, *le système* (3.4) *est exactement contrôlable dans l'intervalle de temps* $[0, T]$, $T \geq 4\pi$.

(ii)Si (3.6) *se produit pour un certain* m, n, *le système* (3.4) *n'est pas approximativement contrôlable pour aucun* T.

(iii) Le système (3.4) *n'est pas approximativement contrôlable pour aucun* $T < \pi$.

Remarque 3.4 *On observez que lorsque* $\beta = 0$ *la deuxième équation est découplée de la première équation, où le contrôle agit et donc le système* (3.4) *n'est pas approximativement contrôlable pour tout* $T > 0$.

Notons le cas particulier important du théorème précédent

Théorème 3.5 () *Si* $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ *alors le système* (3.4) *est exactement contrôlable pour* $T \geq 4\pi$.

3.1 Système couplée au problème du moments

Pour pouver théorème , nous transformons le problème de controlabilité en un problème des moments de la forme

$$\int_0^T u(t) f_n(t) \, dt = c_n, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

On sait que le problème (3.7) a une solution $u \in L^2(0, T)$ pour tout $\{c_n\}_N \in \ell^2(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille $F = \{f_n\}_{n \in N}$ forme une base $\pounds$ dans $L^2(0, T)$. La famille F a différents formes dans le cas $\alpha = 0$, $\alpha\beta > 0$ et $\alpha\beta < 0$. On montre que dans tous ces cas, lorsque (3.6) n'est pas vérifie, la famille F forme une base de Riesz dans $L^2(0,T)$ pour $T \geq 4\pi$.

Nous commençons par dériver le problème des moments liés à la contrôlabilité exacte du système (3.4). Il est bien connu que la réversibilité et la linéarité du système (3.4) rendent la contrôlabilité exacte équivalante à la contrôlabilité exacte à partir de zéro. On considère donc le système

$$\begin{gathered} y_{tt} - y_{xx} + \alpha q = 0 \quad \text{dans } 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T \\ q_{tt} - q_{xx} + \beta y = 0 \\ y(0,t) = u(t), \qquad y(\pi,t) = q(0,t) = q(\pi,t) = 0 \\ y(x,0) = y_t(x,0) = q(x,0) = q_t(x,0) = 0 \end{gathered} \tag{3.8}$$

ici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\beta \neq 0$ et $u \in L^2(0,T)$.

Nous présentons y, q sous forme de séries

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\phi_n(x), \qquad q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\phi_n(x) \tag{3.9}$$

Où $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$. En multipliant (3.8) par $\sin(nx)$ et en intégrant par partie dans $(0,\pi)$ on obtient

$$\begin{cases} \int_0^\pi (y_{tt}(x,t) +^2 y(x,t) + \alpha q(x,t)) \sin nx dx = nu(t), & 0 < t < T \\ \int_0^\pi (q_{tt}(x,t) + K^2 q(x,t) + \beta y(x,t)) \sin nx dx = 0, & 0 < t < T \end{cases} \tag{3.10}$$

En remplaçon (3.9) dans (3.10), on obtient

$$\begin{cases} \ddot{a}_n + n^2 a_n + \alpha b_n = k_n u(t), \qquad k_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}n} \\ \ddot{b}_n + n^2 b_n + \beta a_n = 0 \\ a_n(0) = \dot{a}_n(0) = b_n(0) = \dot{b}_n(0) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Pour résoudre le système (3.11) pour chaque n nous posons

$$Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ \dot{a}_n \\ \dot{b}_n \end{pmatrix}, \qquad A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -n^2 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -n^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on écrit (3.11) sous le forme suivant

$$\dot{Y}_n(t) = A_n Y_n(t) + F_n(t), \qquad Y_n(0) = 0. \tag{3.12}$$

La solution de (3.12) peut être écrit sous la forme

$$Y_n(t) = \int_0^t \exp A_n(t-\tau) F_n(\tau) d\tau, \qquad F_n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_n \\ 0 \end{pmatrix} u(t). \tag{3.13}$$

La fonction matricielle $\exp A_n t$ a la forme

$$\exp A_n t = z_{0,n}(t) I + z_{1,n}(t) A_n + z_{2,n}(t) A_n^2 + z_{3,n}(t) A_n^3 \tag{3.14}$$

où $z_{k,n}(t)$ sont les solution des équations différentielles

$$z^{(4)} + 2n^2 z'' + n^4 - \alpha\beta = 0, \qquad z_{k,n}^{(j)}(0) = \delta_{jk}, \quad j,k = 0,1,2,3. \tag{3.15}$$

Le polynôme caractéristique associé à (3.15) est

$$\lambda^4 + 2n^2\lambda^2 + n^4 - \alpha\beta = \left(\lambda^2 + n^2 - \sqrt{\alpha\beta}\right)\left(\lambda^2 + n^2 + \sqrt{\alpha\beta}\right).$$

Les racines de ce polynôme déterminer les solutions $z_{k,n}(t)$. Le problème de contrôlabilité se réduit alors à le problème de moments de la forme:

$$\int_0^T \exp A_n(T-t)\ F_n(t) dt = c_n$$

3.2 Solution du problème du moments

Il est bien connu que les normes des fonctions y et q et leurs dérivées temporelles dans les espaces de sobolev correspondants sont équivalantes aux normes de leurs coefficients de Fourier dans la pondération ℓ^2 espaces:

$$\left\|\left(y^u(\cdot,T), q^u(\cdot,T), y_t^u(\cdot,T), q_t^u(\cdot,T)\right)\right\|_\vartheta^2 \asymp \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|a_n(T)\right|^2 + \left|nb_n(T)\right|^2 + \left|n^{-1}\dot{a_n}(T)\right|^2 + \left|\dot{b}_n(T)\right|^2\right] \tag{3.16}$$

la solution des équations (3.11) ou (3.12) dépendant de α et β.Nous discutons de trois cas différents.

3.2.1 Cas $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$

On vérifie facilement qua la solution de (3.11) et (3.12), dans le cas $\alpha = 0$ est donnée par la formules:

$$\begin{aligned}
a_n(t) &= \frac{k_n}{n}\int_0^t \sin(n(t-\tau))\,u(\tau)\,d\tau, \\
b_n(t) &= -\frac{k_n\beta}{2n^3}\int_0^t (\sin(n(t-\tau)) - n(t-\tau)\cos(n(t-\tau)))\,u(\tau)\,d\tau, \\
\dot{a}_n(t) &= k_n\int_0^t \cos(n(t-\tau))\,u(\tau)\,d\tau \\
\dot{b}_n(t) &= -\frac{k_n\beta}{2n}\int_0^t (t-\tau)\sin(n(t-\tau))\,u(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

puisque $k_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}n$, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
a_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \sin(n(t-\tau))\,u(\tau)\,d\tau, \\
nb_n(t) &= -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \left(\frac{\sin(n(t-\tau))}{n} - (t-\tau)\cos(n(t-\tau))\right)u(\tau)\,d\tau, \\
n^{-1}\dot{a}_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \cos(n(t-\tau))\,u(\tau)\,d\tau \\
\dot{b}_n &= -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t (t-\tau)\sin(n(t-\tau))\,u(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

notre prochaine étape est de prouver que la famille de fonction:

$$F = \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt,\ \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\sin nt}{n} + t\cos nt\right),\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt,\ -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}t\sin nt\right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Forme une base $\pounds$ dans $L^2(0,T)$ pour $T \geq 4\pi$. Rappelons qu'une famille est dite base $\pounds$ si elle forme un **base de Riesz** dans la fermeture de sa travée linéaire.

Il est connu que la famille:

$$\varepsilon = \{\sin nt,\ t\sin nt,\ \cos nt,\ t\cos nt\}$$

forme une base $\mathcal{L}$ dans $L^2(0,T)$ pour$T \geq 4$. Il est facile de vérifier que l'opérateur B qui fait correspondre ε à F est borné et borné inversible dans $L^2(0,T)$ puisque:

$$\boxed{B = diag\,(B_n)_{n=1}^{\infty}} \tag{3.17}$$

avec

$$B_n = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{n\sqrt{2\pi}} & 0 & 0 & \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_n^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \\ \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{n} & \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, F est également une base $\mathcal{L}$ dans cet espace.

Remarque 3.6 *Remarquons que la peuve est valide si au lieu de considère seulement β on prend $\beta\chi_w$ avec χ la fonction caractéristique du sous-ensemble non vide $w \subset (0, \pi)$.*

3.2.2 Cas $\alpha\beta > 0$

Dans cette section, nous considérons le cas dans lequel les deux paramétres de couplage ont le même signe. Comme précédement, nous voulons résoudre un problème de moments. À cette fin,nous devons construire une base de Riezs qui conduit à la solution. En générale, voir ci-dessous, cette base va être donnée par deux famille de fonction vectorielles. La première famille est donnée par un nombre fini de paramètre $n : n^2 < \sqrt{\alpha\beta}$, et la deuxième famille est donnée par un nombre infini de paramètre $n : n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}$. Clairement quand $\sqrt{\alpha\beta} < 1$ nous n'aurons que la deuxième famille indexée par $n \in \mathbb{N}$. On commencer par l'étude de la famille finie.

sous cas $n^2 < \sqrt{\alpha\beta}$

Il peut y avoir un nombre fini de n satisfaisant cette inégalité. Dans ce cas, le pôlynome caractéristique de la matrice A_n est donnée par

$$\boxed{\lambda^4 + 2n^2\lambda^2 + n^4 - \alpha\beta = \left(\lambda^2 + (\gamma_n^+)^2\right)\left(\lambda^2 - (\gamma_n^-)^2\right),}$$

où$\gamma_n^+ = \sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}, \quad \gamma_n^- = \sqrt{\sqrt{\alpha\beta} - n^2}$.

Dans ce cas la solution (3.11) et (3.12) à la forme

$$
\begin{aligned}
a_n(t) &= \frac{k_n}{2}\int_0^t \left(\frac{\sinh\left[(t-\tau)\gamma_n^-\right]}{\gamma_n^-} + \frac{\sin\left[(t-\tau)\gamma_n^+\right]}{\gamma_n^+}\right) u(\tau)\, d\tau, \\
b_n(t) &= \frac{k_n}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_0^t \left(\frac{\sin\left[(t-\tau)\gamma_n^+\right]}{\gamma_n^+} - \frac{\sinh\left[(t-\tau)\gamma_n^-\right]}{\gamma_n^-}\right) u(\tau)\, d\tau, \\
\dot{a}_n(t) &= \frac{k_n}{2}\int_0^t \left[\cos(t-\tau)\gamma_n^+ + \cosh(t-\tau)\gamma_n^-\right] u(\tau)\, d\tau \\
\dot{b}_n(t) &= \frac{k_n}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_0^t \left[\cos(t-\tau)\gamma_n^+ - \cosh(t-\tau)\gamma_n^-\right] u(\tau)\, d\tau
\end{aligned}
$$

On considère la famille finie

$$F_{\sqrt{\alpha\beta}} = \left\{\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sinh\left[(t-\tau)\gamma_n^-\right]}{\gamma_n^-} + \frac{\sin\left[(t-\tau)\gamma_n^+\right]}{\gamma_n^+}\right), \frac{n^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\left[(t-\tau)\gamma_n^+\right]}{\gamma_n^+} - \frac{\sinh\left[(t-\tau)\gamma_n^-\right]}{\gamma_n^-}\right), \ldots$$

Il est clair que l'aplication qui transforme $F_{\sqrt{\alpha\beta}}$ dans la famille $\varepsilon_{\sqrt{\alpha\beta}} = \{\exp -i\,(i\gamma_n^- t)\,, \exp i\,(i\gamma_n^- t)\,,$ ex

est borné par l'inverse aux bornes dans $L^2(0,T)$.

sous cas $n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}$

On définit $w_n^{\pm} = \sqrt{n^2 \pm \sqrt{\alpha\beta}}$. La solution de (3.11) et (3.12) est donnée par

$$a_n(t) = \frac{k_n}{2}\int_0^t \left(\frac{\sin\left[\omega_n^-(t-\tau)\right]}{\omega_n^-} + \frac{\sin\left[\omega_n^+(t-\tau)\right]}{\omega_n^+}\right) u(\tau)\, d\tau, \tag{3.18}$$

$$b_n(t) = \frac{k_n}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_0^t \left(\frac{\sin\left[\omega_n^+(t-\tau)\right]}{\omega_n^+} - \frac{\sinh\left[\omega_n^-(t-\tau)\right]}{\omega_n^-}\right) u(\tau)\, d\tau, \tag{3.19}$$

$$\dot{a}_n(t) = \frac{k_n}{2}\int_0^t \left(\cos\left(\omega_n^-(t-\tau)\right) + \cos\left(\omega_n^+(t-\tau)\right)\right) u(\tau)\, d\tau \tag{3.20}$$

$$\dot{b}_n(t) = \frac{k_n}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_0^t \left(\cos\left(\omega_n^+(t-\tau)\right) - \cos\left(\omega_n^-(t-\tau)\right)\right) u(\tau)\, d\tau \tag{3.21}$$

Si certains $\omega_n = 0$ on pose $\frac{\sin \omega_n^-(t-\tau)}{\omega_n^-} = t - \tau$.

Remarque 3.7 *On peut vérifier que lorsque* $\alpha \to 0$, *substitue* $k_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}n$, *nous avons:*

$$a_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \left(\frac{\sin\left[\omega_n^-(t-\tau)\right]}{\omega_n^-} + \frac{\sin\left[\omega_n^+(t-\tau)\right]}{\omega_n^+}\right) u(\tau)\, d\tau, \tag{3.22}$$

$$nb_n(t) = \frac{n^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_0^t \left(\frac{\sin\left[\omega_n^+(t-\tau)\right]}{\omega_n^+} - \frac{\sinh\left[\omega_n^-(t-\tau)\right]}{\omega_n^-}\right)u(\tau)\,d\tau \tag{3.23}$$

$$n^{-1}\dot{a}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \left(\cos\left(\omega_n^-(t-\tau)\right) + \cos\left(\omega_n^+(t-\tau)\right)\right)u(\tau)\,d\tau \tag{3.24}$$

$$\dot{b}_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_0^t \left(\cos\left(\omega_n^+(t-\tau)\right) - \cos\left(\omega_n^-(t-\tau)\right)\right)u(\tau)\,d\tau \tag{3.25}$$

Considérons la famille

$$\boxed{\varepsilon_1 = \left\{\sin\left(\omega_n^- t\right), \tfrac{\sin\left(t\omega_n^-\right)-\sin\left(t\omega_n^+\right)}{\omega_n^- - \omega_n^+}, \cos\omega_n^-(t), \tfrac{\cos\left(\omega_n^- t\right)-\cos\left(\omega_n^+ t\right)}{\omega_n^- - \omega_n^+}\right\}_{n^2\geq\sqrt{\alpha\beta}}}$$

On peut vérifier que l'opérateur qui mappe ε_1 *à la famille*

$$F_1 = \left\{\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\left(t\omega_n^-\right)}{\omega_n^-} + \frac{\sin\left(t\omega_n^+\right)}{\omega_n^+}\right), \frac{n^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(\frac{\sin\left(t\omega_n^+\right)}{\omega_n^+} - \frac{\sin\left(t\omega_n^-\right)}{\omega_n^-}\right), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\cos\left(t\omega_n^-\right) + \cos\left(t\omega\right.\right.$$

est borné et borné inversible dans cet espace. En fait, $F_1 = B\varepsilon_1$*, ou* B *est une matrice de blocs diagonale de la forme* (3.17)

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix} n\left(\frac{\omega_n^+ + \omega_n^-}{\omega_n^+\omega_n^-}\right) & n\left(\frac{\omega_n^+ - \omega_n^-}{\omega_n^+}\right) & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}n^2\frac{\left(\omega_n^+ - \omega_n^-\right)}{\omega_n^-\omega_n^+} & \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}n^2\frac{\left(\omega_n^+ - \omega_n^-\right)}{\omega_n^+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \omega_n^+ - \omega_n^- \\ 0 & 0 & 0 & n\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(\omega_n^+ - \omega_n^-\right) \end{pmatrix}$$

observez que pour chaque n

$$\boxed{\det B_n = \tfrac{n^4}{\pi^2}\tfrac{\alpha\left(\omega_n^- - \omega_n^+\right)}{\beta\omega_n^-\omega_n^+} > 0}$$

et

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\det B_n = \tfrac{\beta^2}{\pi^2}}.$$

3.2.3 Cas $\alpha\beta < 0$

Observez que dans ce cas 3.6 ne se vérifier jamais et alors le système sera exactement contrôlable pour tout temps $T > 4\pi$.

Soit $\delta_n^+ := \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^4 - \alpha\beta} + n^2\right)}, \delta_n^- := \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^4 - \alpha\beta} - n^2\right)}.$

La solution de (3.11) ou (3.12) est de forme

$$
\begin{aligned}
a_n(t) &= k_n \int_0^t \frac{\delta_n^- \sinh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\cos\left(\delta_n^+(t-\tau) + \delta_n^+ \cosh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\sin\left(\delta_n^+(t-\tau)\right)\right)}{\sqrt{n^4-\alpha\beta}} u(\tau)\,d\tau \\
b_n(t) &= \frac{\beta k_n}{2} n^2 \int_0^t \frac{\sinh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\cos\left(\delta_n^+(t-\tau)\right)}{\delta_n^-\sqrt{n^4-\alpha\beta}} - \frac{\cosh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\sin\left(\delta_n^+(t-\tau)\right)}{\delta_n^+\sqrt{n^4-\alpha\beta}} u(\tau)\,d\tau \\
\dot{a}_n(t) &= k_n \int_0^t \cosh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\cos\left(\delta_n^+(t-\tau)\right) u(\tau)\,d\tau \\
\dot{b}_n(t) &= -\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} k_n \int_0^t \sinh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\sin\left(\delta_n^+(t-\tau)\right) u(\tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

on voit que $\delta_n^+ \asymp n$ et $\delta_n^- = O(1/n)$.

Sabstitue $k_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n$, on a

$$
\begin{aligned}
a_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \int_0^t \frac{\delta_n^- \sinh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\cos\left(\delta_n^+(t-\tau) + \delta_n^+ \cosh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\sin\left(\delta_n^+(t-\tau)\right)\right)}{\sqrt{n^4-\alpha\beta}} u(\\
nb_n(t) &= \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} n^2 \int_0^t \frac{\sinh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\cos\left(\delta_n^+(t-\tau)\right)}{\delta_n^-\sqrt{n^4-\alpha\beta}} - \frac{\cosh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\sin\left(\delta_n^+(t-\tau)\right)}{\delta_n^+\sqrt{n^4-\alpha\beta}} u(\tau)\,d \\
n^{-1}\dot{a}_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \int_0^t \cosh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\cos\left(\delta_n^+(t-\tau)\right) u(\tau)\,d\tau \\
\dot{b}_n(t) &= -\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} n \int_0^t \sinh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\sin\left(\delta_n^+(t-\tau)\right) u(\tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

Considère la famille

$$
\varepsilon = \left\{ \exp\left(\delta_n^- + i\delta_n^+\right)(t-\tau), \frac{\exp\left(\delta_n^- + i\delta_n^+\right)(t-\tau) - \exp-\left(\delta_n^- - i\delta_n^+\right)(t-\tau)}{2\delta_n^-}, \exp\left(\delta_n^- - i\delta_n^+\right)(t-
$$

on peut vérifie que l'opérateur qui mappe la famille ε sur la famille

$$
F = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \left(\frac{\delta_n^- \sinh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\cos\left(\delta_n^+(t-\tau) + \delta_n^+ \cosh\left(\delta_n^-(t-\tau)\right)\sin\left(\delta_n^+(t-\tau)\right)\right)}{\sqrt{n^4-\alpha\beta}} \right), \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} n^2 \left(\right.
$$

est borné et borné inversible dand cet espace. En fait $F = \varepsilon B$, où B est une matrice de blocs diagonale de la forme 3.17 avec

$$B_n = \begin{pmatrix} -\frac{in\delta_n^+}{2\sqrt{n^4-\alpha\beta}} & \frac{n\delta_n^-\left(\delta_n^-+i\delta_n^+\right)}{2\sqrt{n^4-\alpha\beta}} & \frac{in\delta_n^+}{2\sqrt{n^4-\alpha\beta}} & \frac{n\delta_n^-\left(\delta_n^--i\delta_n^+\right)}{2\sqrt{n^4-\alpha\beta}} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{in^2\beta}{\sqrt{n^4-\alpha\beta}\delta_n^+} & -\frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{in^2\beta\left(\delta_n^-+i\delta_n^+\right)}{\sqrt{n^4-\alpha\beta}\delta_n^+} & -\frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{in^2\beta}{\sqrt{n^4-\alpha\beta}\delta_n^+} & \frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{in^2\beta\left(\delta_n^--i\delta_n^+\right)}{\sqrt{n^4-\alpha\beta}\delta_n^+} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\delta_n^-}{2} & 1 & -\frac{\delta_n^-}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}in\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\delta_n^- & 0 & -\frac{1}{2}in\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\delta_n^- \end{pmatrix},$$

$$|\det B_n| = \left| \frac{\beta\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}n^4\sqrt{\sqrt{n^4-\alpha\beta}-n^2}}{4\pi^{3/2}\sqrt{n^4-\alpha\beta}\sqrt{\sqrt{n^4-\alpha\beta}+n^2}} \right| > 0$$

et

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \det B_n = -\frac{1}{8\pi^{3/4}}\beta^2\, sign\beta.}$$

ε forme une base $\mathcal{L}$ dans $L^2\left(0,T\right)$ pour $T \geq 4\pi$ puis F aussi.

Conclusion

La contrôlabilité et l'observabilité jouent un rôle principal dans la théorie d'analyse des systèmes distribué et elles ont des application trés vastes dans toutes les science et l'industrie.

Bibliographie

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York San Francisco London, (1975).

[2] F. Alabau-Boussouira. A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems. *SIAM J. Cont*

[3] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York San Francisco London, (1975).

[4] F. Alabau-Boussouira. A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems. *SIAM J. Control Optim. 42-3, (2003) 871-906.*

[5] S. Avdonin, A. Choque Rivero and L. de Teresa. Exact boundary controllability of coupled hyperbolic equations. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 23-4 (2013) 701-710.*

[6] S. A. Avdonin and S.A. Ivanov. *Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[7] S. Avdonin, W. Moran. Ingham-type inequalities and Riesz bases of divided differences. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 11-4, (2001) 803-820.*

[8] A. Bennour, F. Ammar Khodja, D. Teniou. Exact and approximate controllability of coupled one-dimensional hyperbolic equations. *J. EECT. 25 (2017) 487*

[9] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext, Springer, New York,

[10] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI, (2007).

[11] A. E. Ingham – « Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series », Math. Z. 41 , no. 1, p, (1936), 367-379.

[12] V. Komornik and P. Loreti. *Fourier Series in Control Theory.* Springer, New York, (2005).

[13] I. Lasiecka & R. Triggiani. Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations, *In: "Partial Differential Equation Methods in Control and Shape optimization". G. Da Prato & J-P Zolésio (editors). Marcel and Dekker, INC (1997), 215-244.*

[14] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 335-356.*

[15] D.L. Russell. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Appl. Math., 52, (1973), 189-221.*

[16] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. Transl. Amer. Math. Soc., 34, 2, 39-68, 1963; translation of Math. Sbornik, 45, (1938), 471-496.