Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

SARI Meryem
RAHMOUNI Mouna

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Système Dynamique

Thème

Le problème de Dirichlet et de Neumann généralisé

Soutenu publiquement le 08 juillet 2021 devant le jury composé de

Président	GARMOUL Billel.
Encadrant	DERBAZI Ammar.
Examinateur	BENTERKI Djamila.

Promotion 2020/2021

REMERCIEMENT

Mon premier remerciement va à **Allah** Soubhanou, Wa Taala,
le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme ma formation et pouvoir réaliser ce travail de recherche.

Je remercie mes très chers parents pour leur amour et leur sacrifice.
Mes remerciements s'adressent particulièrement à l'encadreur DERBAZI Ammar, pour son encadrement de qualité, sa motivation professionnelle, ses corrections, sa gentillesse et sa patience ainsi pour le temps qu'il a consacré à la réalisation de ce travail, je remercie les membres du jury, qui ont accepté l'arbitrage et l'évaluation de mon travail, les professeurs BENTERKI.D et GARMOUL.B

Je remercie toutes celle et ceux qui, de prés ou loin, ont contribué à réalisation de cette mémoire. Tout d'abord, ceux sans qui, la tenue d'une soutenance aurait été tout simplement impossible.

Je tiens à remercier également tout mes professeurs des mathématiques de la faculté de Mathématiques et Informatiques. Un merci spécial à tous ceux qui m'ont appris les lettres dans ce monde mortel.
Je terminerai en remerciement l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Aux tasses vides pour me boire une goutte d'amour j'ai perdu le bout des doigts pour nous offrir un moment de bonheur, à celui qui a récolté les épines de mon chemin pour m'ouvrir le chemin de la connaissance vers du grand cœur mon cher père, à celui qui m'a allaité amour et tendresse au symbole de l'amour et du baume de guérison ma cher mère.

À mes frères et sœurs, *à* toute ma famille.

Enfin, je dédie cette mémoire à mes collègue et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptiques qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants de temps.

Les équations aux dérivées partielles de type elliptiques interviennent dans les études scientifiques. Il est souvent difficile de démontrer l'existence et unicité de la solution du problème posé, plus précisément, on s'intéresse à des équations aux dérivées partielles de la forme :

$$-div(A(x)\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \qquad (\mathcal{P})$$

où u est l'inconnue, $f \in L^2(\Omega)$, $A = (A_{ij})_{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega},\, \mathbb{R}^{N\times N}\right)$ et Ω est un domaine de classe C^1 et borné de l'espace $\mathbb{R}^N$.

L'objectif principale de ce mémoire est d'appliquer des différences méthodes, pour étudier l'existence et l'unicité du problème $(\mathcal{P})$ avec des conditions aux limites de types Dirichlet et Neumann homogène et non-homogène.

Le reste de ce mémoire est composé de trois chapitre, présentés comme suit :

• Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques outils de base avec des résultats préliminaires essentiels dans l'étude de notre travail, parmi ces outils de base, on rappels les notations de distribution, l'analyse convexe, l'analyse fonctionnelle, en particulier, ceux des espaces de Hilbert et de Sobolev.

• Le deuxième chapitre est voué à étudier l'existence, l'unicité et régularité de la solution du problème $(\mathcal{P})$ avec une condition aux limite de type Dirichlet homogène et non-homogène.

• Dans le dernière chapitre voué à étudier l'existence et l'unicité et régularité de la solution du problème $(\mathcal{P})$ avec des conditions aux limite de type Neumann homogène et non-homogène, et enfin on termine ce travail par une conclusion.

Notations

$\mathbb{C}$: L'ensemble de tout le nombres complexe.

$\mathbb{R}$: L'ensemble de tout les nombres réels.

$\mathbb{N}$: L'ensemble de tout les nombres entiers non négative.

$\nabla u(x)$: Le gradient de u, noté $grad u(x)$.

Δu : Laplacien de u.

$C(\Omega)$: L'espaces des fonctions sur Ω on note, $C(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$.

$C(\overline{\Omega})$: Fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

$C^k(\Omega)$: L'espace des fonctions k fois continument différentiables sur Ω (k entier $\geqslant 0$).

$C_c^k(\Omega)$: L'ensemble des fonctions $C^k(\Omega)$ qui sont à support compact dans Ω.

$C_c(\Omega)$: Fonctions continues à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}(\Omega)$: L'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ sur Ω à support compact dans Ω, (dit aussi espace des fonctions test).

$\mathcal{D}'(\Omega)$: L'espace dual, tel que $\mathcal{D}'(\Omega) = \{L : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ linéaire continue } \}$ = espace des distributions.

$S(\mathbb{R}^N)$: L'ensemble de ces fonctions est un espace vectoriel.

$S'(\mathbb{R}^N)$: Le dual topologique de $S(\mathbb{R}^N)$.

$W_0^{m,p}(\Omega)$: L'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\| \|_{m,p}$.

$(\mathbb{R}^N)^+ = \mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[$.

Chapitre 1

Rappels élémentaires

Ce premier chapitre a pour but de présenter (ou de rappeler) quelques notions nécessaires sur les distributions, l'espace fonctionnel, l'espace convexe et l'espaces de Sobolev, utilisés tout le longe de ce travaille à usage permanent dans les prochains chapitres. Ces importantes notions sont énoncées sous forme de définitions, théorèmes, corollaires et lemmes.

Définition 1.0.1. ***(Espace de Banach)*** *Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace normé $(V, \|.\|)$. On dite que cette suite est de Cauchy*

$$\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

L'espace normé $(V, \|.\|)$ est dite de Banach si toute suite de Cauchy dans V converge vers un élément de V (pour la norme $\|.\|$). En d'autres termes, un espace de Banach est un espace normé complet.

Théorème 1.0.1. *Soit $(V, \langle .,. \rangle)$ un espace linéaire muni d'un produite scalaire. Posons $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ pour tout $v \in V$. Alors le couple $(V, \|.\|)$ est un espace normé et*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall u, v \in V.$$

*Un **espace de Hilbert** est un espace de Banach dont la norme et induite par un produit scalaire.*

1.1 Distributions

Une fonctionnelle linéaire et continue définie sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution.

1.1.1 Les espaces des fonctions tests

Définition 1.1.1. ***(Espace** $\mathcal{D}(\Omega)$**)** Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; on appelle **espace des fonctions test** et on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble :*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^{\infty}(\Omega) | \exists K \, compact, K \subset \Omega, u \in \mathcal{D}_K(\Omega)\}.$$

Notation 1.1.1. *On note alors $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.1.1. *L'ensemble de toutes les formes linéaire continues sur un espace vectoriel normé V, alors on note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω est appelé espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Définition 1.1.2. ***(Distribution)** On appelle distribution T sur Ω tout fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega)$.*

$$T : \begin{cases} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle = T(\varphi) \end{cases}$$

elle satisfait les deux conditions suivantes :
***Linéarité** :*

$$\langle T, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T, \varphi_2 \rangle \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \;\; \textbf{\textit{et}} \;\; \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$$

***Continuité** : Si la suite (φ_k) converge dans $\mathcal{D}$ vers φ,alors (T, φ_k) converge au sens usuel vers $\langle T, \varphi \rangle$*

$$\varphi_k \longrightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D} \text{ alors } \langle T, \varphi_k \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ dans } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

Définition 1.1.3. ***(Support d'une fonction)** Support d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $(\mathbb{C})$ par*

$$suppf = adh\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\},$$

c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des x tels que $f(x)$ est non identiquement nulle. Autrement dit, c'est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel f est identiquement nulle.

1.1.2 Convergence des suites de distributions

Définition 1.1.4. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions sur Ω converge vers $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ lorsque pour toute fonction test $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

.

1.1.3 Distributions régulières et singulières

Définition 1.1.5. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dit localement intégrable si elle est intégrable sur tout ensemble borné K de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, si*

$$\int_K |f(x)|dx < +\infty.$$

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, alors f définit une distribution par :

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite localement sommable si elle est intégrable sur tout intervalle borné(fini), on note $f \in L^1_{Loc}$. A tout fonction f localement sommable, on note la distribution T_f associée à f définie par

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in D(\Omega).$$

Pour toute fonction d'essai(test) φ dans $\mathcal{D}$. Il est facile de constanter que l'expression a un sens

$$\left|\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \int_{\Omega} |f(x)||\varphi(x)|dx \leq \sup|\varphi(x)| \int_{\Omega} |f(x)|dx$$

c'est une distribution régulière.

Notation 1.1.2. *L'ensemble des fonctions localement intégrables forme un espace noté $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Remarque 1.1.2. *La distribution de Dirac δ n'est pas régulière.*

Toute distribution qui ne peut pas s'écrire sous cette forme est dit singulière.

1.1.4 Support d'une distribution

Définition 1.1.6. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle support de T, noté supp T, la complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.*

Proposition 1.1.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que supp $T \cap$ supp $\varphi = \emptyset$. Alors, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.*

Définition 1.1.7. ***(Distribution à support compact)*** *On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact lorsque supp T est compact. On note l'ensemble des distributions à support compact $\varepsilon'(\Omega)$*

Proposition 1.1.2. *Une distribution de $\varepsilon'(\Omega)$ peut être prolongée à $C^\infty(\Omega)$.*

1.1.5 Dérivées d'une distribution

Soit f une fonction de classe C^1. On intègre par partie, on obtient

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\langle f, \varphi' \rangle$$

car $\varphi(\pm\infty) = 0$. On est donc conduit à la définition générale suivante :

Définition 1.1.8. *On appelle dérivée T' d'une distribution T, la fonctionnelle définie par la relation*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Corollaire 1.1.1. *Tout distribution est indéfiniment dérivable et ses dérivées sont des distribution.*

Définition 1.1.9. ***(Dérivée partielle d'une distribution)*** *La dérivée partielle d'une distribution T par rapport au multi-indice m est*

$$\langle D^m T, \varphi \rangle = (-1)^{|m|} \left\langle T, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

1.2 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels. Qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach(espace vectoriels normés complets).
Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces fonctionnels, particulièrement, les espaces L^p et les espaces de Sobolev.

1.2.1 Rappel sur les espaces de L^p

Définition 1.2.1. ***(Espace** $L^p(\Omega)$**)** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ l'espace L^p est l'ensemble des fonctions mesurables intégrables sur Ω, et pour tout $1 \leq p < \infty$; on définit*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

que l'on munit de la norme :

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.2.1. *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Espace $L^1(\Omega)$

Définition 1.2.2. *$L^1(\Omega)$, espaces des fonctions sommables sur Ω, muni de la norme définie par*

$$||f||_1 = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

L'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ est un espace de Banach.

Espace $L^2(\Omega)$

Définition 1.2.3. ***(Espace** $L^2(\Omega)$**)** Pour $p = 2$ on note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré sommable c'est-à-dire*

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty\}.$$

$L^2(\Omega)$ est un espace fonctionnel linéaire.

Théorème 1.2.2. ***(Inégalité de Cauchy- Schwartz)** Pour tous $u, v \in L^2(\Omega)$, on a :*

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |v(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est-à-dire en notation abrégée

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|.$$

Corollaire 1.2.1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0,$$

alors $f(x) = 0$ presque partout dans Ω

Espace $L^\infty(\Omega)$

Lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } \exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ telle que } |f(x)| \leq C\ presque\ partout\}.$$

Dont la norme est :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \leq 0 : |f(x)| \leq C\ presque\ partout\}.$$

Remarque 1.2.1. *Si $f \in L^\infty(\Omega)$ on a*

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p sur } \Omega.$$

Théorème 1.2.3. ***(Densité)*** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$. Alors il existe une suite $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que*

1) $|f_n|_p \leqslant |f|_p$,

2) f_n tend vers f dans $L^p(\Omega)$.

Si de plus $f \in L^\infty(\Omega)\bigcap L^p(\Omega)$, on peut choisir f_n telle que $|f_n|_\infty \leqslant |f|_\infty$.

1.2.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.2.4. ***(Espaces de Sobolev)*** *Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit **l'espace de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); u \text{ a une dérivée faible } u^{'} \in L^p(\Omega)\}.$$

On le munit de la norme $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u^{'}\|_{L^p}$. *Et la définition générale est sous la forme :*

$$W^{m,p} = \{u \in L^p(\Omega) | \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leqslant m \Longrightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Notation 1.2.1. *Pour* $p = 2$ *on note :*

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

L'espace H^1 *est muni de produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u^{'}, v^{'} \rangle_{L^2}.$$

Pour $k \geqslant 1$, *on note* $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.

L'espace $H^m(\Omega)$

Définition 1.2.5. *Pour un entier* $m \geq 0$, *l'espace de Sobolev* $H^m(\Omega)$ *est défini par*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\},$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha v$ *est à prendre au sens faible.*

Proposition 1.2.1. *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

et de la norme $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, *l'espace de Sobolev* $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.2.6. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *On note* $H^1(\Omega)$ *l'espace fonctionnel linéaire défini par*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., N\}.$$

La dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ *est dans* $H^1(\Omega)$ *s'il existe des fonctions* $v_1, ..., v_N$ *dans* $L^2(\Omega)$ *telles que :*

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v_i\varphi dx, \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega), \qquad \forall i=1,...,N.$$

Corollaire 1.2.2. *Toute fonction de $C^1([-1,1])$ est dans $H^1(]-1,1[)$.*

Proposition 1.2.2. *Muni du produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega (u(x)v(x)+\nabla u(x).\nabla v(x))dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2+|\nabla u(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2.4. ***(de trace)*** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1, ou bien $\Omega=\mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace γ_0*

$$\begin{aligned} H^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega)\bigcap C(\overline{\partial\Omega}) \\ v \qquad &\longrightarrow \gamma_0(v)=v|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application γ_0 ce prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0.

Définition 1.2.7. ***(Trace au bord)*** *La restriction au bord Γ d'une fonction de $v\in H^1(\Omega)$ est appelée trace au bord de w et est notée $v|_\Gamma$ ou encore $\gamma_0(v)$.*

Théorème 1.2.5. ***(Trace au bord)*** *L'ensemble des traces au bord des fonctions de $H^1(\Omega)$ forme un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ noté $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Plus succinctement, on a :*

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\subsetneqq L^2(\Gamma). \tag{1.2}$$

Espace $H^1_0(\Omega)$

Définition 1.2.8. ***(L'espace $H^1_0(\Omega)$)*** *Soit $\mathcal{D}^\infty_c(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C^\infty_c(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Définition 1.2.9. *On défini l'espace $H^1_0(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{H^1}(\Omega)$ ainsi, pour chaque $v\in H^1_0(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_n\in\mathcal{D}(\Omega)$ tell que :*

$$\lim_{i\longrightarrow\infty}\|\varphi_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

les fonction de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent donc au bord et on peut écrire :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \ \ sur \ \ \Gamma\} \\ &= H_\Gamma^1(\Omega) = \ker \gamma_0 \\ \ker \gamma_0 &= \{v \in H^1(\Omega) | \gamma_0(v) = 0\}. \end{aligned}$$

On peut aussi définir

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \ sur\, \Gamma_0\}.$$

Notation 1.2.2. $H_0^1(\Omega)$ *la fermeture de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$

Théorème 1.2.6. ***(Formule de Green)*** *Soit* Ω *un ouvert borné pour des fonctions de classe* C^1*. Si* u *et* v *sont des fonctions de* $H^1(\Omega)$*, elle vérifient*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds,$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq N}$ *est la normale unité extérieure à* $\partial\Omega$*.*

Théorème 1.2.7. ***(Inégalité de Poincaré)*** *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour toute fonction* $v \in H_0^1(\Omega)$*,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Corollaire 1.2.3. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme*

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ *équivalente à la norme usuelle induite par celle de* $H^1(\Omega)$*.*

L'espace $H^2(\Omega)$

Définition 1.2.10. ***(Espace*** $H^2(\Omega)$***)*** *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*. On note* $H^2(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions de* $L^2(\Omega)$ *dont toutes les dérivées premières et secondes (au sens des distributions) sont dans* $L^2(\Omega)$ *:*
$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ *tel que* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq i, j \leq N\}$*.*

Remarque 1.2.2. *Les fonctions de* $H^2(\Omega)$ *sont plus régulière elles* $H^1(\Omega)$*.*

Théorème 1.2.8. *Le dual de $H_0^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On note $H^{-1}(\Omega)$. De plus, on a*

$$H^{-1}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}', u = f_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, f_i \in L^2\}.$$

Théorème 1.2.9. ***(d'injection)*** *Il existe une constante C (dépendant seulement de $mes(\Omega) \leq \infty$) telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \qquad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

autrement dit $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ avec l'injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

De plus, lorsque Ω est borné on a

- *l'injection $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ est compacte pour $1 < p \leq \infty$ et*
- *l'injection $W^{1,1}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ est compacte pour $1 \leq q < \infty$.*

Proposition 1.2.3. *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

L'espace H^1 est espace de Hilbert séparable.

Définition 1.2.11. *Une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée à un recouvrement ouvert $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de l'ouvert Ω est un ensemble de fonction ψ_j vérifiant :*

- *Pour tout j, la fonction ψ_j est dans $C^\infty(\Omega)$, positive et à support contenu dans A_j.*
- *Sur tout compact K de Ω, un nombre fini seulement de fonctions ψ_j ne sont pas identiquement nulles sur K.*
- $\forall x \in \Omega, \sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j(x) = 1.$

Proposition 1.2.4. *L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est de type local, c'est-à-dire que pour tout u dans $W^{s,p}(\Omega)$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ le produit φu appartient à $W^{s,p}(\Omega)$.*

Proposition 1.2.5. • *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Alors $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

- *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, donc :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Théorème 1.2.10. ***(Théorèmes d'injection pour les*** $W^{s,p}(\Omega)$***)***

Cas de $\Omega = \mathbb{R}^N$ *Soit $s \in]0,1[, p \in]1,\infty[$. Alors :*

- *si $sp < N$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \leqslant Np/(N - sp)$;*

- *si* $N = sp$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $q < \infty$ *;*
- *si* $sp > N$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *et, plus précisément :*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,s-N/p}(\mathbb{R}^N).$$

Définition 1.2.12. *Soit* Ω *un ouvert de classe* C^1*, dans* $\mathbb{R}^N$*. Soit, pour* p *et* q *dans* $[1,\infty[$*,*

l'espace :

$$W_q^p(div)(\Omega) = \{\sigma \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid div\sigma \in L^q(\Omega)\}.$$

Alors :

$\mathcal{D}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W_q^p(div)(\Omega)$.

L'espace $W^p(div)$ *défini par :*

$$W^p(div) = \{\sigma \in L^p(\Omega) \mid div(\sigma) \in L^p(\Omega)\}.$$

Définition 1.2.13. ***(Espace quotient)*** *Soient* X *un espace normé et* Y *un sous-espace vectoriel de* X*. On définit les classes modulo* Y *par*

$$\forall x \in X, \tilde{x} = \{x + y \mid y \in Y\}.$$

Classiquement l'ensemble de ces classes est un espace vectoriel, noté X/Y*, qui est appelé* ***espace quotient*** *de* X *par* Y*.*

1.3 Rappels d'analyse convexe

Définition 1.3.1. ***(Ensembles convexes)*** *Un ensemble* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *est dit convexe si pour tout* $x, y \in \Omega$ *et tout* $\lambda \in [0,1]$ *on a*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega.$$

Définition 1.3.2. ***(Fonction convexe)*** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert convexe. Une fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite convexe si pour tout* $x, y \in \Omega$ *et tout* $\lambda \in [0,1]$ *elle vérifie*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 1.3.3. ***(Prolongement)*** *On pose*

$$\tilde{L}(x) = \lim_{x_n \longrightarrow x} L(x_n)$$

pour tout $x \in H$ et pour une suite $x_n \in A$ tel que $x_n \longrightarrow x$. Cette forme est bien définie (linéaire et continue).

Notation 1.3.1. ***(Prolongement d'une forme linéaire)*** *Soit H un espace vectoriel normé et A un sous-espace vectoriel de H tel que $\overline{A} = H$. Soit $L : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une extension linéaire $\tilde{L}$ de L continue sur H.*

Définition 1.3.4. ***(Application compacte)*** *Soit A, B deux espaces vectoriels normés dans Ω. Une application $i : A \longrightarrow B$ est dite compacte si pour toute suite (a_n) dans A bornée (c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $||a_n|| \leq C$) il existe $b \in B$ et une sous-suite a_{n_k} de a_n tel que $i(a_{n_k}) \longrightarrow b$ dans B.*

1.3.1 Sous-différentiabilité et Gâteaux-différentiabilité

Définition 1.3.5. ***(Sous-différentiabilité)*** *On appelle sous-différentiel de J en x le sous-ensemble de X' :*

$$\partial J(x) = \{\alpha \in X' | \forall y \in dom(J), \langle \alpha, y - x \rangle \leqslant J(y) - J(x)\}.$$

Si J est différentiable (au sens de Fréchet) de dérivée notée $DJ(x)$ en x, $\partial J(x) = \{DJ(x)\}$. On dit qu'une fonction est sous-différentiable en x si son sous-différentiel en x est non vide. par exemple, la fonction $x \longmapsto |x|$ est différentiable partout sauf en 0 où elle est cependant sous-différentiable, le sous-différentiel en ce point étant égale au convexe $[-1, 1]$.

Définition 1.3.6. ***(Gâteaux-différentiabilité)*** *Une fonctionnelle J convexe sur X, est dite Gâteaux-différentiable en u élément de X si, pour tout $w \in X$, $w \longmapsto J'(u, w)$ est un élément de X', qui est alors noté $J'(u)$. Ainsi, pour tout $v \in X$, on a :*

$$\begin{aligned} J'(u, v - u) = \langle J'(u), v - u \rangle &= \lim_{t \longrightarrow 0, t>0} \frac{J((1-t)u + tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0, t>0} \frac{J(u + t(v - u)) - J(u)}{t}. \end{aligned}$$

1.3.2 Minimisation d'une fonctionnelle convexe

Définition 1.3.7. **•*(Espace séparable)*** *Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est séparable s'il existe une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ qui est dense dans E.*

•*(Espace réflexif)* *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans $E^{''}$. On dit que E est réflexif si $J(E) = E^{''}$ et dans ce cas on identifie implicitement E et $E^{''}$.*

Corollaire 1.3.1. *Un espace de Banach X est séparable et réflexif si et seulement si son dual $X^{'}$ est séparable et réflexif.*

Définition 1.3.8. *Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach séparable X est dite coercive si :*

$$\lim_{\|x\|_X \longrightarrow +\infty} J(x) = +\infty.$$

On se préoccupe du problème de minimum de J sur un convexe fermé de X.

Théorème 1.3.1. *Soient X un espace de Banach séparable et réflexif, U un convexe fermé de X et J une fonctionnelle convexe, propre, coercive et semi-continue inférieur. Alors il existe une solution au problème :*

$$\inf_{u\in U} J(u).$$

Ce minimum u est alors caractérisé par :

$$\forall v \in domJ \cap U, \;\; J^{'}(u, v-u) \geqslant 0.$$

Dans le cas où $U = X$, cette caractérisation devient :

$$\forall v \in domJ, \;\; J^{'}(u, v) = 0,$$

ou bien encore $0 \in \partial J(u)$, ce qui redonne $J^{'}(u) = 0$ si J est G-différentiable en u.

Dans le cas d'une sous-espace affine $U = x_0 + Y$, où Y est un sous-espace vectoriel fermé de X, le minimum $x_0 + \tilde{u}$ se traduit par :

$$\forall \tilde{v} \in Y, \;\; x_0 + \tilde{v} \in domJ \cap U \Longrightarrow J^{'}(x_0 + \tilde{u}, \tilde{v}) = 0$$

et, si J est G-différentiable en $x_0 + \tilde{u}$, par $J^{'}(x_0 + \tilde{u}) = 0$.

Remarque 1.3.1. *Si J est strictement convexe, la solution u est unique.*

Proposition 1.3.1. *Si $1 < p < \infty$, le propriétés suivantes sont équivalentes :*

$(1) u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$(2) u \in L^p(\Omega)$ *et il existe une constante $C > 0$ telle que, ω étant un ouvert d'adhérence incluse dans Ω, on a :*

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, |h| \leqslant d(\omega, \partial\Omega) \Longrightarrow \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant C|h|.$$

Dans le cas $p = 1$, la propriété (2) doit être remplacée par :

$(2^{'})$ *pour chaque ouvert ω d'adhérence incluse dans Ω, il existe une constante $c(\omega)$ telle que $c(\omega) \leqslant C, c(\omega) \longrightarrow 0$ lorsque $|\omega| \longrightarrow 0$ et $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leqslant c(\omega)|h|$.*

Chapitre 2

Problèmes de Dirichlet

Dans ce chapitre, nous avons considéré des problèmes aux limites pour des opérateurs plus généraux, dits elliptiques du deuxième ordre à **coefficients variables** avec de conditions aux limites de types Dirichlet homogène et non-homogène. plus précisément, nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution et utilisant la théorie de l'analyse fonctionnelle.

2.1 Quelques résultats utiles

On note $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, le symbole nabla ∇ représente le gradient de u,

$$\nabla u(x) = gradu(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}),$$

et div désigne l'opérateur divergence, il s'applique à une fonction vectorielle,

$$div(v_1(x), ..., v_n(x)) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

le symbole Δ désigne le laplacien de u,

$$\Delta u(x) = div(\nabla u(x)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i^2}.$$

2.1.1 Formes linéaire et bilinéaire

•$L(.)$ est une **forme linéaire continue** sur V, c'est-à-dire que $v \longrightarrow L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que

$$|L(v)| \leq C\|v\| \text{ pour tout } v \in V\,;$$

• $a(.,.)$ est une **forme bilinéaire** sur V, c'est-à-dire que $w \longrightarrow a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \longrightarrow a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$;
• $a(.,.)$ est **continue**, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(w,v)| \leq M\|w\|\,\|v\| \text{ pour tout } w,v \in V\,;$$

• $a(.,.)$ est **coercive** (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $k > 0$ tel que

$$a(v,v) \geq k\|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V.$$

2.1.2 Le Théorème de Stampacchia et Lax-Milgram

Théorème de **Lax-Milgram** Avec la formule de Green et l'inégalité de Poincaré, le théorème de Lax-Milgram peut être vu comme la clef de vo$\hat{u}$te de l'étude variationnelle des des équations aux dérivées partielles. La première partie de Lax-Milgram montre que la formulation variationnelle admet une unique solution. Elle ressemble au théorème de Riesz à la différence prés que la forme bilinéaire n'est pas symétrique définie positive, mais par contre coercive (ou elliptique).
Et la deuxième partie du théorème de Lax-Milgram suppose de plus que la forme bilinéaire est symétrique afin de donner une équivalence entre la formulation variationnelle un problème de minimisation.

Théorème 2.1.1. *Soit V un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle*

$$\textit{trouver } u \in V \textit{ tel que } a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

admet une unique solution.
De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L.

Théorème 2.1.2. ***(Stampacchia)*** *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, a une forme sesquilinéaire continue coercive sur H, C un sou-ensemble convexe fermé non vide de H. Alors :*

• *Pour tout f de $H^{'}$ il existe un unique u de C vérifiant l'inéquation, dite* ***inéquation variationnelle*** *:*

$$Re(a(u,v-u)-\langle f,v-u\rangle)\geq 0, \quad \forall v\in C.$$

• *Si de plus a est* ***hermitienne*** *$a(u,v)=\overline{a(u,v)}$, alors u est l'unique élément de C vérifiant :*

$$J(u)=\min_{v\in C}J(v),$$

avec

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-Re\langle f,v\rangle.$$

2.2 Problème de Dirichlet homogène

2.2.1 Position du problème

Soit Ω est un domaine de classe C^1 et borné de l'espace $\mathbb{R}^N$ et $f\in L^2(\Omega)$, le problème de Dirichlet homogène généralisé s'écrit sous la forme suivante :

$$[Dir]_A^f:\begin{cases}-div(A(x)\nabla u)=f & dans \quad \Omega\\ u=0 & sur \quad \partial\Omega\end{cases}$$

où $A=(A_{ij})_{ij}\in C^1\left(\overline{\Omega},\ \mathbb{R}^{N\times N}\right)$ telle que :

(1) Pour tous i et j dans $[1,N]$, on a $A_{ij}=A_{ji}$;

(2) il existe $\alpha>0$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j}A_{ij}x_ix_j\geq\alpha|x|^2.$$

Cette dernière propriété est dite uniforme ellipticité de A.

Ce problème est une généralisation de $[Dir]_\Delta^f$ puisque il suffit de choisir $A_{ij}=\delta_i^j$.

2.2.2 Résultats d'existence, unicité et de la régularité de la solution

Notre résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit Ω un domaine borné de classe C^2 et f un élément de $L^2(\Omega)$. Soit A vérifiant les hypothèses précédentes. Alors, si u est la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de $[Dir]_A^f$, elle appartient à $H^2(\Omega)$.*

Preuve : Elle se fera en trois étapes qui sont justifiées par ce que suit :

En utilisant une partition de l'unité $\{\varphi_i\}$ attachée au recouvrement de classe C^1 de Ω, on se ramène à montrer que chaque $\varphi_i u$ est dans $H^2(\Omega)$. En effet si φ_k est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, elle vérifie aussi une équation

$$div(A(x)\nabla(\varphi_k u)) \in L^2(\Omega),$$

car le second membre de l'expression :

$$div(A(x)\nabla(\varphi_k u)) = \sum_i \left[\partial_i(A_{ij}\partial_j\varphi_k u) + A_{ij}(\partial_{ij}\varphi_k)u + A_{ij}\partial_j\varphi_k\partial_i u\right] + \varphi_k div\,(A(x)\nabla u)$$

appartient à $L^2(\Omega)$. Dans le cas de $k = 0$, puisque $\varphi_0 u$ est à support compact dans Ω, elle satisfait une équation de la forme

$$div\,(A(x)\nabla(\varphi_0 u)) \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

ce qui justifie une première étape, à savoir :

Étape1. On commence par montre le résultat sur $\mathbb{R}^N$, autrement dit : si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est à support compact et satisfait à l'équation

$$-div\,(A(x)\nabla u) = f,$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et A symétrique, lipschitzienne et coercive, alors, $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Pour les autres fonctions $\varphi_k u$, on doit donc montre que si u est support compact dans un ouvert de la forme $\Omega_k \cap \overline{\Omega}$, avec la condition au bord $\varphi_k u(x', a(x')) = 0$ et satisfait par ailleurs à $div\,(A(x)\nabla\varphi_k u) \in L^2$, alors $\varphi_k u \in H^2$. Outre la fait que a peut être la fonction nulle et donc que le bord est localement droit, on peut par un changement de cartes, comme on le montre plus loin, se ramener à ce cas. Par conséquent, cette remarque justifie une deuxième étape, à savoir :

Étape 2. On étend le résultat obtenu à la première étape à l'ouvert $\mathbb{R}^{N-1}\times]0, +\infty[$ avec la condition $u = 0$ sur $x_N = 0$.

La démonstration se terminera par :

Étape 3. On étend à l'aide de cartes locales et de partitions de l'unité, le résultat au cas de Ω.

Ici le difficulté provient du fait qu'en changeant de cartes, $A(x)$ est modifiée. Cette difficulté sera surmontée en remarquant que $A(x)$ est remplacée par une matrice $B(x)$, elle aussi uniformément elliptique. On pourra donc conclure en utilisant les résultats déjà obtenus sur $\mathbb{R}^{N-1}\times]0, +\infty[$.

Première étape : Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ à support compact. On fixe une direction e_i, et on définit la translatée $u_h : x \longmapsto u(x+he_i)$. Puisque l'équation est linéaire en u on a $div(A_h \nabla u_h) = f_h$, de sorte qu'en retranche cette équation translatée de l'équation et en multipliant ensuite par $u_h - u$, on obtient par intégration sur Ω et utilisation de la formule de Green sur $H^1 \times W^2(div)$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (A_h \nabla u_h - A\nabla u) \cdot (\nabla u_h - \nabla u)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f_h - f)(u_h - u) dx.$$

On développe le premier facteur en : $(A_h - A)\nabla u_h + A(\nabla u_h - \nabla u)$, pour en déduire, à l'aide d'une translation de la variable dans l'intégrale du second membre :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{ij} A_{ij}(\partial_i(u_h) - \partial_i u)(\partial_j(u_h) - \partial_j u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{ij} \Big((A_{ij})_h - A_{ij}\Big) \partial_i(u)_h (\partial_j(u_h) - \partial_i u) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} (f_h - f)(u_h - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)(-u_{-h} - u_h + 2u) dx.$$

En divisant par h^2 on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{ij} A_{ij} \left(\frac{\partial_i(u_h) - \partial_i u}{h}\right)\left(\frac{(\partial_j(u_h) - \partial_j u}{h}\right) dx =$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{ij} \frac{(A_{ij})_h - A_{ij}}{h} \partial_i(u_h) \frac{\partial_j(u_h) - \partial_j u}{h} dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \frac{u_{-h} + u_h - 2u}{h^2}(x) dx.$$

Pour le second membre, considérons $v = (u_h - u)/h$. Alors, on a la relation $(v - v_{-h})/h = (u_h - 2u + u_{-h})/h^2$. Puisque $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, ou déduit de l'inégalité

$$\int_\omega |\tau_{he_i} u - u|^p(x) dx \leqslant |h|^{p-1} \int_0^h \int_\omega |\partial_i u(x + se_i)|^p dx ds$$

$$\leqslant |h|^p \|\partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

de la proposition (1.3.1) appliquée pour $\Omega = \mathbb{R}^N$, la majoration

$$\|v - v_{-h}\|_2 \leqslant |h|\, \|\partial_i v\|_2 \leqslant |h| \left\|\frac{\nabla(u_h - u)}{h}\right\|_2.$$

En utilisant en outre l'uniforme ellipticité de A, la relation précédente fournit :

$$\alpha \left\|\frac{\nabla(u_h - u)}{h}\right\|_2^2 \leqslant \|\nabla A\|_\infty \|\nabla u_h\| \Big\|_2 \frac{\nabla(u_h - u)}{h}\Big\|_2 + \|f\|_2 \left\|\frac{\nabla(u^h - u)}{h}\right\|_2.$$

Finalement, ou obtient :

$$\left\|\frac{\nabla(u^h-u)}{h}\right\|_2 \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\|\nabla u\|_2\|\nabla A\|_\infty + \|f\|_2\right).$$

Puisque le membre de droite est indépendant de h, on peut utiliser la caractérisation des fonctions de H^1 à l'aide de différences finies. En faisant décrire à e_i une base de $\mathbb{R}^N$, on obtient, pour u solution de $[Dir]_A^f$, l'appartenance $\nabla\nabla u \in L^2$ avec, pour la norme, l'inégalité :

$$\|\nabla\nabla u\|_2 \leqslant \frac{1}{\alpha}(\|\nabla u\|^2\|\nabla A\|_\infty + \|f\|_2).$$

Deuxième étape : cas de $\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[$. On peut reproduire les calculs ci-dessus, avec $\overrightarrow{h} = h_{e_i}, où\ i < N$. En raison de la nullité de $u_h - u$ sur le bord, la formule obtenue en intégrant le produit $div(A^h\nabla u_h - A\nabla u)(u_h - u)$ nous donne, par la formule de Green, si l'un des indices (i,j) est différent de N, l'appartenance :

$$\partial_{ij}u \in L^2(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[).$$

Il reste à obtenir que $\partial_{NN}u \in L^2$. Pour cela, on écrit l'équation sous la forme :

$$\partial_N(A_{NN}\partial_N u) = f - \sum_{i\leqslant N-i,j}\partial_i(A_{ij}\partial_j u) \in L^2.$$

On est ramené, en posant $A_{NN}\partial_N u = bv$.

Lemme 2.2.1. *Si $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$ avec $b \geqslant \alpha > 0$ et si $v \in L^2(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$ satisfont, au sens des distributions, à l'appartenance $\partial_N(bv) = V \in L^2(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$, alors :*
$\partial_N v = (V - (\partial_N b)v)/b$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$.

Remarque 2.2.1. *Notons que, dans le cas où A est une matrice diagonale ou telle que ses coefficients A_{iN} sont nuls, ce qui est le cas pour l'opérateur laplacien, on peut utiliser le prolongement $\tilde{u}(x', x_N) = -\tilde{u}(x', -x_N)$ qui satisfait une équation $divA(\nabla\tilde{u}(x', x_N) = \tilde{f}(x', x_N)$ avec $\tilde{f}$ l'antisymétrisée de f, et cela sur $\mathbb{R}^N$.*

Troisième étape : On passe au cas d'un ouvert de classe C^2. Soit donc u une solution du problème $[Dir]_A^f$. Soit φ_k une fonction régulière à support compact dans $\overline{\Omega}\cap\Omega_k$, où Ω_k est tel qu'il existe a_k une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}^{N-1}$, et

$$\Omega \cap \Omega_k \subset \{(x', x_N) | x' \in \mathcal{O}', x_N > a_k(x')\},$$
$$\partial\Omega \cap \Omega_k = \{(x', a_k(x')|x' \in \mathcal{O}'\}.$$

Montrons que la fonction $\varphi_k u$ a la propriété suivante :

$$div(A(x)\nabla(\varphi_k u)) = g \in L^2(\Omega \cap \Omega_k).$$

Pour la vérifier, et faciliter la lecture, en remplaçant φ_k par φ et la notation $\Omega \cap \Omega_k$ par Ω, et on écrit :

$$\begin{aligned} div(A(x)\nabla(\varphi u)) &= div(A(x)\varphi\nabla u) + div(A(x)(\nabla\varphi)u) \\ &= \varphi div(A(x)\nabla u) + \nabla\varphi.A(x)\nabla u + div(uA(x)(\nabla\varphi)) \\ &= \varphi f + h, \end{aligned}$$

où $h \in L^2(\Omega)$. En effet $A \in L^\infty$ et $\nabla u \in L^2$ entraine $A(x)\nabla u \in L^2$, et $\nabla\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ donc $A(x)\nabla u\nabla\varphi \in L^2$. D'autre part $(\nabla\varphi)u \in H^1$, donc $uA(x).\nabla\varphi$, produit d'une fonction de $W^{1,\infty}$ par une fonction de H^1, est dans H^1.

Lemme 2.2.2. *Soit u, à support compact dans $\Omega_k \cap \overline{\Omega}$, tel que*
$div(A(x).\nabla u) = g \in L^2(\Omega_k \cap \Omega)$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega \cap \Omega_k$, alors $u \in H^2(\mathbb{R}^{N-1} \times]0, +\infty[)$.

Puisque u est la somme des $\varphi_k u$, elle est dans $H^2(\Omega)$. La démonstration du théorème est ainsi terminée.

Remarque 2.2.2. *Dans le cas où $A = Id$, donc dans le cas de $[Dir]_\Delta^f$, un argument de régularisation peut être utilisée pour la première étape :*
On commence par montrer que, si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\nabla u|^2.$$

On obtient cette égalise en faisant successivement deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j} \partial_{ij}(u)^2(x)dx &= -\sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{ijj}u(x)\partial_i u(x)dx \\ &= \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{jj}u(x)\partial_{ii}u(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2. \end{aligned}$$

On considère ensuite $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \star u$. *On a*

$$\Delta u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \star f$$

et, par le calcul qui vient d'être fait, $\nabla\nabla u_\varepsilon$ *est une suite de Cauchy dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$. *Puisqu'elle converge au sens de* $\mathcal{D}'$ *vers* $\nabla\nabla u$, *on obtient que* $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

2.2.3 Résultats sur la régularité d'ordre supérieur

Proposition 2.2.1. *Soit, pour* $m \geqslant 0$, *un domaine borné* Ω *de classe* C^{m+2} *et* $f \in H^m(\Omega)$. *On suppose que la matrice* A *satisfait aux hypothèses du théorème* (2.2.1) *et, en outre, à la régularité* $A \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$. *Alors* u, *solution du problème* $[Dir]_A^f$, *appartient à* $H^{m+2}(\Omega)$. *En particulier notons, à l'aide des injections de Sobolev, les résultats suivants, conséquences de ce théorème :*
Lorsque $2(m+2) > N$, *la solution* u *est continue et lorsque* $2m > N$, *elle est de classe* C^2.
De même, si $f \in C^\infty(\Omega)$ *et* $A \in C^\infty(\Omega)$, *ce qui implique* $f \in \bigcap_m H^m_{loc}(\Omega)$, *alors*

$$u \in \bigcap_m H^{m+2}_{loc}(\Omega) = C^\infty(\Omega).$$

2.3 Problème de Dirichlet non homogène

Soient Ω un domaine borné de classe C^1 et $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Le problème de Dirichlet non-homogène d $[Dir]_A^{f,u_0}$ est : on cherche u dans $H^1(\Omega)$ telle que :

$$[Dir]_A^{f,u_0} : \begin{cases} -div(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où ù $A = (A_{ij})_{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega},\ \mathbb{R}^{N\times N}\right)$ telle que :

(1) Pour tous i et j dans $[1, N]$, on a $A_{ij} = A_{ji}$;

(2) il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j \geq \alpha |x|^2.$$

Existence et unicité : il se résout en considérant le problème variationnel :

$$\inf_{\{u \in H^1(\Omega), u = u_0 \ \ sur \ \ \partial\Omega\}} \{\frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx\}.$$

Ce problème est une minimisation sur un convexe fermé, mais en peut le traduire en une minimisation sur l'espace entier H^1. Pour cela, en remarque que u_0 est dans l'espace de traces $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$; en peut donc relever cette fonction en U_0 élément de $H^1(\Omega)$. En fixant cette fonction et en utilisant la translation $u = U_0 + v$, on voit que le problème précédent s'énonce :

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \{\frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla(U_0+v)(x).\nabla(U_0+v)(x)dx - \int_\Omega f(x)(v+U_0)(x)dx\},$$

ou bien, en posant $K = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla U_0(x).\nabla U_0(x)dx - \int_\Omega f(x)U_0(x)dx,$ sous la forme :

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \{\int_\Omega A\nabla v.\nabla U_0 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla v(x).\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx + K\}.$$

Cette nouvelle fonctionnelle $v \longmapsto J_1(v), où$ le première terme est une forme linéaire continue, est toujours convexe et continue sur $H^1(\Omega)$. En utilisant notamment de l'uniforme ellipticité de A, la coercivité de la J_1 résulte de l'inégalité :

$$|J_1(v)| \geqslant \alpha\|\nabla v\|_2^2 - \|A\nabla U_0\|_2\|\nabla v\|_2 - \|f\|_2\|\nabla v\|_2 - |K|.$$

On peut donc appliquer le théorème de Banach séparable réflexif, et comme J_1 est strictement convexe, on peut conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution au problème.
Poursuivons la fonctionnelle J_1 est G-différentiable. Par un calcul maintenant classique, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$J_1^{'}(v,\varphi) = \int_\Omega A\nabla_\varphi.\nabla U_0 dx + \int_\Omega A(x)\nabla v(x).\nabla_{\varphi(x)}dx - \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Par conséquent :

$$J_1^{'}(v) = -div(A\nabla(v+U_0)) - f.$$

En annulant cette dérivée en v, on obtient que $u = v + U_0$ du problème est bien solution de $[Dir]_A^{f,u_0}$.
Notons qu'on peut se ramener directement à un problème de Dirichlet homogène en utilisant la translation $u - U_0$. Alors $u - U_0$ est cherchée comme solution de

$$-div(A(x)\nabla v) = f + div(A(x)\nabla U_0),$$

$$v = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Comme divergence d'une fonction de L^2, on a $div(A(x)\nabla U_0) \in H^{-1}(\Omega)$, ce qui établit que le second membre est $H^{-1}(\Omega)$. On conclut avec la remarque de propriétés de régularité.

Proposition 2.3.1. *Soit* $m \geqslant 0$*. On suppose que* Ω *est un domaine de classe* C^{m+2}*, borné, que* $A \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$*, que* $u_0 \in H^{m+\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ *et* $f \in H^m(\Omega)$*. Alors la solution de :*

$$\begin{cases} -div(A(x)\nabla u) = f & \textit{dans}\, \Omega, \\ u = u_0 & \textit{sur}\, \partial\Omega. \end{cases}$$

Vérifie : $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

Preuve : En utilisant encore une translation. D'après le théorème de traces, puisque $u_0 \in H^{m+\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, il existe $U \in H^{m+2}(\Omega)$ de trace u_0 sur $\partial\Omega$. Alors, par les propriétés de A et celles de U :

$$-div(A(x)\nabla(u-U)) = f + \sum_{i,j}(\partial_i(A_{ij})\partial_j U + A_{ij}\partial_{ij}U) = g.$$

Par les hypothèses de la régularité de f, A, u, on voit que $g \in H^m(\Omega)$. En utilisant alors le théorème de la régularité pour le problème $[Dir]_A^g$, on obtient la conclusion attendue, à savoir $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

Chapitre 3

Problème de Neumann

Dans ce chapitre, nous avons considéré des problèmes aux limites pour des opérateurs plus généraux, dits elliptiques du deuxième ordre à **coefficients variables** avec de conditions aux limites de types Neumann homogène et non-homogène c'est-à-dire lorsque la condition frontière fait intervenir dans le modèle physique de Dirichlet, non plus égalité pourtant sur la fonction inconnue, mais sur un dérivée de cette fonction. Plus précisément, nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de ce problème.

3.1 Trace normale et dérivée normale

Soit Ω un domaine borné de classe C^1 et A une fonction appartenant à $C^1(\overline{\Omega})$ à valeurs dans l'espace des matrices symétriques sur $\mathbb{R}^N$. on suppose que $\sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ de sort que $x \longmapsto A(x)\sigma(x)$ est défini comme fonction sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On a puisque Ω est borné $A\sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, donc si on suppose que $div(A\sigma) \in L^2(\Omega)$, on en déduit que $A\sigma \in W_2^2(div)(\Omega)$. Alors par la formule de Green généralisé, le symbole $A\sigma.\overrightarrow{n}$ a un sens sur $\partial\Omega$. Ainsi :

$$\forall U \in H^1(\Omega), \langle A\sigma \cdot \overrightarrow{n}, \gamma_0 U\rangle = \int_\Omega A\sigma(x) \cdot \nabla U(x) dx + \int_\Omega U(x) div(A\sigma)(x) dx.$$

Définition 3.1.1. *Cette forme linéaire $A\sigma.\overrightarrow{n}$, qui appartient au dual de l'espace de traces $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, donc à $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, est appelée la trace normale de $A\sigma$ sur $\partial\Omega$.*
En particulier, si $u \in H^1(\Omega)$ et $div(A\nabla u) \in L^2$, la dérivée normale, ou plus précisément la dérivée A-normale de u, à savoir $A(x)\nabla u.\overrightarrow{n} = A_{ij}\partial_i u n_j$, appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. En prenant pour A, la matrice

identité, on obtient que, sous les conditions $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$, on peut parler de la dérivée normale $\partial_n u$ qui appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

3.2 Problème de Neumann homogène

3.2.1 Position du problème

Soit Ω est un domaine de classe C^1 et borné de l'espace $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$, le problème de Neumann homogène généralisé s'écrit sous la forme suivante :

$$[Neu]_A^f : \begin{cases} -div(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ A(\nabla u).\overrightarrow{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $A = (A_{ij})_{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega},\ \mathbb{R}^{N\times N}\right)$ telle que :

(1) Pour tous i et j dans $[1, N]$, on a $A_{ij} = A_{ji}$;

(2) il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j \geq \alpha |x|^2.$$

Remarque 3.2.1. *Notons que ce problème n'a de solution que si :*

$$\int_\Omega f(x)dx = 0.$$

En effet, si u est une solution, en appliquant la formule de Green avec $\varphi = 1_\Omega$ et $A(x)\nabla u$ qui appartient à $W_2^2(div)$, on a :

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega -div(A(x)\nabla u(x))dx = \langle A(x)\nabla u \cdot \overrightarrow{n}, 1_\Omega \rangle = 0.$$

On supposera donc cette condition remplie et, également, que A vérifie les hypothèses énoncées dans l'étude du problème $[Dir]_A^f$.

3.2.2 Résultats d'existence, unicité et régularité de la solution

Formulation variationnelle : comme dans ce qui précède, on associe à ce problème, la minimisation :

$$\inf J(u) = \inf_{u \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (A(x)\nabla u) \cdot \nabla u dx - \int_\Omega f u dx \right\}.$$

Compte tenu de l'hypothèse $\int_\Omega f(x)dx = 0$, on remarque que, si u est une solution, alors $u + cte$ est aussi solution, et plus généralement que la fonctionnelle J vérifie $J(v + cte) = J(v)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$. En identifiant l'espace des fonctions constantes à $\mathbb{R}$, on peut alors travailler sur l'espace quotient $\widetilde{H^1(\Omega)} = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. Muni de la norme quotient,

$$\|u\|_{\widetilde{H^1(\Omega)}} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u + c\|_{H^1(\Omega)},$$

cet espace est de Banach séparable et réflexif. Pour montrer la coercivité de $\tilde{J}$ définie sur $\widetilde{H^1(\Omega)}$ par $\tilde{J}(\tilde{v}) = J(v)$, on utilise une inégalité analogue à celle de Poincaré :

Proposition 3.2.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Pour tout u appartenant à $H^1(\Omega)$, on définit $[u]_\Omega$ par $[u]_\Omega = (mes(\Omega))^{-1} \int_\Omega u(x)dx$.*
Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall u \in H^1(\Omega),\ \|u\|_{\widetilde{H^1(\Omega)}} \leqslant \|u - [u]_\Omega 1_\Omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_2.$$

Existence d'une solution : retournons à la formulation variationnelle la convexité de J résulte de la convexité de l'intégrale et de la linéarité du terme $\int_\Omega f(x)u(x)dx$. La continuité est évidente. Pour la coercivité, on a d'abord, par la propriété d'ellipticité :
$J(v) \geqslant \alpha\|\nabla v\|_2^2 - \|f\|_2\|v\|_2$, puis, en utilisant la proposition précédent :

$$\tilde{J}(\tilde{v}) \geqslant \frac{\alpha}{C^2}\|\tilde{v}\|_{H^1}^2 - \|f\|_2\|\tilde{v}\|_{H^1}.$$

On en déduit l'existence d'un minimisation pour $\tilde{J}$ sur $\widetilde{H^1(\Omega)}$. Il reste à caractériser la fonction u réalisant ce minimum et vérifie qu'elle satisfait la condition de Neumann.

En utilisant la différentiabilité de J, u et caractériser par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx - \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Il en résulte que l'on a, dans Ω, l'égalité :

$$\forall x \in \Omega, \ -div(A(x)\nabla u(x)) = f(x).$$

Tenons compte, à présente, de cette égalité dans Ω et appliquons pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx - \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0 = \int_{\partial\Omega} A(x)\nabla u\cdot\overrightarrow{n}\varphi(x)dx.$$

On peut conclure à l'égalité $A(x)\nabla u\cdot\overrightarrow{n} = 0$ comme élément du dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. L'existence d'une solution est donc assurée.

Unicité dans l'espace quotient : supposons u et v deux solutions et montrons que leur différence est une constante . Cette différence w satisfait à $[Neu]_A^0$, à savoir :

$$\forall x \in \Omega, \ -div(A(x)\nabla w(x)) = 0 \text{ et, sur } \partial\Omega : A(x)\nabla w\cdot\overrightarrow{n} = 0.$$

En multipliant par w et en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} A(x)\nabla w(x)\cdot\nabla w(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(x)A(x)\nabla w\cdot\overrightarrow{n}d\sigma = 0.$$

Le premier membre étant minoré, grâce à l'uniforme ellipticité, par l'expression $\alpha\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}$, on en déduit $w = cte$ ou $\tilde{w} = 0$.

Régularité de la solution on suppose l'ouvert Ω de classe C^2, la fonction f dans $L^2(\Omega)$ et la fonction matricielle A de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$, et bien entendu uniformément elliptique. Soit, enfin, u la solution du problème $[Neu]_A^f$. On démontre des résultats de régularité analogues à ceux de Dirichlet :

Théorème 3.2.1. • *Sous les hypothèses précédentes, la solution de $[Neu]_A^f$ appartient à $H^2(\Omega)$*
• *Si $f \in H^m(\Omega)$ et $A \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, l'ouvert Ω étant de classe C^{m+2}, alors cette solution satisfait à $u \in H^{m+2}(\Omega)$.*

Preuve : Comme dans le théorème de régularité pour Dirichlet on fait le preuve en plusieurs étapes.

• La première étape sur $\mathbb{R}^N$ est la même.

• On passe au cas de $\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[$.

Soit u à support compact dans $\mathbb{R}^{N-1}\times[0,\infty[$. On remarque que, grâce à la condition de Neumann homogène, la formule de Green

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}\times]0,\infty[}(A(x)\nabla u)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^{N-1}\times]0,\infty[}fv=0$$

est encore vérifiée, quel que soit $v\in H^1(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$. On peut donc procéder comme dans le preuve de Dirichlet, à l'aide des translations dans les directions autres que e_N. On obtient ainsi, en retranchant les équations satisfaites par u et u_h, en multipliant par u_h-u et en intégrant sur $\mathbb{R}^{N-1}\times]0,\infty[$, une estimation uniforme qui permet de montrer que $\partial_{ij}u\in L^2$ dès que l'un des indices est autre que N. On termine, pour l'appartenance de $\partial_{NN}u$ dans L^2, comme la preuve de Dirichlet, on écrivant l'équation sous la forme :

$$\partial_N(A_{NN}\partial_N u)=-f-\int_{i\leqslant N-1,j}\partial_i(A_{ij}\partial_j u)\in L^2,$$

et en utilisant le lemme

Cas générale : on utilise le matériel habituel de la régularité de Ω : le recouvrement, les cartes locales, les fonctions φ_k d'une partition de l'unité.

En raisonnant comme dans le cas de Dirichlet, on voit que la fonction $\varphi_k u$ satisfait dans
$\Omega\cap\Omega_k$ à :

$$div(A(x)\nabla(\varphi_k u))=g$$

avec $g\in L^2(\Omega\cap\Omega_k)$. Mais contrairement au cas de Dirichlet, la condition au bord
$A(x)\nabla(\varphi_k u)\cdot\vec{n}=0$ sur $\partial\Omega\cap\Omega_k$ n'est plus nécessairement vérifiée. Cependant, en développant $\nabla(\varphi_k u)$, en utilisant la linéarité de la trace normale sur L^2 en factorisant par les fonctions à valeurs scalaires, on obtient :

$$A\nabla(\varphi_k u).\vec{n}=(A\nabla u\cdot\vec{n})_{\varphi_k}+(A(\nabla\varphi_k).\vec{n})u=(A(\nabla\varphi_k)\cdot\vec{n})u.$$

Considérons la fonction A^*, définie sur $\partial\Omega$ par $x^{'}\longmapsto(A(x^{'})\vec{n}(x^{'})\cdot\vec{n}(x^{'}))$. Elle est de classe C^1, et

par hypothèse d'uniforme ellipticité, ne prend pas la valeur nulle. La frontière étant de classe C^2, la fonction $(\frac{1}{A^*})A(\nabla\varphi_k).\overrightarrow{n}u$ est alors, sur $\partial\Omega$, le produit de trace $\gamma_0 u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ par une fonction de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$. On prouve que cette fonction appartient à $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. On applique alors, Ω étant de classe C^2, le théorème de trace pour $m = 2$ et $p = 2$. Il y est prouvé que l'application $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ de $H^2(\Omega)$ dans l'espace produit $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ qui associe
à v, le couple $\gamma_0 v, \partial_{\overrightarrow{n}} v$ est surjective. Dans le cas présent, on peut donc trouver $V \in H^2(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega; \\ \partial_{\overrightarrow{n}} V = \dfrac{1}{A^*}(A(\nabla\varphi_k).\overrightarrow{n})u & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, on en déduit :

$$A(\nabla V)\cdot\overrightarrow{n} = (A(\nabla\varphi_k)\cdot\overrightarrow{n})u.$$

La fonction $U = \varphi_k u - V$ satisfait donc à la relation :

$$-div(A(x)\nabla U) = -div(A(x).\nabla(\varphi_k u) + div(A(x)\nabla V) \in L^2$$

avec maintenant la condition $A(x)\nabla U.\overrightarrow{n} = 0$.
On définit alors v dans $H^1(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$ par $v(x', x_N) = U(x', x_N + a(x'))$.
Comme dans la preuve dans la régularité de Dirichlet, la fonction v vérifie $div(B(x)\nabla v) = h$, cette fonction h étant dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$.
Nous allons montrer que v est solution du problème de Neumann sur $(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$, ce qui permettra d'utiliser le résultat de régularité sur cet ouvert.
On rappelle que

$$\forall i \in [1, N-1],\ B_{iN} = A_{iN} - \sum_{j\leqslant N-1} A_{ij}\partial_j a B_{NN} = A_{NN} + A\nabla a\nabla a - \sum_{j\leqslant N-1} A_{Nj}\partial_j a.$$

On vérifie alors la relation :

$$(*) \qquad \sum_{i\leqslant N-1} B_{iN}\partial_i v + B_{NN}\partial_N v = 0.$$

En effet la relation

$$A(x)\nabla U\cdot\overrightarrow{n} = 0$$

s'écrit, compte tenu du fait que $\overrightarrow{n}$ est colinéaire à $-\nabla a + e_N$ et des relations entre les dérivées partielles de U et v calculées dans la section précédente :

$$0 = \sum_{i,j\leqslant N-1} A_{ij}(\partial_i v - \partial_i a \partial_N v)(-\partial_j a) + \sum_{i\leqslant N-1} A_{iN}(\partial_i v - \partial_i a \partial_N v) + \sum_{j\leqslant N-1} A_{Nj}\partial_N v(-\partial_j a) + A_{NN}\partial_N v$$
$$= -\sum_{ij\leqslant N-1} A_{ij}\partial_i v \partial_j a + A_{iN}\partial_i v + \partial_N v(A_{NN} + A\nabla a \nabla a - \sum_{j\leqslant N-1} A_{Nj}\partial_j a)$$
$$= -\sum_1^N B_{iN}\partial_i v - B_{NN}\partial_N v.$$

La relation (*)est ainsi prouvée. Or, cette relation exprime que la trace normale $B\nabla v.\overrightarrow{e_N}$ est nulle sur $\{x_N = 0\}$. la fonction v est donc, ainsi qu'on le voulait, solution du problème $[Neu]_B^h$ dans l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[$. On est donc ramené au résultat de régularité sur $\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[$ Ainsi, $v \in H^2(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$, ce qui entraine aisément, en utilisant le fait que a est de classe C^2, que $u \in H^2(\Omega\cap\Omega_k)$.

Régularité à l'ordre supérieur : on montre la régularité d'ordre H^{m+2} en supposant le bord de Ω de classe $C^{m+2}, A \in C^{m+1}(\Omega)$ et $f \in H^m(\Omega)$.

On se place d'abord dans le cas de $\Omega = \mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[$, espace que l'on note $\mathbb{R}^{N^+}$.

On suppose donc que u satisfait à $div(A(x)\nabla u) = -f$ dans $\mathbb{R}^{N^+}$ et à $\sum_i A_{iN}\partial_i u = 0$ sur le bord $\{x_N = 0\}$. La preuve est fait par récurrence. On suppose donc montré que si $f \in H^{m-1}$ et $A \in C^m(\overline{\Omega})$, alors $u \in H^{m+1}(\mathbb{R}^{N^+})$.

Soit maintenant, $f \in H^m(\mathbb{R}^{N^+})$ et $A \in C^{m+1}(\overline{\mathbb{R}^{N^+}})$. La dérivée de u par rapport à x_k, avec $k \leqslant N-1$, satisfait à l'équation :

$$div(A(x)\nabla(\varphi_k u)) = -\partial_k f - div(\partial_k A(x)\nabla u).$$

Le second membre de cette équation appartient à H^{m-1} puisque $\nabla u \in H^m$ par hypothèse de récurrence et que $\partial_k A \in C^m$. La condition au bord n'est plus nulle mais on a :

$$A(x)\nabla(\partial_k u)\cdot e_N = \partial_k(A\nabla u \cdot e_N) - (\partial_k A)\nabla u \cdot e_N = -(\partial_k A)\nabla u \cdot e_N.$$

Cette dernière fonction $-(\partial_k A)\nabla u\cdot e_N$ est la trace d'une fonction de $H^m(\mathbb{R}^{N^+})$. C'est donc un élément de $H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$. En utilisant la surjectivité de γ rappelée précédemment, objet de théorème de trace, on prouve l'existence de $V \in H^{m+1}$ tel que $A(x)\nabla V \cdot e_N = (\partial_k A)\nabla u \cdot e_N$. La fonction $w = \partial_k u - V$

satisfait aux relations :

$$div(A(x)\nabla w) \in H^{m-1}(\Omega), A(x)\nabla w \cdot \overrightarrow{e_N} = 0.$$

On en déduit $W \in H^{m+1}$, ce qui entraine $\partial_k u \in H^{m+1}$.

Il reste à voir que $\partial_N u \in H^{m+1}(\Omega)$. Comme on a déjà $\partial_{kN} u \in H^m(\Omega)$, il suffit de vérifier $\partial_{NN} u \in H^m(\Omega)$. Cela s'obtient, comme on l'a déjà fait dans le cas de Dirichlet, en écrivant :

$$A_{NN}\partial_{NN}u = -\sum_{ij\neq(N,N)} A_{ij}\partial_{ij}u - \sum_{ij}\partial_i A_{ij}\partial_j u \in H^m.$$

Cas d'un ouvert de classe C^{m+2} : on utilise d'abord une localisation puis un changement de fonction pour se ramener à $\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[$. Soient Ω_k des ouverts de classe C^{m+2} qui recouvrent Ω et $\{\varphi_k\}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, comme dans la définition d'un ouvert C^{m+2}. La fonction $\varphi_k u$ satisfait à une équation de la forme

$$div(A(x)\nabla(\varphi_k u)) \in H^m,$$

mais la condition au bord de Neumann n'est plus nulle. Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, on remarque que :

$$A(x)\nabla(\varphi_k u)\cdot\overrightarrow{n} = A(x)(\nabla\varphi_k)u\cdot\overrightarrow{n} \in H^{m+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

car $u \in H^{m+1}(\Omega)$. Soit donc V une fonction de H^{m+2} telle que, sur $\partial\Omega$,
on ait :

$$V = 0 \text{ et } (A(x)n,n)\partial_n V = A(x)(\nabla\varphi_k)u\cdot\overrightarrow{n}.$$

Alors la fonction $\varphi_k - V$ satisfait, sur $\partial\Omega\cap\Omega_k$, à :

$$-div(A(x)\nabla(\varphi_k u - V)) \in H^m \ \text{ et } A(x)\cdot\nabla(\varphi_k u - V)\cdot\overrightarrow{n} = 0.$$

En fait ensuite le changement de fonction habituel

$$v(x',x_N) = u(x', a(x') + x_N)$$

et on vérifie comme l'a fait dans le cas de la régularité d'ordre H^2 que :

$$-div(B(x)\nabla v) \in H^m(\mathbb{R}^N\times]0,+\infty[) \text{ et, sur } \{x_N = 0\},\ B(x)\nabla v \cdot \overrightarrow{e_N} = 0.$$

Par la régularité dans le cas de demi-espace, on a l'appartenance de v à l'espace $H^{m+2}(\mathbb{R}^{N-1}\times]0,+\infty[)$. En utilisant la régularité de A on en déduit $\varphi_k u \in H^{m+2}(\Omega\cap\Omega_k)$. On en déduit enfin $u = \sum_k \varphi_k u \in H^{m+2}$ en utilisant les propriétés de recouvrement localement fini de Ω. Cela termine la preuve du théorème.

3.3 Problème de Neumann non-homogène

3.3.1 Position du problème

Soit Ω est un domaine de classe C^1 et borné de l'espace $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. On suppose dans un premier temps que $u_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. On se propose de résoudre

$$[Neu]_A^{f,u_1} : \begin{cases} -div(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ A(\nabla u).\overrightarrow{n} = u_1 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $A = (A_{ij})_{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega},\ \mathbb{R}^{N\times N}\right)$ telle que :

(1) Pour tous i et j dans $[1,N]$, on a $A_{ij} = A_{ji}$;

(2) il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j} A_{ij}x_i x_j \geq \alpha|x|^2.$$

3.3.2 Existence et unicité de la solution

En vue de démontrer l'existence d'une solution u dans $H^1(\Omega)$, multiplions l'équation par v élément de $H^1(\Omega)$. En utilisant la formule de Green généralisée, on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx + \langle A(x)\nabla u.\overrightarrow{n}, v\rangle,$$

ce qui suggère de considérer la minimisation :

$$\inf_{v\in H^1(\Omega)} J(v)$$
$$= \inf_{v\in H^1(\Omega)} \{\int_\Omega \frac{1}{2}A(x)\nabla v(x).\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)dx - \langle u_1, v\rangle\}.$$

Puisque les fonctions constantes appartiennent à $H^1(\Omega)$, on remarque que, si $\int_\Omega f(x)dx + \langle u_1 1_\Omega\rangle \neq 0$, alors l'infirmum précédent est égal à $-\infty$. On se place dons dans l'hypothèse $\int_\Omega f(x)dx + \langle u_1, 1_\Omega\rangle = 0$, ce qui généralise l'hypothèse nécessaire pour le problème de Neumann homogène.

La fonctionnelle $\tilde{J}$, définie sur l'espace quotient $\widetilde{H^1(\Omega)}$ est alors strictement convexe, continue et coercive sur cet espace séparable et réflexif.

On en déduit l'existence et l'unicité, module les fonctions constantes, d'une solution au problème, d'où le résultat pour $[Neu]_A^{f,u_1}$.

Résultat de régularité : bien entendu, on suppose toujours $\int_\Omega f(x)dx + \langle u_1, 1_\Omega\rangle = 0$.

Théorème 3.3.1. *Si $f \in H^m(\Omega)$, avec $m \geqslant -1$, si $A \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ et si $u_1 \in H^{m+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, alors la solution u de $[Neu]_A^{f,u_1}$ appartient à $H^{m+2}(\Omega)$.*

Preuve : La preuve se fait en utilisant, comme cella fait par exemple dans le cas de Neumann homogène , une fonction V dans H^{m+2} telle que $(A(x)\nabla V).\overrightarrow{n} = u_1$.

On conclut alors, en remarquant que $div(A(x)\nabla V) \in H^m(\Omega)$ et en utilisant les résultats de régularité pour Neumann homogène.

Conclusion

Les E.D.P interviennent modélisation de beaucoup des phénomènes de la nature (la chaleur ...). Il est souvent que ces problèmes n'admettent pas des solutions classique, pour cela on a introduire la formulation variationnelle pour énoncer ce problème avec une régularité plus faible. Dans notre travail on peut conclure que le problème de Dirichlet homogène admet une solution unique dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, et on a démonter que cette solution plus régulière c'est-à-dire appartient à $H^2(\Omega)$. Et on a démontrer aussi que le problème de Dirichlet non homogène admet une solution faible dans l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}$. Même chose pour le problème de Neumann homogène ou on a démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$. Enfin on a démontrer aussi l'existence et l'unicité du problème de Neumann non homogène dans l'espace H^1 et on a étudier la régularité de cette solution.

La formulation variationnelle et les espaces de Sobolev jouent un rôle capital pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible, du problème elliptique avec une condition aux limits de type Dirichlet et Neumann.

Bibliographie

[1] **G.Allaire et F.Alouges,** *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, école polytechnique,* **(2015-2016)**

[2] **F. Boyer,** *Équations différentielles ordinaires, Équations aux dérivées partielles, Analyse théorique et numérique, Master Mathématiques et Applications Première année, Université de Provence-Université Paul Cézanne,* **(2014)**

[3] **H. Brezis,** *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Dunod, Paris* **(1999)**

[4] **Z. Claude,** *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris* **(2002)**

[5] **F. Demengel et G. Demengel,** *Espaces fonctionnels, utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles, EDP Science,* **(2007)**

[6] **F. Golse,** *Distribution, Analyse de Fourier, Équations aux dérivées partielles,* **(2012)**

[7] **M.Grandinaru,** *Licence de Mathématiques 3ème année, espaces vectoriels normés,* **(2007-2008)**

[8] **A. Lesfari,** *Distributions, Analyse de Fourier et transformation de Laplace, Ellipses Édition Marketing, Paris* **(2012)**

[9] **J-Émile. Rakotoson et J-Michel.Rakotoson** ,*Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles, Presses Universitaires de France* **(1999)**

[10] **Marie-Thérèse. Lacroix-Sonrier,** *Distribution Espaces de Sobolev, Applications. Ellipses, Paris* **(1998)**

ملخص

في هذه المذكرة نظرنا في مشكلة حدودية لماثر لابلاسيان. لدينا مشكلة قطع ناقص مع شرط حد من الدرجة الثانية بمعامل متغير.

لقد عالجناهذا الأخير بشرطين ، ديريكلي و نيومان متجانس وغير متجانس . طبقنا نظريات:لاكس ميلجرام و ستامباكشيا ، والصيغة المتغيرة لإظهار وجود حل ضعيف و تفرده في فضاءات صوبولاف.

الكلمات المفتاحية:

لابلاسيان، قطع ناقص، لاكس-ميلجرام، ستامباكشيا، نيومان، ديريكلي، وجود و وحدانية الحل، صياغة متغيرة.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons considéré un problème au limite pour l'opérateur Laplacien. Nous avons un problème elliptique avec une condition au limite du deuxième ordre à coefficient variable.

Nous avons traité ce dernier par deux conditions, Dirichlet homogène et non homogène, et la condition de Neumann homogène et non homogène. Nous avons appliqué les théorèmes de : Lax-Milgram et Stampacchia, et la formulation variationnelle pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible dans les espaces de Sobolev.

Mots clés :

Laplacien, elliptique, Lax-Milgram, Stampacchia, Neumann, Dirichlet, existence et l'unicité d'un solution, formulation variationnelle.

abstract

In this memory, we have considered a problem at the limit for the Laplacian operator. We have an elliptical problem with a second order boundary condition with variable coefficient.

We have treated the latter by two conditions, homogeneous and non-homogeneous Dirichlet, and the homogeneous and non-homogeneous Neumann condition. We applied the theorems of : Lax-Milgram and Stampacchia, and the variational formulation to show the existence and uniqueness of a weak solution in Sobolev spaces.

Keywords :

Laplacian, elliptical, Lax-Milgram, Stampacchia, Neumann, Dirichlet, existence and uniqueness of a solution, variational formulation.