Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des mathematiques et de l'informatique
Département de mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Système Dynamique

PAR

NOUIKAS AZEDDINE
SAADOUD ZOUHIR

Thème

SUR DES PROBLÈMES DE COMPLÉMENTARITÉ LINÉAIRE

Devant le jury:

Z.REMDANI	MAA	Université de Bordj Bou Arréridj	Président
S.ADDOUNE	MCA	Université de Bordj Bou Arréridj	Encadreur
L.GUERRA	MCB	Université de Bordj Bou Arréridj	Examinateur

Promotion : 2020/2021

Remerciements

Premièrement, nous voudrions exprimer nos sincères remerciements à Dieu pour nous avoir aidé à effectuer ce travail. Nous tenons également à exprimer notre gratitude à Mr S. ADDOUNE qui nous a toujours fait confiance et qui nous a encouragé à surmonter diverses difficultés. Nous remercions également les membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail. Nous remercions également tous nos enseignants à tous les niveaux d'enseignement, en particulier les enseignants de la Faculté de Mathématiques de l'Université de Bordj Bou Arreridj. Nos remerciements vont également à nos proches, à tous nos amis et à tous nos collègues.

Notations

$\emptyset$	Ensemble vide
$\mathbb{R}$	Corps des réels
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n
$\mathbb{R}^n_+$	l'orthant positif de $\mathbb{R}^n$
$M_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices réelles d'ordre n
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{aff}(S)$	le sous-espace affine engendré par S
$\mathbf{conv}(S)$	le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant S
$\mathbf{epi}(f)$	Epigraphe d'une fonction f
$\|\cdot\|$	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$
$\nabla f(x)$	Gradient d'une fonction f au point x
$\nabla^2 f(x)$	La matrice hessienne de f définie par $(\nabla^2 f(x))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$
$\mathbf{cone}(A)$	cône convexe engendré par A
$\arg\min\limits_C f$	L'ensemble des solutions optimales globales
$loc\min\limits_C f$	L'ensemble des solutions optimales locales
X^T	Transposé d'une matrice/d'un vecteur X
$M_{\cdot j}$	la j^{eme} colonne de la matrice M
M^{-1}	Inverse d'une matrice carrée M
I_n	Matrice identité de taille n
$PCL(q,M)$	Un problème de complémentarité linéaire dans lequel les données sont le vecteur $q = (q_1, ..., q_n)^T$ et la matrice carré M d'ordre n
$Sol(q,M)$	l'ensemble des solutions de $PCL(q,M)$
$C(M)$	La classe de 2^n cônes complémentaires associés à la matrice carrée M d'ordre n

$K(M)$	L'union de tous les cônes complémentaires dans $C(M)$. Il est l'ensemble de tous les vecteurs q pour lequel $Sol(q,M) \neq \emptyset$
DP	Matrice définie positive
SDP	Matrice semi-définie positive
CP	Matrice copositive
SCP	Matrice strictement copositive
CPP	Matrice copositive plus
CPS	Matrice copositive star
$\mathbf{S}$	On note $\mathbf{S}$ l'ensemble des $\mathbf{S}-$matrice, c'est l'ensembles des matrice carrée M qui vérifie $\exists x \in \mathbb{R}^n : x > 0$ et $Mx > 0$
$\mathbf{Q}_0$	On note $\mathbf{Q}_0$ l'ensemble des $\mathbf{Q}_0-$matrice, ce sent les matrices carrée M pour laquelle le problème $PCL(q,M)$ admet une solution s'il est réalisable
$\mathbf{Q}$	On note $\mathbf{Q}$ l'ensemble des $\mathbf{Q}-$matrice, ce sent les matrices carrée M pour laquelle le $PCL(q,M)$ admet une solution pour tout vecteur $q \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{P}$	On note $\mathbf{P}$ l'ensemble des $\mathbf{P}-$matrice elle une matrice carrée qui vérifie tous ses mineurs principaux sont strictement positives
$\mathbf{P}_0$	On note $\mathbf{P}_0$ l'ensemble des $\mathbf{P}_0-$matrice, c'est l'ensemble des matrice carrée M dont les mineurs principaux sont positives
$\mathbf{E}_0$	On note $\mathbf{E}_0$ l'ensemble des $\mathbf{E}_0-$matrice, c'est la classe des matrices carrées M qui vérifie $$[0 \neq x \geq 0] \Rightarrow [\exists k \in \{1,\ldots,n\} : x_k > 0 \; et \, (Mx)_k \geq 0]$$
$\mathbf{E}$	On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des $\mathbf{E}-$matrice, c'est la classe des matrices carrées M qui vérifie $$[0 \neq x \geq 0] \Rightarrow [\exists k \in \{1,\ldots,n\} : x_k > 0 \; et \, (Mx)_k > 0]$$
$\mathbf{Z}$	On note $\mathbf{Z}$ l'ensemble des $\mathbf{Z}-$ matrice c'est l'ensemble des matrices carrées dont les éléments extra-diagonaux sont négatifs
$\mathbf{R}_0$	On note $\mathbf{R}_0$ l'ensemble des $\mathbf{R}_0-$matrices ce sont les matrices carrées M telles que $Sol(0,M) = \{0\}$.
$M_{\alpha\alpha}$	Sous-matrice principale d'une matrice M, $M_{\alpha\alpha} = (M_{ij})_{i\in\alpha, j\in\alpha}$
$(PCL)'$	Le $PCL(q + ez_0, M)$, $z_0 \geq 0$ et $e = [1\ldots1]^T$

Table des matières

Introduction

Le sujet traité dans ce mémoire concerne le problème de complémentarité linéaire (PCL), qui se formule comme suit : Soit M une matrice carrée d'ordre n, et q un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Le problème consiste à trouver deux vecteurs $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ et $z = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$ satisfaisant

$$w - Mz = q$$

$$w \geq 0,\ z \geq 0\ \ et\ \ w_i z_i = 0\ pour\ tout\ i = 1, \ldots, n.$$

Les seules données du problème sont le vecteur q et la matrice carrée M. Dans un (PCL), il n'y a pas de fonction objective à optimiser. Le choix d'une méthode de résolution dépend de la nature de la matrice M.

L'importance grandissante de ce problème est mesurée par les différentes applications qu'il couvre, aussi bien en mathématiques que dans la pratique, en l'occurrence : la chimie quantique, la théorie de contrôle, la programmation linéaire... [8]. Le (PCL) est un problème général qui réunit les programmes linéaires et quadratiques et les jeux bi-matrices.

Le mémoire est divisé en trois chapitres organisés comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions de base, de l'analyse convexe, l'existence et les conditions d'optimalité d'un programme mathématique.

Le second chapitre est présenté en deux volets

Dans le premier, on présente une synthèse générale sur les problèmes de complémentarité linéaire (caractérisation, interprétation géométrique), la relation entre le (PCL) et d'autres problèmes d'optimisation (programme linéaire (PL), programme quadratique (PQ)) est aussi abordée.

Le deuxième volet est consacré à la question de l'existence et l'unicité de la solution. On considère différentes classes de matrices qui nous permettent d'obtenir des résultats sur l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le troisième chapitre on présente la méthode de Lemke pour résoudre un problème de complémentarité linéaire.

Finalement, on termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Convexité

La notion de convexité est un outil mathématique important pour l'étude des problèmes d'optimisation. À ce propos, nous présentons quelques notions de base d'usage courant.

1.1.1 Ensembles affines

Définition 1.1.1. *Un sous ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est dit affine si*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in F, \qquad \text{pour tout } x, y \in F \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En d'autres termes, on dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un sous espace affine si elle contient toute droite passant par deux quelconques de ses points.

Exemple 1.1.1.

- *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, les sous-espaces affines sont les points, les droites et le plan lui même.*
- *Par contre, une demi-droite n'est pas un sous-espace affine.*

Dans $\mathbb{R}^n$, tout sous-espace affine F s'écrit $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ où $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Définition 1.1.2. *On appelle combinaison affine des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de $\mathbb{R}^n$ tout élément x de la forme $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.*

Soit S une partie de $\mathbb{R}^n$ non nécessairement affine, le sous-espace affine engendré par cette partie, noté $\mathbf{aff}(S)$, est l'ensemble de toutes les combinaisons affines d'éléments de cette partie, c'est à dire

$$\mathbf{aff}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : x_i \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

On peut vérifier facilement que $\mathbf{aff}(S)$ est le plus petit sous-espace affine contenant S, c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant S. L'espace affine engendré par une partie S est parfois appelé *l'enveloppe affine* de S.

1.1.2 Ensembles convexes

Définition 1.1.3. *Un sous ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si, pour tout x, y dans C et pour tout λ dans l'intervalle $[0,1]$, le point $(1-\lambda)x + \lambda y$ est dans C.*

Autrement dit, Un sous ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est convexe s'il contient tout segment dont les extrémités sont dans C.

Ensemble convexe. Ensemble non convexe.

Figure 1.1 – Exemples d'ensembles convexes et non convexes.

Les opérations algébriques suivantes conservent la convexité

- L'intersection quelconque.
- Le produit cartésien.
- Les transformations affines.
- Les combinaisons linéaires.

Définition 1.1.4. *On appelle combinaison convexe de m vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de $\mathbb{R}^n$ toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.*

Définition 1.1.5. *L'enveloppe convexe de l'ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant S(voir Figure 1.2). En d'autres termes*

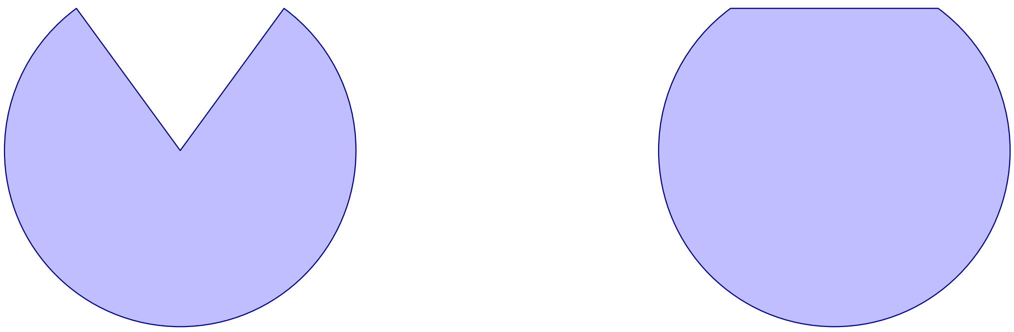
$$\mathbf{conv}(S) = \bigcap_{C \in \mathscr{C}} C \text{ où } \mathscr{C} := \{C \subset \mathbb{R}^n : C \text{ est un convexe contenant } S\}.$$

On peut montrer sans difficulté que les éléments de $\mathbf{conv}(S)$ *sont exactement les combinaisons convexes d'éléments de S.*

Remarque 1.1.1. *En général, l'enveloppe convexe d'un ensemble fermé n'est pas fermé. De plus, si S est convexe alors $S =$* $\mathbf{conv}(S)$*, et réciproquement. D'autre part, si S est borné (respectivement compact), alors* $\mathbf{conv}(S)$ *est borné (respectivement compact).*

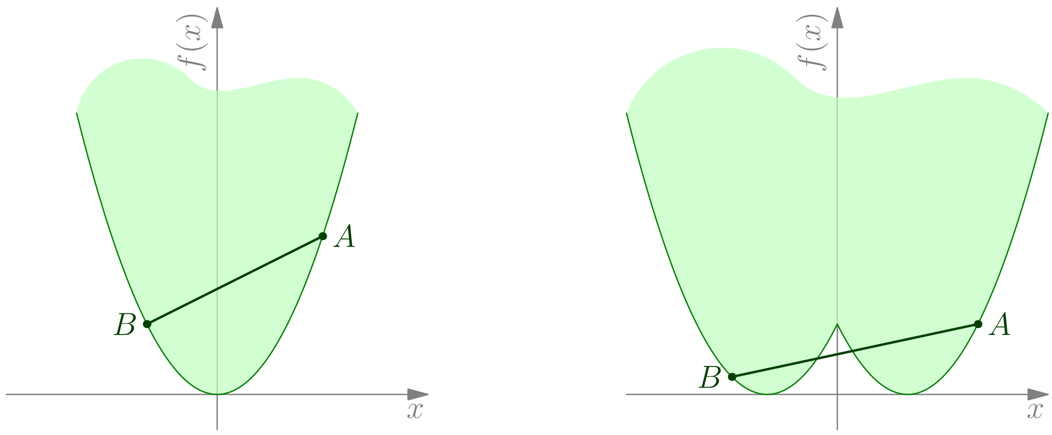
1.1.3 Fonctions convexes

Définition 1.1.6. *Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction. L'épigraphe de f est la partie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par,* $\boldsymbol{epi}(f) = \{(x,r) \in S \times R : f(x) \leq r\}$.



(a) Ensemble S non convexe. (b) L'enveloppe convexe de S..

FIGURE 1.2 – L'enveloppe convexe d'un ensemble.



(a) Fonction convexe. (b) Fonction non convexe.

FIGURE 1.3 – Exemples de fonction convexe et non convexe.

Définition 1.1.7. *Soit S un ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, une fonction $f : S \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur S si son épigraphe est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (voir Figure 1.3).*

Proposition 1.1.1. *Soit S une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est convexe sur S si et seulement si pour tout $x, y \in S$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

ou d'une manière équivalente : si pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in S^m$, on a

$$f\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$$

Remarque 1.1.2. *La fonction $f : S \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe sur S si*

pour tout $x, y \in S$ distincts et tout $\lambda \in]0,1[$, on a $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

La fonction $f : S \to \mathbb{R}$ est dite fortement convexe sur S

s'il existe une constante $\xi > 0$ tel que pour tout $x, y \in S$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \xi \lambda (1-\lambda) \parallel x - y \parallel^2 .$$

Définition 1.1.8. *Une fonction est dite concave si $(-f)$ est convexe.*

Théorème 1.1.1. *[2] Si f est deux fois continûment différentiable sur un ouvert convexe S alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f est convexe sur S.*
2. *$\forall x, y \in S, f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$, où $\nabla f(x)$ est le vecteur gradient de f au point x.*
3. *$\forall x \in S$, la matrice Hessienne $H(x) = \nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive dans S.*

Remarque 1.1.3. *Si le Hessien $H(x) = \nabla^2 f(x)$ est défini positif dans S alors la fonction f est strictement convexe. La réciproque est fausse, penser à la fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^4$ qui est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ par contre sa matrice hessienne n'y est pas définie positive.*

La fonction f est fortement convexe $\Rightarrow f$ est strictement convexe $\Rightarrow f$ est convexe.

Définition 1.1.9. *Soit $F : S \to \mathbb{R}^n$, un opérateur défini sur un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$.*

- *F est dit monotone sur S si*
$$\forall x, y \in S, \langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0.$$
- *F est dit strictement monotone sur S si*
$$\forall x, y \in S : x \neq y \text{ on a } \langle F(x) - F(y), x - y \rangle > 0.$$
- *F est dit fortement monotone sur S s'il existe $\xi > 0$, tel que*
$$\forall x, y \in S, \langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \xi \parallel x - y \parallel^2.$$

Remarque 1.1.4. *F est fortement monotone $\Rightarrow F$ est strictement monotone $\Rightarrow F$ est monotone.*

Théorème 1.1.2. *La convexité peut être aussi exprimée à partir de la notion de monotonie dans le cas où la fonction f est différentiable sur S, on a alors les équivalences suivantes*

- *f est convexe si et seulement si $F = \nabla f$ est monotone.*
- *f est strictement convexe si et seulement si $F = \nabla f$ est strictement monotone.*
- *f est fortement convexe si et seulement si $F = \nabla f$ est fortement monotone.*

1.2 Cônes convexes

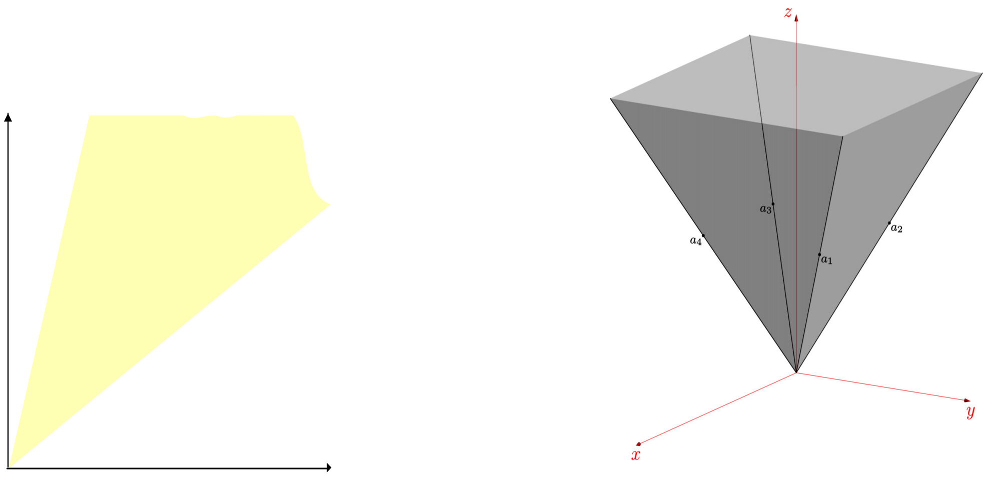
Définition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel et K une partie non vide de E. On dit que K est un cône s'il contient toutes les demi-droites issues de l'origine et passant par ses points, c'est à dire pour tout $x \in K$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $\lambda x \in K$.*

Proposition 1.2.1. *Soit K un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. K est un cône convexe si*

$$\text{pour tout } x \in K, \text{ pour tout } \lambda \geq 0 \text{ , on a } \lambda x \in K$$
$$\text{pour tout } u, v \in K \text{ , } u + v \in K.$$

Autrement dit, K est un cône convexe si et seulement si :

$$\mathbb{R}_+ K \subset K \text{ et } K + K \subset K.$$



(a) Cône convexe dans $\mathbb{R}^2$. (b) Cône convexe dans $\mathbb{R}^3$.

FIGURE 1.4 – Exemples de cônes convexes.

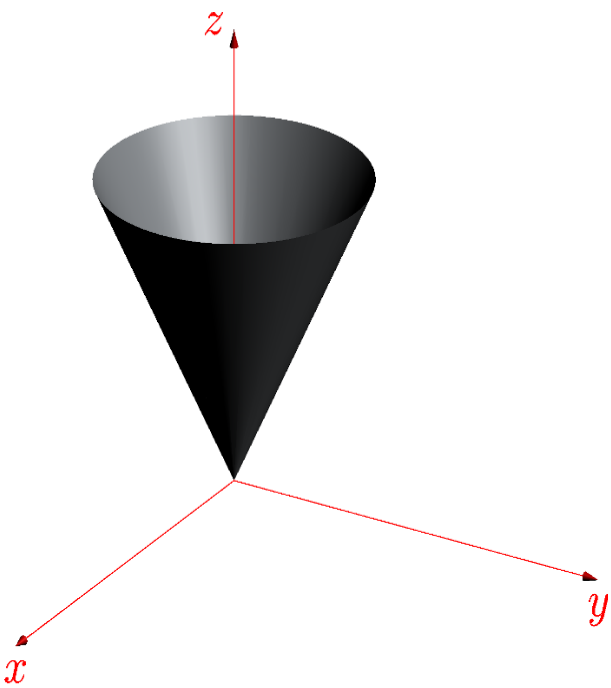


FIGURE 1.5 – Un cône non convexe.

Remarque 1.2.1. *Un cône n'est pas en général convexe (voir Figure 1.5).*

Définition 1.2.2. *Soit A une partie de E, l'ensemble de toutes les combinaisons coniques d'éléments de A est appelé le cône convexe engendré par A. Il sera noté **cone**(A), on a donc*

$$\boldsymbol{cone}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \; et \; x_i \in A \; pour \; 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Proposition 1.2.2. *Le cône convexe engendré par une partie A contient toujours le sommet (l'origine).*

Il est le plus petit cône convexe (contenant le sommet) contenant A.

Le cône convexe engendré par une partie n'est pas en général fermé même si cette dernière est compacte. Le cône convexe engendré par le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1 est le demi-espace ouvert $\{(x,y) : y > 0\}$ auquel on rajoute l'origine (voir Figure 1.7).
Le cône convexe engendré par une partie finie de points est fermé (voir Figure 1.4b).

(a) Cône compacte K.

(b) Cône convexe engendré par K.

FIGURE 1.6 – Exemple d'un cône convexe engendré par cône compacte.

Définition 1.2.3. *Soit K une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On définit le cône polaire de K par*

$$K^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, x\rangle \leqslant 0, \textit{ pour tout } x \in K\}$$

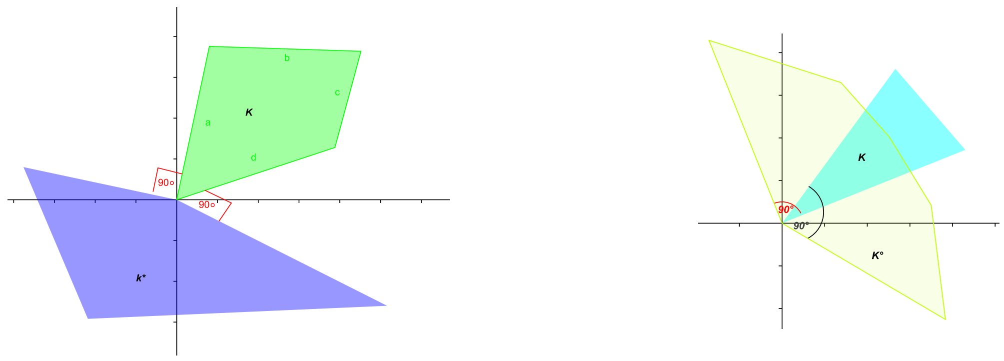
et le dual de K par

$$K^\circ = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, x\rangle \geq 1, \textit{ pour tout } x \in K\}$$

Le cône polaire est un cône convexe fermé. On a $K^{**} = K$ si et seulement si K est un cône convexe fermé. On peut vérifier que le dual d'un cône K est donné par

$$K^\circ = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, x\rangle \geq 0, \textit{ pour tout } x \in K\}.$$

Pour un cône K, Il est facile de vérifier que $K^* = -K^\circ$.



(a) cône polaire.

(b) cône dual.

FIGURE 1.7 – Cônes polaire et dual.

Théorème 1.2.1 (Farkas). *[2] Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $c \in \mathbb{R}^n$. Une seule des deux assertions suivantes est vraie*

(1) $\exists x \in \mathbb{R}^n \; : \; Ax \leq 0$ *et* $c^T x > 0$,

(2) $\exists y \in \mathbb{R}^m_+ : c = A^T y$.

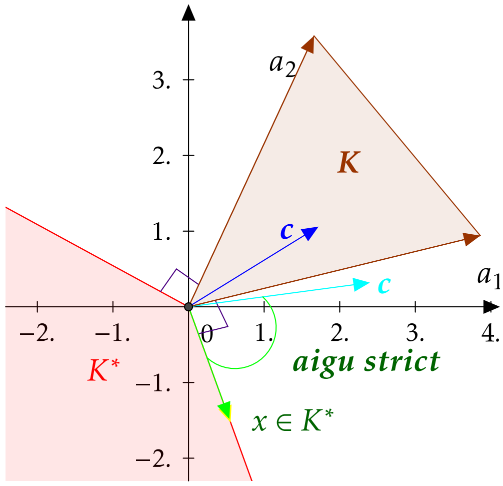


Figure 1.8 – Interprétation géométrique du théorème de Ferkas. Le vecteur c appartient au cône engendré par les vecteurs a_1 et a_2, ou bien il existe un vecteur $x \in K^*$ qui fait un angle aigu avec le vecteur c.

On peut déduire du résultat précédent, le théorème suivant

Théorème 1.2.2 (Gordan). *[2] Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$. Une seule des deux assertions suivantes est vraie*

(1) $\exists x \in \mathbb{R}^n \; : \; Ax > 0$,

(2) $\exists y \geq 0$ *non nul tel que* $A^T y = 0$.

Comme application du théorème de Gordan, nous avons le théorème de Ville.

Théorème 1.2.3 (Ville). *[4]*
Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice donnée. Le système

$$Ax > 0, \quad x > 0$$

a une solution si et seulement si le système

$$A^T y \leqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad y \neq 0$$

n'a pas de solution.

Corollaire 1.2.1. *Si M est une matrice définie positive, alors il existe un vecteur z telle que*

$$Mz > 0, \quad z > 0.$$

Démonstration. En effet, si un tel vecteur z n'existe pas, alors par le théorème de Ville, on obtient l'existence d'un vecteur non nul $u \geqslant 0$ tel que $M^T u \leqslant 0$. En multipliant l'inégalité précédente par u, on obtient $u^T M^T u \leqslant 0$, ce qui contredit la définie positivité de M. □

1.3 Conditions d'optimalité

1.3.1 Programmation mathématique

Définition 1.3.1. *En général, un programme mathématique est défini comme suit :*

$$(PM)\begin{cases} \min f(x) \\ \\ x \in C \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $C \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions réalisables (ou l'ensemble des contraintes), $C = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0\ ,\ i = 1,\ldots,m\ ,\ h_j(x) = 0\ ,\ j = 1,\ldots,p\}$ avec f, g_i et h_j sont des fonctions données de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est appelée fonction objectif.

- ***Solution réalisable (admissible)***
  On appelle solution réalisable de (PM) tout point x^0 vérifiant les contraintes ($i.e., x^0 \in C$).
- ***Solution optimale globale***
  On appelle solution optimale globale toute solution réalisable (notée x^*) qui minimise f sur C. L'ensemble des solutions optimales globales est noté $\operatorname*{argmin}_C f$.
- ***Solution optimale locale***
  Un point $x^* \in C$ est une solution optimale locale de (PM) s'il existe un voisinage V de x^* tel que $f(x^*) \leq f(x); \forall x \in V \cap C$.
  L'ensemble des solutions optimales locales de (PM) est noté $\operatorname*{locmin}_C f$.

Remarque 1.3.1. *Le problème d'optimisation précédent consiste :*

- *Soit à chercher un point optimal (local ou global).*
- *Soit, si un tel point n'existe pas, on cherche une borne inférieure de f.*
- *Soit à établir que f n'est pas bornée inférieurement sur C, auquel cas on a $\inf_C f = -\infty$.*
- *Lorsque C est vide on pose par convention $\inf_C f = +\infty$.*
- *Nous avons toujours $\operatorname*{argmin}_C f \subseteq \operatorname*{locmin}_C f$.*

1.3.2 Principaux résultats d'existence et d'unicité

Théorème 1.3.1. *(Weierstrass)*
Si C est compact (fermé et borné) dans $\mathbb{R}^n$ et f est continue sur C alors (PM) admet au moins une solution optimale globale $x^* \in C$.

Corollaire 1.3.1. *Si C est non vide et fermé et f est continue et coercive sur C (au sens que $\lim\limits_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in C}} f(x) = +\infty$) alors (PM) admet au moins une solution optimale globale $x^* \in C$.*

Remarque 1.3.2. *L'unicité d'une éventuelle solution est en général indépendante de l'existence, elle est souvent une conséquence de la convexité de C et de la stricte convexité de f.*

Théorème 1.3.2. *Si C est convexe et f est strictement convexe, alors il existe au plus une solution optimale de (PM).*

Conditions de qualification des contraintes

Définition 1.3.2. *Si C est défini uniquement par des inégalités, on a le critère de Slater suivant : g_i est convexe pour tout $i = 1,\ldots,m$ et il existe un point x^0 tel que $\max\limits_{1\leq i\leq m} g_i(x^0) < 0$.*

Il existe aussi deux critères usuels de qualification en un point $\overline{x} \in C$, à savoir

- ▹ Si toutes les contraintes sont affines.
- ▹ Si les gradients des contraintes actives en $\overline{x}$ [1] sont linéairement indépendants.

Théorème 1.3.3. ***(Karuch - Khun - Tuker)***
Soit $\overline{x} \in C$ un point satisfaisant l'une des conditions de qualification et supposons que f, g_i, h_i sont $C^1(\mathbb{R}^n)$. Si $\overline{x}$ est un minimum local, alors il existe des multiplicateurs $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 1,\ldots,m$ et $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,p$ tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0 \\ \lambda_i g_i(\overline{x}) = 0\,,\ i = 1,\ldots m \\ h_j(\overline{x}) = 0 \ \ j = 1,\ldots,p \end{cases}$$

Les scalaires λ_i et μ_j sont appelés multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker.

- ▹ En absence des contraintes d'égalité, si f et g_i sont convexes, et le problème (PM) satisfait les conditions de qualification des contraintes de Slater, alors les conditions de (KKT) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que $\overline{x}$ soit un minimum global pour (PM).
- ▹ Si les contraintes ne sont pas qualifiées en $\overline{x}$, les conditions de KKT ne s'appliquent pas ($\overline{x}$ peut être optimal sans vérifier ces condition).
- ▹ Dans le cas particulier où $m = 0$, les conditions précédentes sont appelées les conditions de Lagrange et s'écrivent comme suit
  Si $\overline{x}$ est un optimum local, alors il existe $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,p$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla hj(\overline{x}) = 0 \\ h_j(\overline{x}) = 0 \quad j = 1,\ldots,p \end{cases}$$

  μ_j, $j = 1,\ldots,p$ sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

1. Une contrainte g_i est dite active en $\overline{x}$ si $g_i(\overline{x}) = 0$.

Chapitre 2

Problème de complémentarité linéaire et classes de matrices

2.1 Problème de complémentarité linéaire

Le problème de complémentarité linéaire (PCL) est un problème général qui unifie les programmes linéaires et quadratiques. De nombreux problèmes en économie, théorie des jeux, ... peuvent se formuler comme un problème de complémentarité linéaire.

2.1.1 Énoncé du problème

Définition 2.1.1. *[7] Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et q un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$, le problème $PCL(q,M)$ consiste à trouver deux vecteurs $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ et $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$ satisfaisant :*

$$w - Mz = q \tag{2.1}$$

$$w \geq 0,\ z \geq 0 \tag{2.2}$$

$$w_i z_i = 0\ \forall i = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Dans le problème $PCL(q,M)$, il n'y a pas de fonction objective à optimiser, les seules données du problème sont le vecteur q et la matrice M.

Exemple 2.1.1. *Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et le vecteur $q = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}$, le problème $PCL(q,M)$ est*

$$\begin{array}{l} w_1 \qquad - 2z_1 - \ \ z_2 = -5 \\ \qquad w_2 - \ \ z_1 - 2z_2 = -6 \\ w_1,\ w_2, \quad z_1, \quad z_2 \geq 0 \\ w_1 z_1 = w_2 z_2 = 0. \end{array} \tag{2.4}$$

Il peut être exprimé sous la forme d'une équation vectorielle comme suit

$$\begin{array}{l} w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} \\ w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0, \ \ et \ \ w_1 z_1 = w_2 z_2 = 0. \end{array} \tag{2.5}$$

Dans toute solution satisfaisant $w_1 z_1 = w_2 z_2 = 0$, au moins une des variables de chaque paire (w_j, z_j), doit être égal à zéro. Choisissons w_1, w_2 comme variables à valeur nulle, le système restant est

$$z_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$
$$z_1 \geq 0, \ z_2 \geq 0 .$$

On obtient alors $(z_1, z_2) = (\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, donc une solution de ce problème est $(w_1, w_2, z_1, z_2) = (0, 0, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

Définition 2.1.2. *On dit que le problème de complémentarité linéaire $PCL(q, M)$ est réalisable si et seulement si l'ensemble des solutions réalisables $\{z \in \mathbb{R}^n_+ : q + Mz \geqslant 0\}$ est non vide.*

2.1.2 Cônes complémentaires

Soit M une matrice carrée d'ordre n. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit A_i le vecteur égale à I_i ou $-M_i$ (I_i (resp. M_i) est la i^{eme} colonne de la matrice identité I (resp. de M)). Le cône convexe engendré par $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est appelé cône complémentaire. On remarque qu'on dispose de 2^n cônes complémentaires. La réunion de ces cônes complémentaires qu'on note $K(M)$, correspond à l'ensemble des vecteurs q tels que le problème $PCL(q, M)$ admet une solution.

Exemple 2.1.2. *Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, dans ce cas $n = 2$ par suite il existe quatre cônes complémentaires (voir figure 2.1).*

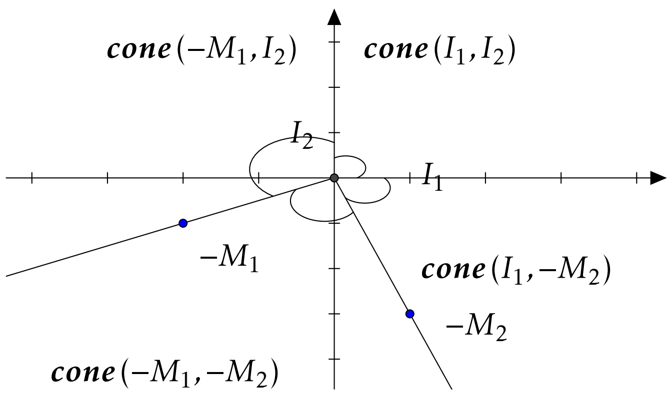


FIGURE 2.1 – Cônes complémentaires.

Cônes complémentaires dégénérés, non dégénérés

Définition 2.1.3. *[7] Soit $\boldsymbol{cone}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un cône complémentaire.*

- *Ce cône est dit non dégénéré s'il a un intérieur non vide.*
- *Ce cône est dit dégénéré si son intérieur est vide.*

Exemple 2.1.3. *Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, on obtient les cônes complémentaires représentés par la figure 2.2.*

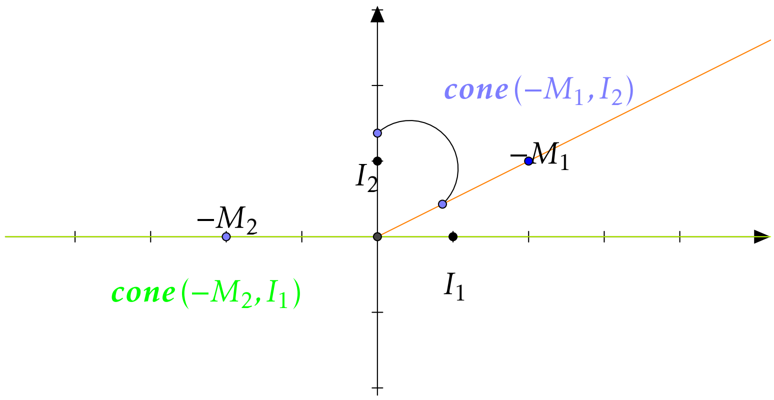


FIGURE 2.2 – **cone**$(-M_1, I_2)$ est un cône complémentaire non dégénéré, **cone**$(-M_2, I_1)$ est un cône complémentaire dégénéré.

2.1.3 Interprétation géométrique du $PCL(q, M)$

Soit la matrice carrée M d'ordre n et q un vecteur de $\mathbb{R}^n$, le $PCL(q, M)$ équivaut au problème de trouver un cône complémentaire qui contient le point q, ce qui revient à trouver un ensemble complémentaire de vecteurs $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ tel que

(a) $A_j \in \{I_j, -M_j\}$ pour $1 \leq j \leq n$.

(b) q peut être exprimé comme une combinaison conique des vecteurs $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Exemple 2.1.4. *Soit la matrice* $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ *et le vecteur* $q = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

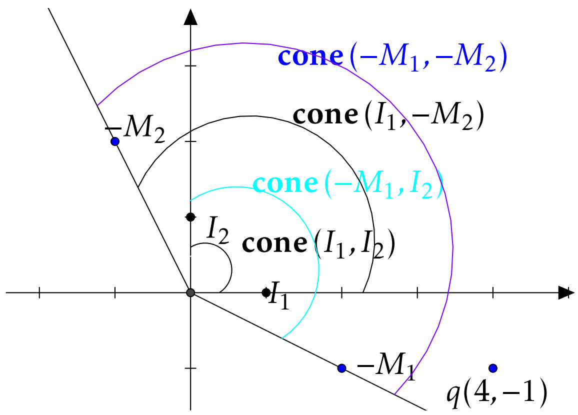


FIGURE 2.3 – $PCL(q, M)$ admet une solution.

Dons ce cas, pour que q appartient à **cone**$(-M_1, I_2)$, il faut qu'il vérifie l'équation $w_2 - M_1 z_1 = q$ ce qui donne $w_2 = 1$ et $z_1 = 2$. Par conséquent, la solution du problème $PCL(q, M)$ est $(0, 1, 2, 0)$. De même, on détermine l'autre solution $(0, 0, \frac{7}{3}, \frac{2}{3})$.

Exemple 2.1.5. *Soit la matrice* $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ *et le vecteur* $q = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

D'après la figure 2.4 on remarque que le vecteur q n'appartient à aucun cône complémentaire, par conséquent, ce (PCL) n'a pas de solution.

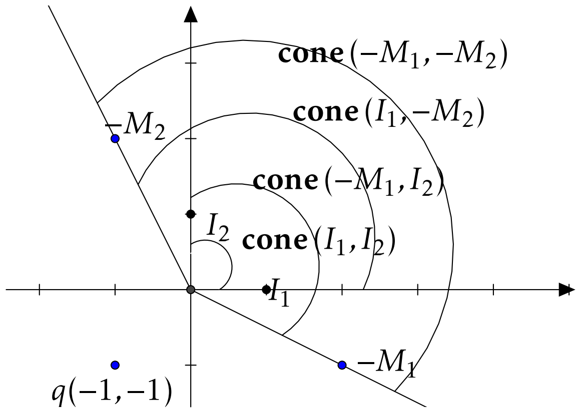


Figure 2.4 – Non existence de la solution

2.1.4 Relation entre (PCL) et d'autres problèmes d'optimisation

Transformation d'un programme linéaire (PL) en un problème complémentaire linéaire (PCL)

On montre que la programmation linéaire peut se formuler comme un problème de complémentarité linéaire. Soit le programme linéaire suivante :

$$(PL)\begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Comme les contraintes sont linéaires alors les conditions de KKT sont nécessaires, elle sont aussi suffisantes car la fonction à minimiser est linéaire. Supposons que A est d'ordre $m \times n$, un point admissible $x \in \mathbb{R}^n$ est une solution optimale de (PL) ssi $\exists \mu_1 \in \mathbb{R}_+^m$ et $\mu_2 \in \mathbb{R}_+^n$ tels que

$$c - A^T \mu_1 - \mu_2 = 0 \tag{2.6}$$
$$\mu_1^T (b - Ax) = 0 \tag{2.7}$$
$$\mu_2^T x = 0 \tag{2.8}$$

On déduit de (2.6) que $\mu_2 = c - A^T \mu_1$. En posant $y = Ax - b$, on obtient

$$\begin{pmatrix} \mu_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - A^T \mu_1 \\ Ax - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Si on pose

$$w = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ y \end{pmatrix}\ ,\ M = \begin{pmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}\ ,\ z = \begin{pmatrix} x \\ \mu_1 \end{pmatrix}\ ,\ q = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}$$

alors le système (2.6)–(2.8) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} w - Mz = q \\ w^T z = 0 \\ w \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}.$$

Transformation d'un programme quadratique (PQ) **en un problème complémentaire linéaire** (PCL)

On montre que le problème quadratique peut se formuler comme un problème de complémentarité linéaire. Un problème quadratique à la forme suivante

$$(PQ)\begin{cases} \min \ \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

où A est une matrice $m \times n$, D est une matrice symétrique d'ordre n, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Remarque 2.1.1. *Si D n'est pas symétrique en remplaçant D par $\frac{D+D^T}{2}$ qui est une matrice symétrique, on obtient $x^T Dx = x^T(\frac{D+D^T}{2})x$. Donc, on peut supposer la matrice D symétrique sans nuire à la généralité.*

Comme les contraintes sont linéaires alors les conditions de KKT sont nécessaires, elle seront suffisantes si D est semi-définie positive, dans ce cas on a

$x \in \mathbb{R}^n$ est une solution optimale de (PQ) si et seulement si x est admissible et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ et $\mu \in \mathbb{R}^n_+$, tels que

$$Dx + c - A^T\lambda - \mu = 0 \tag{2.10}$$
$$\lambda^T(Ax - b) = 0 \tag{2.11}$$
$$\mu^T x = 0. \tag{2.12}$$

La relation (2.10) nous donne $\mu = Dx - A^T\lambda + c$. En posant $y = Ax - b$, on obtient

$$\begin{bmatrix} \mu \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Si on pose

$$w = \begin{pmatrix} \mu \\ y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}$$

le système (2.10)–(2.12) sera équivalent au (PCL) suivant :

déterminer (w, z) tels que

$$\begin{cases} w - Mz = q, \\ w^T z = 0, \\ w \geq 0, \ z \geq 0. \end{cases}$$

2.2 Existence et unicité de la solution du (PCL)

Soit le (PCL)

$$\begin{cases} Mz - q = w \\ w\,,\, z \geq 0 \\ z^T w = 0 \end{cases}$$

alors $w\,,\, z \geq 0 \Rightarrow \ z^T w \geq 0 \ \Leftrightarrow z^T(Mz - q) \geq 0$ et $z^T w = 0 \ \Leftrightarrow z^T(Mz - q) = 0$.

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min \quad f(z) := z^T(Mz - q) \\ z \geq 0 \\ Mz - q \geq 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

On s'aperçoit que le problème (2.13) est un programme quadratique. On remarque aussi que z est une solution de $PCL(q,M)$ si seulement si z est solution de (2.13) avec $f(z) = 0$.

Théorème 2.2.1. *On a $f(z) \geq 0$ pour tout $z \in S$. D'après le théorème de Frank-wolfe [9] le problème* (2.13) *admet une solution z^* telle que $f(z^*) \geq 0$.*

(1) Si $f(z^*) > 0$ alors le (PCL) n'admet pas de solution.

(2) Si $f(z^*) = 0$ alors (w^*, z^*) avec $w^* = Mz^* - q$ est une solution de $PCL(q,M)$.

2.2.1 Matrices définies positives et semi-définies positives

Définition 2.2.1.

- ▹ *Une matrice carrée M d'ordre n est dite semi-définie positive (SDP) ssi*

$$x^T Mx \geq 0, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

- ▹ *Une matrice carrée M d'ordre n est dite définie positive (DP) ssi*

$$x^T Mx > 0, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Proposition 2.2.1. *Soit M une matrice symétrique d'ordre n.*

- ▹ *M est semi-définie positive $\Leftrightarrow$ les valeurs propres de M sont positives ou nulles.*
- ▹ *M est définie positive $\Leftrightarrow$ les valeurs propres de M sont strictement positives.*
- ▹ *Si les éléments diagonaux de M vérifient*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ : \ m_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| m_{ij} \right|$$

alors M est semi-définie positive.

- ▹ *Si les éléments diagonaux de M vérifient*

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \ : \ m_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| m_{ij} \right|$$

alors M est définie positive.

Lemme 2.2.1. *[4] Si le $PCL(q,M)$ est réalisable, alors le programme quadratique*

$$\begin{cases} \min z^T(q + Mz) \\ q + Mz \geq 0 \\ z \geq 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

a une solution optimale z^*. De plus, il existe un vecteur u^* qui satisfait aux conditions

$$q + (M + M^T)z^* - M^T u^* \geqslant 0 \tag{2.15}$$
$$(z^*)^T(q + (M + M^T)z^* - M^T u^*) = 0 \tag{2.16}$$
$$u^* \geqslant 0 \tag{2.17}$$
$$(u^*)^T(q + Mz^*) = 0 \tag{2.18}$$
$$(z^* - u^*)_i(M^T(z^* - u^*))_i \leqslant 0 \text{ pour tout } i = \{1, \ldots, n\}. \tag{2.19}$$

Théorème 2.2.2. *[4] Soit M une matrice semi-définie positive. Si le $PCL(q,M)$ est réalisable, alors il admet une solution.*

Démonstration

D'après le lemme 2.2.1 il existe deux vecteurs z^* et u^* vérifiant (2.15)–(2.19) tels que z^* est réalisable. On a alors, d'après (2.19)

$$(z^* - u^*)^T M^T (z^* - u^*) \leqslant 0.$$

Comme la matrice M est (SDP), on obtient alors

$$(z^* - u^*)^T M^T (z^* - u^*) = 0.$$

ou

$$(z^*)^T M^T (z^* - u^*) = (u^*)^T M^T (z^* - u^*). \tag{2.20}$$

En multipliant (2.15) par $u^* \geqslant 0$ on obtient

$$(u^*)^T(q + Mz^*) + (u^*)^T M^T (z^* - u^*) \geqslant 0. \tag{2.21}$$

On déduit de (2.18) et (2.21) que

$$(u^*)^T M^T (z^* - u^*) \geqslant 0. \tag{2.22}$$

Les relations (2.16) et (2.20) nous permettent d'écrire

$$(z^*)^T(q + Mz^*) = -(z^*)^T M^T (z^* - u^*) = -(u^*)^T M^T (z^* - u^*) \leqslant 0.$$

Donc, $(z^*)^T(q + Mz^*) = 0$ et z^* est une solution du $PCL(q,M)$.

Théorème 2.2.3. *[4] Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $q \in \mathbb{R}^n$. Les deux déclarations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'ensemble des solutions de (PCL) est convexe.*
2. *Pour deux solutions z^1 et z^2 de (PCL) on a*

$$(z^1)^T(q + Mz^2) = (z^2)^T(q + Mz^1) = 0.$$

Corollaire 2.2.1. *[4][théorème 3.1.7] Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice semi-définie positive et $q \in \mathbb{R}^n$. Si M est symétrique, alors $Mz^1 = Mz^2$ pour deux solutions z^1 et z^2 de $PCL(q,M)$.*

2.2.2 Matrices copositives

Définition 2.2.2. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

(a) M est dite copositive (CP) si

$$x^T M x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n_+ .$$

(b) M est dite strictement copositive (SCP) si

$$x^T Mx > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}.$$

(c) M est dite copositive plus (CPP) si M est copositive et

$$\left[x^T Mx = 0,\ x \geq 0\right] \Rightarrow \left[\left(M + M^T\right)x = 0\right].$$

(d) M est dite copositive star (CPS) si M est copositive et

$$\left[x^T Mx = 0,\ Mx \geq 0,\ \ x \geq 0\right] \Rightarrow \left[M^T x \leq 0\right].$$

Remarque 2.2.1. *On voit que $(SCP) \subset (CPP) \subset (CPS) \subset (CP)$.*

Exemple 2.2.1. *Les matrices à coefficients positives sont copositives.*

Théorème 2.2.4. *Si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est strictement copositive, alors pour chaque $q \in \mathbb{R}^n$ le $PCL(q,M)$ a une solution.*

Démonstration
En remarquant que pour tout vecteur q, la fonction quadratique $f(z) = z^T(q + Mz)$ est borné inférieurement pour $z \geq 0$ si M est strictement copositive voir [4][proposition 3.7.14], le $PCL(q,M)$ a une solution.

Exemple 2.2.2. *Considérons la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que M est positive avec une diagonale positive, elle est donc strictement copositive. Mais comme $x^T Mx = -2 < 0$ pour $x = (1,-1)$, alors M n'est pas (DP).

Remarque 2.2.2. *Le $PCL(q,M)$ n'a pas besoin d'avoir une solution si M n'est qu'une matrice copositive.*

Exemple 2.2.3. *Soit la matrice $M = 0$, alors M est copositive mais le $PCL(q,M)$ a une solution si et seulement si $q > 0$.*

Théorème 2.2.5. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice copositive et $q \in \mathbb{R}^n$. Si l'implication*

$$\left[v \geq 0,\ Mv \geq 0,\ v^T Mv = 0\right] \quad \Rightarrow \quad \left[v^T q \geq 0\right] \tag{2.23}$$

est valide, alors $PCL(q,M)$ a une solution.

Corollaire 2.2.2. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice copositive plus et soit $q \in \mathbb{R}^n$.*

- *l'implication (2.23) est valable si et seulement si le $PCL(q,M)$ est réalisable.*
- *Si $PCL(q,M)$ est réalisable, alors il a une solution.*

Démonstration
Si $PCL(q,M)$ n'est pas réalisable, alors d'après le lemme de Farkas il existe un vecteur $v > 0$ tel que $M^T v \leq 0$ et $v^T q < 0$. Puisque, M est copositive on obtient alors $v^T Mv = 0$, et puisque M est copositive plus, nous avons $Mv = -M^T v$. Cela signifie que v enfreint (2.23).

Inversement, si $PCL(q,M)$ est réalisable ($\exists \bar{z} \geq 0, \quad q + M\bar{z} \geq 0$), et si $v \geq 0$ est un vecteur satisfaisant $Mv \geq 0$ et $v^T Mv = 0$, alors $M^T v = -Mv \leq 0$ car M est copositive plus alors

$$v^T(q + M\bar{z}) \geq 0 \Rightarrow v^T q \geq -v^T M\bar{z} = -((M^T v)^T \bar{z}) \geq 0$$

Cela implique à $v^T q \geq 0$. Compte tenu de l'équivalence entre la faisabilité de (q,M) et l'implication (2.23).
La dernière assertion est une conséquence immédiate du théorème 2.2.5.

Proposition 2.2.2. *[4][corolaire 3.8.12] Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et copositive plus . Pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) Le $PCL(q,M)$ est réalisable.

(b) Le $PCL(q,M)$ a une solution.

(c) La fonction quadratique $f(z) = z^T(q+Mz)$ est bornée inférieurement.

2.2.3 Classe des $S-$matrices

Définition 2.2.3. *[6][définition 2.5] On dit qu'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est **non dégénérée** si*

$$\text{tout } x \text{ vérifiant, pour tout } i : x_i(Mx)_i = 0 \text{ est nul.}$$
$$\text{C'est a dire } \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x_i(Mx)_i = 0 \text{ pour } i = 1\dots n\} = \{0\}.$$

Exemple 2.2.4. *Une matrice M non dégénérée*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & -5 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.4. *M est une matrice carrée. M est une **S**$-$matrice si*

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : x > 0 \text{ et } Mx > 0.$$

Proposition 2.2.3. *[6][proposition 2.4] Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- ▹ *pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, le problème $PCL(q,M)$ est réalisable,*
- ▹ *il existe un $x \geqslant 0$ tel que $Mx > 0$,*
- ▹ *il existe un $x > 0$ tel que $Mx > 0$.*

Remarque 2.2.3. *D'après le corollaire 1.2.1 toute matrice définie positive est une **S**$-$matrice.*

Exemple d'une matrice M est une **S**$-$matrice mais ne sont pas semi définie positive.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.2.6. *Si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie positive, alors le $PCL(q,M)$ a une solution unique pour tous $q \in \mathbb{R}^n$.*

Démonstration

D'après le théorème 2.2.2 et la proposition 2.2.3 le $PCL(q,M)$ a une solution pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, il suffit de prouver l'unicité de la solution. Soit $q \in \mathbb{R}^n$, on a toute solution du $PCL(q,M)$ doit être une solution optimale du programme quadratique (2.14). Si M est (DP), la fonction objectif est strictement convexe. Par conséquent (2.14) a un solution optimale unique. Il en va de même pour $PCL(q,M)$.

En général, le $PCL(q,M)$ avec une matrice semi-définie positive peut avoir plusieurs solutions.

Exemple 2.2.5. *On considéré le $PCL(q,M)$ suivant avec $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $q = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*
Ce problème admet $z^1 = (1,0)$, $z^2 = (0,1)$, et $z^3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ comme solutions.

2.2.4 Classe des Q_0–matrices et Q–matrices

Définition 2.2.5. *On dit qu'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une $\mathbf{Q}_0$–matrice si le problème $PCL(q,M)$ a une solution dés qu'il est réalisable.*

Remarque 2.2.4. *D'après la corollaire 2.2.2 toute matrice copositive plus appartient à $\mathbf{Q}_0$.*

Proposition 2.2.4. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $M \in \mathbf{Q}_0$.

(b) $K(M)$ *est convexe.*

(c) $K(M) = \textbf{cone}(I,-M)$.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$. Soit q^1 et q^2 deux vecteurs dans $K(M)$. Ainsi, $LCP(q^i,M)$ a une solution pour $i = 1,2$. Évidemment, $LCP(q^\lambda,M)$ est réalisable pour tout $q^\lambda = \lambda q^1 + (1-\lambda)q^2$ avec $\lambda \in [0,1]$. Ainsi, par (a), il s'ensuit que $LCP(q^\lambda,M)$ a une solution. D'où $q^\lambda \in K(M)$ et (b) suit.

$(b) \Rightarrow (c)$. Ceci est clair car la coque convexe de $K(M)$ est égale à $\mathbf{cone}(I,-M)$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Le cône $\mathbf{cone}(I,-M)$ est constitué de tous les vecteurs q pour lesquels le $LCP(q,M)$ est réalisable. Par conséquent, si (c) tient, (a) suit facilement.

Définition 2.2.6. *On dit qu'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une $\mathbf{Q}$–matrice si le $PCL(q,M)$ a une solution pour tout vecteur $q \in \mathbb{R}^n$.*

D'après la proposition 2.2.3 et la définition 2.2.5, on voit que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \cap \mathbf{S}$.
Exemple de matrice M est une Q–matrices mais ne sont pas semi définie positive.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.5 Classe des P–matrices et $\mathbf{P}_0$–matrices

Définition 2.2.7. *Une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une $\mathbf{P}$–matrice si tous les mineurs principaux sont strictement positives.*

Proposition 2.2.5. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) M *est une* $\mathbf{P}$*–matrice,*

(2) *tout x vérifiant, pour tout i : $x_i(Mx)_i \leqslant 0$ est nul,*

(3) *les valeurs propres réelles de toutes les matrices principales sont strictement positives,*

Démonstration

$(1) \Rightarrow (2)$. c'est vrai Pour $n = 1$. Nous supposons maintenant que cette implication est vraie pour $n-1$ où $n > 1$. Supposons qu'il existe un vecteur z non nul tel que $z_i(Mz_i) \leq 0$ pour $i = 1\dots n$. S'il existe i telle que $z_i = 0$, alors la sous-matrice principale $M_{\bar{i}\bar{i}}$ est une $\mathbf{P}$–matrice qui inverse le signe du vecteur non nul $z_{\bar{i}}$. Cela contredit l'hypothèse d'induction, donc aucune composante de z n'est nulle. Nous pouvons maintenant écrire

$$(Mz)_i = d_i z_i \text{ telle que } d_i = (Mz)_i/z_i \leqslant 0.$$

On pose $D = diag(d_1,\dots,d_n)$ (la matrice diagonale de $(d_1,\dots,d_n)$), on obtient alors

$$\left\{\text{Il existe } z \neq 0 \text{ tel que } (M-D)z = 0\right\} \tag{2.24}$$

. On a [voir [4] . Définition 2.2.1]

$$det(M-D) = \sum_{\alpha} det(-D_{\alpha\alpha})detM_{\overline{\alpha}\overline{\alpha}}$$

où α part court l'ensembles des $\{1,\dots,n\}$. Puisque D est une matrice diagonale négative et M est une **P**−matrice, il s'ensuit que $M-D$ singulière.Ce qui contredit (2.24) .

(2) ⇒ (3). Il suffit de montrer que toutes les valeurs propres réelles de M sont strictement positives. Soit λ une de ces valeurs propres et z un vecteur propre associé. Comme $z \neq 0$, il existe i tel que $z_i(Mz_i) > 0$. Par suite, on obtient $z_i(\lambda Mz_i) > 0$. On en déduit que $\lambda > 0$.

(3) ⇒ (1). Puisque le déterminant d'une matrice est égal au produit de toutes les valeurs propres (réelles et complexes), et puisque les valeurs propres complexe apparaissent toujours en paires conjuguées pour les matrices réelles, il suit que, si (3) est vrai, le déterminant de M et toutes ses sous-matrices principales doit être positif.

Remarque 2.2.5. *D'après les propositions 2.2.4 et 2.2.5, on voit que* $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{S}$.

Corollaire 2.2.3. *La classe des* **S**−*matrices contient strictement celle des* **P**−*matrice comme le montre l'exemple.*

Exemple 2.2.6. *Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *est une* **S**−*matrice car* $Me = (3,3) > 0$ *où* $e = (1,1)^T$, *mais* M *n'est pas une* **P**-*matrice car son déterminant est strictement négatif.*

Théorème 2.2.7 ([4], Théorème 3.3.7). *Une matrice* M *de* $\mathbb{R}^n$ *est une* **P**−*matrice si et seulement si* $\forall q \in \mathbb{R}^n$, *le problème* $PCL(q,M)$ *a une et une seule solution.*

Définition 2.2.8. *Une matrice* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est une* $\boldsymbol{P}_0$−*matrice si tous les mineurs principaux sont positives ou nuls.*

Remarque 2.2.6. *Toute matrice semi-définie positive* (SDP) *est une* $\boldsymbol{P}_0$−*matrice.*

Théorème 2.2.8. *[4] Soit* M *une matrice carrée d'ordre* n, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) *M est une* $\boldsymbol{P}_0$−*matrice,*

(b) *Pour chaque vecteur* $z \neq 0$, *il existe un indice* k *tel que* $z_k \neq 0$ *et* $z_k(Mz)_k \geqslant 0$,

(c) *Toutes les valeurs propres réelles de* M *sont positives,*

(d) *Pour chaque* $\epsilon > 0$, $M + \epsilon I$ *est une* **P**−*matrice.*

Exemple 2.2.7. *Soit la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

M une $\boldsymbol{P}_0$−*matrice m'ais n'est pas dans* **P** *car* $detM = 0$.

2.2.6 Classe des E_0–matrices et E–matrices

Définition 2.2.9. *Une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite semi-monotone si*

$$[0 \neq x \geq 0] \Rightarrow [\exists k \in \{1,\ldots,n\} : x_k > 0 \; et \, (Mx)_k \geq 0]. \tag{2.25}$$

La classe de ces matrices est notée $\boldsymbol{E}_0$, et ses éléments sont appelés $\boldsymbol{E}_0 - matrice$.

Remarque 2.2.7. *Quelques observations utiles découlent aisément de cette définition*

- *Toute sous-matrice principale d'une matrice semi-monotone est à nouveau semi-monotone,*
- *les éléments diagonaux d'une matrice semi-monotone doivent être positifs,*
- *chaque $\boldsymbol{P}_0$–matrice est une $\boldsymbol{E}_0$–matrice,*
- *toutes les matrices copositives sont dans $\boldsymbol{E}_0$.*

Exemple 2.2.8. *Soit la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) M n'est pas dans $\boldsymbol{P}_0$ car $\det M = -1$.

(ii) M n'est pas copositive car, si $x = (1,1,0)$, alors $x^T Mx = -1$.

(iii) Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ avec $0 \neq x \geq 0$, on voit que soit $x_2 > 0$ et $(Mx)_2 \geq 0$, ou $x_2 = 0$ et $Mx \geq 0$, Il s'ensuit que M est un $\boldsymbol{E}_0$–matrice.

Théorème 2.2.9. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, les énoncés suivants sont équivalents*

(a) M est une $\boldsymbol{E}_0$–matrice,

(b) Le $PCL(q,M)$ a une solution unique pour tout $q > 0$,

(c) Pour chaque ensemble d'indices $\alpha \subseteq \{1,\ldots,n\}$ le système

$$M_{\alpha\alpha} x_\alpha < 0, \;\; x_\alpha \geq 0 \tag{2.26}$$

n'a pas de solution.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$ Soit $q > 0$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On a $z = 0$ résout le $PCL(q,M)$. Supposons que $PCL(q,M)$ admet une autre solution $z \neq 0$. Puisque M est semi-monotone, il existe un indice k tel que $z_k > 0$ et $(Mz)_k \geq 0$. Par conséquent, $q_k + (Mz)_k > 0$. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle z résout le (q,M).

$(b) \Rightarrow (c)$. Supposons qu'il existe un ensemble d'indices α tel que (2.26) a une solution, x_α. Définir

$$x_{\overline{\alpha}} = 0,$$
$$q_\alpha = -M_{\alpha\alpha} x_\alpha,$$
$$q_{\overline{\alpha}} > \; max\{0, -M_{\overline{\alpha}\alpha} x_\alpha\}.$$

Ainsi, $q > 0$ et $\widetilde{z} = x$ est une solution non nulle de (q,M).

$(c) \Rightarrow (a)$. Supposons que pour chaque ensemble d'indices α, le système (2.26) n'a pas de solution. Ainsi, le support de chaque vecteur non nul positive x contient un élément k tel que $(Mx)_k \geq 0$; donc M est une semi-monotone.

Proposition 2.2.6. *[4] Si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique, alors M est copositive si et seulement si M est dans* $\boldsymbol{E}_0$.

Définition 2.2.10. *Une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite strictement semi-monotone si*

$$[0 \neq x \geq 0] \Rightarrow [\exists k \in \{1,\dots,n\} : x_k > 0 \; et \, (Mx)_k > 0]. \tag{2.27}$$

*La classe de telles matrices est notée **E**, et ses éléments sont appelés **E**−matrices.*

Remarque 2.2.8. *Toute matrice strictement semi-monotone est semi-monotone.*

Proposition 2.2.7.

- *une matrice strictement copositive est strictement semi-monotone,*
- *toutes les **P**−matrices sont strictement semi-monotone.*

Exemple 2.2.9. *Considérons la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*La matrice M est strictement semi-monotone mais elle n'est pas une **P**−matrice car $det(M) = -7$. Elle n'est pas aussi strictement copositive, car pour $x = (1,1,0)$ on obtient $x^T Mx = 0$.*

Théorème 2.2.10. *[4] Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) M est strictement semi-monotone,

(b) Le $PCL(q,M)$ a une solution unique pour tout $q \geqslant 0$,

(c) Pour chaque ensemble d'index $\alpha \subseteq \{1,...,n\}$, le système

$$M_{\alpha\alpha} x_\alpha \leq 0, \;\; 0 \neq x_\alpha \geq 0 \tag{2.28}$$

n'a pas de solution.

2.2.7 Classe des Z−matrices

Définition 2.2.11. *On dit qu'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une **Z**− matrice si touts ses éléments extra-diagonaux sont négatifs, i.e :*

$$\forall \; i, j \in \{1,\dots,n\} \; avec \; i \neq j \; : \; m_{ij} \leq 0.$$

Définition 2.2.12. *Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $u \in S$ est un minimum de S si $u \leq x$ pour tout $x \in S$.*

Proposition 2.2.8 ([4] .Proposition 3.11.3 et Théorème 3.11.5)**.** *Soit M une **Z**–matrice et q un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble des point admissibles qui noté $Adm(q,M)$ vérifier la propriété suivante*

$$pour\ tout\ x,y \in Adm(q,M)\ on\ a\ z = min(x,y) \in Adm(q,M)\ fermer\ et\ borné\ inférieurement \tag{2.29}$$

Tout ensemble S vérifier la propriété (2.29) admet un minimum.

Théorème 2.2.11. *Soit M une **Z**–matrice et $q \in \mathbb{R}^n$. Si le $PCL(q,M)$ est réalisable, alors l'ensemble des points réalisables contient un minimum u. De plus, u résout le $PCL(q,M)$.*

Démonstration

Soit $S = Adm(q,M)$ l'ensemble admissible de $PCL(q,M)$. Il est évidemment borné inférieurement, et elle est non vide puisque le $PCL(q,M)$ est réalisable. D'après la proposition 2.2.8, S contient un minimum u. Il reste à montrer que u résout le $PCL(q,M)$. Supposons que pour un composant i, à la fois u_i et $(q+Mu)_i$ sont strictement positifs. Considérons le vecteur $z = u - \delta e_i$ où δ est un scalaire strictement positif. Nous affirmons que pour $\delta > 0$ suffisamment petit, le vecteur z est réalisable. Évidemment, pour un tel δ, z est positifs et $(q+Mz)_i \geq 0$. Considérons un indice $j \neq i$. On a M est une **Z**−matrice, donc $(q+Mz)_j \geq (q+Mu)_j \geq 0$. Par conséquent, z est réalisable à condition que $\delta > 0$ soit suffisamment petit. Mais ça contredit la propriété du élément minimum.

Proposition 2.2.9. *Soit M une matrice carrée d'ordre n, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(a) M est une **Z**−matrice,*

(b) pour tout $q \in \textbf{cone}(I,-M)$, l'ensemble admissible de $PCL(q,M)$ admet un minimum qui correspond à une solution du $PCL(q,M)$.

Démonstration

Il suffit de montrer que la propriété du **Z**−matrice est nécessaire. Supposons, au contraire, qu'il existe $i \neq j$ tel que $m_{ij} > 0$. Soit $q = e_j - M_{.j}$. Évidemment, e_j est un vecteur réalisable pour le $PCL(q,M)$ pour q choisi. Ainsi, $PCL(q,M)$ a une solution x satisfaisant $0 \leq x \leq e_j$, qui donne $x_k = 0$ pour tout $k \neq j$, $x_j = 1$ car $0 \leq (q+Mx)_i = m_{ij}(x_j - 1)$. Par complémentarité, on a $0 = (q+Mx)_j = 1$ ce qui est clairement absurde. Par conséquent, M doit être une **Z**−matrice.

Remarque 2.2.9. *D'après les proposions 2.2.4 et 2.2.9, on a $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}_0$.*

2.2.8 Classe des R_0−matrices

Définition 2.2.13. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une $\boldsymbol{R}_0$−matrices si $Sol(0,M) = \{0\}$.*

Remarque 2.2.10. *D'après le théorème 2.2.5, il est facile de voire que si M est une $\boldsymbol{R}_0$−matrices copositive, alors $M \in \boldsymbol{Q}$.*

Exemple 2.2.10. *Soit les deux matrices M et M′ tel que*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*La matrice M appartient à la classe **P**−matrice donc $Sol(0,M) = \{0\}$, par conséquent, M est une $\boldsymbol{R}_0$−matrices.*
La matrice M′ n'est pas une $\boldsymbol{R}_0$−matrices car il existe infinité de solutions du $Sol(0,M')$.

Théorème 2.2.12 ([4], Théorème 3.8.13)**.** *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice copositive. Alors, l'ensemble*

$$T = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : M^T x \leq 0\right\}$$

est un sous-ensemble de $Sol(0,M)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $T = SOL(0,M)$.

(b) M est copositive star.

(c) $\textbf{cone}(I,-M) = K(M) = (Sol(0,M))^*$.

Corollaire 2.2.4 ([4], Corolaire 3.8.14)**.** *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est copositive star. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) $M \in \boldsymbol{S}$.

(b) $M \in \boldsymbol{R}_0$.

(c) $M \in \boldsymbol{Q}$.

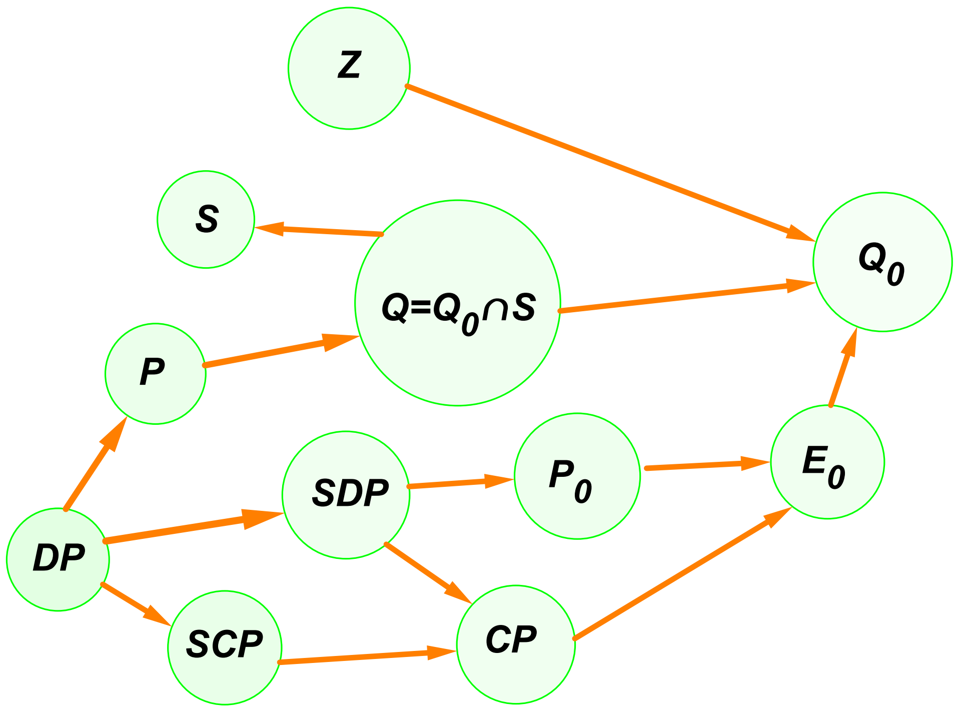


Figure 2.5 – Propriétés d'inclusion de quelques classes de matrices [6] , la flèche $A \longrightarrow B$ indique que $A \subset B$.

Chapitre 3

Méthodes du pivot pour la résolution du (PCL)

Il existe plusieurs méthodes de calcul pour résoudre les problèmes de complémentarité linéaire, dans ce chapitre, nous discutons la méthode de pivot complémentaire.

3.1 Solution de base réalisable (sbr)

Considérons le système suivant de contraintes linéaires

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est une matrice donnée d'ordre $m \times n$ de rang m et $b \in \mathbb{R}^n$

Définition 3.1.1. *Soit B une matrice carrée de taille m extraite de A.*
On dit que B est une matrice de base si les colonnes de B sont linéairement indépendants.
On dit que B est une matrice de base réalisable si elle est inversible et vérifier $B^{-1}b \geq 0$.

Définition 3.1.2. *Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$ un polyèdre avec A une matrice $m \times n$ de rang m. Un point $x^* \in P$ est appelé une solution de base réalisable (sbr) s'il existe une matrice carrée B de taille m inversible extraite de A telle que $B^{-1}b \geq 0$ et $x^* = (B^{-1}b, 0)$.*

Théorème 3.1.1 ([2], Théorème 2.6.4 et 2.6.6)**.** *Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$ un polyèdre non vide. Alors on a*

- *x^* est un sommet de P si et seulement si x^* est une (sbr).*
- *d^* est une direction extrémale de P si et seulement si on peut extraire de A une matrice carrée B de taille m inversible et s'il existe une colonne $A_{\cdot j}$ n'appartenant pas à B tels que $B^{-1}A_{\cdot j} \leq 0$ et*

$$d^* = \alpha \begin{bmatrix} -B^{-1}A_{\cdot j} \\ e_j \end{bmatrix}$$

où $\alpha > 0$, e_j est le vecteur qui vaut 1 à la j^{eme} composante et 0 ailleurs.

Soit x^* une solution de base réalisable, c'est à dire

$$x^* = (B^{-1}b, 0) = (x_B^*, x_N^*).$$

Soit x un point admissible, on a alors $Bx_B + Nx_N = b,\ x_B, x_N \geq 0$.
En calculant x_N en fonction de x_B on obtient

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{3.2}$$

D'ou

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1} b + [c_N^T - c_B^T B^{-1} N]x_N \\ &= c^T x^* - [c_B^T B^{-1} N - c_N^T]x_N. \end{aligned}$$

On a donc

Proposition 3.1.1.
- ▹ *Si le vecteur $c_B^T B^{-1}N - c_N^T$ est négatif, comme $x_N \geq 0$ alors on obtient $c^T x \geq c^T x^*$. Par suite x^* est un minimum.*
- ▹ *Si le vecteur $c_B^T B^{-1}N - c_N^T$ est positif, puisque $x_N \geq 0$ alors on obtient $c^T x \leq c^T x^*$. Par suite x^* est un maximum.*

Exemple 3.1.1. *Considérons le problème suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{(x_1,x_2,x_3,x_4)}{Min} \quad -2x_1 + 3x_2 \\ s.c \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \ \ x_3 \qquad = 3 \\ -x_1 + \ \ x_2 + \qquad x_4 = 2 \\ \ x_1, \ \ x_2, \ \ x_3, \ \ x_4 \ \geq 0 \end{array} \right. \tag{3.3}$$

La matrice A et les vecteurs b et c sont donnés par

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on choisit la matrice B et N comme suit

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

alors on obtient

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

On obtient donc, une sbr $x^* = (2,4,0,0)$ et une direction extrémale $d = (2,1,0,1)$.
Les vecteurs c_B et c_N sont donnés par

$$c_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient alors $c_B^T B^{-1}N - c_N^T = [2,1]$, donc $x^* = (2,4,0,0)$ est un maximum.

3.2 Méthode de Lemke [5]

La méthode de Lemke est un algorithme de pivotage, c'est-à-dire qu'une solution exacte est trouvée à la suite d'une série de pivots, il est une variante de la méthode du simplexe. L'algorithme de Lemke est connu pour son bon comportement numérique pour les problèmes quadratiques et ceux de complémentarité linéaire.

Définition 3.2.1. *Considérons le système suivant*

$$(PCL)' \quad \begin{cases} Iw - Mz - ez_0 = q \\ w^T z = 0 \\ w, z \geq 0, \;\; z_0 \geq 0 \end{cases}$$

- *Une solution w, z, z_0 de $(PCL)'$ est quasi-complémentaire si $z_0 > 0$.*
- *Une solution (w, z, z_0) de $(PCL)'$ est complémentaire si $z_0 = 0$.*
- *Une solution complémentaire de $(PCL)'$ est une solution de PCL.*

Remarque 3.2.1. *On dit que B est une matrice de base quasi complémentaire si*

- ▶ *La dernière colonne de B est $-e^n$.*
- ▶ *Si $I_{.j}$ est une colonne de B, alors $-A_{.j}$ ne l'est pas, $A_{.j}$ est la j^{eme} colonne de la matrice A et $I_{.j}$ est la $j^{ème}$ colonne de la matrice d'identité.*
- ▶ *Si $-A_{.j}$ est une colonne de B, alors $I_{.j}$ ne l'est pas.*

Description de l'algorithme de Lemke

Nous pouvons résoudre le problème $PCL(q, M)$ avec l'algorithme de Lemke.

Initialisation

Si $q \geq 0$, stop ; $(w, z) = (q, 0)$ est une solution de base réalisable complémentaire.
Sinon, nous introduisons la variable artificielle z_0 dans chaque contrainte avec un coefficient égale à -1 pour obtenir le système linéaire suivant

$$[I - | - M | - e^n] \begin{bmatrix} w \\ z \\ z_0 \end{bmatrix} = q$$

$$w \geq 0 \;,\; z \geq 0 \;,\; z_0 \geq 0$$

$$\text{où } e^n = [1, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$$

On obtient alors le tableau suivant :

variable de base	w_1	w_2	$\ldots$	w_n	z_1	z_2	$\ldots$	z_n	z_0	
w_1	1	0	$\cdots$	0	$-M_{11}$	$-M_{12}$	$\cdots$	$-M_{1n}$	-1	q_1
w_2	0	1	$\ldots$	0	$-M_{21}$	$-M_{22}$	$\ldots$	$-M_{2n}$	-1	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
w_n	0	0	$\cdots$	1	$-M_{n1}$	$-M_{n2}$	$\cdots$	$-M_{nn}$	-1	q_n

Soit $q_r = \underset{1\le i\le n}{min}\{q_i\}$, on met à jour le tableau par pivotage en ligne r et colonne z_0. La variable de base w_r quitte la base et z_0 rentre dans la base.

Ainsi pour $i = 1\dots,n$ avec $i \neq r$, les w_i sont positifs ou nuls.

On pose $y_r = z_r$ et on passe à l'étape principale.

Étape principale

Cette étape se décompose en quatre itérations :

- 1^{ere} **itération** : Soit d_r la colonne qui correspond à la variable y_r. Si $d_r \le 0$ on va à **l'itération** 4. Sinon, on détermine un indice s tel que

$$\frac{\overline{q_s}}{d_{r_s}} = \min_{1\le i\le n}\left\{\frac{\overline{q_i}}{d_{r_i}} : d_{r_i} > 0\right\}.$$

  Le vecteur $\overline{q}$ défini la colonne représentant le second membre de l'équation $Iw - Mz - ez_0 = q$, après la mise à jour du tableau. Si la variable de base correspondant à la ligne s est z_0, aller à **l'itération** 3. Sinon aller à **l'itération** 2.
- 2^{eme} **itération** : La variable de base correspondant à la ligne s est soit w_p soit z_p (pour une composante $p \neq r$). la variable y_r rentre dans la base et on détermine le tableau suivant par pivotage en ligne s et colonne y_r. Si la variable qui quitte la base est w_p (resp z_p) on pose alors $y_r = z_p$ (resp $y_r = w_p$) et on retourne à **l'itération** 1.
- 3^{eme} **itération** : la variable y_r rentre dans la base, et z_0 quitte la base, et l'on effectue le pivotage en colonne y_r et ligne z_0. On obtient, ainsi, une solution de base réalisable complémentaire.
- 4^{eme} **itération** : On arrête. Les points de la demi-droite $R = \{(w,z,z_0) + \lambda d : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ avec d est une direction extrême dont les composantes valent 1 pour la ligne correspondant a y_r, $-d_r$ pour les lignes correspondant aux variable de base et 0 ailleurs, sont des solutions du problème $(PCL)'$. L'algorithme se termine ainsi.

Théorème 3.2.1 ([1], Théorème 4.2.1 et corollaire 4.2.2)**.** *Supposons que la matrice M est une (DP), (CP), $\boldsymbol{E}$−matrice ou $\boldsymbol{P}$−matrice, alors, l'algorithme de Lemke appliqué au $PCL_{z_0}(q,M)$ génère une solution du $PCL(q,M)$, $\forall q \in \mathbb{R}^n$.*

Corollaire 3.2.1. *Supposons que la matrice M est une $\boldsymbol{R}_0$−matrices et que le $PCL(q,M)$ est non dégénéré. Alors, l'algorithme de Lemke appliqué au $PCL_{z_0}(q,M)$ génère une solution du $PCL(q,M)$, $\forall q \in \mathbb{R}^n$.*

Exemple 3.2.1. *On veut déterminer une solution du problème complémentaire linéaire $PCL(q,M)$ défini par*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

On introduit la variable artificielle z_0 et on construit le tableau de départ suivant :

w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
1	0	0	0	-1	1	1	1	-1	3
0	1	0	0	1	-1	1	1	-1	5
0	0	1	0	-1	-1	-2	0	***(-1)***	-9
0	0	0	1	-1	-1	0	-2	-1	-5

On observe alors que $\min\limits_{1\le i\le 4}\{q_i\} = q_3 = -9$, *l'élément* ***(-1)*** *s'appelle le pivot, on fait alors un pivotage sur l'élément* (w_3, z_0), *on passe a l'itération suivante avec* $y_r = z_3$.
On obtient le tableau suivant :

variable de base	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	$\overline{q}$
w_1	1	0	-1	0	0	2	3	1	0	12
w_2	0	1	-1	0	2	0	3	1	0	14
z_0	0	0	-1	0	1	1	2	0	1	9
w_4	0	0	-1	1	0	0	***(2)***	-2	0	4

$min\{\frac{12}{3}, \frac{14}{3}, \frac{9}{2}, \frac{4}{2}\} = \frac{4}{2}$, *on fait alors un pivotage sur l'élément* (w_4, z_3), *on passe a l'itération suivante avec* $y_r = z_4$.
On construit le tableau suivant :

variable de base	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	$\overline{q}$
w_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	2	0	***(4)***	0	6
w_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	0	0	4	0	8
z_0	0	0	0	-1	1	1	0	2	1	5
w_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	0	2

$min\{\frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{5}{2}\} = \frac{6}{4}$, *on fait alors un pivotage sur l'élément* (w_1, z_4), *on passe à l'itération suivante avec* $y_r = z_1$.
On construit le tableau suivant :

variable de base	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	$\overline{q}$
z_4	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{6}{4}$
w_2	-1	1	0	0	(2)	-2	0	0	0	2
z_0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	0	1	2
z_3	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{14}{4}$

$min\{\frac{2}{2},\frac{2}{1}\} = \frac{2}{2}$, on fait alors un pivotage sur l'élément (w_2, z_1), on passe a l'itération suivante avec $y_r = z_2$.
On construit le tableau suivant :

variable de base	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	$\overline{q}$
z_4	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{6}{4}$
z_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	0	0	0	1
z_0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	(1)	0	0	1	1
z_3	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{14}{4}$

$min\{\frac{\frac{6}{4}}{\frac{1}{2}},\frac{1}{1},\frac{\frac{14}{4}}{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{1}$, on fait alors un pivotage sur l'élément (z_0, z_2).
On construit le tableau suivant :

variable de base	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	$\overline{q}$
z_4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	1
z_1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	0	1	2
z_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	0	0	1	1
z_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	3

On obtient la solution du (PCL) :

$$(w_1, w_{,2}, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4) = (0,0,0,0,2,1,3,1).$$

Convergence de la méthode

L'algorithme de Lemke converge en un nombre fini d'étapes vers une solution de base réalisable complémentaire lorsqu'elle existe. Sinon il s'arrête avec un rayon de terminaison. Mais sous certaines conditions portant sur la matrice M, on vérifier que l'algorithme produit toujours une solution de base réalisable après un nombre fini d'étapes[[3] 4.3.3].

Théorème 3.2.2 ([2]Lemme 11.1.8)**.** *Lorsqu'il est appliqué à un exemple non dégénérée du problème $PCL(q,M)$, et supposons que M est copositive plus. Ensuite, l'algorithme de Lemke converge en un nombre fini d'étapes. En particulier, si le système défini par* (2.1) *et* (2.2) *est consistant, l'algorithme s'arrête à une solution de base réalisable complémentaire. De plus, lorsque ce système est non-consistant, l'algorithme s'arrête avec un rayon de terminaison.*

Corollaire 3.2.2. *Si M a des entrées positives, avec des éléments diagonaux strictement positifs, alors l'algorithme de Lemke s'arrête en un nombre fini d'étapes avec une solution de base réalisable complémentaire.*

Pour plus détails voir [[2] Chapitre 11]

Exemple 3.2.2 (Terminaison de rayon)**.** *Soit le $PCL(q,M)$ suivant :*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

On introduit la variable artificielle z_0 et on construit le tableau de départ suivant :

w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
1	0	0	0	0	0	−1	1	−1	1
0	1	0	0	0	0	1	−2	−1	4
0	0	1	0	1	−1	−2	2	−1	−2
0	0	0	1	−1	2	2	−2	***(-1)***	−4

*On observe alors que $\min_{1\leq i\leq 4}\{q_i\} = q_4 = -4$, l'élément **(-1)** s'appelle le pivot, on fait alors un pivotage sur l'élément (w_4, z_0), on passe a l'itération suivante avec $y_r = z_4$.*
On obtient le tableau suivant :

variable de base	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	$\overline{q}$
w_1	1	0	0	−1	1	−2	−3	3	0	5
w_2	0	1	0	−1	1	−2	−1	0	0	8
w_3	0	0	1	−1	2	−3	−4	***(4)***	0	2
z_0	0	0	0	−1	1	−2	−2	2	1	4

$min\{\frac{5}{3}, \frac{2}{4}, \frac{4}{2}\} = \frac{2}{4}$, on fait alors un pivotage sur l'élément (w_3, z_4), on passe a l'itération suivante avec $y_r = z_3$.
On construit le tableau suivant :

variable de base	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	$\overline{q}$
w_1	1	0	$\frac{-3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
w_2	0	1	0	-1	1	-2	-1	0	0	8
z_4	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
z_0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	3

ici $y_r = z_3$, Mais tous les éléments de la colonne z_3 sont négatifs. On arrête donc avec la terminaison de rayon.
Nous avons ainsi trouvé le rayon

$$R = \{(w,z,z_0) = (\frac{7}{2},8,0,0,0,0,0,\frac{1}{2},3) + \lambda(0,1,0,0,0,0,1,1,0) : \lambda \geq 0.\}$$

Exemple 3.2.3 (programme quadratique). *[4] Considérons le programme quadratique suivant*

$$\begin{array}{ll} \textbf{minimiser} & \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \textbf{sujet } \boldsymbol{\grave{a}} & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

On a

$$M = \begin{pmatrix} D & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

tel que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Soit $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ tel que les composantes de d doivent être positives et d_2 strictement positive, on peut supposer que $d_2 = 1$. On construit le tableau suivant :

	x_1	x_2	y_3	y_4	z_0	q
y_1	-1	0	2	-1	d_1	$\frac{1}{2}$
y_2	0	1	1	4	1	$-\frac{1}{2}$
x_3	-2	-1	0	0	d_3	6
x_4	1	-4	0	0	d_4	6

Quelles que soient les valeurs (positives) de d_1, d_3 et d_4 le pivot initial doit être (y_2, z_0). On construit le tableau suivant :

	x_1	x_2	y_3	y_4	y_2	q
y_1	-1	$-d_1$	$2-d_1$	$-1-4d_1$	d_1	$\frac{1}{2}(1+d_1)$
z_0	0	-1	-1	-4	1	$\frac{1}{2}$
x_3	-2	$-1-d_3$	$-d_3$	$-4d_3$	d_3	$\frac{1}{2}(12+d_3)$
x_4	1	$-4-d_4$	$-d_4$	$-4d_4$	d_4	$\frac{1}{2}(12+d_4)$

On fait un pivotage sur l'élément (z_0, x_2), On construit le tableau suivant :

	x_1	z_0	y_3	y_4	y_2	q
y_1	-1	d_1	2	-1	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	-1	-1	-4	1	$\frac{1}{2}$
x_3	-2	$1+d_3$	1	4	-1	$\frac{11}{2}$
x_4	1	$4+d_4$	4	16	-4	4

On obtient la solution $(x_1, x_2, y_3, y_4) = (0, \frac{1}{2}, 0, 0)$.

Conclusion

Le problème de complémentarité linéaire a été le centre d'intérêt de plusieurs chercheurs, son importance grandissante est mesurée par les domaines pratiques et mathématiques qu'il couvre. Dans ce mémoire nous avons, tout d'abord, défini le (PCL) en présentant l'existence et l'unicité de la solution de ce problème. Ensuite, nous avons étudié un algorithme basé sur le principe de pivotage qui est proposer par Lemke [5].

Bibliographie

[1] Brahim Aghezzaf. *Etudes de quelque Problème en complémentarité.* PhD thesis, Université des sciences et techniques de lille, 1983.

[2] Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*. Wiley Interscience, third edition, 2006.

[3] Mohamed Ali Boughazi. *Contribution a l'étude des algorithmes d'optimisation en analyse des données.* PhD thesis, L'université Scientifique, Technologique et Médical de Grenoble., 1987.

[4] Richard W. Cottle, Jong-Shi Pang, and Richard E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Classics in Applied Mathematics 60. Society for Industrial & Applied Mathematics, 2009.

[5] G.B. Dantzig and eds. A.F. Veinott, JR. On complementary pivot theory. *Mathematics of the Decision Sciences*, 8 :95–114, 1968.

[6] Ibtihel Ben Gharbia. *Résolution de problèmes de complémentarité. : Application à un écoulement diphasique dans un milieu poreux*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 2012.

[7] Katta G Murty. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Classics in Applied Mathematics 60. The Internet edition of this book has been prepared by, 1997.

[8] Boudiaf Naima. *RProblème de complémentarité linéaire semi-défini. Etude théorique et algorithmique.* PhD thesis, Université El-Hadj Lakhdar Batna, 2012.

[9] Gue Myung Lee. Nguyen Nang Tam and Nguyen Domg Yen. *Quadratic Programming and Affine Variational Inequalities*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. Springer Science+Business Media, Inc, 2005.