

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE DE BORDJ BOU ARRERIDJ
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

SPECIALITE : Mathématiques Appliquées

Par :

Bisset Yamena
Benouerkhou Fatma

Méthode de Newton-Kantorovich

Devant le jury composé de :

Président : Dr A.Rahmoune.

Examineurs : Dr N.Belkacem.

Rapporteur : Pr A.Mennouni.

Année universitaire 2012/2013.



— « Remerciement » —



Nous remercions Dieu de nous avoir accordé des connaissances de la science et nous avoir aidé à réaliser ce travail. Nous profonds gratitude et nos remerciements les plus chaleureuse à notre encadreur le professeur MENNOUNI ABDELAZIZ, pour ces guidances et ces orientations durant la préparation de ce mémoire. Dès le début de sa confiance à nous, et sa patience et sa gentillesse. Nous exprimons notre sincère reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation. Nous remercions aussi nos enseignants Mr N.BELKACEM, M^{me} R.ZAGHDANE, Mr A.RAHMOUNE, Mr T.SALHI, Mr B.BRAHMI et S.ADDOUNE pour les conseils qu'ils m'ont prodigué. Tout nos considérations à l'université de BBA qui nous inculquedes études à la hauteur de nos espoirs. Nous tenons à remercier Messieurs les membres du jury A.RAHMOUNE et N.BELKACEM, pour avoir accepté d'examiner notre travail. Nous remercions le Docteur ROUABEH KHALED chef du Département Électronique et tout les enseignants et les étudiant de DÉPARTEMENT ÉLECTRONIQUE. Nous remerciments s'adressent également à toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin pour nous permettre d'achever ce travail.



L. Bisset

F. Benourkhou





— « Dédicace » —

◇
Je re-
mercie

ALLAH de
m'avoir donné
le courage, la force
et la volonté pour réa-
liser ce travail. A mes
très chers PARENT. Pour
ma chère MÈRE qu'elle ne ja-
mais oublié dans ces prières, et qui
est seule source de tendresse. Et pour
mon PÈRE le modèle de patience qui est
ma source de courage. A ma fiancé MOHA-
MED. Et aussi à mes chère frères et sœurs.
Et à tout ma famille BENOUEKHOU. A
mon binôme YAMENA ET SA FAMILLE.
A tous mes amis, surtout ISMA-
HENE SEHILI, FATIMA TOUKALI,
DOUADI NOURIA, SOUAD
BENSACI et SAMRA ZI-
TOUNI. A tous les étu-
diants de la promo
MATHÉMA-
TIQUE 2012
◁ 2013.
Merci.

◇
ii

Fatma

Y. Bisset

F. Benourkhou





— « Dédicace » —

◇
Je re-
mercie

ALLAH de
m'avoir donné
le courage, la force
et la volonté pour réa-
liser ce travail. A mes
très chers PARENT. Pour
ma chère MÈRE qu'elle ne ja-
mais oublié dans ces prières, et qui
est seule source de tendresse. Et pour
mon PÈRE le modèle de patience qui est
ma source de courage. Et aussi à mes chère
frères et sœurs. Et à tout ma famille BISSET.
A mon binôme FATMA ET SA FAMILLE. A
tous mes amis, surtout SOUHIR LAIEB,
ISMAHENE SEHILI, ZETCHI HAD-
JER, BOUDERBALA AMEL, OU-
NOUGHI SOUMIA, SOUAD
BENSACI et SAMRA ZI-
TOUNI. A tous les étu-
diants de la promo
MATHÉMA-
TIQUE 2012
◁ 2013.
Merci.

◇

Yamena

iii

Y. Bisset

F. Benourkhou



Table des matières

1	Dérivation des opérateurs non linéaires	4
1.1	Opérateurs sur les espaces vectoriels	4
1.1.1	Opérateurs Linéaires Continus	5
1.1.2	L'inverse d'un opérateur linéaire	7
1.2	Différentes notions de dérivées	7
1.2.1	Dérivée directionnelle	8
1.2.2	Différentiabilité au sens de Gâteaux	9
1.2.3	Différentiabilité au sens de Fréchet	9
1.2.4	Théorèmes et Propriétés	11
1.2.5	Opération sur les applications Gâteaux et Fréchet différentiables	13
1.2.6	Relation entre différentielles de Gâteaux et de Fréchet	15
1.2.7	Différentielles en dimension finie	16
1.2.8	Théorème de la valeur moyenne	17
1.3	Points fixes	18
1.3.1	Théorème des applications contractantes	21
1.3.2	Convergence quadratique	24
2	Méthode de Newton	27
2.1	Linéarisation de l'équation	28
2.2	Méthode de Newton-Kantorovitch	29
3	Approximation de la solution du système d'équations intégrales non linéaires par la méthode de Newton-Kantorovich	43
3.1	Description de la méthode	43
3.2	Convergence de la méthode	46

3.3	Discrétisation de la méthode	50
3.4	Exemples numériques	52

Introduction

La méthode de Newton est une méthode numérique couramment utilisée pour approcher les solutions d'une équation ou d'un système d'équations. Le but a été de formaliser le théorème de Kantorovitch qui montre la convergence de la méthode Newton vers une solution, l'unicité de la solution dans un voisinage et la vitesse de la convergence de la méthode.

La première partie de ce mémoire est consacrée aux différentiabilité et points fixes dans l'espace de Banach. La différentiabilité concerne différence notion de dérivé dans l'espace de Banach, il y a essentiellement la dérivabilité au sens de Gâteaux et la dérivabilité au sens de Fréchet. On introduit leurs définitions, quelque Théorème et les opérations sur les deux notions de dérivés. On traitera la relation entre la différentielles de Fréchet et de Gâteaux. Dans la section du points fixes on présente un théorème d'existence pour une application contractante puis quelque théorème des point fixe sur des espaces de Banach.

Le seconde chapitre est consacrée à la méthode de Newton-Kantorovich pour la résolution des équations non linéaire. On présente le théorème de Newton-Kantorovich dans les espaces de Banach, qui assure l'existence, et l'unicité locale d'une solution et la convergence des approximations successives sous certaines conditions.

Le dernier chapitre est concerne à la résolution d'un system d'équations intégrales non linéaires par la méthode de Newton-Kantorovich. On montre l'existence et l'unicité de la solution et on étudie l'estimation de l'approximation. On prouve la validité de la méthode par des exemples numérique.

Chapitre 1

Dérivation des opérateurs non linéaires

1.1 Opérateurs sur les espaces vectoriels

Cette partie contient quelques opérations mathématiques ont certaines propriétés en commun. Ces propriétés sont donnés dans les définitions suivante.

Définition 1.1. Soient X, Y deux espaces vectoriels, et T un opérateur de X dans Y , et S un ensemble des scalaires, l'opérateur T est **additive** si

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \text{pour tout } x, y \in X,$$

l'opérateur T est **homogène** si

$$T(sx) = sT(x), \quad \text{pour tout } x \in X, s \in S.$$

Un opérateur est additive et homogène donc est un **opérateur linéaire**.

Quelque exemples des opérateurs linéaires.

- L'opérateur T de l'espace vectoriel X définie par $T(x) = sx$, $s \in S$ est linéaire.
- L'opérateur $D = \frac{d}{dt} : X \rightarrow Y$ tel que $X = C^1[0, 1]$ et $Y = C[0, 1]$ donné par

$$D(x) = \frac{dx}{dt} = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

est linéaire.

Si X et Y deux espaces vectoriels sur la même champ scalaire S , alors l'ensemble $L(X, Y)$ contenant tous les opérateurs linéaires de X dans Y est un espace vectoriel sur S si l'addition est défini par

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x), \quad \text{pour tout } x \in X,$$

et multiplication par un scalaire

$$(sT)(x) = s(T(x)), \quad \text{pour tout } x \in X, s \in S.$$

On peut aussi considérer des opérateurs linéaires B de X dans $L(X, Y)$. Pour un $x \in X$ on a $B(x) = T$, un opérateur linéaire de X dans Y . Par conséquent, on a

$$B(x_1, x_2) = (B(x_1))(x_2) = y \in Y.$$

L'opérateur B est appelé un opérateur bilinéaire de X dans Y . L'opérateur linéaire B de X dans $L(X, Y)$ forment un espace vectoriel $L(X, L(X, Y))$. On peut généralise ce processus pour les opérateurs j -linéaires ($j \in \mathbb{N}, j > 1$).

1.1.1 Opérateurs Linéaires Continus

Un opérateur f d'un espace de Banach X dans l'espace de Banach Y est **continu** en $x = x^*$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|_X = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n) - f(x^*)\|_Y = 0.$$

Définition 1.2. Si l'opérateur $f : X \rightarrow Y$ est **continu**, alors

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 / \forall y \in X, \quad \|x - y\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

L'opérateur $f : X \rightarrow Y$ est **uniformément continu** si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad \|x - y\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

Remarque 1.1. Tout opérateur uniformément continu est continu, main l'inverse généralement n'est pas vrais.

Théorème 1.1. Si l'opérateur linéaire T d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y est continue en $x^* = 0$, alors il est continue en tout point x de l'espace X .

Démonstration. On a l'opérateur T est linéaire donc

$$T(0) = 0,$$

et pour $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| = 0.$$

Si la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x^* dans X , on suppose $y_n = x_n - x^*$ donc on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(y_n)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n - x^*)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - T(x^*)\| \quad \text{car } T \text{ est linéaire} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Définition 1.3. L'opérateur f d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y est **Lipschitzien** sur X s'il existe une constante $\lambda < \infty$ tel que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \lambda \| x - y \|, \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

Notation. On notera $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires continues de l'espace de Banach X dans l'espace de Banach Y . Sur $\mathcal{L}(X, Y)$, on pose

$$\| T \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| T(x) \|.$$

On a

$$\| T(x) \| \leq \| T \| \cdot \| x \|, \quad \text{pour tout } x \in X. \quad (1.1.1)$$

De plus, soit $M > 0$ tel que

$$\| T(x) \| \leq M \| x \|, \quad \text{pour tout } x \in X, \quad (1.1.2)$$

alors, pour $\| x \| \leq 1$, ceci donne

$$\| T(x) \| \leq M,$$

d'où

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \| T(x) \| \leq M,$$

c'est-à-dire

$$\| T \| \leq M.$$

Ainsi $\| T \|$ est le plus petit des nombres $M \geq 0$ tels que la relation (1.1.2) est vérifiée.

$\| T \|$ est une norme sur l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ tel que X et Y des espaces de Banach.

Théorème 1.2. [10].

L'ensemble $\mathcal{L}(X, Y)$, tel que X et Y sont deux espaces de Banach, est un espace de Banach.

Théorème 1.3. Un opérateur linéaire et continue T d'un espace de Banach X dans l'espace de Banach Y est borné sur X .

Démonstration. D'après la continuité de T il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\| T(z) \| < 1$, si $\| z \| < \varepsilon$.

Pour $0 \neq z \in X$

$$\| T(z) \| \leq \frac{1}{\varepsilon} \| z \|, \quad (1.1.3)$$

si $|c| < \frac{\varepsilon}{\| z \|}$ donc $\| cz \| < \varepsilon$, et

$$\| T(cz) \| = |c| \cdot \| T(z) \| < 1.$$

Pour $z = x - y$ et $c = \frac{1}{\varepsilon}$ dans l'équation (1.1.3), on déduit que l'opérateur T est borné sur X . \square

1.1.2 L'inverse d'un opérateur linéaire

Définition 1.4. Si T est un opérateur linéaire borné dans X et l'opérateur linéaire borné T_1 existe tel que

$$T_1 T = T T_1 = I,$$

où I est l'opérateur identité¹ dans X , alors T_1 est appelé **l'inverse** de T et on écrit $T_1 = T^{-1}$. C'est-à-dire

$$T^{-1} T = T T^{-1} = I.$$

Si l'opérateur T^{-1} existe, l'équation $T(x) = y$ a la solution unique

$$x = T^{-1}(y).$$

Théorème 1.4 (Lemme de Banach sur les opérateurs inversibles). [10].

Si T est un opérateur linéaire dans X , T^{-1} existe si et seulement s'il existe un opérateur linéaire borné P dans X tel que P^{-1} existe et

$$\|I - PT\| < 1. \quad (1.1.4)$$

Si T^{-1} existe, alors

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - PT)^n P \quad (\text{Série De Neumann}) \quad (1.1.5)$$

et

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{\|P\|}{1 - \|I - PT\|}. \quad (1.1.6)$$

1.2 Différentes notions de dérivées

Dans cette section X et Y désignent des espaces vectoriels réels normés, f désigne une application d'un ouvert $U \subset X$ à valeurs dans Y .

On peut généraliser le concept de dérivée pour des opérateurs définies sur des espaces de Banach. La " dérivée " peut être définie de plusieurs façons qui ne sont pas équivalentes. Il y a essentiellement la dérivabilité au sens de Fréchet et la dérivabilité au sens de Gâteaux. On peut lier la dérivabilité au sens de Gâteaux avec les dérivées directionnelles en un point (La dérivabilité au sens de Gâteaux est un généralisation de la dérivée directionnelle), les deux dérivés sont souvent utilisés pour formaliser la dérivée d'un opérateur.

1. i.e., $I(x) = x$ pour tout $x \in X$.

1.2.1 Dérivée directionnelle

Soient X et Y deux espaces de Banach, et $f : X \rightarrow Y$. f a une **dérivée directionnelle** au point $x \in U \subseteq X$ dans la direction $h \in X$, si et seulement si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

existe, on l'appelle la dérivée de f dans la direction h , on la note $f'(x, h)$.

Exemple 1. Soit la fonction définie par $f(x, y) = 4x^2 - 2y$. On applique la définition de la dérivée directionnelle de la fonction f dans la direction $h = (1, 2)$, donc la dérivée directionnelle de f dans la direction h est

$$\begin{aligned} f'(a; h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + th) - f(a)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f((x, y) + t(1, 2)) - f(x, y)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + t, y + 2t) - f(x, y)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (4(x + t)^2 - 2(y + 2t) - 4x^2 + 2y) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (4(x^2 + t^2 + 2tx) - 2(y + 2t) - 4x^2 + 2y) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (4x^2 + 4t^2 + 8tx - 2y - 4t - 4x^2 + 2y) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (4t^2 + 8tx - 4t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (4t + 8x - 4). \end{aligned}$$

On calcule la limite lorsque t tend vers 0, on obtient

$$f'(a; h) = 8x - 4.$$

La dérivée directionnelle donne des informations sur la pente de la fonction dans la direction h , tout comme la dérivée donne des informations sur la pente des fonctions à une variable.

Lorsque l'espace X est de dimension finie n et muni d'une base, est un cas particulier important de dérivée directionnelle est celui de **dérivée partielle** : la i -ème dérivée partielle de f en u s'obtient en prenant pour h le i -ème vecteur

$$e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

de la base canonique de \mathbb{R}^n . On note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ (ou $\partial_i f(u)$). Si on se reporte à la définition des dérivées directionnelles, on voit que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(u_1, \dots, u_i + t, \dots, u_n) - f(u_1, \dots, u_n)),$$

il est possible de calculer toutes les dérivées directionnelles en termes de dérivées partielles par

$$f'(u; h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(u).$$

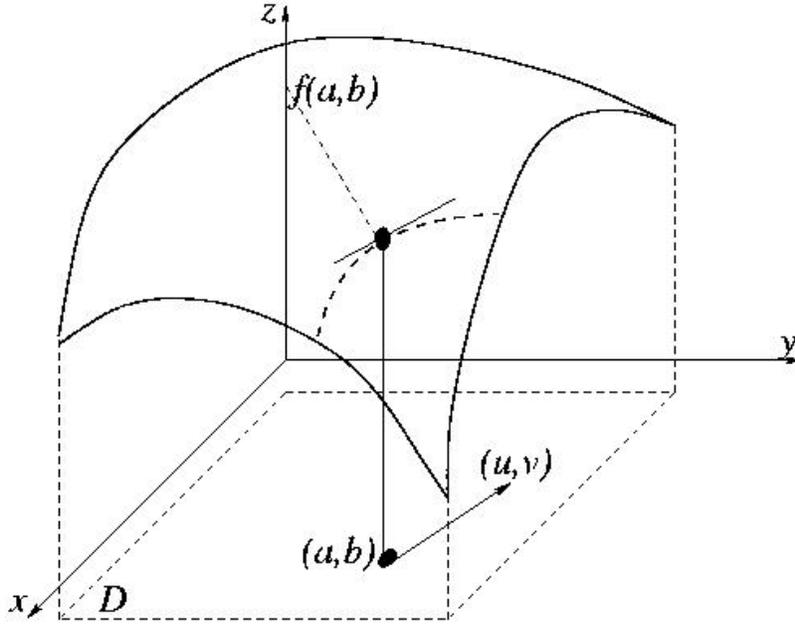


FIGURE 1.1 – La dérivée directionnelle d’une fonction dans \mathbb{R}^3 .

1.2.2 Différentiabilité au sens de Gâteaux

Soit f une application sur un ouvert U d’un espace de Banach X dans l’espace de Banach Y . On dit que f est **Gâteaux dérivable** en x si et seulement si f admet une dérivée directionnelle dans la direction h pour tout $h \in X$ et l’opérateur $h \rightarrow T_x(h)$ est linéaire et continue $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $T_x(h) = f'(x; h)$ pour tout $h \in X$, alors l’opérateur T est appelé Gâteaux différentielle de f au point x , et f est dite Gâteaux différentiable (ou différentiable au sens de Gâteaux) au point x .

Autrement dit f est Gâteaux différentiable en $x \in U$ s’il existe un opérateur linéaire et borné $T : X \rightarrow Y$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = T_x(h), \quad \text{pour tout } h \in X.$$

Le fait que les dérivées directionnelles $f'(x; h)$ existent $\forall h \in X$ n’impliquent pas que f soit Gâteaux dérivable en x .

La Gâteaux différentiabilité est une notion assez faible qui n’entraîne pas automatiquement la continuité.

1.2.3 Différentiabilité au sens de Fréchet

Soient X et Y deux espaces de Banach, et $f : U \subseteq X \rightarrow Y$ (U un sous ensemble ouvert). On dit que f est **différentiable au sens de Fréchet** au point $x \in U$ s’il existe un opérateur linéaire borné $T : X \rightarrow Y$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = T_x(h),$$

est uniforme pour tout $h \in S_x^2$. L'opérateur T est appelé la dérivé de Fréchet.

Autrement dite que f Fréchet différentiable en x s'il existe un opérateur linéaire continue $T : X \rightarrow Y$ et une fonction ε de limite nulle en 0 ($\lim_{\|h\|_Y \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$) telle que

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + \|h\|_Y \varepsilon(h),$$

alors T s'appelle dérivée au sens de Fréchet de f en x , et f est dite Fréchet différentiable (ou différentiable, ou différentiable au sens de Fréchet) au point x . La différentielle de f au point x est souvent notée $Df(x)$.

Intuitivement cela signifie que $f(x+h)$ peut être approchée sur une petite boule par un opérateur linéaire, la différentielle en x est la partie linéaire en h de l'approximation, après avoir négligé les termes d'ordre supérieur.

Exemple 2 (Opérateur linéaire).

Soient $X = Y = C[a, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et l'opérateur intégrale linéaire définie par

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x, s)u(s) ds,$$

ou $K(x, s)$ est continue dans $[a, b] \times [a, b]$.

On calcule $F(u+h) - F(u)$ pour $h \in X$

$$\begin{aligned} (F(u+h) - F(u))(x) &= \int_a^b K(x, s)(u(s) + h(s)) ds - \int_a^b K(x, s)u(s) ds \\ &= \int_a^b K(x, s)(u(s) + h(s) - u(s)) ds \\ &= \int_a^b K(x, s)h(s) ds. \end{aligned}$$

Le dernier terme est l'opérateur T , et T est linéaire par rapport à h . Donc, F est Fréchet différentiable et la différentiel est donné par

$$DF(u) = \int_a^b K(x, s)h(s) ds,$$

est indépendante de u .

On conclue que la dérivé de Fréchet d'un opérateur linéaire et continu est lui même.

Exemple 3 (Opérateur non linéaire).

Soient $X = Y = C[a, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et l'opérateur intégrale non linéaire définie par

$$(Fu)(x) = u(x) \int_a^b K(x, s)u(s) ds,$$

ou $K(x, s)$ est continue dans $[a, b] \times [a, b]$.

2. S_X désigne la sphère unité dans X .

On calcule $F(u + h) - F(u)$ pour $h \in X$

$$\begin{aligned} (F(u + h) - F(u))(x) &= (u(x) + h(x)) \int_a^b K(x, s)(u(s) + h(s)) ds - u(x) \int_a^b K(x, s)u(s) ds \\ &= u(x) \int_a^b K(x, s)h(s) ds + h(x) \int_a^b K(x, s)u(s) ds + R(u, h)(x), \end{aligned}$$

ou

$$R(u, h)(x) = h(x) \int_a^b K(x, s)h(s) ds.$$

Le reste $R(u, h)(x)$ est non linéaire par rapport à h . Si $\frac{\|R(u, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$, alors l'opérateur T est linéaire par rapport à h . On a

$$\|R(u, h)\| = \max_{x \in [a, b]} \left| h(x) \int_a^b K(x, s)h(s) ds \right| \leq M \|h\|^2,$$

avec

$$M = (b - a) \max_{[a, b] \times [a, b]} |K(x, s)|.$$

Donc, F est Fréchet différentiable et la différentielle est donné par

$$DF(u) = u(x) \int_a^b K(x, s)h(s) ds + h(x) \int_a^b K(x, s)u(s) ds.$$

Dans ce cas, la **différentielle** de f est

$$\begin{aligned} Df &: U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\longmapsto Df(x). \end{aligned}$$

On dit que l'application f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point $x \in U$.

Si la fonction f est différentiable au point x , alors elle admet des dérivées en ce point dans la direction de tout vecteur. En général, la réciproque est fautive : le fait qu'une application présente des dérivées en x dans toutes les directions n'assure pas sa différentiabilité, ni même sa continuité. Cependant, la réciproque est vraie si l'application est définie sur un espace vectoriel de dimension finie n , est à valeurs réelles.

Si de plus Df est continue, on dit que f est continûment différentiable, ou de façon équivalente que f est de classe C^1 .

1.2.4 Théorèmes et Propriétés

Proposition 1.1. *Si l'opérateur T existe, alors T est unique.*

Démonstration. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ deux dérivés de Fréchet et $\|h\| \in X \setminus \{0\}$ et $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$. On a $(T_1 - T_2)(h) = o(\|h\|)$.

$$\begin{aligned} (T_1 - T_2)(h) &= \frac{(T_1 - T_2)(th)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|)}{t} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et $(T_1 - T_2)(h)$ ne dépend pas de X , d'où $T_1 = T_2$. □

Évidemment une application qui est Fréchet différentiable en un point $x \in U$, est continue en ce point. En effet

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\| &= \left\| T(h) + \|h\| \varepsilon(h) \right\| \\ &\leq \left(\|T\| + \|\varepsilon(h)\| \right) \|h\| \\ &\leq C \|h\|. \end{aligned}$$

Définition 1.5. Une partie U de X est convexe si toute combinaison convexe d'éléments de U est dans U .

On appelle combinaison convexe de deux points x et y est

$$\forall x, y \in U, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in U.$$

On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow Y$ est convexe si pour tout x, y dans X et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Théorème 1.5. [5].

Soit f une fonction convexe définie sur un sous-ensemble ouvert convexe U d'un espace de Banach X , f est continue en $x \in U$. Alors f est Fréchet différentiable en x si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) + f(x-th) - 2f(x)}{t} = 0$$

est uniforme pour $h \in S_X$.

Lemme 1.1. [5].

Soit X et Y deux espaces de Banach. Soit $f_n : X \rightarrow Y$ est une application Gâteaux différentiable pour tout $n \geq 1$. Supposons que $(\sum f_n)$ convergent ponctuellement sur X , et qu'il existe une constante $K > 0$ alors pour tout h ,

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in X} \left\| \frac{\partial f_n}{\partial h}(x) \right\| \leq K \|h\|.$$

Alors l'application $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ Gâteaux différentiable pour tout $x \in X$, et $Df(x) = \sum_{n \geq 1} Df_n(x)$.

1.2.5 Opération sur les applications Gâteaux et Fréchet différentiables

Proposition 1.2. Soient X, Y deux espaces de Banach. Soient U un ouvert de X , f et g deux applications de U dans Y , soient $x \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont Fréchet différentiables (respectivement Gâteaux différentiables) en x , alors $\lambda f + g$ est Fréchet différentiable (respectivement Gâteaux différentiable) en x , et

$$D(\lambda f + g)(x) = \lambda Df(x) + Dg(x).$$

Démonstration. Soit f est Fréchet différentiable en x alors il existe un opérateur linéaire borné $T^1 : X \rightarrow Y$ (dérivé de Fréchet de f en x) tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = T_x^1(h).$$

De même, g est Fréchet différentiable en x alors il existe un opérateur linéaire borné $T^2 : X \rightarrow Y$ (dérivé de Fréchet de g en x) tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + th) - g(x)}{t} = T_x^2(h).$$

Pour démontrer $\lambda f + g$ est Fréchet différentiable on applique la définition, pour tout $x \in U$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((\lambda f + g)(x + th) - (\lambda f + g)(x) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((\lambda f)(x + th) + g(x + th) - ((\lambda f)(x) + g(x)) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\lambda f(x + th) + g(x + th) - \lambda f(x) - g(x) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\lambda f(x + th) - \lambda f(x) + g(x + th) - g(x) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\lambda f(x + th) - \lambda f(x) \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(g(x + th) - g(x) \right) \\ &= \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x + th) - f(x) \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(g(x + th) - g(x) \right) \\ &= \lambda T_x^1(h) + T_x^2(h). \end{aligned}$$

Les opérateurs $T_x^1(h)$ et $T_x^2(h)$ sont linéaires bornés alors il existe un opérateur linéaire borné $T_x(h)$ (dérivé de Fréchet de $\lambda f + g$ en x) tel que

$$T_x(h) = \lambda T_x^1(h) + T_x^2(h),$$

donc l'application $\lambda f + g$ est Fréchet différentiable en x . □

Proposition 1.3. Soient X, Y deux espaces de Banach, et U un ouvert de X , f et g deux applications de U dans Y , soient $x \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont Fréchet différentiables en x , alors $f \times g$ est Fréchet différentiable en x , et

$$D(f \times g)(x) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x).$$

Démonstration. Soit f est Fréchet différentiable en x alors il existe un opérateur linéaire borné $T^1 : X \rightarrow Y$ (dérivé de Fréchet de f en x) tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T_x^1(h).$$

De même, g est Fréchet différentiable en x alors il existe un opérateur linéaire borné $T^2 : X \rightarrow Y$ (dérivé de Fréchet de g en x) tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x+th) - g(x)}{t} = T_x^2(h).$$

Pour démontrer $f \times g$ est Fréchet différentiable on applique la définition, pour tout $x \in U$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((f \times g)(x+th) - (f \times g)(x) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x+th)g(x+th) - f(x)g(x) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x+th)g(x+th) - f(x)g(x) + f(x+th)g(x) - f(x+th)g(x) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x+th)(g(x+th) - g(x)) + g(x)(f(x+th) - f(x)) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x+th)(g(x+th) - g(x)) \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(g(x)(f(x+th) - f(x)) \right), \end{aligned}$$

on a $\lim_{t \rightarrow 0} f(x+th) = f(x)$, alors

$$\begin{aligned} &= f(x) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(x+th) - g(x)) \right) + g(x) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x+th) - f(x)) \right) \\ &= f(x)T_x^2(h) + g(x)T_x^1(h), \end{aligned}$$

alors il existe un opérateur linéaire borné $T_x(h)$ (dérivé de Fréchet de $f \times g$ en x) tel que

$$T_x(h) = f(x)T_x^2(h) + g(x)T_x^1(h),$$

donc l'application $f \times g$ est Fréchet différentiable en x . □

Remarque 1.2. *Le produit de deux applications Gâteaux différentiable n'est pas nécessairement Gâteaux différentiable.*

Théorème 1.6. [5].

Soient X, Y et Z des espaces de Banach. Soient $U \subset X$ un ouvert de X et $V \subset Y$ un ouvert de Y . Soient f une application de U dans V et g une application de V dans Z .

Si f est Fréchet différentiable en $x \in U$, et si g est Fréchet différentiable en $y = f(x)$, alors $g \circ f$ est Fréchet différentiable en x et $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$.

Remarque 1.3. *La composition de deux applications Gâteaux différentiable n'est pas nécessairement Gâteaux différentiable.*

Théorème 1.7 (Différentiabilité au sens de Fréchet d'une application à valeurs dans un produit).

Soient X et Y_i pour $i = 1, \dots, n$ des espaces vectoriels normés. Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ une application de

$U \subset X$ (un ouvert de X) dans $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$ (pour $i = 1, \dots, n$, f_i est une application de U dans Y_i).

L'application f est Fréchet différentiable (respectivement Gâteaux différentiable) en $x \in U$ si et seulement si pour $i = 1, \dots, n$, les applications f_i sont Fréchet différentiables (respectivement Gâteaux différentiables) en x . De plus, $Df(x) = (Df_1(x), \dots, Df_n(x))$.

Démonstration. Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ une application de $U \subset X$ dans $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$, supposons f_i est Fréchet différentiable en x pour tout $i = 1, \dots, n$ alors il existe un opérateur linéaire borné $T^i : X \rightarrow Y_i$ (dérivé de Fréchet de f_i en x) tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_i(x + th) - f_i(x)) = T_x^i(h) \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On applique la définition, pour tout $x \in U$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + th) - f(x)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((f_1, \dots, f_n)(x + th) - (f_1, \dots, f_n)(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((f_1(x + th), \dots, f_n(x + th)) - (f_1(x), \dots, f_n(x))) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_1(x + th) - f_1(x), \dots, f_n(x + th) - f_n(x)) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_1(x + th) - f_1(x)), \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_n(x + th) - f_n(x)) \right) \\ &= (T_x^1(h), \dots, T_x^n(h)), \end{aligned}$$

les opérateurs $T_x^1(h), \dots, T_x^n(h)$ sont des opérateurs linéaires bornés alors il existe un opérateur linéaire borné $T_x(h)$ (dérivé de Fréchet de f en x) tel que

$$T_x(h) = (T_x^1(h), \dots, T_x^n(h)),$$

donc l'application f est Fréchet différentiable en x . □

1.2.6 Relation entre différentielles de Gâteaux et de Fréchet

Tout application f qui est Fréchet différentiable au point $x \in U$ alors f est Gâteaux différentiable, mais réciproquement n'est pas vraie.

Par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^6}{(y - x^2)^2 + x^8} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que cette fonction est Gâteaux différentiables, on applique la définition au point $(0, 0)$ avec la direction (a, b) alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \left(f((0, 0) + t(a, b)) - f(0, 0) \right) &= \frac{1}{t} (f(ta, tb)) \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{(ta)^6}{((tb) - (ta)^2)^2 + (ta)^8} \right) \\ &= \frac{t^5 a^6}{t^2(b - ta^2)^2 + t^8 a^8} \\ &= \frac{t^3 a^6}{(b - ta^2)^2 + t^5 a^8} \end{aligned}$$

et donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(ta, tb) - f(0, 0)) = 0$. Mais

$$f(x, x^2) = \frac{1}{x^2},$$

alors f n'a pas de limite finie en $(0, 0)$. Donc f n'est pas Fréchet différentiable en $(0, 0)$.

1.2.7 Différentielles en dimension finie

Si f est différentiable en un point $a \in U$ alors les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pour $i = 1, 2, \dots, n$ existent et on a

$$Df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i, \quad \text{pour tout } h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Maintenant, on suppose $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^p, U$ est un ouvert de X et f une application définie sur U a valeurs dans Y

$$\begin{aligned} f : \quad U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

avec f_i définie sur U a valeurs réelles est la i -ème composante de f . L'application f est différentiable en $x \in U$ si et seulement si chaque composante de $f = (f_1, \dots, f_p)$ est différentiable en x et dans ce cas chaque f_i admet une dérivée partielle par rapport a chaque variable x_j . Pour tout $i = 1, 2, \dots, p$ et tout $h \in \mathbb{R}^p$

$$Df_i(x)(h) = \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(x) h_j,$$

donc

$$Df(x)(h) = \begin{pmatrix} Df_1(x)(h) \\ \vdots \\ Df_p(x)(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \partial_j f_1(x) h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \partial_j f_p(x) h_j \end{pmatrix}$$

ce qui peut écrire sous forme matricielle

$$Df(x)(h) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x) & \dots & \partial_n f_p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

est donc la matrice de l'application linéaire $Df(x)$ lorsque \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p sont munis de leur base canonique respective. Cette matrice est appelée **matrice jacobienne** de f en x , elle est notée $Jf(x)$

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x) & \dots & \partial_n f_p(x) \end{pmatrix}$$

ainsi, sous forme matricielle l'expression de la différentielle de f en x est donnée par

$$Df(x)(h) = Jf(x)h, \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier, si $p = 1$, la différentiel de f au point $x \in U$ est

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

est appelé **gradient** de f en x , il est noté $\nabla f(x)$, ou encore **grad** $f(x)$. Dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}^p$, en notant $f = (f_1, \dots, f_p)$, si f est dérivable en x , alors

$$Df(x)(h) = (Df_1(x), \dots, Df_p(x))h, \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R},$$

et on identifie simplement $Df(x)$ au vecteur de \mathbb{R}^p , $(Df_1(x), \dots, Df_p(x))$.

1.2.8 Théorème de la valeur moyenne

Le Théorème de la valeur moyenne pour les fonctions réelles différentiables est

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \tag{1.2.1}$$

avec $c \in]a, b[$, n'est pas vérifié dans l'espace de Banach. Cependant, si F est un opérateur différentiable entre deux espaces de Banach X et Y , alors

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \sup_{\bar{x} \in L(x,y)} \|DF(\bar{x})\| \cdot \|x - y\|, \tag{1.2.2}$$

ou

$$L(x, y) = \{z : z = \lambda y + (1 - \lambda)x, 0 \leq \lambda \leq 1\}. \tag{1.2.3}$$

On définit

$$z(\lambda) = \lambda y + (1 - \lambda)x, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \tag{1.2.4}$$

et

$$F(\lambda) = F(z(\lambda)) = F(\lambda y + (1 - \lambda)x). \quad (1.2.5)$$

Diviser l'intervalle $0 \leq \lambda \leq 1$ en n sous-intervalles de longueurs $\Delta\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, on choisi des points λ_i dans les sous-intervalles correspondants et dans l'intégrale réel de Riemann, on considère la somme

$$\sum_{\sigma} F(\lambda_i) \Delta\lambda_i = \sum_{i=1}^n F(\lambda_i) \Delta\lambda_i, \quad (1.2.6)$$

avec σ est la partition de l'intervalle, et

$$|\sigma| = \max_{(i)} \Delta\lambda_i. \quad (1.2.7)$$

Définition 1.6. Si

$$S = \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \sum_{\sigma} F(\lambda_i) \Delta\lambda_i \quad (1.2.8)$$

existe, alors il est appelée **l'intégrale de Riemann** de $F(\lambda)$ entre 0 et 1, notée

$$S = \int_0^1 F(\lambda) d\lambda = \int_x^y F(\lambda) d\lambda. \quad (1.2.9)$$

Définition 1.7. Un opérateur borné $P(\lambda)$ dans $[0, 1]$ telle que l'ensemble des points discontinus est de mesure nulle est dite intégrable sur $[0, 1]$.

Théorème 1.8 (Théorème de Taylor). [10].

Si F est m -Fréchet Différentiable dans $U(x_0, R)$, $R > 0$ et $F^{(m)}(x)$ est intégrable de x à toute $y \in U(x_0, R)$, alors

$$F(y) = F(x) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n!} F^{(n)}(x)(y-x)^n + R_m(x, y), \quad (1.2.10)$$

$$\left\| F(y) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} F^{(n)}(x)(y-x)^n \right\| \leq \sup_{\bar{x} \in L(x, y)} \|F^{(m)}(\bar{x})\| \frac{\|y-x\|^m}{m!}, \quad (1.2.11)$$

avec

$$R_m(x, y) = \int_0^1 F^{(m)}(\lambda y + (1 - \lambda)x)(y-x)^m \frac{(1 - \lambda)^{m-1}}{(m-1)!} d\lambda. \quad (1.2.12)$$

1.3 Points fixes

Le problème de la recherche des zéros d'un opérateur est fréquemment rencontré. En réalité, il s'agit de résoudre une équation ou, après avoir ramené tous les termes à gauche du signe de l'égalité, elle se présente comme

$$g(x) = 0.$$

On isole un terme contenant x de la sorte à pouvoir écrire³

$$x = f(x). \quad (1.3.1)$$

On appelle l'opérateur $f(x)$ l'opérateur d'itération et une itération du point fixe est définie par l'algorithme qui suit.

Il fournit une foule de résultats d'existence mais aussi une méthode d'approximation et de calcul. L'idée de base est la suivante :

on construit la suite des approximations successives ou bien l'itération de **Picard**

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (n \geq 0), \quad x_0 \in X. \quad (1.3.2)$$

Si cette suite converge vers $x^* \in X$ pour une certaine point initiale $x_0 \in X$ et si f est continue dans un espace de Banach, alors

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x^*).$$

C'est-à-dire, x^* est un point fixe de l'opérateur f .

Géométriquement, un point fixe correspond à l'intersection du graphe de f avec la droite $y = x$. La figure 1.3 représenté la méthode du point fixe.

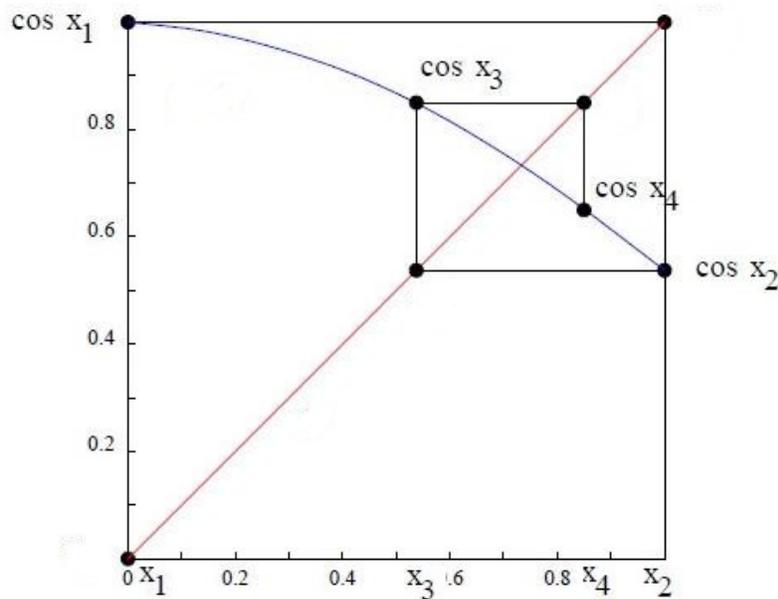


FIGURE 1.2 – Itération de la méthode du point fixe pour $x = \cos(x)$.

Exemple 4. Soit l'équation $f(x) = x^2 - a$ avec $a \neq 0$, on résoudre l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de point fixe.

3. Cette transformation est toujours possible mais elle n'est pas unique.

1. Première fonction g

$f(x) = x^2 - a = 0$, pour tout $x \neq 0$ alors $x - \frac{a}{x} = 0$, donc $x = \frac{a}{x}$,

conduit à $h(x) = x - \frac{a}{x}$ et $g(x) = \frac{a}{x}$, mais $x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$ diverge quels que soient les valeurs de a et $x_0 \neq \sqrt{a}$.

2. Autre fonction g

$f(x) = x^2 - a = 0$, pour tout $x \neq 0$ alors $x = 2x - \frac{a}{x}$, donc la fonction g est définie par

$$g(x) = 2x - \frac{a}{x},$$

la suite $x_{n+1} = 2x_n - \frac{a}{x_n}$ est diverge aussi quels que soient les valeurs de a et $x_0 \neq \sqrt{a}$.

3. Une bonne fonction g

$f(x) = x^2 - a = 0$, pour tout $x \neq 0$ alors $x = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x} \right)$, donc la fonction g est définie par

$$g(x) = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x} \right),$$

la suite $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ est converge linéairement vers $\pm\sqrt{a}$.

4. Une meilleure fonction g

$f(x) = x^2 - a = 0$, pour tout $x \neq 0$ alors $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$, donc la fonction g est définie par

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right),$$

la suite $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ est converge quadratiquement vers $\pm\sqrt{a}$.

Théorème 1.9. Si f est un opérateur continue dans un espace de Banach X , et la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers le point $x^* \in X$ pour un certain point initiale $x_0 \in X$, alors x^* est un point fixe de l'opérateur f .

Démonstration. On a $x_{n+1} = f(x_n)$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n),$$

mais on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*,$$

et pour f est continue on trouve

$$x^* = f \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right),$$

donc $x^* = f(x^*)$.

Alors x^* est un point fixe de l'opérateur f . □

1.3.1 Théorème des applications contractantes

Définition 1.8. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et f est une application de X dans lui même. L'opérateur f est un **contraction** s'il est Lipschitzien pour une constante λ tel que $0 \leq \lambda < 1$. Donc

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \quad \text{pour tout } x, y \in X. \quad (1.3.3)$$

On appelle constante de Lipschitz la constante λ , ou bien λ s'appelle la constante de contraction pour f .

La plus petite des constantes de Lipschitz est donnée par

$$\mathbf{Lip}(f) = \sup \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}$$

où le sup est pris pour tous les x et $y \in X$, $x \neq y$.

Définition 1.9. Une application $f : X \rightarrow X$ est **dilatante** s'il existe une constante $\Lambda > 1$ telle que, pour tout x et $y \in X$, on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \Lambda \|x - y\|.$$

Une application dilatante est injective. Une application bijective $f : X \rightarrow X$ est dilatante si et seulement si f^{-1} est contractante puisque

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \Lambda \|x - y\|$$

équivalent à

$$\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{\Lambda} \|x - y\|,$$

la constante $\Lambda > 1$ devenant $\frac{1}{\Lambda} < 1$.

Proposition 1.4. Une application $f : X \rightarrow X$ qui est Lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème 1.10 (Banach). Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et l'opérateur $f : X \rightarrow X$ est un contraction. Alors f a un point fixe unique.

Démonstration. **L'existence :** On a

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \lambda \|x_1 - x_0\|,$$

d'après l'équation (1.3.2) on obtient

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &\leq \lambda \|x_1 - x_0\| \\ \|x_3 - x_2\| &\leq \lambda \|x_2 - x_1\| \leq \lambda^2 \|x_1 - x_0\| \\ &\vdots \\ \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|, \end{aligned}$$

et, ainsi

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (\lambda^{m-1} + \dots + \lambda + 1) \lambda^n \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(x_n)_{(n \geq 0)}$ est de Cauchy dans un espace de Banach X et comme elle converge vers certain point x^* , et d'après le Théorème 1.9 x^* est un point fixe de l'opérateur f .

L'unicité : Supposons qu'il existe deux points fixes x, y de f . Puisque f est un contraction,

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\| < \|x - y\|,$$

contradiction. Donc le point fixe de f est unique. □

Le Théorème 1.10 est vrais pour $\lambda < 1$, si $\lambda = 1$ alors f n'admet pas un point fixe comme l'exemple $g(x) = x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.11 (Picard). *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $f : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors f possède un point fixe x^* et pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_n) converge vers x^* , la vitesse de convergence vérifie alors pour tout $n \geq 0$*

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\|. \quad (1.3.4)$$

Démonstration. L'inégalité (1.3.4) se prouve en passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente. En particulier

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{1 - \lambda}.$$

□

Le résultat que l'on vient de présenter a ceci d'exceptionnel que l'on converge vers un unique point fixe x^* quel que soit le point initial x_0 choisi.

Remarque 1.4. *D'après les equation (1.3.1), (1.3.3) et $x^* = f(x^*)$ on a*

$$\|x_n - x^*\| = \|f(x_{n-1}) - f(x^*)\| \leq \|x_{n-1} - x^*\| \leq \lambda^n \|x_0 - x^*\| \quad (n \geq 1).$$

Exemple 5.

- $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+; x \mapsto \sqrt{1+x}$ possède un point fixe x^* sur $[1, +\infty[$, $\left(x^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.
- $f :]0, 1] \rightarrow]0, 1]; x \mapsto \frac{x}{2}$ ne possède pas de point fixe : $]0, 1]$ n'est pas un espace de Banach.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ ne possède pas de point fixe, f n'est pas contractant (même si $\forall x \neq y, |f(x) - f(y)| < |x - y|$).

– $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{x}{2} + 1$ ne possède pas de point fixe, on n'a pas $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.

Remarque 1.5. Le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre l'équation $f(x) = x$, tel que $\|x_n - x^*\| < \varepsilon$, est donné par

$$n > \frac{1}{\ln \lambda} \ln \left(\frac{\varepsilon(1 - \lambda)}{\|x_1 - x_0\|} \right).$$

Exemple 6 (Équation intégrale de Fredholm). Soit $K(x, y)$ une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$, $f_0(x)$ est continue sur $[a, b]$ et considérez l'équation

$$f(x) = f_0(x) + \gamma \int_a^b K(x, y)f(y)dy.$$

Définie l'opérateur $P : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ par $P(f) = g$ donne par

$$g(x) = f_0(x) + \gamma \int_a^b K(x, y)f(y)dy.$$

Le point fixe de P est une solution de l'équation intégrale. On obtient à partir de $P(f) = g$

$$\begin{aligned} \|P(q_1) - P(q_2)\| &= \sup_{x \in [a, b]} \left| P(q_1(x)) - P(q_2(x)) \right| \\ &= |\gamma| \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^b K(x, y)(q_1(y) - q_2(y))dy \right| \quad (\text{d'après Théorème de Weierstrass}) \\ &\leq |\gamma|\delta \left| \int_a^b (q_1(y) - q_2(y))dy \right| \\ &\leq |\gamma|\delta \|q_1 - q_2\| \int_a^b dy \\ &\leq |\gamma|\delta(b - a) \|q_1 - q_2\|. \end{aligned}$$

Alors l'opérateur P est contraction s'il existe $\lambda < 1$ tel que

$$|\gamma|\delta(b - a) \leq \lambda.$$

Définition 1.10. Soit (x_n) une suite dans un espace normé X . Puis la suite non négative (v_n) pour lequel

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq v_{n+1} - v_n, \quad \forall n \geq 0,$$

est une suite qui majorée (x_n) .

N'importe quelle suite de majoration est nécessairement croissant.

Lemme 1.2. Soit (v_n) est une suite de majoration pour (x_n) dans un espace de Banach X . Si

$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v^* < \infty$ existe, alors $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existe et

$$\|x^* - x_n\| \leq v^* - v_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Démonstration. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{j=n}^{n+m-1} \|x_{j+1} - x_j\| \\ &\leq \sum_{j=n}^{n+m-1} (v_{j+1} - v_j) = v_{n+m} - v_n, \end{aligned}$$

pour $m \rightarrow +\infty$ on obtient l'inégalité suivant

$$\|x^* - x_n\| \leq v^* - v_n, \quad \forall n \geq 0.$$

□

1.3.2 Convergence quadratique

Théorème 1.12 (Convergence quadratique). Soit $f : X \rightarrow X$ de classe C^2 et soit x^* un point fixe de f tel que $Df(x^*) = 0$. Soient $M > 0$ et $r > 0$ deux nombres pour lesquels les conditions suivantes sont satisfaites

1. $\|D^2f(y)\| \leq 2M$ pour tout y tel que $\|y - x^*\| \leq r$,
2. $2Mr \leq 1$.

Sous ces hypothèses, pour tout x_0 tel que $\|x_0 - x^*\| \leq r$, la suite des approximations successives $x_{n+1} = f(x_n)$ vérifie

$$\|x_n - x^*\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} \|x_0 - x^*\|.$$

La suite (x_n) converge donc très rapidement vers x^* , le Théorème 1.12 montre que le nombre de décimales exactes est multiplié par 2 à chaque itération. On qualifie de quadratique une telle vitesse de convergence.

Démonstration. Elle repose sur la formule de Taylor à l'ordre 2 et au voisinage de x^*

$$f(y) = f(x^*) + Df(x^*)(y - x^*) + \int_0^1 (1-t)D^2f(x^* + t(y - x^*))(y - x^*)^2 dt,$$

ce qui donne, lorsque $\|y - x^*\| \leq r$

$$\begin{aligned} \|f(y) - x^*\| &= \|f(y) - f(x^*)\| = \left\| \int_0^1 (1-t)D^2f(x^* + t(y - x^*))(y - x^*)^2 dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|(1-t)D^2f(x^* + t(y - x^*))(y - x^*)^2\| dt \\ &\leq \int_0^1 (1-t) \|D^2f(x^* + t(y - x^*))\| \|y - x^*\|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 (1-t)2M \|y - x^*\|^2 dt = M \|y - x^*\|^2. \end{aligned}$$

A ce stade on raisonne par récurrence. Soit x_0 avec $\|x_0 - x^*\| \leq r$. Pour $n = 0$ il n'y a rien à démontrer. Le passage de n à $n + 1$ se fait ainsi supposons que $\|x_n - x^*\| \leq r$ et que l'inégalité du Théorème soit vraie pour n . L'inégalité que l'on vient de prouver appliquée à $y = x_n$ donne

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq M \|x_n - x^*\|^2 \\ &\leq M \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n-1}} \|x_0 - x^*\| \right)^2 \\ &\leq M \|x_0 - x^*\| \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}-2} \|x_0 - x^*\| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}-1} \|x_0 - x^*\|. \end{aligned}$$

Ceci prouve aussi que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\| \leq r$$

et achève la démonstration. □

On examine maintenant quelles modifications apportent l'introduction d'une erreur de calcul dans un tel schéma.

Théorème 1.13. *Soit $f : X \rightarrow X$ de classe C^2 et soit x un point fixe de f tel que $Df(x^*) = 0$. Soient $M > 0$, $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ trois nombres pour lesquels les conditions suivantes sont satisfaites*

1. $\|D^2f(y)\| \leq 2M$ pour tout y tel que $\|y - x^*\| \leq r$,
2. $2Mr \leq 1$,
3. $4\varepsilon \leq r$.

Soit x_0 tel que $\|x_0 - x^*\| \leq r$ et soit (x_n) une suite qui vérifie

$$\|x_{n+1} - f(x_n)\| \leq \varepsilon.$$

Sous ces hypothèses, pour tout $n \geq 1$

$$\|x_n - x^*\| \leq 2\varepsilon + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n-1} \|x_0 - x^*\|.$$

Démonstration. Par récurrence sur n , on va prouver qu'il existe une suite (θ_n) de nombres réels positive telle que

$$\|x_n - x^*\| \leq \theta_n \varepsilon + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n-1} \|x_0 - x^*\|$$

et que $\|x_n - x^*\| \leq r$ pour tout n . Il faut noter que, si $\|x_n - x^*\| \leq r$, on a

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq \|x_{n+1} - f(x_n)\| + \|x_n - x^*\| \\ &\leq \varepsilon + M \|x_n - x^*\|^2, \end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité prouvée dans la démonstration du Théorème précédent.

Remarquons aussi que $2M\varepsilon \leq \frac{1}{4}$. On a

$$\begin{aligned}\|x_1 - x^*\| &\leq \varepsilon + M \|x_0 - x^*\|^2 \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{2} \|x_0 - x^*\|,\end{aligned}$$

qui correspond à la formule souhaitée avec $\theta_1 = 1$. De plus

$$\begin{aligned}\|x_1 - x^*\| &\leq \varepsilon + \frac{1}{2} \|x_0 - x^*\| \\ &\leq \frac{r}{4} + \frac{r}{2} \\ &\leq r,\end{aligned}$$

ce qui prouve le cas $n = 1$. Le passage de n à $n + 1$ se fait ainsi

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\| &\leq \varepsilon + M \|x_n - x^*\|^2 \\ &\leq \varepsilon + M \left(\theta_n \varepsilon + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} \|x_0 - x^*\| \right)^2 \\ &\leq \varepsilon + 2M\theta_n^2 \varepsilon^2 + 2M \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \|x_0 - x^*\|^2 \\ &\leq \varepsilon \left(1 + \frac{\theta_n^2}{4} \right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \|x_0 - x^*\|,\end{aligned}$$

qui donne la valeur $\theta_{n+1} = 1 + \frac{\theta_n^2}{4}$. La suite θ_n est croissante et a pour limite $\theta = 2$ qui est aussi la valeur de $1 + \frac{\theta^2}{4}$. On a donc prouvé que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq 2\varepsilon + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \|x_0 - x^*\|$$

qui est l'inégalité souhaitée. Enfin, en utilisant $4\varepsilon \leq r$ et $\|x_0 - x^*\| \leq r$, on obtient

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

ce qui termine la démonstration. □

Ce résultat prouve que la convergence quadratique n'est pas détruite par l'introduction d'erreurs, la suite des itérés (x_n) va « converger » vers la boule de centre x^* (la limite exacte) et de rayon 2ε .

Chapitre 2

Méthode de Newton

La méthode de Newton est l'une des méthodes bien connues pour trouver successivement mieux des approximations pour les racines d'une fonction f . La formule pour la méthode de Newton peut être déduite des premiers termes de la série de Taylor de la fonction f au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0) + \dots,$$

on garde seulement la partie linéaire du développement, on obtient

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{2.0.1}$$

on trouve d'après l'équation précédent la tangente au point $(x_0, f(x_0))$, est donnée par

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette tangente intersecte l'axe des x au point $(x_1, 0)$ donné par

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

c'est équivalent à

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Pour un x_0 bien choisi, alors x_1 est une meilleure approximation de la racine de f (le graphe prouve ce résultat). On peut répéter cette approximation à partir de x_1 afin d'obtenir des approximations plus fines.

Donc la suite des approximations x_{n+1} de f d'après la valeur initiale x_0 est de la façon suivante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Exemple 7. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - 7,$$

la racine de f est $\sqrt[3]{7} \approx 1.9129$. On commence la recherche de la racine avec la méthode de Newton à partir de $x_0 = 5.7$, les cinq premières approximations sont

$$5.7, 3.871816969, 2.736860604, 2.136083331, 1.935431626, 1.913191749,$$

alors la suite est converge vers la racine du f (voir la figure 2.1).

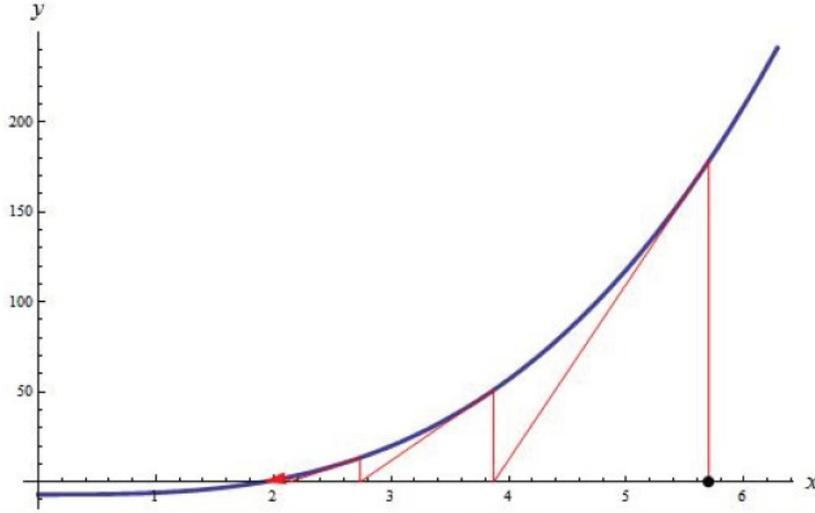


FIGURE 2.1 – La méthode de Newton pour $f(x) = x^3 - 7$.

2.1 Linéarisation de l'équation

Soit f un opérateur Fréchet différentiable sur un ensemble convexe ouvert D d'un espace de Banach X dans l'espace de Banach Y . On considère l'équation

$$f(x) = 0. \tag{2.1.1}$$

La méthode principale pour construire les approximations successives x_n vers la solution x^* (s'il existe) de l'équation (2.1.1) est basée sur la linéarisation successive de l'équation.

Si x est une approximation d'un zéro de cet équation, la méthode de Newton raffine cette approximation en prenant pour nouvelle valeur la solution x de l'équation linéarisée au voisinage de x_n

$$f(x) \approx L_n(x) = f(x_n) + Df(x_n)(x - x_n), \tag{2.1.2}$$

et L_n est un opérateur linéaire. Si $Df(x_n)^{-1} \in L(Y, X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de Y dans X , le zéro de $L_n(x)$ définie une nouvelle approximation x_{n+1} , est donné par

$$x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1}f(x_n), \quad (n \geq 0). \tag{2.1.3}$$

Le procédé itérative généralisé par (2.1.3) s'est la méthode de Newton-Kantorovich. L'interprétation géométrique de cette méthode est connu, si f est une fonction réelle. Dans ce cas, x_{n+1} est l'intersection de la line tangente $y = Df(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ de la fonction f au point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des x .

Le défaut de base de la méthode (2.1.3) est que chaque étape implique la solution d'une équation linéaire d'un opérateur linéaire différent $Df(x_n)$. Pour cette raison, on construit souvent les approximations successives on utilise les équation linéaire (2.1.2), cependant semblables à elles.

La formule plus utilisé pour remplacé (2.1.2) c'est l'équation

$$f(x_n) + Df(x_0)(x - x_n), \quad (2.1.4)$$

où x_0 est l'approximation initiale. Les approximations successives sont alors définies par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - Df(x_0)^{-1}f(x_n) \quad (n \geq 0). \quad (2.1.5)$$

Cette méthode s'appelle la méthode de **Newton-Kantorovich Modifiée** (NKM).

2.2 Méthode de Newton-Kantorovitch

Soient X et Y deux espaces de Banach réels ou complexes, et D un ouvert de X , $U(x, r) = \{z \in X, \|z - x\| < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r et $\bar{U}(x, r)$ la boule fermée. Soit $f : D \subset X \rightarrow Y$, supposons que la boule $U(x_0, r)$ existe. On note $Df(x)$ et $D^2f(x)$ la premier et la deuxième dérivés de f sur D au sens de Fréchet.

Pour approximer la solution x^* de l'équation $x = x - Df(x)^{-1}f(x)$, on suppose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

On veut savoir dans quelles conditions sur f et Df le point x^* est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Proposition 2.1. *Si Df est continue en $x = x^*$, alors on a*

$$f(x^*) = 0. \quad (2.2.1)$$

Démonstration. D'après l'équation (2.1.3), on a

$$x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1}f(x_n),$$

donc

$$x_{n+1} - x_n = -Df(x_n)^{-1}f(x_n),$$

alors on obtient

$$Df(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n).$$

D'après la continuité de Df on a la continuité de f en x^* , alors on passe a la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Df(x_n)(x_{n+1} - x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -f(x_n),$$

donc on trouve

$$f(x^*) = 0.$$

□

Proposition 2.2. *Si $\| Df(x) \| \leq b$ dans certains boule fermée qui contient (x_n) , alors x^* est une solution de l'équation $f(x) = 0$.*

Démonstration. On a

$$Df(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n),$$

donc

$$\begin{aligned} \| f(x_n) \| &= \| Df(x_n)(x_{n+1} - x_n) \| \\ &= \| Df(x_n) \| \cdot \| x_{n+1} - x_n \| \\ &\leq b \| x_{n+1} - x_n \|, \end{aligned}$$

on prend la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\| f(x^*) \| \leq 0,$$

alors

$$f(x^*) = 0.$$

□

Proposition 2.3. *Si*

$$\| D^2 f(x) \| \leq K \tag{2.2.2}$$

dans certains boule fermé

$$\bar{U}(x_0, r) = \{x \in X : \| x - x_0 \| \leq r\}, \quad 0 < r < +\infty,$$

qui contient (x_n) , alors x^ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.*

Démonstration. Le développement de Taylor de Df au voisinage de x_0 , donne

$$Df(x) = Df(x_0) + D^2 f(x_0)(x - x_0),$$

alors

$$Df(x) - Df(x_0) = D^2 f(x_0)(x - x_0),$$

d'après (2.2.2), on trouve

$$\begin{aligned}\|Df(x) - Df(x_0)\| &\leq K \|x - x_0\| \\ &\leq Kr,\end{aligned}$$

pour tout $x \in \bar{U}(x_0, r)$. D'autre part, on peut écrire

$$\|Df(x)\| \leq \|Df(x_0)\| + \|Df(x) - Df(x_0)\|,$$

on pose que

$$b = \|Df(x_0)\| + Kr,$$

alors on obtient

$$\|Df(x)\| \leq b,$$

d'après la Proposition 2.2, donc x^* est une solution de l'équation $f(x) = 0$. \square

Supposons que l'opérateur f est Fréchet différentiable sur D , où x_0 est l'approximation initiale de la méthode Newton-Kantorovich (2.1.3) et que l'opérateur $Df(x)$ satisfait la condition de Lipschitz

$$\|Df(x) - Df(y)\| \leq K \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D. \quad (2.2.3)$$

On va maintenant énoncer et prouver le Théorème de Newton-Kantorovich pour l'approximation des solutions de l'équation $f(x) = 0$. On suppose dans cette section que l'opérateur $Df(x_0)^{-1}$ existe et

$$\|Df(x_0)^{-1}\| \leq b_0. \quad (2.2.4)$$

Théorème 2.1. *Si la condition (2.2.2) est satisfait dans la boule $\bar{U}(x_0, r) \subseteq D$, et supposons que*

$$\|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\| \leq \eta_0 = \eta, \quad (2.2.5)$$

$$h_0 = b_0 K \eta_0 \leq \frac{1}{2}, \quad (2.2.6)$$

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0, \quad (2.2.7)$$

la méthode de Newton-Kantorovich converge vers la solution x^* de l'équation (2.1.1) dans la boule $U(x_0, r)$ ($r \geq r_0$).

Démonstration. Premièrement, on montre que l'équation (2.1.5) est bien défini. Par (2.2.2) on trouve

$$\|Df(x_1) - Df(x_0)\| \leq K \|x_1 - x_0\| = K \eta_0. \quad (2.2.8)$$

En utilisant (2.2.6), on obtient

$$\|Df(x_1) - Df(x_0)\| \leq K \eta_0 \leq \frac{1}{2b_0} < \frac{1}{\|Df(x_0)^{-1}\|}. \quad (2.2.9)$$

D'après le Théorème 1.4 l'opérateur $Df(x_1)^{-1}$ est existe, donc

$$\|Df(x_1)^{-1}\| \leq \frac{\|Df(x_0)^{-1}\|}{1 - \|Df(x_0)^{-1}\| \cdot \|Df(x_1) - Df(x_0)\|} \quad (2.2.10)$$

et

$$\|Df(x_1)^{-1}\| \leq \frac{b_0}{1 - b_0\eta_0K} = \frac{b_0}{1 - h_0} = b_1. \quad (2.2.11)$$

Alors, x_2 existe. Pour estimer $\|x_2 - x_1\|$, on note

$$\|x_2 - x_1\| = \|Df(x_1)^{-1}f(x_1)\| \quad (2.2.12)$$

et

$$\begin{aligned} Df(x_1)^{-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \{I - Df(x_0)^{-1}Df(x_1)\}^n \right) Df(x_0)^{-1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \{Df(x_0)^{-1}(Df(x_0) - Df(x_1))\}^n \right) Df(x_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Par conséquent,, d'après (2.2.10)

$$\|Df(x_1)^{-1}\| \cdot \|f(x_1)\| \leq \frac{1}{1 - \|Df(x_0)^{-1}\| \cdot \|Df(x_1) - Df(x_0)\|} \|Df(x_0)^{-1}\| \cdot \|f(x_1)\|$$

alors

$$\begin{aligned} \|Df(x_1)^{-1}f(x_1)\| &\leq \frac{1}{1 - \|Df(x_0)^{-1}\| \cdot \|Df(x_1) - Df(x_0)\|} \|Df(x_0)^{-1}f(x_1)\| \\ &\leq \frac{1}{1 - b_0\eta_0K} \|Df(x_0)^{-1}f(x_1)\| \\ &\leq \frac{1}{1 - h_0} \|Df(x_0)^{-1}f(x_1)\|, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

et

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{1 - h_0} \|Df(x_0)^{-1}f(x_1)\|. \quad (2.2.15)$$

Pour estimer $\|Df(x_0)^{-1}f(x_1)\|$, on considère l'opérateur

$$f_1(x) = x - Df(x_0)^{-1}f(x), \quad (2.2.16)$$

on note

$$Df_1(x_0) = I - Df(x_0)^{-1}Df(x_0) = 0. \quad (2.2.17)$$

Par (2.2.16)

$$Df(x_0)^{-1}f(x_1) = x_1 - f_1(x_1), \quad (2.2.18)$$

avec

$$x_1 = f_1(x_0), \quad (2.2.19)$$

on utilise (2.2.17) pour écrire (2.2.18), alors

$$Df(x_0)^{-1}f(x_1) = -(f_1(x_1) - f_1(x_0) - Df_1(x_0)(x_1 - x_0)), \quad (2.2.20)$$

d'après Théorème 1.8 on trouve

$$\|Df(x_0)^{-1}f(x_1)\| \leq \sup_{\bar{x} \in L(x_0, x_1)} \|D^2 f_1(\bar{x})\| \frac{\|x_1 - x_0\|^2}{2}. \quad (2.2.21)$$

On a

$$D^2 f_1(x) = -Df(x_0)^{-1}D^2 f(x). \quad (2.2.22)$$

Puisque $x_1 \in \bar{U}(x_0, r)$, si (2.2.17) est satisfait, donc

$$\|D^2 f_1(x)\| \leq b_0 K \quad (2.2.23)$$

dans $L(x_0, x_1)$. D'après (2.2.21), on obtient

$$\|Df(x_0)^{-1}f(x_1)\| \leq \frac{b_0 K \eta_0^2}{2} = \frac{h_0 \eta_0}{2}, \quad (2.2.24)$$

et d'après (2.2.15), on trouve

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{h_0}{2(1 - h_0)} \eta_0 := \eta_1 \quad (2.2.25)$$

et $\frac{h_0}{1 - h_0} \leq 1$ donc

$$\eta_1 \leq \frac{1}{2} \eta_0.$$

Alors

$$\begin{aligned} h_1 &:= b_1 \eta_1 K \\ &= \frac{b_0}{1 - h_0} \frac{1}{2} \frac{h_0}{1 - h_0} \eta_0 K \\ &= \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{(1 - h_0)^2} \\ &\leq 2h_0^2 \\ &\leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

donc (2.2.6) est satisfait si on remplace x_0 par x_1 . Maintenant, si pour

$$r_1 := \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1} \eta_1, \quad (2.2.27)$$

on montre que

$$\bar{U}(x_1, r_1) \subset \bar{U}(x_0, r_0), \quad (2.2.28)$$

la condition (2.2.2) est satisfait avec x_0 est remplacé par x_1 . Par le remplacement direct

$$\sqrt{1 - 2h_1} = \left(1 - \frac{h_0^2}{(1 - h_0)^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{1 - h_0} \sqrt{1 - 2h_0} \quad (2.2.29)$$

et

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1 - (1 - h_0)^{-1} \sqrt{1 - 2h_0}}{\frac{1}{2} (h_0^2 / (1 - h_0)^2)} \frac{1}{2} \frac{h_0}{1 - h_0} \eta_0 \\
&= \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} - 1 \right) \eta_0 \\
&= r_0 - \eta_0.
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Par conséquence, si $x \in \bar{U}(x_1, r_1)$, alors $\|x - x_1\| \leq r_1 = r_0 - \eta_0$ et

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| &\leq \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\
&\leq (r_0 - \eta_0) + \eta_0 = r_0,
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

donc $x \in \bar{U}(x_0, r_0)$, alors (2.2.28) est satisfait. Il résulte par l'induction que l'approximation (2.1.3) génère une suite (x_n) infinie, à partir de x_0 à laquelle les hypothèses du Théorème sont satisfaites. Il reste à démontrer que cette suite converge vers une solution x^* de l'équation (2.1.1). Pour la suite x_n , les suites b_n, η_n et h_n définies par

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 - h_{n-1}}, \tag{2.2.32}$$

$$\eta_n = \frac{1}{2} \frac{h_{n-1} \eta_{n-1}}{1 - h_{n-1}}, \tag{2.2.33}$$

$$h_n = \frac{1}{2} \frac{h_{n-1}^2}{(1 - h_{n-1})^2}, \tag{2.2.34}$$

$$\tag{2.2.35}$$

sont obtenus pour $n = 1, 2, \dots$. On a

$$h_n \leq 2h_{n-1}^2 \leq \frac{1}{2} (2h_{n-2})^4 \leq \dots \leq \frac{1}{2} (2h_0)^{2^n}. \tag{2.2.36}$$

Par (2.2.26) et

$$\begin{aligned}
\eta_n &= \frac{1}{2} \frac{h_{n-1} \eta_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \leq h_{n-1} \eta_{n-1} \leq h_{n-1} h_{n-2} \eta_{n-2} \leq \dots \\
&\leq \frac{1}{2^n} (2h_0)^{2^{n-1}} (2h_0)^{2^{n-2}} \dots (2h_0) \eta_0 \\
&= \frac{1}{2^n} (2h_0)^{2^n - 1} \eta_0.
\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

Pour tout entier positive p , $x_{n+p} \in \bar{U}(x_n, r_n)$, alors

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_n\| &\leq r_n = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_n}}{h_n} \eta_n \\
&\leq 2\eta_n,
\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

donc à partir de (2.2.37)

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{1}{2^n} (2h_0)^{2^n - 1} \eta_0. \tag{2.2.39}$$

Alors (x_n) est une suite de Cauchy qui a une limite $x^* \in \bar{U}(x_0, r_0)$, et x^* est une solution de (2.1.1) par la Proposition 2.3. □

Remarque 2.1.

a. On trouve de la démonstration que, sous les hypothèses du Théorème 2.1,

$$\|x_n - x^*\| \leq r_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

b. Sous les hypothèses du Théorème 2.1, on obtient

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{1}{2^n} (2h_0)^{2^n - 1} \eta_0.$$

La solution x^* de l'équation (2.1.1) est un zéro simple de l'opérateur f si l'opérateur $Df(x^*)^{-1}$ existe et continue.

Exemple 8. Supposons que la seconde dérivée de Fréchet de l'opérateur f est un opérateur intégral quadratique Q , où

$$[D^2 f(x)vw](s) = Q(x)(s) = \int_0^1 (s-t)x^2(t)v(t)w(t)dt, \quad (2.2.40)$$

dans l'espace $C[0, 1]$, l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} |Q(x)(s)| &\leq \sup_{\|v\|=1, \|w\|=1} \left| s \int_0^1 x^2(t)v(t)w(t)dt - \int_0^1 tx^2(t)v(t)w(t)dt \right| \\ &\leq \left| s \int_0^1 x^2(t)dt - \int_0^1 tx^2(t)dt \right| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2} \right) \|x\|^2, \end{aligned}$$

donc

$$\max_{s \in [0, 1]} \|Q(x)\| \leq \frac{3}{2} \|x\|^2,$$

ce qui donne

$$\|Q\| \leq \frac{3}{2}.$$

On prend le point fixe x , avec $\|x\| \leq 1$, alors

$$\|Q(x)\| = \max_{s \in [0, 1]} |sa - b|,$$

où

$$a = \int_0^1 x^2(t) dt \geq 0 \quad \text{et} \quad b = \int_0^1 tx^2(t) dt \geq 0,$$

tel que

$$ab = \int_0^1 (1-t)x^2(t) dt \geq 0$$

et

$$\| Q(x) \| = \max\{b, a - b\}.$$

Mais $tx^2(t) \leq t$, pour tout $x^2(t) \leq 1$, donc

$$b \leq \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

et

$$a - b \leq \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout } \| x \| \leq 1.$$

Alors

$$\| Q \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| Q(x) \| \leq \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

ce qui donne

$$\| Q \| \leq \frac{1}{2}. \tag{2.2.41}$$

Finalement, on prend $x(t) = 1$ pour tout t donc $\| x \| = 1$ et

$$\| Q(x) \| = \sup_{s \in [0,1]} \left| s \int_0^1 dt - \int_0^1 t dt \right| = \sup_{s \in [0,1]} \left| s - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2}. \tag{2.2.42}$$

D'après (2.2.41) et (2.2.42) on obtient $\| Q \| = \frac{1}{2} = K$.

La solution de l'équation intégrale non linéaire est donné par

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s, t) \left[x(t)^{\frac{5}{2}} + \frac{x(t)^3}{5} \right] dt,$$

tel que $x \in C[0, 1]$, $s, t \in [0, 1]$ et la fonction G donné par

$$G(s, t) = \begin{cases} (1 - s)t, & t \leq s, \\ s(1 - t), & s \leq t. \end{cases}$$

Exemple 9. On définit l'opérateur $f : \bar{U} \left(0, \frac{7}{5}\right) \subseteq C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ par

$$[f(x)](s) = x(s) - 1 - \int_0^1 G(s, t) \left[x(t)^{\frac{5}{2}} + \frac{x(t)^3}{5} \right] dt.$$

Alors on trouve

$$[D^2 f(x)yz](s) = - \int_0^1 G(s, t) \left[\frac{15}{4} x(t)^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{5} x(t) \right] z(t)y(t) dt.$$

Avec $x_0(s) = 1$. Alors on obtient

$$\| I - Df(x_0) \| \leq \frac{31}{80} < 1,$$

donc $Df(x_0)^{-1}$ existe et

$$\| Df(x_0)^{-1} \| \leq b_0 = \frac{80}{49},$$

$$\| Df(x_0)^{-1} f(x_0) \| \leq \frac{12}{49} = \eta_0,$$

$$\| D^2 f(x_0) \| \leq K = 0.76463272$$

et

$$h_0 = 0.305725714 < 0.5.$$

Alors les conditions de Théorème (2.1) est satisfait dans $\bar{U}(x_0, r_0) \subseteq \bar{U}(0, \frac{7}{5})$ ou pour r_0 est donnée par

$$r_0 = 0.301721716.$$

On peut maintenant montrer un résultat local pour (2.1.5).

Théorème 2.2. Si x^* est un zéro simple de f , $\|Df(x^*)^{-1}\| \leq b^*$ et

$$A = \left\{ x : \|x - x^*\| < \frac{1}{b^*K} \right\} \subset \bar{U}(x_0, r), \quad (2.2.43)$$

alors l'hypothèse (2.2.6) avec $h < \frac{1}{2}$ et (2.2.7) de Théorème 2.1 sont satisfaits pour tout $x_0 \in B$, où

$$B = \left\{ x : \|x - x^*\| < \frac{2 - \sqrt{2}}{2b^*K} \right\}. \quad (2.2.44)$$

Démonstration. Pour $x_0 \in B$

$$\begin{aligned} \|Df(x_0) - Df(x^*)\| &\leq K\|x_0 - x^*\| \\ &< \frac{2 - \sqrt{2}}{2b^*} \\ &< \frac{1}{\|Df(x^*)^{-1}\|}, \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

de sorte que $Df(x_0)^{-1}$ existe et d'après Théorème 1.4, on trouve

$$b = \frac{b^*}{1 - b^*K\|x_0 - x^*\|} \geq \|Df(x_0)^{-1}\|. \quad (2.2.46)$$

D'après le Théorème fondamentale de calcul on obtient

$$\begin{aligned} f(x^*) - f(x_0) &= \int_0^1 Df(x_0 + \lambda(x^* - x_0))(x^* - x_0)d\lambda \\ &= Df(x_0)(x^* - x_0) + \int_0^1 (Df(x_0 + \lambda(x^* - x_0)) - Df(x_0))(x^* - x_0)d\lambda. \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

Car $f(x^*) = 0$, alors

$$-f(x_0) = Df(x_0)(x^* - x_0) + \int_0^1 (Df(x_0 + \lambda(x^* - x_0)) - Df(x_0))(x^* - x_0)d\lambda.$$

On multiplié cette equation par $Df(x_0)^{-1}$ on obtient

$$-Df(x_0)^{-1}f(x_0) = x^* - x_0 + Df(x_0)^{-1} \int_0^1 (Df(x_0 + \lambda(x^* - x_0)) - Df(x_0))(x^* - x_0)d\lambda, \quad (2.2.48)$$

donc

$$\begin{aligned}
\|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\| &\leq \|x^* - x_0\| + \|Df(x_0)^{-1}\| \cdot \left\| \int_0^1 (Df(x_0 + \lambda(x^* - x_0)) - Df(x_0))(x^* - x_0)d\lambda \right\| \\
&\leq \|x^* - x_0\| + b \int_0^1 \|(Df(x_0 + \lambda(x^* - x_0)) - Df(x_0))\| \cdot \|x^* - x_0\|d\lambda \\
&\leq \left(1 + b \int_0^1 K\lambda\|x^* - x_0\|d\lambda\right) \|x^* - x_0\|,
\end{aligned}$$

alors

$$\|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\| \leq \left(1 + bK\|x^* - x_0\| \int_0^1 \lambda d\lambda\right) \|x^* - x_0\|. \quad (2.2.49)$$

D'après (2.2.46) on obtient

$$\begin{aligned}
\|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\| &\leq \left(1 + \frac{1}{2}bK\|x^* - x_0\|\right) \|x^* - x_0\| \\
&\leq \left(1 + \frac{\frac{1}{2}b^*K\|x^* - x_0\|}{1 - b^*K\|x^* - x_0\|}\right) \|x^* - x_0\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\eta = \frac{1 - \frac{1}{2}b^*K\|x^* - x_0\|}{1 - b^*K\|x^* - x_0\|} \|x^* - x_0\| \geq \|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\|. \quad (2.2.50)$$

Il en résulte que pour $x_0 \in A$

$$h = bK\eta = \frac{1 - \frac{1}{2}b^*K\|x^* - x_0\|}{(1 - b^*K\|x^* - x_0\|)^2} b^*K\|x^* - x_0\| < \frac{1}{2}, \quad (2.2.51)$$

alors (2.2.6) est vérifié pour $h < \frac{1}{2}$. En utilisant les valeurs de h et de η qui donnée ci-dessus

$$\left(1 - \sqrt{1 - 2h}\right) \frac{\eta}{h} < \frac{\eta}{h} = \frac{\eta}{bK\eta} = \frac{1}{bk} = \frac{1 - b^*K\|x^* - x_0\|}{b^*K} = \frac{1}{b^*K} \|x^* - x_0\|, \quad (2.2.52)$$

donc $U(x_0, r_0) \subseteq A \subseteq U(x_0, r)$ satisfaisant l'équation (2.1.3). \square

La valeur $\frac{2 - \sqrt{2}}{2b^*K}$ est la meilleure rayon possible.

Exemple 10. On considère l'équation

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 - x^{*2}\right),$$

avec $x^* > 0$ et $K > 0$. On a

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2b^*K} = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) x^*,$$

et pour

$$\begin{aligned}
x_0 &= x^* - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) x^* \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2}x^*,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$b = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} K x^* \right)^{-1}, \quad \eta = \frac{1}{4} \sqrt{2} x^*,$$

$$\text{alors } h = bK\eta = \frac{1}{2}$$

On examine la convergence de la méthode de Newton-Kantorovich Modifiée (2.1.5).

L'équation (2.1.5) coïncide avec la méthode itératif usuel

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.2.53)$$

pour l'approximation de la solution de l'équation

$$x = Ax \quad (2.2.54)$$

avec

$$Ax = x - Df(x_0)^{-1} f(x). \quad (2.2.55)$$

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1 avec l'inégalité (2.2.4) soit stricte, les approximations successives converge vers une solution $x^* \in U(x_0, r_0)$ de l'équation (2.1.1).*

Démonstration.

On note que l'équation (2.1.1) possède une solution dans la boule $U(x_0, r_0)$ ceci résulte de Théorème 2.1. Maintenant on va démontrer que l'opérateur (2.2.55) satisfait les hypothèses du Théorème 1.10 d'une application contractante dans la boule $U(x_0, r_0)$. Cela signifie que la solution x^* est unique dans la boule $U(x_0, r_0)$, et l'approximation (2.1.5) converge.

Évidemment, pour tout $x, y \in U(x_0, r)$ et $r < R$,

$$Ax - Ay = x - y - Df(x_0)^{-1}(f(x) - f(y)),$$

d'après Théorème fondamentale de calcul, on a

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 Df(y + \lambda(x - y))(x - y) d\lambda,$$

alors

$$\begin{aligned} Ax - Ay &= x - y - Df(x_0)^{-1}(f(x) - f(y)) \\ &= x - y - Df(x_0)^{-1} \int_0^1 Df(y + \lambda(x - y))(x - y) d\lambda \\ &= Df(x_0)^{-1} Df(x_0)(x - y) - Df(x_0)^{-1} \int_0^1 Df(y + \lambda(x - y))(x - y) d\lambda \\ &= Df(x_0)^{-1} \int_0^1 (Df(x_0) - Df(y + \lambda(x - y)))(x - y) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.2.56)$$

D'après la condition de Lipschitz, on trouve

$$\|Ax - Ay\| \leq b_0 K r \|x - y\|. \quad (2.2.57)$$

Par conséquence, A est un opérateur contractante dans la boule $U(x_0, r_0)$. Pour compléter la démonstration, il reste à montrer que

$$AU(x_0, r_0) \subseteq U(x_0, r_0).$$

Soit $x_0 \in D$. Alors, par (2.2.56)

$$\begin{aligned} \|Ax - x_0\| &\leq \|Ax - Ax_0\| + \|Ax_0 - x_0\| \\ &\leq \left\| Df(x_0)^{-1} \int_0^1 (Df(x_0) - Df(x_0 + \lambda(x - x_0)))(x - x_0) d\lambda \right\| + \eta_0. \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $\|x - x_0\| \leq r_0$,

$$\|Ax - x_0\| \leq \frac{b_0 K r_0^2}{2} + \eta_0 = r_0.$$

On note que, par (2.2.57), l'opérateur A est satisfait la condition de Lipschitz avec la constante

$$q = 1 - \sqrt{1 - 2h_0}.$$

□

Si $D = U(x_0, R)$, considérons l'opérateur A défini par (2.2.55), supposons que les conditions du Théorème 2.2.44 est vérifié, et

$$\alpha(r) = \sup_{\|x - x_0\| \leq r} \|Ax - x_0\|. \quad (2.2.58)$$

La fonction $\alpha(r)$ est continue non décroissante. On a montré dans la preuve du Théorème 2.3 que

$$\|Ax - x_0\| \leq \frac{b_0 K \|x - x_0\|^2}{2} + \eta_0, \quad (\|x - x_0\| \leq R). \quad (2.2.59)$$

Par conséquent il en résulte :

Lemme 2.1. [9].

La fonction $\alpha(r)$ satisfait l'inégalité

$$\alpha(r) \leq \frac{b_0 K r^2}{2} + \eta_0 \quad (r_0 \leq r \leq R).$$

Théorème 2.4. [9].

Si, dans les hypothèses du Théorème 2.1 et

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 \leq R < \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0,$$

alors le trinôme du second degré

$$\frac{1}{2} b_0 K r^2 - r + \eta_0$$

est négative dans l'intervalle

$$\left] r_0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 \right[.$$

Remarque 2.2. Si on répète les preuves du Théorème 2.1 et 2.3 en utilisant $Df(x_0)^{-1}f(x)$ au lieu de l'opérateur $f(x)$, la condition

$$\| Df(x_0)^{-1}(Df(x) - Df(y)) \| \leq K \| x - y \| \quad (2.2.60)$$

pour tout $x, y \in U(x_0, R)$ au lieu de l'équation (2.2.3), la condition

$$h = \frac{1}{2}K\eta \quad (2.2.61)$$

au lieu de (2.2.6) et finalement

$$s^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}\eta, \quad U(x_0, s^*) \subseteq D \quad (2.2.62)$$

au lieu de (2.2.7).

Il est clair aussi à partir de la preuve du Théorème 2.1 que la suite scalaire $(s_n)_{n \geq 0}$ est donnée par

$$s_0 = 0, \quad s_1 = \eta, \quad s_{n+2} = s_{n+1} + \frac{K(s_{n+1} - s_n)^2}{2(1 + Ks_n)} \quad (2.2.63)$$

est une suite de majoration pour (x_n) tel que

$$0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq s^* \quad (2.2.64)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s^*$$

En outre, les estimations d'erreur suivantes sont vérifiées pour tout $n \geq 0$

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq s_{n+1} - s_n \quad (2.2.65)$$

et

$$\| x_n - x^* \| \leq s^* - s_n. \quad (2.2.66)$$

Pour réaliser tout ce qui précède on introduit la condition centre-Lipschitz

$$\| Df(x_0)^{-1}(Df(x) - Df(x_0)) \| \leq K_0 \| x - x_0 \| \quad (2.2.67)$$

pour tout $x \in D$, où D est un convexe ouvert de X .

On définit la suite scalaire (t_n) par

$$t_0, \quad t_1 = \eta, \quad t_{n+2} = t_{n+1} + \frac{K(t_{n+1} - t_n)^2}{2(1 - K_0 t_{n+1})}, \quad (n \geq 0). \quad (2.2.68)$$

Théorème 2.5. Soit $f : D \subseteq X \rightarrow Y$ un opérateur Fréchet différentiable, pour $x_0 \in D$ supposons que

$$Df(x_0)^{-1} \in L(Y, X), \quad (2.2.69)$$

les conditions (2.2.60), (2.2.67) et

$$\bar{U}(x_0, t^*) \subseteq D \quad (2.2.70)$$

sont vérifiées, avec

$$t^* = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n. \quad (2.2.71)$$

De plus, on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées

$$h_\delta = (\delta K_0 + K)\eta, \quad \text{pour } \delta \in [0, 1] \quad (2.2.72)$$

où

$$h_\delta \leq \delta, \quad \frac{2K_0\eta}{2-\delta} \leq 1, \quad \frac{K_0\delta^2}{2-\delta} \leq l, \quad \text{pour } \delta \in [0, 2[\quad (2.2.73)$$

où

$$h_\delta \leq \delta, \quad K_0\eta \leq 1 - \frac{1}{2}\delta, \quad \text{pour } \delta \in [0, 2[, \quad (2.2.74)$$

avec

$$\delta_0 = \frac{-\frac{K}{K_0} + \sqrt{\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 + 8\frac{K}{K_0}}}{2}, \quad (K_0 \neq 0). \quad (2.2.75)$$

Puis la suite (x_n) donnée par la méthode de Newton-Kantorovich (2.1.3) est bien définie, $x_n \in \bar{U}(x_0, t^*)$ pour tout $n \geq 0$ et converge vers la solution $x^* \in \bar{U}(x_0, t^*)$ de l'équation $f(x) = 0$.

De plus, les estimations d'erreur suivants sont valables pour tout $n \geq 0$

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \frac{K \|x_{n+1} - x_n\|^2}{2(1 - K_0 \|x_{n+1} - x_0\|)} \leq t_{n+2} - t_{n+1}$$

et

$$\|x_n - x^*\| \leq t^* - t_n,$$

lorsque t_n, t^* sont donnée par (2.2.68) et (2.2.71) respectivement.

En outre, s'il existe $t^{**} \geq t^*$ tel que

$$U(x_0, t^{**}) \subset D$$

et

$$K_0(t^* + t^{**}) \leq 2,$$

la solution x^* est unique dans $U(x_0, t^{**})$.

Chapitre 3

Approximation de la solution du système d'équations intégrales non linéaires par la méthode de Newton-Kantorovich

Dans ce chapitre on considère le système des équations intégrales non linéaires de la forme

$$\begin{cases} x(t) - \int_{y(t)}^t h(t, \tau)x^2(\tau)d\tau = 0, \\ \int_{y(t)}^t k(t, \tau)x^2(\tau)d\tau = f(t), \end{cases} \quad (3.0.1)$$

ou $0 < t_0 \leq t \leq T$, $y(t) < t$ avec $x(t) \in C_{[t_0, \infty]}$ et $y(t) \in C_{[t_0, \infty]}^1$ se sont des fonctions inconnues définies dans l'intervalle $[t_0, \infty[$, $t_0 > 0$, et les fonctions $h(\cdot, \cdot), k(\cdot, \cdot) \in C_{[t_0, \infty[\times [t_0, \infty[}$, $f(t) \in C_{[t_0, \infty[}$ sont données.

3.1 Description de la méthode

Pour trouver les fonctions inconnues $x(t)$ et $y(t)$ de le system (3.0.1), on introduit les notations

$$\begin{cases} P_1(x(t), y(t)) = x(t) - \int_{y(t)}^t h(t, \tau)x^2(\tau)d\tau = 0, \\ P_2(x(t), y(t)) = f(t) - \int_{y(t)}^t k(t, \tau)x^2(\tau)d\tau = 0, \end{cases}$$

ou $0 < t_0 \leq t \leq T$, alors dans l'intervalle $[t_0, T]$ le system des equations (3.0.1) peut être réduite à l'équation d'opérateur

$$P(X) = (P_1(X), P_2(X)) = (0, 0), \quad (3.1.1)$$

avec $X = (x(t), y(t))$. On résoudre l'équation (3.1.1) par la méthode de Newton-Kantorovich Modifiée, l'approximation de l'équation est

$$P'(X_0)(X - X_0) + P(X_0) = (0, 0), \quad X_0 = (x_0(t), y_0(t)). \quad (3.1.2)$$

La dérivée $P'(X_0)$ de l'opérateur non linéaire $P(X)$ au point X_0 est déterminé par la matrice

$$P'(X_0) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial P_1}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \\ \left. \frac{\partial P_2}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial P_2}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent l'équation (3.1.2) est de la forme

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (\Delta x(t)) + \left. \frac{\partial P_1}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (\Delta y(t)) = -P_1(x_0(t), y_0(t)), \\ \left. \frac{\partial P_2}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (\Delta x(t)) + \left. \frac{\partial P_2}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (\Delta y(t)) = -P_2(x_0(t), y_0(t)), \end{cases} \quad (3.1.3)$$

ou $\Delta x(t) := x_1(t) - x_0(t)$ et $\Delta y(t) := y_1(t) - y_0(t)$. Avec le point initial donné $X_0 = (x_0(t), y_0(t))$, on évalue $P'(X_0)$ par définition

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_1(x_0 + sx, y_0) - P_1(x_0, y_0)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[x_0(t) + sx(t) - \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) [x_0(\tau) + sx(\tau)]^2 d\tau - x_0(t) + \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0^2(\tau) d\tau \right] \\ &= x(t) - 2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0(\tau) x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P_1}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_1(x_0, y_0 + sy) - P_1(x_0, y_0)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\int_{y_0(t)}^{y_0(t) + sy(t)} h(t, \tau) x_0^2(\tau) d\tau}{s} \\ &= h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) y(t). \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P_2}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= -2 \int_{y_0(t)}^t k(t, \tau) x_0(\tau) x(\tau) d\tau, \\ \left. \frac{\partial P_2}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= k(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) y(t). \end{aligned}$$

Donc le système (3.1.3) devient

$$\begin{cases} \Delta x(t) - 2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0(\tau) \Delta x(\tau) d\tau + h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \Delta y(t) = -x_0(t) + \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0^2(\tau) d\tau, \\ -2 \int_{y_0(t)}^t k(t, \tau) x_0(\tau) \Delta x(\tau) d\tau + k(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \Delta y(t) = -f(t) + \int_{y_0(t)}^t k(t, \tau) x_0^2(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

La solution de l'équation (3.1.4) pour $\Delta x(t)$ et $\Delta y(t)$ est $(x_1(t), y_1(t))$. En continuant ce processus, on obtient une suite des solutions approchées $(x_m(t), y_m(t))$ trouvé par le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_m(t) - 2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0(\tau) \Delta x_m(\tau) d\tau + h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \Delta y_m(t) \\ \qquad \qquad \qquad = -x_{m-1}(t) + \int_{y_{m-1}(t)}^t h(t, \tau) x_{m-1}^2(\tau) d\tau, \\ -2 \int_{y_0(t)}^t k(t, \tau) x_0(\tau) \Delta x_m(\tau) d\tau + k(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \Delta y_m(t) \\ \qquad \qquad \qquad = -f(t) + \int_{y_{m-1}(t)}^t k(t, \tau) x_{m-1}^2(\tau) d\tau, \end{array} \right. \quad (3.1.5)$$

avec $\Delta x_m(t) := x_m(t) - x_{m-1}(t)$ et $\Delta y_m(t) := y_m(t) - y_{m-1}(t)$, pour $m = 2, 3, \dots$

L'équation (3.1.5) conduit à l'équation

$$P'(X_0)(X_m - X_{m-1}) + P(X_{m-1}) = 0, \quad X_0 = (x_0(t), y_0(t)). \quad (3.1.6)$$

Pour montrer l'unicité de la solution de l'équation (3.1.4), on multiplie la première et la deuxième équations (3.1.4) par $(-k(t, y_0(t)))$ et $(h(t, y_0(t)))$, respectivement, on les additionner pour obtenir

$$\begin{aligned} -\Delta x(t) + 2 \int_{y_0(t)}^t \left[h(t, \tau) - \frac{k(t, \tau)h(t, y_0(t))}{k(t, y_0(t))} \right] x_0(\tau) \Delta x(\tau) d\tau \\ = x_0(t) - f(t) \frac{h(t, y_0(t))}{k(t, y_0(t))} + \int_{y_0(t)}^t \left[\frac{k(t, \tau)h(t, y_0(t))}{k(t, y_0(t))} - h(t, \tau) \right] x_0^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

On prend

$$G(t) := \frac{h(t, y_0(t))}{k(t, y_0(t))}, \quad k_1(t, \tau) := h(t, \tau) - k(t, \tau)G(t)$$

et

$$F_0(t) := -x_0(t) + f(t)G(t) + \int_{y_0(t)}^t k_1(t, \tau) x_0^2(\tau) d\tau,$$

donc on peut écrire l'équation (3.1.7) sous la forme

$$\Delta x(t) - 2 \int_{y_0(t)}^t [h(t, \tau) - k(t, \tau)G(t)] x_0(\tau) \Delta x(\tau) d\tau = F_0(t). \quad (3.1.8)$$

Cette equation est l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce, soit une solution unique.

D'après (3.1.8) et (3.1.4), on trouve

$$\Delta y(t) = \frac{\int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0^2(\tau) d\tau + 2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0(\tau) \Delta x(\tau) d\tau - (x_0(t) + \Delta x(t))}{h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t))}. \quad (3.1.9)$$

Alors (x_m, y_m) est une solution unique de l'équation (3.1.5), et donc de l'équation (3.1.6).

3.2 Convergence de la méthode

Considérant les classes des fonctions suivantes

- (i) Soit $C_{[t_0, \infty[}$ un ensemble de toute les fonctions continues $f(t)$ définie sur l'intervalle $[t_0, \infty[$.
- (ii) Soit $C_{[t_0, \infty[\times [t_0, \infty[}$ un ensemble de toute les fonctions continues $\psi(t, \tau)$ définie sur l'intervalle $[t_0, \infty[\times [t_0, \infty[$.
- (iii) Soit $\bar{C} = \{X = (x(t), y(t)) : x(t), y(t) \in C_{[t_0, T]}\}$.
- (iv) Soit $C_{[t_0, \infty[}^1 = \{y(t) \in C_{[t_0, \infty[}^1 : y(t) < t\}$.

Avec les normes

$$\begin{aligned} \|\Delta X\|_{\bar{C}} &= \max \left\{ \|\Delta x\|_{C_{[t_0, T]}} , \|\Delta y\|_{C_{[t_0, T]}} \right\}, \\ \|\bar{X}\|_{\bar{C}} &= \max \left\{ \|\bar{x}\|_{C_{[t_0, T]}} , \|\bar{y}\|_{C_{[t_0, T]}} \right\}, \\ \|x\|_{C^1} &= \max \left\{ \|x(t)\| , \|x'(t)\| \right\}, \\ \|x\| &= \max_{t \in [t_0, T]} |x(t)|, \\ \|k(t, \tau)\| &= K_1, & \|h(t, \tau)\| &= K_2, \\ \|k'(t, \tau)\| &= K'_1, & \|h'(t, \tau)\| &= K'_2, \\ \|x_0\| &= \max_{t \in [t_0, T]} |x_0(t)| = M, & \|x'_0\| &= \max_{t \in [t_0, T]} |x'_0(t)| = M', \\ \min_{t \in [t_0, T]} |y_0(t)| &= M_1. \end{aligned}$$

$$K = \max \left\{ 2K_2(T - M_1), 2K_1(T - M_1), 2K_2M, 2K_1M, K_2(M')^2 + K'_2M^2, K_1(M')^2 + K'_1M^2 \right\}. \quad (3.2.1)$$

Théorème 3.1. Soient $f \in C_{[t_0, \infty[}$, $h(\cdot, \cdot), k(\cdot, \cdot) \in C_{[t_0, \infty[\times [t_0, \infty[}$ des fonctions bornées. Alors il existe une unique solution $(x(t), y(t))$ du système des equations (3.1.5), tels que $x(t) \in C_{[t_0, \infty[}^1$, $y(t) \in C_{[t_0, \infty[}^1$.

La preuve de ce Théorème 3.1 est une conséquence de Théorème 3.2, alors il suffit de démontrer Théorème 3.2.

Théorème 3.2. Soit la boule $\Omega_0 = \{X = (x(t), y(t)) : \|X - X_0\| \leq r\}$. Si

1. $\|\Delta X\|_{\bar{C}} \leq \eta$, $(\forall (x, y) \in \Omega_0)$,
2. $k(t, \tau), h(t, \tau) \in C_{[t_0, \infty[\times [t_0, \infty[}^1$,
3. $h = K\eta < \frac{1}{2}$, et $r < \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h}\eta$,

alors le système des equations (3.1.5) a une unique solution X^* et la suite $X_m : X_m(t) = (x_m(t), y_m(t))$, $m \geq 0$ de l'approximation successive

$$\begin{cases} \Delta x_m(t) = 2 \int_{y_0(t)}^t k_1(t, \tau) x_0(\tau) \Delta x_m(\tau) d\tau + F_{m-1}(t), \\ \Delta y_m(t) = \frac{\int_{y_{m-1}(t)}^t h(t, \tau) x_{m-1}^2(\tau) d\tau + 2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0(\tau) \Delta x_m(\tau) d\tau - (x_{m-1}(t) + \Delta x_m(t))}{h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t))}, \end{cases}$$

ou $\Delta x_m(t) = x_m(t) - x_{m-1}(t)$ et $\Delta y_m(t) = y_m(t) - y_{m-1}(t)$, $m = 2, 3, \dots$, et X_m converge vers la solution unique X^* et avec

$$\|X^* - X_m\|_{\bar{C}} \leq \frac{\eta}{h} \left(1 - \sqrt{1 - 2h}\right)^{m+1}, \quad m \geq 0.$$

Démonstration. D'après les équations (3.1.8) et (3.1.9) alors le système (3.1.4) a une solution unique, donc $\Gamma_0 := P'(X_0)^{-1}$ est existe. On écrit l'équation (3.1.2) sous la forme

$$X = S(X), \quad (3.2.2)$$

ou $S(X) = X - \Gamma_0 P(X)$. Alors, l'approximation successive de l'équation (3.2.2) est

$$X_{m+1} = S(X_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Pour la valeur initiale X_0 , on a

$$S(X_0) = X_0 - \Gamma_0 P(X_0),$$

et donc

$$\|\Gamma_0 P(X_0)\| = \|S(X_0) - X_0\| = \|X_1 - X_0\| = \|\Delta X\| \leq \eta. \quad (3.2.3)$$

Maintenant, on montre que $\|P''(X)\| \leq K$, pour tout $X \in \Omega_0$ avec K est définie dans (3.2.1). La dérivée seconde $P''(X_0)(X)$ de l'opérateur non linéaire $P(X)$ au point X_0 est décrite par la matrice en 3-dimensions

$$P''(X_0)(X) = (P_1, P_2)(X)$$

est un opérateur Bilinéaire¹, ou

$$P_1 = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \\ \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \\ \left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Par la définition de la dérivée second, les composantes de P_1 sont

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P'_{1x}(x_0 + s\bar{x}, y_0)(x, y) - P'_{1x}(x_0, y_0)(x, y)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[x(t) - 2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) (x_0(\tau) + s\bar{x}(\tau)) x(\tau) d\tau - x(t) + 2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0(\tau) x(\tau) d\tau \right] \\ &= -2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) \bar{x}(\tau) x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

1. i.e. $P''(X_0)(X) = B(X_0, X)$

sa norme

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right\|_{\bar{C}} &= \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} \left| -2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) \bar{x}(\tau) x(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} \left| 2 \| \bar{X} \| \| X \| K_2 (T - M_1) \right| \\ &\leq 2K_2(T - M_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[P'_{1x}(x_0, y_0 + s\bar{y})(x, y) - P'_{1x}(x_0, y_0)(x, y) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[x(t) - 2 \int_{y_0(t) + s\bar{y}(t)}^t h(t, \tau) x_0(\tau) x(\tau) d\tau - x(t) + 2 \int_{y_0(t)}^t h(t, \tau) x_0(\tau) x(\tau) d\tau \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s} \int_{y_0(t)}^{y_0(t) + s\bar{y}(t)} h(t, \tau) x_0(\tau) x(\tau) d\tau \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} h(t, y_0(t) + s\bar{y}(t)) x_0(y_0(t) + s\bar{y}(t)) x(y_0(t) + s\bar{y}(t)) \bar{y}(t) \\ &= 2h(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) x(y_0(t)) \bar{y}(t), \end{aligned}$$

sa norme

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} \right\|_{\bar{C}} &\leq \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} \left| 2h(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) x(y_0(t)) \bar{y}(t) \right| \\ &\leq 2 \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} K_2 M \|X\| \| \bar{X} \| \\ &\leq 2K_2 M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[P'_{1y}(x_0, y_0 + s\bar{y})(x, y) - P'_{1y}(x_0, y_0)(x, y) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[h(t, y_0(t) + s\bar{y}(t)) x_0^2(y_0(t) + s\bar{y}(t)) y(t) - h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) y(t) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y(t)}{s} \left[h(t, y_0(t) + s\bar{y}(t)) x_0^2(y_0(t) + s\bar{y}(t)) - h(t, y_0(t) + s\bar{y}(t)) x_0^2(y_0(t)) \right. \\ &\quad \left. + h(t, y_0(t) + s\bar{y}(t)) x_0^2(y_0(t)) - h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[h(t, y_0(t) + s\bar{y}(t)) x_0^2(y_0(t)) + h'(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \right] y(t) \\ &= \left[h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) + h'(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \right] y(t), \end{aligned}$$

sa norme

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right\|_{\bar{C}} &\leq \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} \left[K_2 (M')^2 + K_2' M^2 \right] \|X\| \\ &\leq K_2 (M')^2 + K_2' M^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P'_{1y}(x_0 + s\bar{x}, y_0)(x, y) - P'_{1y}(x_0, y_0)(x, y)] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y(t)}{s} \left[h(t, y_0(t)) (x_0(y_0(t)) + s\bar{x}(y_0(t)))^2 - h(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \right] \\
&= 2h(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) \bar{x}(y_0(t)) y(t),
\end{aligned}$$

sa norme

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial x} \right\|_{\bar{C}} &\leq \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} \left| 2h(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) \bar{x}(y_0(t)) y(t) \right| \\
&\leq 2 \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} K_2 M \|\bar{X}\| \|X\| \\
&\leq 2K_2 M.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour les composantes de P_2 on a

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P'_{2x}(x_0 + s\bar{x}, y_0)(x, y) - P'_{2x}(x_0, y_0)(x, y)] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[-2 \int_{y_0(t)}^t k(t, \tau) (x_0(\tau) + s\bar{x}(\tau)) x(\tau) d\tau + 2 \int_{y_0(t)}^t k(t, \tau) x_0(\tau) x(\tau) d\tau \right] \\
&= -2 \int_{y_0(t)}^t k(t, \tau) \bar{x}(\tau) x(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

sa norme

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right\|_{\bar{C}} &= \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} \left| -2 \int_{y_0(t)}^t k(t, \tau) \bar{x}(\tau) x(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} |2\|X\| \|\bar{X}\| K_1 (T - M_1)| \\
&\leq 2K_1 (T - M_1).
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= 2k(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) x(y_0(t)) \bar{y}(t), \\
\left\| \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} \right\|_{\bar{C}} &= \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} \left| 2k(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) x(y_0(t)) \bar{y}(t) \right| \\
&\leq 2K_1 M.
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} &= \left[k(t, y_0(t)) x_0'^2(y_0(t)) + k'(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \right] y(t), \\
\left\| \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right\|_{\bar{C}} &= \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} \left| \left[k(t, y_0(t)) x_0'^2(y_0(t)) + k'(t, y_0(t)) x_0^2(y_0(t)) \right] y(t) \right| \\
&\leq K_1 (M')^2 + K_1' M^2.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P'_{2y}(x_0 + s\bar{x}, y_0)(x, y) - P'_{2y}(x_0, y_0)(x, y)] = 2k(t, y_0(t))x_0(y_0(t))\bar{x}(y_0(t))y(t), \\ \left\| \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} \right\|_{\bar{C}} &= \max_{\|X\|, \|\bar{X}\| \leq 1} |2k(t, y_0(t))x_0(y_0(t))\bar{x}(y_0(t))y(t)| \\ &\leq 2K_1M. \end{aligned}$$

Alors, tous les dérivés deuxièmes sont existes et bornées, et toutes les conditions de Théorème Newton-Kantorovich sont satisfaites, donc

- (a) Pour $h = K\eta \leq \frac{1}{2}$ et $r \geq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}\eta$, l'équation (3.1.2) a une solution X^* et le processus de Newton (3.1.6) converge vers X^* ,
- (b) pour $h < \frac{1}{2}$ et $r < r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}\eta$, alors X^* est une solution unique de l'équation (3.2.2) dans Ω_0 , et

$$\|X^* - X_m\|_{\bar{C}} \leq \frac{\eta}{h} \left(1 - \sqrt{1 - 2h}\right)^{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots$$

□

3.3 Discrétisation de la méthode

A chaque itération du processus (3.1.5), on résoudre l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

$$\Delta x_m(t) - 2 \int_{y_0(t)}^t k_1(t, \tau)x_0(\tau)\Delta x_m(\tau)d\tau = F_{m-1}(t), \quad (3.3.1)$$

avec $k_1(t, \tau) = h(t, \tau) - k(t, \tau)G(t)$ et

$$F_{m-1}(t) = -x_{m-1}(t) + f(t)G(t) + \int_{y_{m-1}(t)}^t k_1(t, \tau)x_{m-1}^2(\tau)d\tau.$$

Dans l'intervalle $[t_0, T]$, on suppose $t_i = t_0 + \frac{T - t_0}{N}i$, $i = 1, \dots, N$. L'équation (3.3.1) pour le point initial t_0 est donné par

$$\Delta x_m(t_0) = F_{m-1}(t_0),$$

pour les autres points

$$\Delta x_m(t_i) - 2 \int_{y_0(t_i)}^{t_i} k_1(t_i, \tau)x_0(\tau)\Delta x_m(\tau)d\tau = F_{m-1}(t_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3.2)$$

On pose

$$t_{v_i} = t_k, \quad \text{tel que } t_{k-1} \leq y_0(t_i) < t_k,$$

alors l'équation (3.3.2) peut être représentée sous la forme

$$\Delta x_m(t_i) - 2 \int_{y_0(t_i)}^{t_{v_i}} k_1(t_i, \tau) x_0(\tau) \Delta x_m(\tau) d\tau - 2 \sum_{j=v_i}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} k_1(t_i, \tau) x_0(\tau) \Delta x_m(\tau) d\tau = F_{m-1}(t_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3.3)$$

Pour $v_i \neq i$, on calcule l'intégrale de l'équation (3.3.3) par **la formule de Trapèze**, on obtient

$$\begin{aligned} & \Delta x_m(t_i) - (t_{v_i} - y_0(t_i)) \left(k_1(t_i, y_0(t_i)) x_0(y_0(t_i)) \Delta x_m(y_0(t_i)) + k_1(t_i, t_{v_i}) x_0(t_{v_i}) \Delta x_m(t_{v_i}) \right) \\ & - \sum_{j=v_i}^{i-2} (t_{j+1} - t_j) \left(k_1(t_i, t_j) x_0(t_j) \Delta x_m(t_j) + k_1(t_i, t_{j+1}) x_0(t_{j+1}) \Delta x_m(t_{j+1}) \right) \\ & - (t_i - t_{i-1}) \left(k_1(t_i, t_{i-1}) x_0(t_{i-1}) \Delta x_m(t_{i-1}) + k_1(t_i, t_i) x_0(t_i) \Delta x_m(t_i) \right) \\ & = F_{m-1}(t_i), \end{aligned}$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, N$. On résout cette équation en terme de $\Delta x_m(t_i)$, qui donne

$$\Delta x_m(t_i) = \frac{F_{m-1}(t_i) + A + B + (t_i - t_{i-1}) k_1(t_i, t_{i-1}) x_0(t_{i-1}) \Delta x_m(t_{i-1})}{1 - (t_i - t_{i-1}) k_1(t_i, t_i) x_0(t_i)},$$

ou

$$A = (t_{v_i} - y_0(t_i)) \left[k_1(t_i, y_0(t_i)) x_0(y_0(t_i)) \frac{(y_0(t_i) - t_{v_{i-1}}) \Delta x_m(t_{v_{i-1}}) + (t_{v_i} - y_0(t_i)) \Delta x_m(t_{v_i})}{t_{v_i} - t_{v_{i-1}}} + k_1(t_i, t_{v_i}) x_0(t_{v_i}) \Delta x_m(t_{v_i}) \right],$$

$$B = \sum_{j=v_i}^{i-2} (t_{j+1} - t_j) \left(k_1(t_i, t_j) x_0(t_j) \Delta x_m(t_j) + k_1(t_i, t_{j+1}) x_0(t_{j+1}) \Delta x_m(t_{j+1}) \right).$$

Pour $v_i = i$, l'équation (3.3.3) est donné par

$$\Delta x_m(t_i) - (t_i - y_0(t_i)) \left[k_1(t_i, y_0(t_i)) x_0(y_0(t_i)) \Delta x_m(y_0(t_i)) + k_1(t_i, t_i) x_0(t_i) \Delta x_m(t_i) \right] = F_{m-1}(t_i). \quad (3.3.4)$$

Avec Théorème de la valeur moyenne, on a

$$\Delta x_m(y_0(t_i)) (t_i - t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Delta x_m(x) dx.$$

On divise l'intervalle d'intégration $]t_{i-1}, t_i[$ en deux sous-intervalles $]t_{i-1}, y_0(t_i)[$ et $]y_0(t_i), t_i[$ et on utilise la formule de Rectangle pour chaque intégrale, on obtient

$$\Delta x_m(y_0(t_i)) = \frac{(y_0(t_i) - t_{i-1}) \Delta x_m(t_{i-1}) + (t_i - y_0(t_i)) \Delta x_m(t_i)}{t_i - t_{i-1}}.$$

Alors l'équation (3.3.4) est donné par

$$\Delta x_m(t_i) = \frac{F_{m-1}(t_i) + (t_i - y_0(t_i)) k_1(t_i, y_0(t_i)) x_0(y_0(t_i)) (y_0(t_i) - t_{i-1}) \Delta x_m(t_{i-1}) / t_i - t_{i-1}}{1 - (t_i - y_0(t_i)) k_1(t_i, t_i) x_0(t_i) - (t_i - y_0(t_i))^2 k_1(t_i, y_0(t_i)) x_0(y_0(t_i)) / t_i - t_{i-1}}.$$

Par la relation $\Delta x_m(t_i) = x_m(t_i) - x_{m-1}(t_i)$, on obtient

$$x_m(t_i) = \Delta x_m(t_i) + x_{m-1}(t_i).$$

De la même façon on calcule $\Delta y_m(t_i)$ donnée sous forme

$$\Delta y_m(t_i) = \frac{\int_{y_{m-1}(t_i)}^{t_i} h(t_i, \tau) x_{m-1}^2(\tau) d\tau + 2 \int_{y_0(t_i)}^{t_i} h(t_i, \tau) x_0(\tau) \Delta x_m(\tau) d\tau - (x_{m-1}(t_i) + \Delta x_m(t_i))}{h(t_i, y_0(t_i)) x_0^2(y_0(t_i))}.$$

Pour $v_i \neq i$, on a

$$\begin{aligned} \Delta y_m(t_i) = & \left[\frac{t_{v_i} - y_{m-1}(t_i)}{2} \left(h(t_i, y_{m-1}(t_i)) x_{m-1}^2(y_{m-1}(t_i)) + h(t_i, t_{v_i}) x_{m-1}^2(t_{v_i}) \right) \right. \\ & + \sum_{j=v_i}^{i-1} \frac{t_{j+1} - t_j}{2} \left(h(t_i, t_j) x_{m-1}^2(t_j) + h(t_i, t_{j+1}) x_{m-1}^2(t_{j+1}) \right) \\ & + (t_{v_i} - y_0(t_i)) \left(h(t_i, y_0(t_i)) x_0(y_0(t_i)) \Delta x_m(y_0(t_i)) + h(t_i, t_{v_i}) x_0(t_{v_i}) \Delta x_m(t_{v_i}) \right) \\ & + \sum_{j=v_i}^{i-1} (t_{j+1} - t_j) \left(h(t_i, t_j) x_0(t_j) \Delta x_m(t_j) + h(t_i, t_{j+1}) x_0(t_{j+1}) \Delta x_m(t_{j+1}) \right) \\ & \left. - (x_{m-1}(t_i) + \Delta x_m(t_i)) \right] / h(t_i, y_0(t_i)) x_0^2(y_0(t_i)) \end{aligned}$$

et pour $v_i = i$,

$$\begin{aligned} \Delta y_m(t_i) = & \left[\frac{t_i - y_{m-1}(t_i)}{2} \left(h(t_i, y_{m-1}(t_i)) x_{m-1}^2(y_{m-1}(t_i)) + h(t_i, t_i) x_{m-1}^2(t_i) \right) \right. \\ & + (t_i - y_0(t_i)) \left(h(t_i, y_0(t_i)) x_0(y_0(t_i)) \Delta x_m(y_0(t_i)) + h(t_i, t_i) x_0(t_i) \Delta x_m(t_i) \right) \\ & \left. - (x_{m-1}(t_i) + \Delta x_m(t_i)) \right] / h(t_i, y_0(t_i)) x_0^2(y_0(t_i)). \end{aligned}$$

Par la relation $\Delta y_m(t_i) = y_m(t_i) - y_{m-1}(t_i)$, on obtient

$$y_m(t_i) = \Delta y_m(t_i) + y_{m-1}(t_i).$$

3.4 Exemples numériques

Exemple 11. *Considérons le système d'équations non linéaires*

$$\begin{cases} x(t) - \int_{y(t)}^t t\tau x^2(\tau) d\tau = 0, \\ \int_{y(t)}^t \tau x^2(\tau) d\tau = 6, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

avec $t \in [t_0, T] = [10, 15]$.

La solution exacte est

$$x^*(t) = 6t, \quad y^*(t) = \pm \sqrt[4]{t^4 - \frac{2}{3}}.$$

La fonction initiale $x_0(t)$ peut être toute fonction continue, mais $y_0(t)$ doit être satisfait $y_0(t) < t$. Dans cet exemple, on choisit $x_0(t) = 2t$ et $y_0(t) = 0.6t + 4$.

Le tableau suivant montre que $x_m(t)$ coïncide avec l'exacte $x^*(t)$ à partir de la première itération, pendant que seulement sept itérations nécessaires pour $y_m(t)$ coïncide avec $y^*(t)$, ou $N = 20$ est le nombre de nœuds, m est le nombre d'itérations,

$$\epsilon_x = \max_{t \in [t_0, T]} |x_m(t) - x^*(t)|, \quad \epsilon_y = \max_{t \in [t_0, T]} |y_m(t) - y^*(t)|.$$

m	ϵ_x	ϵ_y
1	0.0	10.552848815918
2	0.0	4.923198699951
3	0.0	1.542798995972
4	0.0	0.202719688416
5	0.0	0.004018783569
6	0.0	0.000001907349
7	0.0	0.000000000000

Exemple 12. Considérons le système

$$\begin{cases} x(t) - \int_{y(t)}^t t\tau x^2(\tau) d\tau = 0, \\ \int_{y(t)}^t \tau x^2(\tau) d\tau = \frac{4}{t}, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

avec $t \in [t_0, T] = [10, 15]$.

La solution exacte est

$$x^*(t) = 5, \quad y^*(t) = \pm \sqrt{t^2 - \frac{8}{25t}}.$$

Les fonctions initiales sont

$$x_0(t) = 4, \quad y_0(t) = 0.4t + 3.$$

La même observation que dans le tableau précédent peut être vu dans le tableau suivant, avec un plus petit nombre d'itérations.

m	ϵ_x	ϵ_y
1	0.0	5.998859405518
2	0.0	0.856892585754
3	0.0	0.023154258728
4	0.0	0.000018119812
5	0.0	0.000000000000

Conclusion

Parmi les méthodes couramment utilisées pour l'approximation d'un zéro d'un opérateur non-linéaire on a la méthode de Newton. Dans ce mémoire on a parlé sur le principe général de cette méthode.

On a aussi parlé sur la méthode de Newton-Kantorovich qui est appliquée pour l'étude de la convergence de la méthode de Newton, et on a appliqué cette méthode afin de résoudre un système d'équations intégrales non linéaires.

Cette méthode est applicable aussi pour la résolution d'équations intégrales non-linéaires de type Hammerstein mixte, et les conditions de Newton-Kantorovich sont utilisées pour l'étude de la convergence de la méthode de Halley-Chebyshev.

Bibliographie

- [1] A. Galántai, The theory of Newton's method, Université de Miskolc, 2000, 25-44.
- [2] Andrzej Granas, James Dugundji, Fixed Point Theory, Université de Montréal, 2003.
- [3] B. T. Polyak, Newton-Kantorovich method and its global convergence, Université de Moscou, 2006.
- [4] D. Verwaerde, P. Laurent-Gengoux, Optimisation, École Centrale Paris, 2007.
- [5] Daryoush Behmardi, Encyeh Dehghan Nayeri, Introduction of Fréchet and Gâteaux Derivative, Université Alzahra, 2008, 975-980.
- [6] Eric Blayo, Maelle Nodet, Introduction à l'assimilation de données variationnelle, Université de Grenoble, 2010.
- [7] Guillaume Carlier, Calcul Différentiel et Optimisation, 2009.
- [8] Henri Cartan, C. Buttin, F. Rideau et J.L. Verley, Calcul Différentiel, Université de Paris, 1967.
- [9] Ioannis K. Argyros, Convergence and Application of Newton-type Iterations, Université Cameron, 2008.
- [10] Ioannis K. Argyros, Computational Theory of Iterative Methods, Université Cameron, 2007.
- [11] Jean-Pierre Dedieu, Points fixes, zéros et la méthode de Newton, Université Paul Sabatier France, 2006.
- [12] Jean-Pierre Raymond, Calcul Différentiel, Université Paul Sabatier, 2000.
- [13] Mabel Cuesta, Analyse Fonctionnelle Non Linéaire et applications en équations différentielles, 2009-2010.
- [14] P.G. Ciarlet, C. Mardare, On the Newton-Kantorovich theorem, 2012.
- [15] Sylvie Benzoni-Gavage, Calcul Différentiel et Équations Différentielles, Université Lyon 1, 2010.
- [16] V. Khatskevich, D. Shoiykhet, Differentiable Operators and Nonlinear Equations, 1994.
- [17] Z.K. Eshkuvatov, Anvarjon Ahmedov, N.M.A. Nik Long, O. Shafiq, Approximate solution of the system of nonlinear integral equation by Newton-Kantorovich method, Université Malaisie, 2010, 3717-3725.