République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI - BBA

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

SPECIALITE :

Par

Mekias Asma Mairi Imene

Thème :

Séries de Frobenius dans les équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients variables

Soutenue le : juin 2013 **devant le jury composé de :**

Président :

Examinateurs :

Rapporteur : H.Mekias

A.Merouani

Promotion 2012 / 2013

Dédicaces

Je dédis ce travail à

Ma mère, Mon père,

Mes frères

Sabrine, Ikrame, Mohamed, Khaled.

Et tout mas familles surtout

Amir Khalil et Tadje Rahali et tonton Abd Halim et mon grand-mère fatma et mon grand-père balgasem.

Tout mes amis surtout

Asma Mekias, Nesrine Laifa, Asma Hofra.

Imene

Remerciements

Tout d'abord, mes sincères remerciements à Dieu le plus grand et le plus puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné afin de réaliser ce mémoire.

Nous exprimons nos vifs remerciements et toute ma reconnaissance à non encadreur : **Merouani Abdelbaki** *et le professeur :* **Mekias Hocine** *de l'université de Ferhat Abbas -Sétif. Pour l'honneur que nous avaient fait en acceptant de diriger ce travail et pour la disponibilité malgré leurs nombreuses préoccupations.*

Je profitons aussi de cette occasion pour remercier les enseignants du département de mathématiques de l'université BBA et l'université Sétif.

Nous remercions aussi tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à concrétiser ce travail.

Table des matières

Introduction **1**

1 Equations différentielles ordinaires **2**
- 1.1 Introduction 2
- 1.2 Equation différentielle ordinaire 2
- 1.3 Equation différentielle linéaire, non linéaire et quasi-linéaire 3
  - 1.3.1 Equation différentielle linéaire 3
  - 1.3.2 Equation différentielle non linéaire 4
  - 1.3.3 Equation différentielle quasi-linéaire 4
- 1.4 Solution d'une équation différentielle 4
  - 1.4.1 Solution globale 4
  - 1.4.2 Solution locale 5
  - 1.4.3 Prolongement 5
  - 1.4.4 Solution maximale 5
- 1.5 Etude de la solution d'une équation différentielle linéaire 5

2 Classification des points d'une équation différentielle ordinaire **7**
- 2.1 Point ordinaire 7
- 2.2 Point singulier régulier 8
- 2.3 Point singulier irrégulier 8
- 2.4 Théorème de Fûchs 9
- 2.5 Solution au voisinage d'un point ordinaire 10
- 2.6 Solution au voisinage d'un point singulier régulier 13
  - 2.6.1 Calcule de l'équation indiciare 14
  - 2.6.2 Discution 15
  - 2.6.3 Equation de Bessel 16

3 Solution au voisinage d'un point singulier régulier admettant des singularité logarithmique **20**
- 3.1 1ére cas 20
- 3.2 2éme cas 22

4 Solution au voisinage d'un point singulier irrégulier **29**
4.1 Suite et serie asymptotique 29
4.1.1 Relation d'ordre asymptotique O, o et $\sim$ 29
4.1.2 Suites asymptotiques 30
4.1.3 Series asymptotique 30
4.1.4 Développement asymptotique 30
4.2 Solution au voisinage d'un point singulier irrégulier 32

Conclusion **38**

Bibliographie **39**

Introduction

Les équations différentielles sont trés importantes dans tous les domaines de la scéances, elles sevent à modeliser des défferents phénomènes physiques et autres.

Malheuresement, il ya peu de types d'équations différentielles admettant des solutions analytiques. Pour celà, une étude globale et locale est nécéssaire.

Les EDO linéaires à coefficients constants admettant des méthodes bien établies pour les résoudre, tandis que les EDO linéaires à coefficients variables n'ont pas de méthodes générale de résolution.

Dans ce mémoire, on éssaie d'unvestiguer des approximations basées sur le théorème de Fûchs et la méthode de Frobenius.

On present quatre chapitre dans un memoire, on premiere chapitre on présente la definition des équations différentielles ordinaires et le type de cette équation et la solution d'une équation différentielle(Solution globale, Solution locale, Prolongement, Solution maximale),et Etude de la solution d'une équation différentielle linéaire.

Classification des points d'une équation différentielle ordinaire(Point ordinaire,Point singulier régulier et Point singulier irrégulier), et représente la Théorème de Fûchs et la Solution au voisinage d'un point ordinaire et d'un point singulier régulier, dans la deuxiéme chapitre.

Pour troisième chapitre on présente solution au voisinage d'un point singulier régulier admettant des singularité logarithmique.

Et dernier chapitre on parle par Solution au voisinage d'un point singulier irrégulier, nous parlons la Suite et serie asymptotique, Développement asymptotique.

Finalement on recrit la Conclusion de memoire et la Bibliographie.

Chapitre 1

Equations différentielles ordinaires

1.1 Introduction

Les équations différentielles constituent un domaine qui trouve de nombreuses applications dans la modélisation des systèmes physiques. Elles jouent un rôle fondamental dans la théorie des systèmes asservis linéaires. C'est pourquoi, il est important de savoir établir les équations différentielles, les résoudres et analyser leurs solutions.

Dans notre mémoire, on présente le théorème de Fûchs et la méthode de Frobenius pour trouver une solution locale au voisinage d'un point d'une équation différentielle linéaire.

Le théorème de Fûchs nous donne une déscription qualitative de la solution au voisinage d'un point tandis que la méthode de Frobenuis nous donne une méthode de calcul de la solution.

Avant d'énoncer le théorème de Fûchs et procéder à décrire la méthode de Frobenius on donne quelques préliminaires sur les équations différentielles.

1.2 Equation différentielle ordinaire

Définition 1.2.1

Une équation différentielle ordinaire (EDO) *est une relation entre la variable indépandente réelle* x*, une fonction inconnue* $x \longrightarrow y(x)$ *et ses dérivées*

$y', y'', ..., y^{(n)}$ *au point* x *de la forme :*

$$F\left(y(x), y'(x), y''(x), ...y^{(n)}(x), x\right) = 0 \tag{1}$$

ou encore

$$F\left(y, y', y'', ...y^{(n)}, x\right) = 0 \tag{2}$$

- F est une fonction de $n+2$ variables.
- y une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $y', ..., y^{(n)}$ les dérivées, de la fonction y par rapport à la variable x.
- Le nombre naturel n qui représente la haute dérivée de y par rapport à x $(y^{(n)})$ est appelé l'ordre de l'équation différentielle.

Remarque 1.2.1

Dans l'équation (1) ci-dessus, la fonction inconnue $y(x)$ *est appellée la variable dépendante, la variable* x *(par rapport à laquelle* y *varis) est appellée la variable indépendante.*

1.3 Equation différentielle linéaire, non linéaire et quasi-linéaire

1.3.1 Equation différentielle linéaire

Définition 1.3.1

Une équation différentielle est linéaire si elle est constituée d'une somme de termes linéaires en $y(x)$ *et ses dérivées. L'équation différentielle linéaire d'ordre* n *a la forme :*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{3}$$

Les fonctions $a_i(x)$ *sont appelé les coefficients de l'équation.*

Remarque 1.3.1

Les coefficients sont des constantes ou bien au plus des fonctions de la variable indépandente x.

Si $g(x)$ dans la formule (3) est nulle ($g(x) = 0$) l'équation est dite "équation homogène" ou bien "équation sans second membre", sinon elle est dite "équation non homogéne".

1.3.2 Equation différentielle non linéaire

Définition 1.3.2

Toute équation différentielle qui n'est pas de la forme (3) est dite non linéaire comme dans les deux exemples suivants :

-
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 2$$

-
$$x\frac{dy}{dx} + 2y^2 = e^x$$

1.3.3 Equation différentielle quasi-linéaire

Définition 1.3.3

Une équation différentielle est dite quasi linéaire si elle est non linéaire mais la fonction F dans la formule (1) est linéaire par rapport à $y^{(n)}$.

Exemple 1.3.1

$$y'' + (y')^2 + xy = 0$$

1.4 Solution d'une équation différentielle

1.4.1 Solution globale

Définition 1.4.1

On appelle solution globale d'une équation différentielle (1) d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction $y(x)$ définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie identiquement cette équation différentielle sur I. On note en général cette solution par $(y(x), I)$.

Si I contient sa borne inférieure α, (resp. sa borne supérieure β), ce sont des dérivées à droite (resp. à gauche) qui interviennent au point $x = \alpha$, (resp.$x =$

β). Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

1.4.2 Solution locale

Définition 1.4.2

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, une fonction $y(x)$ est dite solution locale de l'équation différentielle (1) au voisinage de x_0 s'il existe un intervalle $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ qui contient x_0 ($x_0 \in I_{x_0}$) tel que $(y(x), I_{x_\circ})$ soit solution de (1).

1.4.3 Prolongement

Définition 1.4.3

Soient $(y(x), I)$ et $(\tilde{y}(x), \tilde{I})$ deux solutions d'une même équation différentielle. On dit que $(\tilde{y}(x), \tilde{I})$ est un prolongement de $(y(x), I)$ si et seulement si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}/_I = y$.

1.4.4 Solution maximale

Définition 1.4.4

Soient I_1 et I_2, deux intervalles sur $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \subset I_2$. On dit qu'une solution $(y(x), I_1)$ est maximale dans I_2 si et seulement si $y(x)$ n'admet pas de prolongement $(\tilde{y}(x), \tilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneqq \tilde{I} \subset I_2$.

1.5 Etude de la solution d'une équation différentielle linéaire

La théorie des équations différentielles linéaires est riche et assez complète. On sait qu'une équation différentielle d'ordre n admet n solutions linéairement indépandentes, aussi il y a des méthodes développées pour trouver des solutions des équations à coefficients constants .

Pour les équations différentielles à coefficients variables il y a peu de formes pour lesquelles des solutions explicites existent. Pour celà, on a recoure à des solutions sous formes de series ou des solutions approximatives. On ce limite dans ce mémoire aux solutions sous formes de series. On note trois grand types de series : serie de Taylor, serie de Frobenius et serie asymptotique. Pour les series de Taylor, elles sont bien étudiées en analyse réel et utilisées dans les équations différentielles dans les cours de graduation. Dans notre mémoire on énonce le théorème de Fûchs puis d'écrire la méthode de Frobenius.

Pour faire, on doit classifier les points d'une équation différentielle ordinaire.

Chapitre 2

Classification des points d'une équation différentielle ordinaire

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire (3) d'ordre n. On prend $g(x) = 0$ et on réécrit l'équation tel que le coefficient de la $n^{\text{ème}}$ dérivé, $y^{(n)}$, soit égal à 1. C'est à dire, on réécrit l'équation sous la forme :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{4}$$

L'équation précédante est dite écrite sous la forme canonique.

Pour donner la classification des points de l'équation différentielle précédante les coefficients $a_i(x)$, $i = 0, ..., n-1$, sont considérés comme des fonctions de la variable complexe x, i.e : $x \in \mathbb{C}$.

2.1 Point ordinaire

Définition 2.1.1

$x_0 \in \mathbb{C}$ est un point ordinaire de l'équation différentielle ordinaire (4) si tous les coefficients $a_i(x)$ sont des fonctions analytiques au point x_0.

- Tout point qui n'est pas ordinaire est un point singulier, on distingue deux types de point singuliers :

2.2 Point singulier régulier

Définition 2.2.1

$x_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier régulier de l'équation différentielle ordinaire (4) si au moins un coefficient $a_i(x)$ n'est pas une fonction analytique au point x_0, mais les fonctions $(x - x_0)^{n-i} a_i(x)$ sont analytiques au point x_0.

2.3 Point singulier irrégulier

Définition 2.3.1

Un point $x_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier irrégulier de l'équation différentielle ordinaire (4) s'il n'est pas un point ordinaire et il n'est pas un point singulier régulier.

Exemple 2.3.1

$$x^2 y'' + x \log(x+1) y' + y = 0$$

Solution 2.3.1

On écrit l'équation précédante sous sa forme canonique :

$$y'' + \frac{\log(x+1)}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

* $x_0 = 1$ *est un point ordinaire car les coefficients* $\frac{\log(x+1)}{x}$ *et* $\frac{1}{x^2}$ *sont analytiques au voisinage de* $x_0 = 1$.

* $x_0 = 0$ *est un point singulier régulier car les coefficients* $\frac{\log(x+1)}{x}$ *et* $\frac{1}{x^2}$ *ne sont pas analytiques au point* $x_0 = 0$ *mais :*

$$x\left(\frac{\log(x+1)}{x}\right) = \log(x+1) \text{ et } x^2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 \text{ sont analytiques au voisinage de } x_0 = 0.$$

* $x_0 = -1$ *est un point singulier irrégulier car* $\frac{\log(x+1)}{x}$ *et* $(x+1)\frac{\log(x+1)}{x}$ *ne sont pas analytiques au voisinage de* $x_0 = -1$.

Nous sommes maintenant prêt à donner le théorème de Fûchs.

2.4 Théorème de Fûchs

Si $x_0 \in \mathbb{C}$ est un point ordinaire de l'équation différentielle (4) alors toutes les solutions sont analytiques au voisinages de x_0. De plus, la serie de Taylor $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$ qui représente la solution de l'équation au voisinage de x_0 admet un rayon de convergence R_0 au moins égal à la distance entre x_0 et la plus proche singularité à x_0.

Si $x_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier régulier de l'équation différentielle (4) alors il existe au moins une solution développable en serie de Frobenius au voisinage de x_0. C'est à dire la serie de la forme :

$$(x-x_0)^\beta \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$$

où $\beta \in \mathbb{C}$ appellé l'indice de l'équation.

La série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$ est une serie entière au voisinage de x_0 et admet un rayon de convergence R_1 au moins égal à la distance entre x_0 et la plus proche singularité à x_0 différente de x_0.

Si l'ordre n de l'équation est supérieur à 1, les autres solutions de l'équation admettent au plus des singularités logarithmiques.

Si $x_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier irrégulier de l'équation différentielle (4) alors il existe au moins une solution admettant des singularités essentielles au voisinage de x_0.

Le théorème précédant est dû à Emmanuel Fûchs en 1866, sa démonstration est très difficile et compliquée et ne peut être développée dans ce mémoire, néamoins on suit les étapes de Frobenius qui exploite la description qualitative des solutions locales de l'équation différentielle (4). Pour ne pas entrer dans des calculs algebriques longs et lourds on va considérer les équations différentielles d'ordre $n = 2$.

Soit l'équation différentielle ordinaire d'ordre 2 sous sa forme canonique suivante :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5}$$

les coefficients sont $P(x)$ et $Q(x)$.

2.5 Solution au voisinage d'un point ordinaire

Si x_0 est un point ordinaire alors $P(x)$ et $Q(x)$ sont analytiques au voisinage de x_0, alors on a :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k$$

et

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k$$

Selon le théorème de Fûchs toutes les solutions sont analytiques au voisinage de x_0, alors on cherche les solutions sous la forme de serie entières, c'est à dire :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

On a alors

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

et

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}$$

En remplaçant les developpements de $P(x), Q(x), y(x), y'(x)$ et $y''(x)$ dans l'équation différentielle (5) puis en regroupant les mêmes puissances de $(x - x_0)$ on trouve une serie sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} expression(p_k, q_k, a_k)(x - x_0)^k = 0$$

Les coefficients sont alors trouvés à partir des équations algebriques d'identifications :

$$expression(p_k, q_k, a_k) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, ..., \infty$$

.

Exemple 2.5.1

$$y'' + xy = 0 \tag{6}$$

On cherche une solution au voisinage de $x_0 = 0$ qui est un point ordinaire de l'équation.

Solution 2.5.1

On note que $x_0 = 0$ est un point ordinaire
alors

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

On a

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

et

$$xy = a_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k+1}$$

On substitut les valeurs précédentes dans l'équation (6)

$$2a_2 + (6a_3 + a_0)x + \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0$$

On pose $n = k - 4$ pour première serie et $n = k - 1$ pour seconde serie on aura

$$2a_2 + (6a_3 + a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) a_{n+4} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} =$$

$$2a_2 + (6a_3 + a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+4}(n+4)(n+3) + a_{n+1}] x^{n+2} = 0$$

En posant tous les coefficients de la même puissance de x égale 0 donc

$$a_2 = 0, a_3 = -\frac{a_0}{6} \quad \textit{et, pour } n \geq 0 \quad a_{n+4} = -\frac{a_{n+1}}{(n+4)(n+3)}$$

On note que a_0 et a_1 sont arbitraires les quatres premiers coefficients obtenu comme suite :

$$a_4 = -\frac{a_1}{12},\ a_5 = -\frac{a_2}{20} = 0,\ a_6 = -\frac{a_3}{30} = \frac{a_0}{180}\ \text{et}\ a_7 = -\frac{a_4}{42} = \frac{a_1}{504}$$

donc

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + ...$$

$$= a_0 + a_1x - \frac{a_0}{6}x^3 - \frac{a_1}{12}x^4 + \frac{a_0}{180}x^6 + \frac{a_1}{504}x^7 + ...$$

$$= a_0(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...) + a_1(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + ...)$$

- *On pose $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donc*

$$y_1(x) = 0(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...) + 1(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + ...)$$

on a

$$y_1(x) = x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + ...$$

- *on pose $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ donc*

$$y_2(x) = 1(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...) + 0(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + ...)$$

on a

$$y_2(x) = 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...$$

donc la solution général de l'équation (6)

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

$$y(x) = C_1(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + ...) + C_2(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...)$$

$y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions particulières linéairements indépendentes de l'équation différentielle (6).

2.6 Solution au voisinage d'un point singulier régulier

Si x_0 est un point singulier régulier alors $P(x)$ et $Q(x)$ admettent un developpement en serie de Laurent au voisinage de x_0 de la forme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^{k-1}$$

et

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^{k-2}$$

Selon le théorème de Fûchs il existe au moins une solution developpable en serie de Frobenius au voisinage de x_0, alors on cherche une solution sous la forme de serie de Frobenius, c'est à dire :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+\beta} \quad , \ \beta \in \mathbb{C}$$

On a alors

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \beta) a_k (x - x_0)^{k+\beta-1}$$

et

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \beta)(k + \beta - 1) a_k (x - x_0)^{k+\beta-2}$$

En remplaçant les developpements de $P(x), Q(x), y(x), y'(x)$ et $y''(x)$ dans l'équation différentielle (5) puis en regroupant les mêmes puissances de $(x - x_0)$ on trouve une serie sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} expression(p_k, q_k, a_k, \beta)(x - x_0)^{k+\beta} = 0$$

Les coefficients sont alors trouvés à partir des équations algebriques d'identifications :

$$expression(p_k, q_k, a_k) = 0 \ \text{ pour } k = 0, ..., \infty.$$

Pour $k = 0$, on aura :

$$expression(p_0, q_0, a_0, \beta) = 0$$

C'est une equation algebrique du second ordre elle admet des méthodes de résolution bien établies, elle est appelée équation indiciaire car elle donne la valeur de l'indice β.

2.6.1 Calcule de l'équation indiciare

Comme vu précédement, si x_0 est un point singulier, l'équation (5) admet une solution $y(x)$ de la forme de serie de Frobenuis :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+\beta}$$

, en regroupant les termes de la même puissance de $(x - x_0)^{k+\beta-2}$ pour $n = 0, 1, 2, ..$, on obtient :

pour $k = 0$, le coefficient de $(x - x_0)^{\beta-2}$ est

$$[\beta^2 + (p_0 - 1)\beta + q_0]a_0 \tag{7}$$

pour $k \geq 1$, le coefficient de $(x - x_0)^{k+\beta-2}$ est

$$[(\beta + k)^2 + (p_0 - 1)(\beta + k) + q_0]a_k$$

$$+ \sum_{n=0}^{k-1} [(\beta + n)p_{k-n} + q_{k-n}]a_n \ , \quad k = 1, 2, ... \tag{8}$$

Pour (7), on écrit le polynome indiciaire :

$$P(\beta) = \beta^2 + (p_0 - 1)\beta + q_0$$

En identifiant tous les coefficients à 0, on obtient les équations algebriques :

pour $k = 0$,

$$[\beta^2 + (p_0 - 1)\beta + q_0]a_0 = P(\beta)a_0 = 0$$

pour $k \geq 1$,

$$[(\beta + k)^2 + (p_0 - 1)(\beta + k) + q_0]a_k = P(\beta + k)a_k =$$

$$- \sum_{n=0}^{k-1} [(\beta + n)p_{k-n} + q_{k-n}]a_n \ , \quad k = 1, 2, ... \tag{9}$$

On cherche la solution de l'équation $P(\beta) = 0$ et on donne la discution de la solution selon les racines de $P(\beta)$.

2.6.2 Discution

Selon les formules de quadratures de résolutions des équations du second degré, l'équation indiciaire admet deux solutions complexes, soient β_1 et β_2 ces deux solutions. Sans perdre de généralité, on suppose $\mathrm{Re}(\beta_2) \geq \mathrm{Re}(\beta_1)$.

<u>$1^{\text{ère}}$cas</u> $\beta_2 - \beta_1 \notin \mathbb{N}$ (on considère que $0 \in \mathbb{N}$)

Il existe deux solutions linéairement indépendantes développables en séries de Frobenius d'indices β_1 et β_2.

<u>$2^{\text{éme}}$cas</u> $\beta_2 - \beta_1 = N = 0, 1, 2, ...$, dans ce cas il existe deux sous cas :

a) $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ Il existe deux solutions :

- une solution developpable en serie de Frobenuis d'indice β :

$$y(x, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\beta)(x - x_0)^{k+\beta}$$

- une solution admettant une singularité logarithmique .

b) $\beta_2 - \beta_1 = N = 1, 2, ...$ il existe une solution developpable en série de Frobenius d'indice β_2, pour l'indice β_1 il y a deux autres sous cas :

Dans l'équation (9) et pour $k = N$ on aura

$$P(\beta_1 + N)a_N = -\sum_{n=0}^{N-1}[(\beta_1 + n)p_{N-n} + q_{N-n}]a_n$$

mais

$$P(\beta_1 + N) = P(\beta_2) = 0$$

(i) Si $\sum_{n=0}^{N-1}[(\beta_1 + n)p_{N-n} + q_{N-n}]a_n = 0$ alors l'équation (9) pour $k = N$ devient seulement $0a_N = 0$ qui est toujours vraie, a_N est une autre constante arbitraire. La deuxième solution est aussi developpable en série de Frobenius d'indice β_1.

(ii) Si $\sum_{n=0}^{N-1}[(\beta_1+n)p_{N-n}+q_{N-n}]a_n \neq 0$ alors l'équation (9) pour $k=N$ devient seulement $0a_N \neq 0$ qui est toujours fausse, quelque soit a_N. La deuxième solution admet une singularité logarithmique.

Pour illustrer la méthode de Frobenius, on résout l'équation de Bessel qui admet les deux solutions linéairement indépendantes en série de Frobenius au voisinage d'un point singulier régulier.

2.6.3 Equation de Bessel

Définition 2.6.1

L'équation de BESSEL est une équation différentielle de la forme :

$$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0, \qquad v\geq 0, \qquad v\in\mathbb{R} \tag{10}$$

On écrit l'équation sous sa forme canonique :

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{(x^2-v^2)}{x^2}y=0, \qquad v\geq 0, \qquad v\in\mathbb{R}$$

• *Le point $x=0$ est un point singulier régulier, les coefficients $P(x)=\frac{1}{x}$ and $Q(x)=1-\frac{v^2}{x^2}$ ne sont pas analiytique au point $x_0=0$ et $xP(x)=1$ et $x^2Q(x)=x^2-v^2$ sont des fonctions analiytiques au point $x_0=0$. Donc le point $x_0=0$ est un point singulier régulier. Par conséquent on cherche la solution de l'équation de BESSEL la forme de serie de Frobenius :*

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\beta}, \ \beta\in\mathbb{C}$$

d'où

$$(x^2-v^2)y(x)=(x^2-v^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\beta},$$

$$xy'(x)=x\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_kx^{k+\beta-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_kx^{k+\beta}$$

et

$$x^2y''(x) = x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)(k+\beta-1)a_kx^{k+\beta-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)(k+\beta-1)a_kx^{k+\beta}$$

On substitut les expréssions précédentes dans l'équation (7), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)(k+\beta-1)a_kx^{k+\beta} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_kx^{k+\beta} + (x^2-v^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\beta} = 0$$

On prend le facteur commun x^β

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)(k+\beta-1)a_kx^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_kx^{k} + (x^2-v^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k}\right]x^\beta = 0$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)(k+\beta-1)a_kx^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_kx^{k} + (x^2-v^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k} = 0$$

C'est un dire

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)(k+\beta-1)a_kx^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_kx^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2} - v^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k} = 0$$

On pose $k = n-2$ *pour la* $3^{éme}$ *serie et* $k = n$ *pour les autres series*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)(n+\beta-1)a_nx^{n} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)a_nx^{n} + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n} - v^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n} = 0$$

D'où

$$\left[\beta(\beta-1)a_0 + \beta(\beta+1)a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+\beta)(n+\beta-1)a_nx^n\right] +$$
$$\left[\beta a_0 + (1+\beta)a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+\beta)a_nx^n\right]$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n - \left[v^2a_0 + v^2a_1x + v^2\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n\right] = 0$$

Donc

$$\left(\beta^2 - v^2\right) a_0 + \left((\beta+1)^2 - v^2\right) a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left((\beta+n)^2 - v^2\right) a_n + a_{n-2}\right] x^n = 0 \quad (11)$$

En posant tous les coefficients de la même puissance de x égale 0*, on obtient*

$$\left(\beta^2 - v^2\right) a_0 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \beta^2 - v^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = v^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \beta = v \\ ou \\ \beta = -v \end{array} \right\} \\ et \\ a_0 \neq 0 \end{array} \right\}$$

Pour $\beta = v$ *ou* $\beta = -v$ *ona :*

$$\left(\beta^2 + 2\beta + 1 - v^2\right) a_1 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\beta + 1 + \overbrace{\beta^2 - v^2}^{=0} = 0 \\ et \\ a_1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \beta = v \Rightarrow 2v + 1 = 0 \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \\ \beta = -v \Rightarrow -2v + 1 = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left(n^2 + 2n\beta + \overbrace{\beta^2 - v^2}^{=0}\right) a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow \left(a_n = -\frac{1}{n^2 + 2n\beta} a_{n-2}\right) \qquad ,n = 2, 3, 4, ...$$

<u>*1*^{ére}*cas :*</u> $\beta = v = -\frac{1}{2}$
On substitut la valeur de $\beta = -\frac{1}{2}$ *dans l'équation (11),on obtient*

$$0a_0 + 0a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2 - n) a_n + a_{n-2}\right] x^n = 0$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{c} 0a_0 = 0 \Rightarrow a_0 \ est\ arbitraire \\ 0a_1 = 0 \Rightarrow a_1 \ est\ arbitraire \\ (n^2 - n) a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{1}{n^2 - n} a_{n-2} \qquad ,n = 2, 3, 4, ... \end{array} \right\}$$

Puisque a_0 *et* a_1 *sont arbitraires les quatres premiers coefficients obtenu comme suite :*

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0,\ a_3 = -\frac{1}{6}a_1,\ a_4 = \frac{1}{24}a_0,\ a_5 = \frac{1}{120}a_1$$

donc la solution de l'équation (10) est :

$$y(x) = a_0x^{0-\frac{1}{2}} + a_1x^{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a_0x^{2-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}a_1x^{3-\frac{1}{2}} + \frac{1}{24}a_0x^{4-\frac{1}{2}} + \frac{1}{120}a_1x^{5-\frac{1}{2}} - ...$$

$$= a_0x^{-\frac{1}{2}} + a_1x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a_0x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}a_1x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{24}a_0x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{120}a_1x^{\frac{9}{2}} - ...$$

$$= (x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{24}x^{\frac{7}{2}} - ...)a_0 + (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{120}x^{\frac{9}{2}} - ...)a_1$$

$2^{éme}$ cas : $\beta = -\ v = \frac{1}{2}$

On substitut la valeur de $\beta = \frac{1}{2}$ et $v = \frac{-1}{2}$ dans l'équation (11)

$$0a_0 + 2a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2+n)a_n + a_{n-2}\right]x^n = 0$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{c} 0a_0 = 0 \Rightarrow a_0 \text{ est arbitraire} \\ 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ (n^2+n)a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{1}{n^2+n}a_{n-2} \quad ,n = 2,3,4,... \end{array}\right\}$$

Puisque a_0 est arbitraire les sinq premiers coefficients obtenu comme suit :

$$a_2 = -\frac{1}{6}a_0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{120}a_0, a_5 = 0, a_6 = -\frac{1}{5040}a_0$$

(On marque que, pour $n = 1,3,5,...$,on a $a_n = 0$)

Donc la solution de l'équation (10) :

$$y(x) = a_0x^{0+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}a_0x^{2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{120}a_0x^{4+\frac{1}{2}} - \frac{1}{5040}a_0x^{6+\frac{1}{2}} + ...$$

$$= a_0x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}a_0x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{120}a_0x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{5040}a_0x^{\frac{13}{2}} + ...$$

$$= (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{120}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{5040}x^{\frac{13}{2}} + ...)a_0$$

Chapitre 3

Solution au voisinage d'un point singulier régulier admettant des singularité logarithmique

On a vue précidément que selon les racines du polynomes indiciaire, l'équation du second ordre peut admetre deux solutions en serie de Frobenuis ou bien une solution en serie de Frobenuis et la deuxieme solution admettant une singularité logorithmique. Dans ce chapitre on va donner la procédure d'obtenir la solution admettant une singularité logarithmique. La singularité logarithmique apparait dans la solution d'une équation différentielle linéaire du seconde ordre dans deux cas :

3.1 $1^{\text{ére}}$ cas

Le polynome indiciaire $P(\beta)$ admet une racine double, soit β_0 la racine double de $P(\beta)$.

D'aprés le théorème de Fûchs, dans le cas ou il existe une seule solution en series de Frobenius, alors la deuxième solution contient la fonction $log(x - x_0)$.

On note l'operateur :

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{P(x)}{(x - x_0)} \frac{d}{dx} + \frac{Q(x)}{(x - x_0)^2}$$

et on écrit la solution de l'équation

$$y'' + \frac{P(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{Q(x)}{(x-x_0)^2}y = 0 \tag{5}$$

sous la forme :

$$y(x,\beta) = (x-x_0)^\beta \sum_{n\geq 0} a_n(\beta)(x-x_0)^n$$

Pour l'instant, les coefficients $a_n(\beta)$ satisfont la récursion (5) mais pas racine de $P(\beta)$

Alors

$$L(y(x,\beta)) = a_0(\beta)(x-x_0)^{\beta-2}P(\beta)$$

Si $\beta = \beta_0$ est l'indice

alors

$$L(y(x,\beta_0)) = 0 \quad \text{car} \quad P(\beta_0) = 0$$

on derive $a_0(\beta)(x-x_0)^{\beta-2}P(\beta)$ par rapport à β

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\beta}\left[a_0(\beta)(x-x_0)^{\beta-2}P(\beta)\right] &= \left[a_0^{'}(\beta) + a_0(\beta)(\beta-2)\log(x-x_0)\right](x-x_0)^{\beta-2}P(\beta) \\ &\quad + a_0(\beta)(x-x_0)^{\beta-2}P^{'}(\beta)\end{aligned}$$

puisque β_0 est une racine double de $P(\beta)$ donc $P(\beta_0)$ et $P'(\beta_0)$ sont nuls $(P(\beta_0) = P'(\beta_0) = 0)$

d'où

$$\left[\frac{dL(y\,(x,\beta)}{d\beta}\right]_{\beta=\beta_0} = L\left[\frac{d}{d\beta}y\,(x,\beta)\right]_{\beta=\beta_0} = 0$$

Donc $\left[\frac{d}{d\beta}y(x,\beta)\right]_{\beta=\beta_0}$ est une autre solution de L.

Puisque

$$y(x,\beta) = (x-x_0)^\beta \sum_{n\geq 0} a_n(\beta)(x-x_0)^n$$

Alors

$$\left[\frac{d}{d\beta}y(x,\beta)\right]_{\beta=\beta_0} = y(x,\beta_0)\log(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{\beta_0+n}$$

ou

$$b_n = \left[\frac{\partial}{\partial\beta}a_n(\beta)\right]_{\beta=\beta_0}$$

3.2 $2^{\text{éme}}$ cas

Soit β_1 et β_2 racines de $P(\beta)$ avec $\beta_2 - \beta_1 = N = 1, 2, 3, ...$, et

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[(\beta_1 + k)p_{N-k} + q_{N-k}\right] a_k \neq 0$$

Dans ce cas on construit la solution de la manière suivante :
Comme dans le premier cas, on ecrit

$$Y(x,\beta) = (x-x_0)^{\beta} \sum_{n\geq 0} a_n(\beta)(x-x_0)^n$$

Et on prend

$$\left[\frac{dL(Y\,(x,\beta)}{d\beta}\right]_{\beta=\beta_2} = L\left[\frac{d}{d\beta}Y\,(x,\beta)\right]_{\beta=\beta_2} = a_0(\beta_2)(x-x_0)^{\beta_2-2}P'(\beta_2) \qquad (12)$$

$$= a_0(\beta_2)(x-x_0)^{\beta_1+N-2}P'(\beta_2) \neq 0$$

Car β_2 n'est pas une racine double.

D'ou $\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(Y(x,\beta))\right]_{\beta=\beta_2}$ est solution de l'équation non homogène de (12), cette équation admet une solution developpable en serie de Frobenius d'indice β_2.

Soit

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x-x_0)^{\beta_1+j}$$

.

En substituant cette forme dans l'équation (12) et identifiant les coefficients de la même puissance de $(x-x_0)$, on obtient :

$(x-x_0)^{\beta_1-2}$:

$$P(\beta_1)c_0 = 0$$

$(x-x_0)^{\beta_1-2+j}$:

$$P(\beta_1+j)c_j + \sum_{k=0}^{j-1}\left[(\beta_1+k)p_{j-k} + q_{j-k}\right]c_k = 0 \qquad , \quad j \neq 0, ..., N$$

$(x-x_0)^{\beta_1-2+N}$:

$$P(\beta_1+N)c_N + \sum_{k=0}^{N-1}\left[(\beta_1+k)p_{N-k} + q_{N-k}\right]c_k = a_0 P'(\beta_2)$$

On note que

$$P(\beta_1+N) = 0$$

Donc c_N est une constante indeterminé, on aura la relation entre a_0 ($a_0 \neq 0$) et les coefficients $c_0, ..., c_{N-1}$.

$$a_0 = \frac{1}{P'(\beta_2)}\sum_{k=0}^{N-1}\left[(\beta_1+k)p_{N-k} + q_{N-k}\right]c_k$$

L'équation (12) a deux solutions indépendentes

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(y(x,\beta))\right]_{\beta=\beta_2} \qquad \text{et} \quad Y(x)$$

Alors la fonction

$$y(x) = \left[Y(x) - \left[\frac{\partial}{\partial\beta}(y(x,\beta))\right]_{\beta=\beta_2}\right]$$

sera solution à l'équation

$$L(y(x)) = 0$$

c'ést à dire la deuxiéme solution à $L(y(x)) = 0$ est de la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^{\beta_1+n} - \left[\frac{\partial}{\partial\beta}(y(x,\beta))\right]_{\beta=\beta_2}$$

Pour illustrer la méthode on résout une équation de Bessel modifié.

Soit l'équation :

$$y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0 \tag{13}$$

On note que $x_0 = 0$ est un point singulier régulier.

D'aprés la théorème de Fûchs, l'équation (13) admet une solution de la forme de serie de Frobenius :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\beta}$$

Alors

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\beta)(n+\beta-1)a_n(x-x_0)^{n+\beta-2}$$

On substitut cette serie dans l'équation (13), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)(n+\beta-1)a_n x^{n+\beta-2} + \frac{1}{4x^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\beta} = 0$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)(n+\beta-1)a_n x^{n+\beta-2} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\beta-2} = 0$$

On prend le facteur commun $x^{n+\beta-2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\beta)(n+\beta-1) + \frac{1}{4}\right] a_n x^{n+\beta-2} = 0$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\beta)(n+\beta-1) + \frac{1}{4}\right] a_n = 0$$

En identifiant tous les coefficients à 0, on obtient les équations algebriques :
Pour $n = 0$:

$$\left[\beta(\beta-1) + \frac{1}{4}\right] a_0 = 0$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{c} P(\beta) = \beta^2 - \beta + \frac{1}{4} = 0 \\ a_0 \neq 0 \end{array} \right\}$$

Donc le polynome $P(\beta)$ admet une racine double :

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$$

Pour $n > 0$:

$$\left[(n + \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2} - 1) + \frac{1}{4} \right] a_n = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad n^2 a_n = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_n = 0 \ , \qquad\qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation (13) est :

$$y(x) = a_0 x^\beta + \sum_{n>0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{=0} x^{n+\beta}$$

donc

$$y(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}} = a_0 \sqrt{x} \ , \qquad a_0 \neq 0$$

Pour construire la deuxième solution avec singularité logarithmique, on écrit la solution sous la forme :

$$y(x, \beta) = a_0(\beta) x^\beta$$

$a_0(\beta)$ est considére comme fonction de β, est le deuxiéme solution alors

$$\left[\frac{\partial}{\partial \beta} y(x, \beta) \right]_{\beta = \frac{1}{2}}$$

mais

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} y(x, \beta) \right]_{\beta = \frac{1}{2}} &= \left[a_0'(\beta) x^\beta + a_0(\beta)(\log x) x^\beta \right]_{\beta = \frac{1}{2}} \\ &= \left[a_0'(\frac{1}{2}) + a_0(\frac{1}{2}) \log x \right] x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ou $a'_0(\frac{1}{2})$ et $a_0(\frac{1}{2})$ sont des constantes arbitraires.

* Si $a_0(\frac{1}{2}) = 0$ et $a'_0(\frac{1}{2}) = 1$, on obtient la solution de Frobenius :

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

* Si $a_0(\frac{1}{2}) = 1$ et $a'_0(\frac{1}{2}) = 0$, on obtient la deuxième solution qui admet la singularité logarithmique :

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \log x$$

On Verifie que $y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \log x$ est une autre solution de l'équation (13) :

$$y''(x) + \frac{1}{4x^2} y(x) = 0$$

On a

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \log x$$

et

$$y_2''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \log x$$

On substitut $y_2(x)$ et $y_2''(x)$ dans l'équation (13), alors

$$-\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \log x + \frac{1}{4x^2} (x^{\frac{1}{2}} \log x) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \log x + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \log x = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

Donc $y_2(x)$ est une solution de l'équation (13).

Cas $\beta_2 - \beta_1 = N = 1, 2, 3, ...$

Pour simplifier les calcul, on prend le cas $\beta_2 - \beta_1 = 1$, on modifie l'équation de Bessel une autre fois pour obtenir l'équation :

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{3}{4x^2} y = 0 \tag{14}$$

On note que $x_0 = 0$ est un point singulier régulier.

D'aprés le théorème de Fûchs, l'équation (14) admet une solution de la forme de serie de Frobenius :

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+\beta}$$

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)a_n(x-x_0)^{n+\beta-1}$$

Et

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)(n+\beta-1)a_n(x-x_0)^{n+\beta-2}$$

On substitut cette series dans l'équation (14) :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)(n+\beta-1)a_nx^{n+\beta-2}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)a_nx^{n+\beta-1}+\frac{3}{4x^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\beta}=0$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)(n+\beta-1)a_nx^{n+\beta-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\beta)a_nx^{n+\beta-2}+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\beta-2}=0$$

On prend le facteur commun $x^{n+\beta-2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\beta)(n+\beta-1)-(n+\beta)+\frac{3}{4}\right]a_nx^{n+\beta-2}=0$$

D'où

$$\left[(n+\beta)(n+\beta-1)-(n+\beta)+\frac{3}{4}\right]a_n=0$$

En identifiant tous les coefficients à 0, on obtient les équations algebriques :
Pour $n=0$:

$$\left[\beta(\beta-1)-\beta+\frac{3}{4}\right]a_0=0$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{c} P(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{3}{4} = 0 \\ a_0 \neq 0 \end{array} \right\}$$

donc l'équation $P(\beta)$ admet deux racine β_1 et β_2 :

$$\left[\begin{array}{c} \beta_1 = \frac{1}{2} \\ \beta_2 = \frac{3}{2} \end{array} \right]$$

on a $\beta_2 - \beta_1 = 1$
Pour $n > 0$:

$$P(n+\beta_1) = \left[(n+\beta_1)(n+\beta_1-1) - (n+\beta_1) + \frac{3}{4} \right] a_n = 0$$

$$\begin{array}{rcl} P(\beta_1+1) & = & P(\beta_2) = 0 \\ & \text{et} & \\ P(\beta_1+n) & \neq & 0 \ , \quad \forall n = 2, 3, ... \end{array}$$

Pour $n \geq 2$

$$a_n = 0$$

Donc la solution de l'équation (14) est :

$$y(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}} + a_1 x^{\frac{3}{2}}$$

Dans l'équation (14) on a deux solutions de Frobenius

$$y_1(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}} \text{ et } y_2(x) = a_1 x^{\frac{3}{2}}$$

Chapitre 4

Solution au voisinage d'un point singulier irrégulier

Pour aborder les solutions au voisanage d'un point singulier irrégulier on a besoin de quelques notions d'analyse asymptotique, et spécialement les séries asymptotiques.

4.1 Suite et serie asymptotique

4.1.1 Relation d'ordre asymptotique O, o et $\sim$

On considere deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies au voisinage de x_0 .

Définition 4.1.1

a) ***Relation grand** O* *: On dit que $f(x)$ est grand O de $g(x)$ au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V_0 de x_0 et une constante $K > 0$ tel que :*

$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\ \forall x \in V_0$. *On écrit alors que $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to x_0$.*

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues au point x_0 alors $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to x_0$ est équivalent de dire que $\frac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de x_0 .

b) ***Relation petit** o* *: On dit que $f(x)$ est petite o de $g(x)$ au voisinage de x_0 si quelque soit la constante $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que :*

$|f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)|\ \forall x \in V_0$. *On écrit alors que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to x_0$.*

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues au point x_0 alors $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to x_0$ est équivalent de dire que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

c) ***Relation équivalent*** $\sim$: *On dit que $f(x)$ est équivalente à $g(x)$ au voisinage de x_0 si quelque soit la constante $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que :*

$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in V_0$. *On écrit alors que $f(x) \sim g(x))$ quand $x \to x_0$.*

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues au point x_0 alors $f(x) \sim g(x))$ quand $x \to x_0$ si seulement si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

4.1.2 Suites asymptotiques

Définition 4.1.2

La suite de fonction $\{\Phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, ...$ est une suite asymptotique au voisinage de x_0, si $\Phi_n(x)$ est definie et

$$\Phi_{n+1}(x) = o(\Phi_n(x)), \ x \to x_0$$

$\{(x - x_0)^n\}$ *est une suite asymptotique quand* $x \to x_0$.

4.1.3 Series asymptotique

Définition 4.1.3

Si la suite de fonctions $\{\Phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, ...$ est une suite asymptotique au voisinage de x_0, alors la série formelle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ est une serie asymptotique au voisinage de x_0.

La siute $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite numérique.

4.1.4 Développement asymptotique

Définition 4.1.4

Soit $f(x)$ une fonction definie dans un voisinage de x_0, et $\{\Phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, ...$ une suite asymptotique au voisinage de x_0 la série formelle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ est un développement asymptotique au voisinage de x_0 de $f(x)$ si :

$f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n \Phi_n(x) \sim a_{m+1} \Phi_{m+1}(x)$ *quand $x \to x_0$ quelque soit $m = 0, 1, 2, ...$*

ou autrement :

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{\left[f(x)-\sum_{n=0}^{m}a_n\Phi_n(x)\right]}{a_{m+1}\Phi_{m+1}(x)}\right\}=1 \qquad m=0,1,2,... \tag{15}$$

La condition (15) *est equivalente à :*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}a_n\Phi_n(x)+o(\Phi_m(x)), \quad x\longrightarrow x_0 \ \textit{sur}\ \mathbb{R},\ m=0,1,2,...$$

ou bien

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}a_n\Phi_n(x)+O(\Phi_{m+1}(x)), \quad x\longrightarrow x_0 \ \textit{sur}\ \mathbb{R},\ m=0,1,2,...$$

On écrit alors :

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(x), \quad \textit{quand}\ x\longrightarrow x_0$$

Remarque 4.1.1

1) *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(x)$ *n'est pas nécessairement convergente.*

2) *Le premier terme,* $a_0\Phi_0(x)$, *est appelé le* ***terme dominant*** *du développement asymptotique de* $f(x)$ *au voisinage de* x_0.

On a alors

$$f(x)\sim a_0\Phi_0(x), \ \textit{quand}\ \ x\longrightarrow x_0.$$

Exemple 4.1.1

soit $M=\,]-\infty,0[$ *,considérons la fonction* f *definit sur* M *par*

$$f(x)=\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}\int_{-\infty}^{\frac{1}{x}}\frac{e^t}{t}dt.$$

On cherche un développement asymptotique de f *au voisinage de* $x_0=0$.
Par intégration par parties successives,il vient :

$$\forall n\in\mathbb{R}, f(x)=\sum_{r=0}^{n}r!x^r+(n+1)!\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\int_{-\infty}^{\frac{1}{x}}\frac{e^t}{t^{n+2}}dt$$

On pose

$$R_n(x) = (n+1)!\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\int_{-\infty}^{\frac{1}{x}}\frac{e^t}{t^{n+2}}dt$$

Alors

$$|R_n(x)| \leq (n+1)!\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{|x|}\int_{-\infty}^{\frac{1}{x}}\frac{e^t}{|t^{n+2}|}dt$$

$$\leq (n+1)!\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{|x|}|x|^{n+2}\int_{-\infty}^{\frac{1}{x}}e^t dt$$

$$\leq (n+1)!\,|x|^{n+1}\,e^{-\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x}} = (n+1)!\,|x|^{n+1}$$

D'où

$$R_n(x) = o(x^n) \qquad , x \to 0\ , x \in M$$

Par conséquent, $\sum_{r=0}^{\infty} r!x^r$ *est une série asymptotique associe à* $f(x)$ *au voisinage de* $x_0 = 0$.

On écrit $f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} r!x^r$ *quand* $x \to 0$.

On remarque que dans le develloppement précedent, la série $\sum_{r=0}^{\infty} r!x^r$est divergente $\forall\ x \neq 0$, le rayon de convergence $r = 0$.

Il y a plus à dire sur les suites et séries asymptotiques mais nous nous contantons par les notions précedantes pour étudier les solutions d'une équation différentielle ordinaire au voisinage d'un point singulier irrégulier. On note qu'on a pri comme exemple l'équation du second ordre.

4.2 Solution au voisinage d'un point singulier irrégulier

On revient à l'équation différentielle du second ordre (5) :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Si x_0 est un point singulier irrégulier alors $P(x)$, $Q(x)$ et $(x-x_0)P(x)$, $(x-x_0)^2Q(x)$ ne sont pas analytiques au voisinage de x_0.

Selon le théorème de Fûchs, il existe au moins une solution admettant une singularité essentielle au voisinage de x_0. Alors on cherche une solution asymptotique et se contante du terme dominant. La méthode est assez compliquée car on ne connait pas la forme de la série asymptotique de la solution qu'on cherche. La méthode est heuristique et ad hoc et repose sur des raisonnements asymptotiques et faire des décisions à priori sur les termes à négliger puis confirmer la décision ou bien la corrigée par une autre si des contradictions apparaissent dans le résultat. Ce type de raisonnement s'appele "Trial and error method", qui se traduit "essayer et corriger après".

Si dans l'equation (5), les coefficients $P(x) = P_0$ et $Q(x) = Q_0$ sont des constantes alors (5) admet des solutions sous la forme $y(x) = \exp \alpha x$ ou α est une constante. Mais si les coefficients sont des fonctions de x, alors on continue a chercher une solution de la forme précédente mais avec une certaine modification. Il semble ligitime et justifiable de chercher une solution de le forme :

$$y(x) = \exp S(x) \tag{16}$$

ou $S(x)$ est une fonction à chercher.

On substitue (16) dans (5) on obtient l'équation non linéaire suivante

$$S''(x) + (S'(x))^2 + P(x)S'(x) + Q(x) = 0 \tag{17}$$

L'équation précédente est non linéaire et plus compliquée que (5), mais si on considère que

$$S''(x) = o((S'(x))^2) \quad \text{quand} \quad x \to x_0$$

Alors l'équation précédente se simplifie à

$$(S'(x))^2 + P(x)S'(x) + Q(x) = 0 \tag{18}$$

L'équation (18) est une équation algebrique du second degré en $S'(x)$ admettent les solutions

$$s'(x) = \frac{-P(x)\pm\sqrt{P^2(x) - 4Q(x)}}{2} \tag{19}$$

On simplifier la solution de $S'(x)$ asymptotiquement en negligenant quelques termes, puis on verifie la supposition $[S''(x) = o((S'(x))^2)$ quand $x \to x_0]$ faite plus haute, sinon essayez de faire d'autre balance.

Exemple 4.2.1

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$x^3 y'' - y = 0 \tag{20}$$

$x_0 = 0$ *est un point singulier irrégulier.*

Si on essaie la serie de Frobenius on écrit :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \quad \textit{avec } a_n \neq 0$$

Si on remplace cette forme dans l'équation et essayer de résoudre. Pour les coefficients $a_0, a_1, ...,$ *comme pour un point singulier régulier on obtient* $a_0 = 0$ *,contradiction l'équation n'admet pas de solution en serie de Frobenius .*

On utilise la methode décrit plus haut, on pose :

$$y(x) = \exp S(x)$$

On substitut dans l'équation (20) puis on simplifie

on obtient l'équation :

$$S''(x) + (S'(x))^2 - x^{-3} = 0 \tag{21}$$

L'équation précédente est non linéaire et plus compliquée que (20), mais si on considére que

$$S''(x) = o((S'(x))^2), \ \textit{quand } x \to 0$$

Donc l'équation (21) simplifie à

$$(S'(x))^2 - x^{-3} = 0$$

donc

$$\left(S'(x)\right)^2 \sim x^{-3}, \qquad x \to 0^+$$

D'où

$$S'(x) \sim_{-}^{+} x^{-\frac{3}{2}}, \qquad x \to 0^+$$

Par suite

$$S(x) \sim^{+}_{-} 2x^{-\frac{1}{2}}, \quad x \to 0^+$$

Pour ne pas compliquer l'écriture on continue avec :

$$S(x) \sim 2x^{-\frac{1}{2}}, \quad x \to 0^+$$

Comme preuve, on a deux slutions pour $S(x)$ *donc deux solutions pour l'équation* (20), *puisque* $\lim_{x\to 0^+} S(x) = +\infty$, *on doit continuer à chercher* $S(x)$ *sous forme d'une serie asymptotique, ie :*

$$S(x) = S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) + ... + S_n(x) + o(S_n(x))$$

tel que

$$\lim_{x\to 0^+} S_n(x) = 0$$

Maintenant, on vérifie la supposition

$$S''(x) \sim o((S'(x))^2), \quad x \to 0^+$$

$$S(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} \tag{22}$$

$$\Rightarrow S'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} \qquad et \quad (S'(x))^2 = x^{-3}$$

$$\Rightarrow S''(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

D'où

$$\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = o(x^{-3}), \quad x \to 0^+$$

Donc, la suppositiion $S''(x) = o((s'(x))^2)$, $x \to 0^+$ *est verifiée, puisque* $\lim_{x\to 0^+} S(x) = +\infty$, *on doit continuer à chercher* $S(x)$ *sous forme d'une serie asymptotique, ie :*

$$S(x) = S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) + ... + S_n(x) + o(S_n(x))$$

tel que

$$\lim_{x\to 0^+} S_n(x) = 0$$

On écrit la solution (22) sous la forme de la serie asymptotique

$$S(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} + S_1(x), \quad S_1(x) = o(2x^{-\frac{1}{2}})\ , \quad x \to 0^+ \tag{23}$$

On ne compte pas trouver la solution exacte de $S_1(x)$, mais une solution asymptotique .

En substitut (23) dans l'équation (21),on trouve

$$\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + S_1''(x) - 2x^{\frac{-3}{2}}S_1'(x) + (S_1'(x))^2 = 0$$

En utilisant le fait que

$$S(x) = o(2x^{-\frac{1}{2}}), \quad x \to 0^+ \ \textit{et} \ \ S'(x) \sim x^{-\frac{3}{2}}$$

Donc

$$S'(x) = o(x^{-\frac{3}{2}}), \quad x \to 0^+$$

c'est un dire

$$(S_1'(x))^2 = o(x^{-\frac{3}{2}}S_1'(x)), \qquad x \to 0^+$$

On obtient l'équation asymptotique suivante

$$\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + S_1''(x) \sim 2x^{-\frac{3}{2}}S_1'(x), \quad x \to 0^+ \tag{24}$$

De plus

$$S_1'(x) \ll x^{-\frac{3}{2}}, \quad x \to 0^+$$

Pour obtenir

$$S_1''(x) \ll \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}, \quad x \to 0^+$$

Alors, l'équation asymptotique (24) se simplifie à :

$$\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \sim 2x^{-\frac{3}{2}}S_1'(x), \quad x \to 0^+ \tag{25}$$

D'où

$$S_1(x) \sim \frac{3}{4}\log(x), \quad x \to 0^+ \tag{26}$$

On verifie les suppositions faites :

1)

$$\frac{3}{4}\log(x) \ll 2x^{-\frac{1}{2}}, \quad x \to 0^+ \qquad \textit{vraie}$$

2)

$$S_1''(x) \sim -\frac{3}{4}x^{-2} \ll x^{-\frac{5}{2}}, \quad x \to 0^+ \qquad \textit{vraie}$$

$\lim_{x\to 0} \log x = \infty$, *donc on continue la serie asymptotique de* $S(x)$. *On ecrit alors :*

$$\begin{aligned} S(x) &= 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\log(x) + S_2(x) \\ S_2(x) &\ll \log(x), \quad x \to 0^+ \end{aligned}$$

Substitut encore dans l'équation (21), on trouve

$$\frac{-3x^{-2}}{16} + S_2''(x) + (S_2'(x))^2 - 2x^{-\frac{3}{2}}S_2'(x) + \frac{3x^{-1}}{2}S_2'(x) = 0$$

On utilisant les differents relations asymptotiques,

$$\begin{aligned} x^{-1} &\ll x^{-\frac{3}{2}}, \quad x \to 0^+ \\ &\Rightarrow \frac{3}{2}x^{-1}S_2'(x) \ll 2x^{-\frac{3}{2}}S_2'(x), \quad x \to 0^+ \end{aligned}$$

$$S_2(x) \ll \log(x) \overset{?}{\Rightarrow} S_2'(x) \ll \frac{1}{x}$$

On a

$$(S_2'(x))^2 \ll x^{-1}S_2'(x), \quad x \to 0^+$$

$$(S_2''(x)) \ll x^{-2}, \quad x \to 0^+$$

L'équation asymptotique pour $S_2(x)$ *se simplifie à :*

$$-2x^{-\frac{3}{2}}S_2'(x) \sim \frac{3}{16}x^{-2}, \quad x \to 0^+$$

$$S_2'(x) \sim \frac{-3}{32}x^{\frac{-1}{2}}, \quad x \to 0^+$$

D'où

$$S_2(x) \sim \frac{-3}{16}x^{\frac{1}{2}} + s, \quad x \to 0^+, \qquad s = \textit{constante d'integration}$$

et, $x^{\frac{1}{2}} \ll s$ *, alors* $S_2(x) \sim s$*, et*

$$S_2(x) \sim \frac{-3}{16} x^{\frac{1}{2}}, \quad x \to 0^+$$

Puisque

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

, alors on arrète le developpement asypmtotique pour $S(x)$*.*

Si on regroupe tout, on trouve

$$S(x) \sim 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \log x + s \ , \ x \to 0^+ \ , \qquad s : \text{ une constante arbitraire}$$

Et par conséquent :

$$y(x) \sim K_1 x^{\frac{3}{4}} e^{2x^{\frac{-1}{2}}}, \quad x \to 0^+$$

Conclusion

Malgré que les équations différentielles ordinaires à coefficients variables n'admettent pas des méthodes analytiques pour trouver une solutions exactes explicites, ou peut trouver des solutions approchées sous formes de series aux voisinages des points ordinaires, singulier régulier ou bien singulier irrégulier.

Bibliographie

[1] Norman -Bleistein & Richard-A.Handelsman, Asymptotic Expansions of Integrals(1975).

[2] Carl-M.Bender & Steven-A.Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers(Asymptotic Methods and Perturbation Theory(1978).

[3] J.D.Murray,Asymptotic Analysis(1973).

[4] Mekias Hocine "cour de magister (1996-1997)" UFAS.

[5] Erdelyi.A,Asymptotic Expansions(1956).

[6] Wasow,W.A,Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations(1965).

[7] Carrier.G & Pearson.C.E,Ordinary Differential Equations(1968).

Résume

Dans ce mémoire, on présente la méthode de Frobenius pour résoudre les équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients variables. Cette méthode est une généralisation de la méthode de Taylor.

La solution est locale au voisinage de trois points : point ordinaire et point singulier régulier et point singulier irrégulier :

-au point ordinaire on utilise le développement de Taylor.

-au point singulier régulier on utilise le développement de Frobenius.

-au point singulier irrégulier on utilise le développement asymptotique.

الملخص

في هذه المذكرة نعرض طريقة فروبينيوس لحل المعادلات التفاضلية الترتيبية الخطية ذات معاملات متغيرة, هذه الطريقة عبارة عن تعميم لطريقة تايلور.

نحل هذه المعادلة عند ثلاث نقط هي: النقطة العادية و النقطة الفريدة المنتظمة و النقطة الفريدة الغير منتظمة, حيث:

-عند النقطة العادية نستخدم نشر تايلور.

-عند النقطة الفريدة المنتظمة نستخدم نشر فروبينيوس.

-عند النقطة الفريدة الغير منتظمة نستخدم النشر التقاربي.

Abstract

In this work, we present the method of Frobenius to solve ordinary lineair differential equations with variable coefficients. This method is generalization of the Taylor method.

The solution is in the neighborhood of a point. There are three characteristiques points: ordinary point, singular regular point and singular irregular point.

-In the neighborhood of an ordinary point we use the Taylor series.

- In the neighborhood of a singular regular point we use the Frobenius series.

- In the neighborhood of a singular irregular point we use the asymptotic series.