

Champ de Vecteurs Différentiel

Bouguerra Souad & Rahal Nadjet

Faculté des mathématiques et Informatique
Département de Maths

25/06/ 2013

- Introduction aux systèmes dynamiques.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.
- Portrait de phase.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.
- Portrait de phase.
 - Système quadratique.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.
- Portrait de phase.
 - Système quadratique.
 - La sphère de Poincaré.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.
- Portrait de phase.
 - Système quadratique.
 - La sphère de Poincaré.
 - Orbites périodiques.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.
- Portrait de phase.
 - Système quadratique.
 - La sphère de Poincaré.
 - Orbites périodiques.
- Les points critiques dans systèmes quadratiques.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.
- Portrait de phase.
 - Système quadratique.
 - La sphère de Poincaré.
 - Orbites périodiques.
- Les points critiques dans systèmes quadratiques.
 - Multiplicité des points critiques.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.
- Portrait de phase.
 - Système quadratique.
 - La sphère de Poincaré.
 - Orbites périodiques.
- Les points critiques dans systèmes quadratiques.
 - Multiplicité des points critiques.
 - Indice de Poincaré des points critiques.

- Introduction aux systèmes dynamiques.
 - Champ de vecteurs.
 - Inversion locale.
 - Points critiques.
 - Ensembles limites.
 - Stabilité au sens de Lyapunov.
- Portrait de phase.
 - Système quadratique.
 - La sphère de Poincaré.
 - Orbites périodiques.
- Les points critiques dans systèmes quadratiques.
 - Multiplicité des points critiques.
 - Indice de Poincaré des points critiques.
 - Types des points critiques finis.

Définition

L'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x),$$

définit un champ de vecteurs f . On appelle champ de vecteurs une application qui à tout point x associe un vecteur tangent en ce point. À tout champ de vecteurs \mathcal{X} , on peut associer une équation différentielle $\dot{x} = \mathcal{X}(x)$. Une courbe intégrale de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ est un arc paramétré dérivable γ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^n qui vérifie

Définition

L'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x),$$

définit un champ de vecteurs f . On appelle champ de vecteurs une application qui à tout point x associe un vecteur tangent en ce point. À tout champ de vecteurs \mathcal{X} , on peut associer une équation différentielle $\dot{x} = \mathcal{X}(x)$. Une courbe intégrale de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ est un arc paramétré dérivable γ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^n qui vérifie

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = f(t, \gamma(t)).$$

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champ de vecteurs

Remarque

Pour résoudre une équation différentielle il suffit donc de trouver toutes ses courbes intégrales.

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champ de vecteurs

Remarque

Pour résoudre une équation différentielle il suffit donc de trouver toutes ses courbes intégrales.

Définition (groupe local)

Soit I un intervalle réel centré sur l'origine et U un ouvert d'un espace vectoriel E . On appelle groupe local à un paramètre tout difféomorphisme $\phi : (t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ de $I \times U$ sur E noté $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ tel que l'application $t \rightarrow \phi_t$ de I dans E soit un homomorphisme de groupes qui vérifiée :

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champ de vecteurs

Remarque

Pour résoudre une équation différentielle il suffit donc de trouver toutes ses courbes intégrales.

Définition (groupe local)

Soit I un intervalle réel centré sur l'origine et U un ouvert d'un espace vectoriel E . On appelle groupe local à un paramètre tout difféomorphisme $\phi : (t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ de $I \times U$ sur E noté $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ tel que l'application $t \rightarrow \phi_t$ de I dans E soit un homomorphisme de groupes qui vérifiée :

- 1 L'application ϕ_0 soit l'identité.

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champ de vecteurs

Remarque

Pour résoudre une équation différentielle il suffit donc de trouver toutes ses courbes intégrales.

Définition (groupe local)

Soit I un intervalle réel centré sur l'origine et U un ouvert d'un espace vectoriel E . On appelle groupe local à un paramètre tout difféomorphisme $\phi : (t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ de $I \times U$ sur E noté $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ tel que l'application $t \rightarrow \phi_t$ de I dans E soit un homomorphisme de groupes qui vérifiée :

- 1 L'application ϕ_0 soit l'identité.
- 2 L'application composée vérifie $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champ de vecteurs

Remarque

Pour résoudre une équation différentielle il suffit donc de trouver toutes ses courbes intégrales.

Définition (groupe local)

Soit I un intervalle réel centré sur l'origine et U un ouvert d'un espace vectoriel E . On appelle groupe local à un paramètre tout difféomorphisme $\phi : (t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ de $I \times U$ sur E noté $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ tel que l'application $t \rightarrow \phi_t$ de I dans E soit un homomorphisme de groupes qui vérifiée :

- 1 L'application ϕ_0 soit l'identité.
- 2 L'application composée vérifie $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.
- 3 L'application réciproque est donnée par $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champ de vecteurs

Remarque

Pour résoudre une équation différentielle il suffit donc de trouver toutes ses courbes intégrales.

Définition (groupe local)

Soit I un intervalle réel centré sur l'origine et U un ouvert d'un espace vectoriel E . On appelle groupe local à un paramètre tout difféomorphisme $\phi : (t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ de $I \times U$ sur E noté $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ tel que l'application $t \rightarrow \phi_t$ de I dans E soit un homomorphisme de groupes qui vérifiée :

- 1 *L'application ϕ_0 soit l'identité.*
- 2 *L'application composée vérifie $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.*
- 3 *L'application réciproque est donnée par $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.*

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champs de vecteurs

Définition

Un champ de vecteurs est complet si toutes les courbes intégrales maximales sont paramétrées sur l'ensemble des réels tout entier (t varie de $-\infty$ à $+\infty$).

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champs de vecteurs

Définition

Un champ de vecteurs est complet si toutes les courbes intégrales maximales sont paramétrées sur l'ensemble des réels tout entier (t varie de $-\infty$ à $+\infty$).

Exemple

Le champ de vecteurs de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x},$$

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Champs de vecteurs

Définition

Un champ de vecteurs est complet si toutes les courbes intégrales maximales sont paramétrées sur l'ensemble des réels tout entier (t varie de $-\infty$ à $+\infty$).

Exemple

Le champ de vecteurs de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x},$$

est associé à l'équation différentielle $\dot{x} = x^2$ avec pour condition initiale $x(0) = a$ ($a \neq 0$). Il admet les courbes intégrales d'équation $x(t) = \frac{a}{1 - at}$. Les solutions ne sont pas définies pour $t = 1/a$, donc n'est pas complet.

Chapter 1: Introduction aux systèmes dynamiques

Inversion locale

- Lorsque f est une application différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , la différentielle de $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ au point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est l'application linéaire définie par la matrice jacobienne

Chapter 1: Introduction aux systèmes dynamiques

Inversion locale

- Lorsque f est une application différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , la différentielle de $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ au point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est l'application linéaire définie par la matrice jacobienne

$$Jacf(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{i,j} (a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

le jacobien est le déterminant de cette matrice.

Théorème

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 au voisinage du point $a = (a_1, \dots, a_n)$ telle que $f(a) = 0$. On suppose que la dérivée partielle de f en x_n au point a est non nulle $f'_{x_n}(a) \neq 0$. Alors pour un voisinage du point (a_1, \dots, a_{n-1}) l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ admet une solution unique $h(x_1, \dots, x_{n-1})$ et dont la dérivée est donnée par

Théorème

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 au voisinage du point $a = (a_1, \dots, a_n)$ telle que $f(a) = 0$. On suppose que la dérivée partielle de f en x_n au point a est non nulle $f'_{x_n}(a) \neq 0$. Alors pour un voisinage du point (a_1, \dots, a_{n-1}) l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ admet une solution unique $h(x_1, \dots, x_{n-1})$ et dont la dérivée est donnée par

$$dh(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{f'_{x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)}{f'_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)} dx_1 - \dots - \frac{f'_{x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)}{f'_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)} dx_{n-1}.$$

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Inversion locale

Théorème

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 au voisinage du point $a = (a_1, \dots, a_n)$ telle que $f(a) = 0$. On suppose que la dérivée partielle de f en x_n au point a est non nulle $f'_{x_n}(a) \neq 0$. Alors pour un voisinage du point (a_1, \dots, a_{n-1}) l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ admet une solution unique $h(x_1, \dots, x_{n-1})$ et dont la dérivée est donnée par

$$dh(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{f'_{x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)}{f'_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)} dx_1 - \dots - \frac{f'_{x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)}{f'_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)} dx_{n-1}.$$

Exemple

La fonction $f(x, y) = y^5 - 4y^4 + 4xy^2 - x^2$, $f(1, 1) = 0$. $f'_y(1, 1) = -3$, par conséquent l'équation $f(x, y) = 0$ admet une solution locale $y = h(x)$ dont la dérivée vaut $-2/3$. La tangente est $y = -2x/3 + 5/3$.

Définition

Un point a est un point critique (stationnaire ou singulier) de l'équation différentielle associée au champ f , si $f(a) = 0$. Si h est une fonction réelle définie sur un ouvert U contenant une variété M , on dit que a un point de M est un point critique de h sur M si la dérivée de h s'annule en a : $h'(a) = 0$.

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Points critiques

Définition

Un point a est un point critique (stationnaire ou singulier) de l'équation différentielle associée au champ f , si $f(a) = 0$. Si h est une fonction réelle définie sur un ouvert U contenant une variété M , on dit que a un point de M est un point critique de h sur M si la dérivée de h s'annule en a : $h'(a) = 0$.

Exemple

Soit $\dot{x} = (x^2 - 4)(x - 3)$. Les points d'équilibre sont solution de $(x^2 - 4) = 0$ et $(x - 3) = 0$, c'est-à-dire, $x_1^ = 2$, $x_2^* = -2$ et $x_3^* = 3$.*

Définition

Un point y est un point ω -limite (α -limite) pour le flot $\varphi(t, x)$ associé à l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ s'il existe une suite croissante de réels t_n (s_n décroissante) tendant vers l'infini telle que $\lim \varphi(t_n, x) = y$ ($\lim \varphi(s_n, x) = y$).

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Ensembles limites

Définition

Un point y est un point ω -limite (α -limite) pour le flot $\varphi(t, x)$ associé à l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ s'il existe une suite croissante de réels t_n (s_n décroissante) tendant vers l'infini telle que $\lim \varphi(t_n, x) = y$ ($\lim \varphi(s_n, x) = y$).

Exemple

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

En coordonnées polaires, $\dot{r} = r(1 - r^2)$. Les points d'équilibres sont $r = 0$ et $r = 1$. L'ensemble ω -limite est égal au cercle de rayon 1, si r est non nul et se réduit à $\{0\}$ si $r = 0$. L'ensemble ω -limite est vide si r est plus grand que 1.

Définition

Le point d'équilibre x d'équation différentielle est :

- *Stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : |x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies |x(t) - y(t)| < \epsilon,$$
$$\forall t \geq t_0.$$

Définition

Le point d'équilibre x d'équation différentielle est :

- *Stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : |x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies |x(t) - y(t)| < \epsilon, \\ \forall t \geq t_0.$$

- *Quasi asymptotiquement stable si :*

$$|x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

Définition

Le point d'équilibre x d'équation différentielle est :

- *Stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : |x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies |x(t) - y(t)| < \epsilon, \\ \forall t \geq t_0.$$

- *Quasi asymptotiquement stable si :*

$$|x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

- *Asymptotiquement stable si :*

$$\forall \delta > 0 : |x(t_0) - x(t)| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0) - x(t)| = 0.$$

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Stabilité de Lyapunov

La fonction de Lyapunov V associée à l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ est :

Chapiter 1: Introduction aux système dynamique

Stabilité de Lyapunov

La fonction de Lyapunov V associée à l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ est :

- 1 Une fonction continûment différentiable définie sur un voisinage ouvert U .
- 2 Une fonction s'annule à l'origine $V(0) = 0$.
- 3 Elle reste positive au voisinage de l'origine $V(x) > 0, \quad \forall x \in U \setminus \{0\}$.

Théorème

Si $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$, alors l'origine est stable.

Si $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$, alors l'origine est asymptotiquement stable.

Si $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$, alors l'origine est instable.

Exemple

Considérons le système suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2, \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$$

La fonction $V(x, y) = (x^3 + y^3)/3 + xy$ est une fonction de dérivée positive

$$\dot{V}(x, y) = (y + x^2)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

L'origine est un point instable.

Chapiter 2 : Portrait de Phase

Système quadratique

Définition

Un système quadratique est un système autonome de second degré d'équations différentielles sous la forme

Chapiter 2 : Portrait de Phase

Système quadratique

Définition

Un système quadratique est un système autonome de second degré d'équations différentielles sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Où les fonctions $x = x(t)$, $y = y(t)$ sont des variables, avec $\dot{} = \frac{d}{dt}$. et $a_{ij}, b_{ij} (i, j = 0, 1, 2)$ sont des constantes dans \mathbb{k} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Chapiter 2 : Portrait de Phase

Système quadratique

Les points ordinaires sont définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$, et les points critiques définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) = 0$.

Chapiter 2 : Portrait de Phase

Système quadratique

Les points ordinaires sont définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$, et les points critiques définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) = 0$. Pour chaque point ordinaire (x_0, y_0) sur le plan de phase (x, y) ; il existe une unique orbite qui représente une famille de solutions de (1) donné par

Chapiter 2 : Portrait de Phase

Système quadratique

Les points ordinaires sont définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$, et les points critiques définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) = 0$. Pour chaque point ordinaire (x_0, y_0) sur le plan de phase (x, y) ; il existe une unique orbite qui représente une famille de solutions de (1) donné par

$$x = x(t, x_0, y_0, t_0), y = y(t, x_0, y_0, t_0),$$

satisfaites

Chapiter 2 : Portrait de Phase

Système quadratique

Les points ordinaires sont définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$, et les points critiques définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) = 0$. Pour chaque point ordinaire (x_0, y_0) sur le plan de phase (x, y) ; il existe une unique orbite qui représente une famille de solutions de (1) donné par

$$x = x(t, x_0, y_0, t_0), y = y(t, x_0, y_0, t_0),$$

satisfaites

$$x(t_0; x_0, y_0, t_0) = x_0, y(t_0; x_0, y_0, t_0) = y_0.$$

Où pour (x_0, y_0) , t_0 donnés peut être choisi rapportant la même orbite passant par (x_0, y_0) pour une valeur arbitraire de t_0 .

Chapiter 2 : Portrait de Phase

La Sphère de Poincaré

Soit un système différentiel polynômial planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

(les fonctions P et Q sont des polyômes de degré arbitraire des variables (x, y)),

Remarque

On a le degré m de (2) est le maximum des degrés de P et Q .

Nous considérons \mathbb{R}^2 comme le plan dans \mathbb{R}^3 définis par $(X, Y, Z) = (X, Y, 1)$. Et la sphère

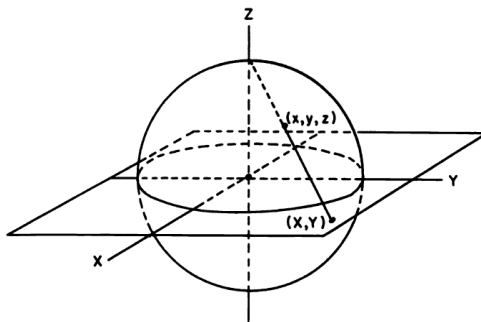
Chapiter 2 : Portrait de Phase

La Sphère de Poincaré

$S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ lequel nous appellerons ici **sphère de Poincaré**; c'est tangent à \mathbb{R}^2 au points $(0, 0, 1)$. Nous pouvons diviser cette sphère à $H_+ = \{(X, Y, Z) \in S^2 : Z > 0\}$ (l'hémisphère nord) $H_- = \{(X, Y, Z) \in S^2 : Z < 0\}$ (l'hémisphère sud) et $S_1 = \{(X, Y, Z) \in S^2 : Z = 0\}$ (l'équateur). Maintenant nous considérons la projection du système différentiel (2) de \mathbb{R}^2 sur S^2 donnée par les projections centrales $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ et $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$. Plus précisément, $f^+(x, y)$ (respectivement $f^-(x, y)$) est l'intersection de la ligne droite qui passe à travers un point de la plan \mathbb{R}^2 et l'origine avec le nord (respectivement, sud) hémisphère de S^2 (voir figure (5))

Chapiter 2 : Portrait de Phase

La Sphère de Poincaré



Projection centrale de hémisphère de S_2
sur (x, y) -plan

Chapiter 2 : Portrait de Phase

La Sphère de Poincaré

Ce type de projection centrale a l'avantage que les points critiques à l'infinis sont étendus le long de l'équateur de la sphère Poincaré et sont donc à caractère plus simple que le point critique à l'infini sur la sphère de Bendixson.

Chapiter 2 : Portrait de Phase

La Sphère de Poincaré

Ce type de projection centrale a l'avantage que les points critiques à l'infinis sont étendus le long de l'équateur de la sphère Poincaré et sont donc à caractère plus simple que le point critique à l'infini sur la sphère de Bendixson.

D'après la présentation sur le disque de *Poincaré* les points critiques à l'infini est caractérisé par la condition $\dot{\theta} = 0$, où r et θ des coordonnées polaires. Si (1) sont écrits dans ces coordonnées sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = A_1(\theta) + rB_1(\theta) + r^2C_1(\theta), \\ \dot{\theta} = A_2(\theta) + rB_2(\theta) + r^2C_2(\theta), \end{cases}$$

où $A_i(\theta)$, $B_i(\theta)$, $C_i(\theta)$, $i = (1, 2)$ des fonctions trigonométriques.

Chapiter 2 : Portrait de Phase

La Sphère de Poincaré

Définition

Deux portraits de phase sont qualitativement équivalentes s'il existe un homéomorphisme entre les deux portraits de phase de telle sorte que, si deux points en portrait de phase liée par une orbite, alors leurs images sont aussi liée par une orbite dans l'autre portrait de phase.

Chapiter 2 : Portrait de Phase

Orbites Périodiques

- On dit que la solution de système (1) est périodique si elle satisfait:

$$\begin{cases} x(t + T; x_0, y_0, t_0) = x(t; x_0, y_0, t_0), \\ y(t + T; x_0, y_0, t_0) = y(t; x_0, y_0, t_0), \end{cases} \quad (3)$$

où $-\infty < t < \infty$ pour certains $T > 0$. Ils sont représentés dans le plan par une orbite *fermée*. Tous les points sur l'orbite sont des points α -limite ainsi que des points ω -limite.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Définition

On dit que un point critique (x_0, y_0) d'un système quadratique (1) admet un multiplicité m s'il existe des nombres $\epsilon_0 > 0$ et $\delta_0 > 0$ tel que tout système de coefficients $\overline{a}_{i,j}, \overline{b}_{i,j} (i, j = 0, 1, 2)$ tel que $|\overline{a}_{i,j} - a_{i,j}|, |\overline{b}_{i,j} - b_{i,j}| < \delta < \delta_0$ admet au plus m points critiques dans un voisinage $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon_0$ de (x_0, y_0) , et pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ et $\delta < \delta_0$, il existe un système quadratique qui possède au moins m points critiques dans le voisinage $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Si $m = 1$ le point critique est simple ou élémentaire.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Si $m = 1$ le point critique est simple ou élémentaire. En un tel point les isoclines $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ se coupent en un angle différent de zéro, et si le point est situé dans (x_0, y_0) alors

$$\Delta(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0) \neq 0.$$

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Si $m = 1$ le point critique est simple ou élémentaire. En un tel point les isoclines $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ se coupent en un angle différent de zéro, et si le point est situé dans (x_0, y_0) alors

$$\Delta(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0) \neq 0.$$

L'écriture de ces isoclines comme :



$$\begin{aligned} P(x, y) &= P_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}P_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + P_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}P_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 = 0, \\ Q(x, y) &= Q_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}Q_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + Q_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}Q_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 = 0, \end{aligned}$$

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

et montre, avec un $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$, que toute direction $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, correspond a une isocline unique à travers une point critique élémentaire.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

et montre, avec un $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$, que toute direction $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, correspond a une isocline unique à travers une point critique élémentaire.

Dans les points critiques avec multiplicité $m > 1$, ou des points d'ordre supérieur, la condition $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$ n'est pas satisfaite.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

et montre, avec un $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$, que toute direction $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, correspond a une isocline unique à travers une point critique élémentaire.

Dans les points critiques avec multiplicité $m > 1$, ou des points d'ordre supérieur, la condition $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$ n'est pas satisfaite. Puisque nous ne considérons pas des systèmes quadratiques dègènèrès, le nombre de points critiques finis est fini alors que $m \neq \infty$. Depuis deux coniques (isoclines coniques) ont au plus quatre d'intersections différent des points, la multiplicité d'un point critique dans un système quadratique est au plus ou égal à 4, alors $1 \leq m \leq 4$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Définition

La multiplicité finie m_f d'un système quadratique est la somme des multiplicités de tout les points critiques finis (réels ou complexes).

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Définition

La multiplicité finie m_f d'un système quadratique est la somme des multiplicités de tout les points critiques finis (réels ou complexes).

Exemple

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = xy, \end{cases}$$

admet quatre points critiques finis sont $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$ donc $m_f = 4$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$, les coordonnées x des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équations:

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$, les coordonnées x des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équations:

$$Ax^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1 = 0, \quad (4)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de y et donc un point critique finie. Pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$, les coordonnées x des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équations:

$$Ax^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1 = 0, \quad (4)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de y et donc un point critique finie. Pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

(i) 4 si seulement si $A \neq 0$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$, les coordonnées x des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équations:

$$Ax^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1 = 0, \quad (4)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de y et donc un point critique finie. Pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_1 \neq 0$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$, les coordonnées x des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équations:

$$Ax^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1 = 0, \quad (4)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de y et donc un point critique finie. Pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_1 \neq 0$.
- (iii) 2 si seulement si $A = B_1 = 0, C_1 \neq 0$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$, les coordonnées x des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équations:

$$Ax^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1 = 0, \quad (4)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de y et donc un point critique finie. Pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_1 \neq 0$.
- (iii) 2 si seulement si $A = B_1 = 0, C_1 \neq 0$.
- (iv) 1 si seulement si $A = B_1 = C_1 = 0, D_1 \neq 0$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$, les coordonnées x des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équations:

$$Ax^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1 = 0, \quad (4)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de y et donc un point critique finie. Pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_1 \neq 0$.
- (iii) 2 si seulement si $A = B_1 = 0, C_1 \neq 0$.
- (iv) 1 si seulement si $A = B_1 = C_1 = 0, D_1 \neq 0$.
- (v) 0 si seulement si $A = B_1 = C_1 = D_1 = 0, E_1 \neq 0, .$

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$, les coordonnées y des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équation:

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$, les coordonnées y des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équation:

$$Ay^4 + B_2y^3 + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0, \quad (5)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de x et donc un point critique finie. Pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$, les coordonnées y des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équation:

$$Ay^4 + B_2y^3 + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0, \quad (5)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de x et donc un point critique finie. Pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

(i) 4 si seulement si $A \neq 0$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$, les coordonnées y des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équation:

$$Ay^4 + B_2y^3 + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0, \quad (5)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de x et donc un point critique finie. Pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.*
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_2 \neq 0$.*

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$, les coordonnées y des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équation:

$$Ay^4 + B_2y^3 + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0, \quad (5)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de x et donc un point critique finie. Pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.*
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_2 \neq 0$.*
- (iii) 2 si seulement si $A = B_2 = 0, C_2 \neq 0$.*

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$, les coordonnées y des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équation:

$$Ay^4 + B_2y^3 + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0, \quad (5)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de x et donc un point critique finie. Pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_2 \neq 0$.
- (iii) 2 si seulement si $A = B_2 = 0, C_2 \neq 0$.
- (iv) 1 si seulement si $A = B_2 = C_2 = 0, D_2 \neq 0$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

Théorème

Si $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$, les coordonnées y des points critiques de (1) sont donnée par les solutions de l'équation:

$$Ay^4 + B_2y^3 + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0, \quad (5)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de x et donc un point critique finie. Pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_2 \neq 0$.
- (iii) 2 si seulement si $A = B_2 = 0, C_2 \neq 0$.
- (iv) 1 si seulement si $A = B_2 = C_2 = 0, D_2 \neq 0$.
- (v) 0 si seulement si $A = B_2 = C_2 = D_2 = 0, E_2 \neq 0$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

On peut remarquer que sous la transformation $x \longleftrightarrow y$, $a_{ij} \longleftrightarrow b_{ij}$ puis $c_{12} = -c_{13}$, $c_{15} = -c_{15}$, $c_{23} = c_{23}$, $c_{24} = -c_{36}$, $c_{25} = -c_{35}$, $c_{26} = -c_{34}$, $c_{45} = c_{56}$, $c_{46} = c_{46}$.

En fait, si $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$, alors $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ ont un facteur commun y dans les termes du système quadratique, ce qui montre qu'ils ont l'axe x comme direction asymptotique commune.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

On peut remarquer que sous la transformation $x \longleftrightarrow y$, $a_{ij} \longleftrightarrow b_{ij}$ puis $c_{12} = -c_{13}$, $c_{15} = -c_{15}$, $c_{23} = c_{23}$, $c_{24} = -c_{36}$, $c_{25} = -c_{35}$, $c_{26} = -c_{34}$, $c_{45} = c_{56}$, $c_{46} = c_{46}$.

En fait, si $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$, alors $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ ont un facteur commun y dans les termes du système quadratique, ce qui montre qu'ils ont l'axe x comme direction asymptotique commune. En conséquence, tous les isoclines $\lambda P(x, y) + \mu Q(x, y) = 0$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ont cette direction en commun et du faisceau des isoclines (conique) ont un point de base infinie à "aux fins de l'axe des x ".

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Multiplicité des points critiques

On peut remarquer que sous la transformation $x \longleftrightarrow y$, $a_{ij} \longleftrightarrow b_{ij}$ puis $c_{12} = -c_{13}$, $c_{15} = -c_{15}$, $c_{23} = c_{23}$, $c_{24} = -c_{36}$, $c_{25} = -c_{35}$, $c_{26} = -c_{34}$, $c_{45} = c_{56}$, $c_{46} = c_{46}$.

En fait, si $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$, alors $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ ont un facteur commun y dans les termes du système quadratique, ce qui montre qu'ils ont l'axe x comme direction asymptotique commune. En conséquence, tous les isoclines $\lambda P(x, y) + \mu Q(x, y) = 0$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ont cette direction en commun et du faisceau des isoclines (conique) ont un point de base infinie à "aux fins de l'axe des x ". Une direction asymptotique commune de $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ correspond à un facteur commun dans

$$\begin{cases} P_2(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ Q_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases}$$

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Indice de Poincaré des points critiques

Définition

Soit C une courbe fermé simple dans le plan de phase ne traverse pas des points critiques de (1) et soit ϕ l'angle de (P, Q) avec l'axe positif x .

Définition

Soit C une courbe fermé simple dans le plan de phase ne traverse pas des points critiques de (1) et soit ϕ l'angle de (P, Q) avec l'axe positif x . Alors, l'indice $I(C)$ de la courbe fermée C par rapport au champ du vecteurs $(P(x, y), Q(x, y))$ est défini par $\frac{\Delta\phi}{2\pi}$, où $\Delta\phi$ est la changement totale dans

$$\phi(x, y) = \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Indice de Poincaré des points critiques

Définition

Soit C une courbe fermé simple dans le plan de phase ne traverse pas des points critiques de (1) et soit ϕ l'angle de (P, Q) avec l'axe positif x . Alors, l'indice $I(C)$ de la courbe fermée C par rapport au champ du vecteurs $(P(x, y), Q(x, y))$ est défini par $\frac{\Delta\phi}{2\pi}$, où $\Delta\phi$ est la changement totale dans

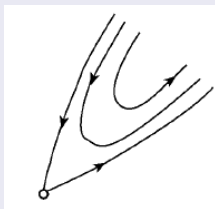
$$\phi(x, y) = \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

Comme point (x, y) traverse C exactement une fois dans la direction positive, l'indice $I(C)$ peut être calculer en utilisant la formule :

$$I(C) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \tan^{-1} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}.$$

Définition

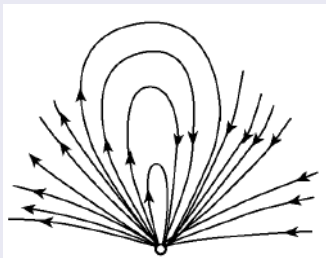
Un secteur hyperbolique est représenté par la figure (3.1). Il est caractérisé par l'existence de deux orbites chaque orbite approche du point critique dans une direction déterminée, de telle sorte qu'il existe un voisinage du point critique délimitée par ces orbites dans lequel seules orbites existent d'un voisinage pour $t \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow -\infty$.



*Un secteur
hyperbolique*

Définition

Un secteur elliptique est représenté par la figure (3.2). il est caractérisé par l'existence d'un voisinage du point critique contenant une boucle, étant une orbite, définie sur $-\infty < t < \infty$ et l'approche du point critique pour $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow \infty$.



Un secteur elliptique

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

- En fait, l'application de ces méthodes a conduit à un corps pratiquement définitive de connaissances sur les points critiques dans les systèmes quadratiques. Une distinction sera faite entre les points critiques finis .
- Soit (x_0, y_0) un point critique de (1), alors $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, puis une première division en classes des points critiques peut être obtenue en considérant le système localement linéarisé

$$\begin{cases} \dot{x} = P_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ \dot{y} = Q_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q_y(x_0, y_0)(y - y_0). \end{cases}$$

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

Notons que λ_1, λ_2 des valeurs propres de la matrice

$$D = \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

il est bien connu que le produit $\lambda_1\lambda_2$ des valeurs propres de D égale

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

Notons que λ_1, λ_2 des valeurs propres de la matrice

$$D = \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

il est bien connu que le produit $\lambda_1 \lambda_2$ des valeurs propres de D égale

$$\Lambda(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0),$$

et son somme $\lambda_1 + \lambda_2$ égale à $d(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0)$, qui est également l'expression pour la divergence du champ de vecteurs (P, Q) sur (x_0, y_0) .

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

Notons que λ_1, λ_2 des valeurs propres de la matrice

$$D = \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

il est bien connu que le produit $\lambda_1 \lambda_2$ des valeurs propres de D égale

$$\Lambda(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0),$$

et son somme $\lambda_1 + \lambda_2$ égale à $d(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0)$, qui est également l'expression pour la divergence du champ de vecteurs (P, Q) sur (x_0, y_0) . Les cas suivant peuvent être distingués :

Chapter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

- 1 Points critiques élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$.

Chapter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

- 1 Points critiques élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$.
- 2 Points critiques semi-élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) = 0$, $d(x_0, y_0) \neq 0$.

Chapter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

- 1 Points critiques élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$.
- 2 Points critiques semi-élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) = 0$, $d(x_0, y_0) \neq 0$.
- 3 Points critiques dégénérés, alors $\Lambda(x_0, y_0) = d(x_0, y_0) = 0$.

Chapiter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

- 1 Points critiques élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$.
- 2 Points critiques semi-élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) = 0, d(x_0, y_0) \neq 0$.
- 3 Points critiques dégénérés, alors $\Lambda(x_0, y_0) = d(x_0, y_0) = 0$.

Le dernier peut être divisé en :

- 1 Points critiques nilpotents, alors $P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2 \neq 0$ sur (x_0, y_0) .

Chapter 3 : Les points critiques des système quadratique

Types des points critiques finis

- 1 Points critiques élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$.
- 2 Points critiques semi-élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) = 0, d(x_0, y_0) \neq 0$.
- 3 Points critiques dégénérés, alors $\Lambda(x_0, y_0) = d(x_0, y_0) = 0$.

Le dernier peut être divisé en :

- 1 Points critiques nilpotents, alors $P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2 \neq 0$ sur (x_0, y_0) .
- 2 Points critiques dans systèmes essentiellement homogène, alors $P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2 = 0$ sur (x_0, y_0) .

" Merci de votre attention "

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 4 |
| 1 Introduction aux systèmes dynamiques | 6 |
| 1.1 Champ de vecteurs | 6 |
| 1.2 Inversion locale | 8 |
| 1.3 Equations différentielles linéaires | 10 |
| 1.3.1 Équation différentielle de premier ordre | 12 |
| 1.3.2 Equation différentielle de second ordre : | 13 |
| 1.4 Points critiques : | 14 |
| 1.5 Ensembles limites | 15 |
| 1.5.1 Ensembles invariants | 16 |
| 1.6 Stabilité au sens de Lyapunov | 17 |
| 2 Portrait de phase | 21 |
| 2.1 Introduction | 21 |
| 2.2 Système quadratique | 21 |
| 2.3 La sphère de Poincaré | 22 |
| 2.4 Orbites périodiques | 27 |
| 3 Les points critiques des systèmes quadratiques : | 30 |
| 3.1 Multiplicité des points critiques : | 30 |
| 3.2 Indice de Poincaré des points critiques : | 37 |

| | | |
|-----|---|-----------|
| 3.3 | Types des points critiques finis | 39 |
| 3.4 | Isoclines des systèmes quadratiques | 47 |
| | Conclusion | 53 |
| | Bibliographie | 54 |

Remerciements

*Nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Nos remerciements vont, en premier, à notre dieu, et notre familles, et l'encadreur **Mr :SALHI TAYEB** pour son encouragement et sa disponibilité.*

Nous remercions, pareillement, nos professeurs et tous les collègues de notre section pour leurs remarques et leurs aides.

Finalement, nous adressons nos remerciements les plus chaleureux à nos parents et tous ceux qui ont participé de près ou de loin pour nous permettre d'accomplir se modeste travail.

Introduction générale

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles, les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du **XIXe** siècle.

En effet, vers la fin de ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. Toujours au **XIXe** siècle, le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous consacrerons notre travail à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques en général.

Le second chapitre est consacré à des notions de base des portraits de phase, en gardant l'accent sur les systèmes du second degré.

Dans le dernier chapitre, on va étudier les points critiques dans un système quadratique et la multiplicité finie m_f , étant la somme des multiplicités des points critiques finis (réels

ou complexes), on va énoncée les isoclines du système quadratique et leur propriétés aide à obtenir les caractères des points critiques au plus nous montrons qu'il existe une relation entre les coniques centrales et les isoclines dégénéré et nous établissons les types des points critiques finis.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques

On rappelle dans le premier chapitre, les résultats fondamentaux des équations différentielles.

1.1 Champ de vecteurs

Définition 1 *L'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(t, x),$$

défini un champ de vecteurs f . On appelle champ de vecteurs une application qui à tout point x associe un vecteur tangent en ce point. À tout champ de vecteur \mathcal{X} , on peut associer une équation différentielle $\dot{x} = \mathcal{X}(x)$.

Une courbe intégrale de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ est un arc paramétré dérivable γ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^n qui vérifie

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = f(t, \gamma(t)).$$

Une courbe intégrale admet donc en chacun de ses points x , un vecteur tangent $f(t, x)$.

Remarque 1 Pour résoudre une équation différentielle il suffit donc de trouver toutes ses courbes intégrales.

Définition 2 (groupe local et groupe global) Soit I un intervalle réel centré sur l'origine et U un ouvert d'un espace vectoriel E . On appelle groupe local à un paramètre tout difféomorphisme $\phi : (t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ de $I \times U$ sur E noté $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ tel que l'application $t \rightarrow \phi_t$ de I dans E soit un homomorphisme de groupes qui vérifiée :

1. L'application ϕ_0 soit l'identité.
2. L'application composée vérifie $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.
3. L'application réciproque est donnée par $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

On rappelle qu'un difféomorphisme de classe C^p ϕ_t est une application bijective telle que l'application ϕ_t et sa réciproque sont de classe C^p . On définit un groupe (global) à un paramètre en prenant pour l'intervalle I la droite réelle et pour l'ouvert U l'espace tout entier E . À chaque champ de vecteurs, on peut associer un groupe local à un paramètre. Pour un champ donné \mathcal{X} , les courbes intégrales associées sont les courbes définies par les fonctions $\gamma_x(t) = \phi_t(x)$. On appelle orbite d'un point x du champ \mathcal{X} , la courbe intégrale $\gamma_x(t)$ passant par x . Inversement, à un groupe de paramètres, on peut associer le champ de vecteurs

$$\mathcal{X}(t) = \left. \frac{d}{dt} \phi(t, x) \right|_{t=0},$$

qui est le vecteur vitesse de l'arc paramétré $\gamma_x(t)$.

Définition 3 Un champ de vecteurs est complet si toutes les courbes intégrales maximales sont paramétrées sur l'ensemble des réels tout entier (i.e. t varie de $-\infty$ à $+\infty$).

Remarque 2 La différence entre local et global est essentielle. En effet, tout champ de vecteurs engendre un groupe local à un paramètre de difféomorphismes, mais n'engendre pas nécessairement un groupe global. Pour qu'un champ soit complet, il faut et il suffit que ce champ soit engendré par un groupe (global) à un paramètre de difféomorphismes.

Exemple 1 *Le champ de vecteurs de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2*

$$\mathcal{X} = x^2 \frac{\partial}{\partial x},$$

est associé à l'équation différentielle $\dot{x} = x^2$ avec pour condition initiale $x(0) = a$ ($a \neq 0$).

Il admet les courbes intégrales d'équations

$$x(t) = \frac{a}{1 - at},$$

comme ces solutions ne sont pas définies pour la valeur $t = 1/a$, le champ n'est pas complet. Et pour le champ de vecteurs

$$\mathcal{X} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x},$$

associé à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

admet comme courbes intégrales $x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t$ et $y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t$. Le champ est complet, car les courbes intégrales sont définies à tout instant. Les courbes intégrales sont des cercles concentriques. Groupe à un paramètre est le groupe des rotations planes d'angle t .

1.2 Inversion locale

Définition 4 (la matrice jacobienne) *Lorsque f est une application différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , la différentielle de $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ au point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est l'applica-*

tion linéaire définie par la matrice jacobienne

$$\text{Jac}f(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{i,j} (a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

le jacobien est le déterminant de cette matrice.

Définition 5 (immersion) Une application f d'un ouvert U d'un espace vectoriel de dimension n dans un espace vectoriel E de dimension $n + p$ de la forme

$$f = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{n+p}(x_1, \dots, x_n)),$$

est une immersion lorsque la dérivée de f est injective, c'est-à-dire lorsque la matrice jacobienne est de rang n (on peut extraire une matrice carrée d'ordre n de déterminant non nul).

Définition 6 (submersion) Une application f d'un ouvert U d'un espace vectoriel de dimension $n + p$ dans un espace vectoriel E de dimension p de la forme

$$f = (f_1(x_1, \dots, x_{n+p}), \dots, f_p(x_1, \dots, x_{n+p})),$$

est une submersion lorsque la dérivée de f est surjective, c'est-à-dire lorsque la matrice jacobienne est de rang p (on peut extraire une matrice carrée d'ordre p de déterminant non nul).

Le théorème suivant assure l'existence des solutions locales d'équation différentielle dès que f est suffisamment régulière.

Théorème 1 (la difféomorphismes local) Soit x un point de l'ouvert U pour lequel le jacobien de f en ce point est non nul. Alors il existe un ouvert U' inclus dans U et

contenant x et un ouvert U'' contenant $f(x)$ tel que la restriction de f à U' soit un difféomorphisme de classe C^p de U' sur U'' . Autrement dit, on peut toujours inverser localement la fonction f . Si de plus f est injective, alors f est un difféomorphisme global de U sur $f(U)$.

Le théorème suivant permet de déterminer une réciproque locale et de calculer sa dérivée.

Théorème 2 (fonctions implicites) Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 au voisinage du point $a = (a_1, \dots, a_n)$ telle que $f(a) = 0$. Suppose que la dérivée partielle de f en x_n au point a est non nulle $f'_{x_n}(a) \neq 0$. Alors pour un voisinage du point (a_1, \dots, a_{n-1}) l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ admet une solution unique $h(x_1, \dots, x_{n-1})$ définie de l'intervalle local $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]x_1 - \alpha, x_1 + \alpha[\times \dots \times]x_{n-1} - \alpha, x_{n-1} + \alpha[$ dans $]x_n - \beta, x_n + \beta[$ telle que

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0,$$

et dont la dérivée est donnée par

$$dh(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{f'_{x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)}{f'_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)} dx_1 - \dots - \frac{f'_{x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)}{f'_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h)} dx_{n-1}.$$

Exemple 2 La fonction $f(x, y) = y^5 - 4y^4 + 4xy^2 - x^2$ s'annule au point $(1, 1)$. La dérivée de f en y au point $(1, 1)$ est non nulle $f'_y(1, 1) = -3$, par conséquent l'équation $f(x, y) = 0$ admet une solution locale $y = h(x)$ dont la dérivée vaut $-2/3$. La tangente au point $(a_1, a_2) = (1, 1)$ a pour équation $y - a_2 = h'(x)(x - a_1)$, soit $y = -2x/3 + 5/3$.

1.3 Equations différentielles linéaires

L'équation ou le système d'équations différentielles de la forme

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(t),$$

où A est une matrice et $B(t)$ une fonction continue admet une solution unique prenant en $t = t_0$ la valeur x_0 , qui est donnée par :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \cdot B(s) ds.$$

Remarque 3 *On a l'exponentielle d'une matrice est définie par la série*

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!},$$

le déterminant de l'exponentielle d'une matrice est égal à l'exponentielle de la trace de cette matrice, qui est la somme des valeurs propres

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}.$$

En pratique, on résout d'abord l'équation homogène

$$\dot{X}(t) = AX(t),$$

puis on détermine une solution particulière de l'équation globale. L'ensemble des solutions est obtenu par superposition de la solution de l'équation homogène augmentée d'une solution particulière. L'équation homogène se résout en mettant la matrice A sous sa forme de Jordan, qui est, dans une base convenable, la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente $J = D + N$. Si P désigne la matrice de passage $A = P(D + N)P^{-1}$, les solutions sont de la forme $X(t) = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}X_0$ où $P^{-1}X_0$ est un vecteur arbitraire. Lorsque A est une matrice diagonalisable, la résolution de l'équation homogène s'effectue par un simple changement de variables. Puisque A est de la forme $A = PDP^{-1}$, l'équation $X' = AX$ est équivalente $X' = PDP^{-1}X$ à l'équation, soit en posant $Y = PX$, cette équation devient $PY' = PDP^{-1}PY$ soit en multipliant à gauche par l'inverse de P , $Y' = DY$. Cette dernière équation est un système diagonal qui se résout simplement en $y'_i = \alpha_i e^{\lambda_i t}$ où les coefficients α_i sont des constantes arbitraires et les λ_i sont les valeurs

propres de A . Le vecteur X , qui est relié au vecteur Y par la matrice de passage, est donné par la formule $X = P^{-1}Y$ qui résout l'équation homogène.

1.3.1 Équation différentielle de premier ordre

Les équations linéaires d'ordre p se ramènent à des systèmes d'équations.

$$x^{(p)} + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1x' + a_0x = 0,$$

l'équation est équivalente au système

$$\begin{cases} x' = x_1, \\ x'_1 = x_2, \\ \dots \\ x'_{p-2} = x_{p-1}, \\ x'_{p-1} = x_p = -a_{p-1}x_{p-1} - \dots - a_1x' - a_0x. \end{cases}$$

Ce système est de la forme matricielle $X' = AX$. Si on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A , le système admet pour solution

$$\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^p & \lambda_2^p & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_3 e^{\lambda_3 t} \\ \dots \\ c_p e^{\lambda_p t} \end{pmatrix}$$

où les coefficients c_j sont des constantes. Les solutions sont donc de la forme

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_p e^{\lambda_p t}.$$

1.3.2 Equation différentielle de second ordre :

Dans le cas d'une équation du second degré, les racines du polynôme caractéristique nous renseignent sur le type de solution. Considérons l'équation

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0,$$

à cette équation différentielle est associé un polynôme P appelé polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Ce polynôme P détermine l'équation caractéristique $P(\lambda) = 0$ de l'équation différentielle. Dans l'ensemble des complexes, les solutions de cette équation forment un espace vectoriel sur l'ensemble des complexes de dimension 2.

Si le discriminant du polynôme caractéristique est ($\Delta = b^2 - 4ac$) non nul, l'équation caractéristique admet deux racines distinctes complexes λ_1 et λ_2 . Les solutions sont de la forme $x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$ les coefficients c_i étant complexes. Si le discriminant est nul, l'équation caractéristique admet une racine double λ , et les solutions sont de la forme $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$. Dans l'ensemble des réels, si le discriminant est strictement positif, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 . Les solutions sont de la forme $x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$, les coefficients c_i étant réels. Si le discriminant est nul, l'équation caractéristique admet une racine double λ , et les solutions sont de la forme $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$. Enfin, si le discriminant est négatif, les deux racines sont complexes conjuguées de la forme $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, de sorte que la solution est de la forme $x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$ équation qui peut encore s'écrire en introduisant un facteur de phase $x(t) = Ce^{\alpha t}(\cos \beta t + \varphi)$.

Remarque 4 *Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variables.*

Exemple 3 Les équations de Bernoulli

$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^\alpha,$$

les fonctions p et q étant continues. Lorsque α vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire. Sinon, en posant $y = x^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante

$$\frac{\dot{y}}{1-\alpha} = p(t)y + q(t).$$

L'équation de Riccati

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

se ramène à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, dès qu'on en connaît une solution particulière $x_1(t)$. En effet, il suffit de poser $x = x_1 + y$, et de reporter dans l'équation, pour montrer que la variable y vérifie l'équation de Bernoulli suivante

$$\dot{y} = (2a(t)x_1(t) + b(t))y(t) + a(t)y^2(t).$$

1.4 Points critiques :

Définition 7 Un point a est un point critique (stationnaire ou singulier, ou point fixe) de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ associée au champ f , si $f(a) = 0$. Si h est une fonction réelle définie sur un ouvert U contenant une variété M , on dit que a un point de h est un point critique de sur M si la dérivée de h s'annule en a : $h'(a) = 0$.

Remarque 5 -La fonction h ait un extremum relatif en a , il faut que la dérivée de h en a s'annule :

$$h'(a) = 0.$$

-La forme bilinéaire symétrique définie lorsque h est de classe C^2 sur le fibré tangent

$T_a(M)$ par

$$\phi(u, v) = (h \circ \phi)''(0)(\phi'(0)^{-1}(u), h'(0)^{-1}(v)) = \text{hess}(u, v),$$

est appelée la hessienne de h en a . Soit (e_1, \dots, e_r) une base orthogonale de $T_a(M)$

$$\phi(e_i, e_j) = k_i \delta_{ij}.$$

-Le point critique a est non dégénéré si la forme bilinéaire Hess est non dégénérée, c'est-à-dire si aucun k_i n'est nul. L'indice de i est l'indice de Hess, c'est-à-dire le nombre de k_i strictement négatifs. Si tous les points critiques de h sur M sont non dégénérés, h est appelée fonction de Morse.

Exemple 4 Soit $\dot{x} = (x^2 - 4)(x - 3)$. Les points d'équilibres sont solution de $(x^2 - 4) = 0$ et $(x - 3) = 0$, c'est-à-dire, $x_1^* = 2$, $x_2^* = -2$ et $x_3^* = 3$.

Théorème 3 Si M est une variété compacte et si h est une fonction de Morse, h a un nombre fini de points critiques.

La caractéristique d'Euler-Poincaré de M ($\dim M = r$) est liée aux points critiques par la formule

$$\chi(M) = \sum_{j=0}^r (-1)^j c_j(h),$$

c_j est le nombre de points critiques de h d'indice j . Les $c_j(h)$ sont plus grands que les nombres de Betti de M notés $b_j(M)$

$$c_j(h) \geq b_j(M).$$

1.5 Ensembles limites

Définition 8 Un point y est un point ω -limite (α -limite) pour le flot $\varphi(t, x)$ associé à l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ s'il existe une suite croissante de réels t_n (s_n décroissant) tendant vers l'infini telle que $\lim \varphi(t_n, x) = y$ ($\lim \varphi(s_n, x) = y$).

Notation 1 -L'ensemble ω -limite de x est l'ensemble noté par :

$$\omega(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n, \quad \exists (t_n) \nearrow \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = y \right\}.$$

-L'ensemble α -limite de x est l'ensemble noté par :

$$\alpha(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n, \quad \exists (s_n) \searrow -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n, x) = y \right\}.$$

1.5.1 Ensembles invariants

Définition 9 -Un ensemble A est invariant si :

$$\forall x \in A, \quad \varphi(t, x) \in A, \quad \forall t.$$

-Un ensemble A est positivement invariant (resp.négativement invariant) si :

$$\forall x \in A, \quad \varphi(t, x) \in A, \quad \forall t > 0 \quad (t < 0).$$

-La courbe intégrale ou la trajectoire passant par x est l'ensemble

$$\gamma(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t, x),$$

et la semi-trajectoire positive est l'ensemble

$$\gamma^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi(t, x).$$

-L'ensemble ω -limite est l'intersection des fermetures des semi-trajectoires positives

$$\omega(x) = \bigcap_{y \in \gamma(x)} \overline{\gamma^+(y)}.$$

Théorème 4 *L'ensemble A est invariant si et seulement si $\gamma(x) \subset A, \forall x \in A$.*

Théorème 5 *Si $\omega(x)$ est invariant et si $\gamma^+(x)$ est borné, alors $\omega(x)$ est compact.*

Exemple 5 *L'équation différentielle $\dot{x} = -x$ avec $x(0) = 0$ admet comme solution les courbes $x(t) = Ce^{-t}$. Le flot associé est donc $\varphi(t, x) = Ce^{-t}$. L'ensemble ω -limite est réduit à $\{0\}$. Si $x = 0, \alpha(x) = 0$, mais si x est positif ou négatif, l'ensemble α -limite est vide.*

Exemple 6 *Considérons le système d'équations*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

En coordonnées polaires, ce système équivaut à $\dot{r} = r(1 - r^2)$. Les points d'équilibre sont obtenus pour $r = 0$ et $r = 1$. L'ensemble ω -limite est égal au cercle de rayon 1, si r est non nul et se réduit à $\{0\}$ si $r = 0$. L'ensemble ω -limite est vide si r est plus grand que 1, c'est-à-dire à l'extérieur du cercle unité et est égal au point origine, si r est inférieur à 1.

1.6 Stabilité au sens de Lyapunov

On considère l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ et on note $\varphi(t, x)$ le flot associé. On suppose que l'équation admet une solution $x(t)$ pour la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Définition 10 *Le point d'équilibre x d'équation différentielle est :*

1. *Stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : |x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies |x(t) - y(t)| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

2. *Quasi asymptotiquement stable si :*

$$|x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

3. *Asymptotiquement stable si :*

$$\forall \delta > 0 : |x(t_0) - x(t)| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0) - x(t)| = 0.$$

(si x est stable et quasi-asymptotiquement stable).

Remarque 6 Lorsque x est un élément de \mathbb{R}^n , la notation des valeurs absolues représente la norme.

Exemple 7 L'équation différentielle donnée en coordonnées polaires $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 1$, dont les solutions $\dot{r} = r_0$, $\dot{\theta} = t + \theta_0$ sont des cercles parcourus à vitesse constante (égale à 1), l'origine est stable, mais n'est pas quasi asymptotiquement stable.

Exemple 8 Les solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = -x$ sont asymptotiquement stables. En effet, les solutions sont de la forme $x(t) = x_0 e^{-(t-t_0)}$. Deux solutions proches vérifient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_0 - y_0| e^{-(t-t_0)} = 0.$$

Remarque 7 Par changement de variables, on ramène l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine.

La fonction de Lyapunov V associée à l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ est :

1. Une fonction continûment différentiable définie sur un voisinage ouvert U de l'origine.
2. Une fonction s'annule à l'origine $V(0) = 0$.
3. Elle reste positive au voisinage de l'origine $V(x) > 0$, $\forall x \in U \setminus \{0\}$.

Théorème 6 1. Si $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$, alors l'origine est stable.

2. Si $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$, alors l'origine est asymptotiquement stable.

3. Si $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$, alors l'origine est instable.

Exemple 9 L'oscillateur non linéaire $\ddot{x} + c\dot{x} + ax + bx^3 = 0$ où les constantes a, b, c sont positives peut s'écrire sous la forme d'un système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ax - cy - bx^3. \end{cases}$$

La fonction $V(x, y) = 2ax^2 + bx^4 + 2y^2$ est positive et de dérivée totale $\dot{V}(x, y) = -4cy^2$ toujours négative. $V(x, y)$ est une fonction de Lyapunov sur tout ouvert borné contenant l'origine. Le point stationnaire $(0, 0)$ est par conséquent stable.

Exemple 10 Considérons l'oscillateur $\ddot{y} - a\dot{x}(2x - 1) + 1 = 0$ où a est une constante positive. Écrit sous la forme d'un système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a(x^2 - x), \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

l'oscillateur admet une fonction de Lyapunov $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ de dérivée totale $\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = ax^2(x - 1)$ toujours strictement négative au voisinage de 0. Le point stationnaire $(0, 0)$ est par conséquent asymptotiquement stable.

Exemple 11 Considérons l'équation suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2, \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$$

La fonction $V(x, y) = (x^3 + y^3)/3 + xy$ est une fonction de dérivée positive

$$\dot{V}(x, y) = (y + x^2)^2 + (x + y^2)^2.$$

Le point de coordonnées $(\varepsilon, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ vérifie la condition du théorème, par conséquent l'origine est un point instable.

Théorème 7 *Si $\dot{x} = f(x)$ a une linéarisation $\dot{x} = Ax$ où A est le jacobien de f en $x = 0$, et si la matrice A a n valeurs propres distinctes dont chacune a une partie réelle strictement négative, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.*

Chapitre 2

Portrait de phase

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va donner quelques notions de base sur les portraits de phase des systèmes quadratiques dans le plan, ce qui indique que beaucoup à faire pour compléter l'idée sur le sujet.

Définition 11 *On appelle portrait de phase l'ensemble des projections dans le plan de phase des solutions d'un système. C'est une représentation géométrique des orbites qui fournit des informations essentielles sur les propriétés des systèmes autonomes.*

2.2 Système quadratique

Définition 12 *Un système quadratique est un système autonome de second degré d'équations différentielles sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

Où les fonctions $x = x(t)$, $y = y(t)$ sont des variables, avec $\dot{} = \frac{d}{dt}$. et a_{ij}, b_{ij} ($i, j = 0, 1, 2$) sont des constantes dans K (R ou C).

Pour obtenir le **portrait de phase** d'un système autonome d'équations différentielles dans le plan, nous utilisons la théorie de *Poincaré-Bendixson* sur le comportement qualitatif d'équation différentielle dans le plan.

Les points ordinaires sont définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$, et les points critiques définis par $P^2(x, y) + Q^2(x, y) = 0$. Pour chaque point ordinaire (x_0, y_0) sur le plan de phase (x, y) ; il existe une unique orbite qui représente une famille de solutions de (2.1) donné par

$$x = x(t, x_0, y_0, t_0), y = y(t, x_0, y_0, t_0),$$

satisfaites

$$x(t_0; x_0, y_0, t_0) = x_0, y(t_0; x_0, y_0, t_0) = y_0.$$

Où pour (x_0, y_0) , t_0 donnés peut être choisi rapportant la même orbite passant par (x_0, y_0) pour une valeur arbitraire de t_0 .

2.3 La sphère de Poincaré

Soit un système différentiel polynômial planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.2)$$

(les fonctions P et Q sont des polyômes de degré arbitraire des variables (x, y)),

Remarque 8 *On a le degré m de (2.2) est le maximum des degrés de P et Q .*

Nous considérons \mathbb{R}^2 comme le plan dans \mathbb{R}^3 définis par $(X, Y, Z) = (X, Y, 1)$. Et la sphère $S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ laquel nous appellerons ici **sphère de Poincaré**; c'est tangent à \mathbb{R}^2 au points $(0, 0, 1)$. Nous pouvons diviser cette sphère à $H_+ = \{(X, Y, Z) \in S^2 : Z > 0\}$ (l'hémisphère nord) $H_- = \{(X, Y, Z) \in S^2 : Z < 0\}$

(l'hémisphère sud) et $S_1 = \{(X, Y, Z) \in S^2 : Z = 0\}$ (l'équateur). Maintenant nous considérons la projection du système différentiel (2.2) de \mathbb{R}^2 sur S^2 donnée par les projections centrales $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ et $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$. Plus précisément, $f^+(x, y)$ (respectivement $f^-(x, y)$) est l'intersection de la ligne droite qui passe à travers un point de la plan \mathbb{R}^2 et l'origine avec le nord (respectivement, sud) hémisphère de S^2 (voir figure (1))

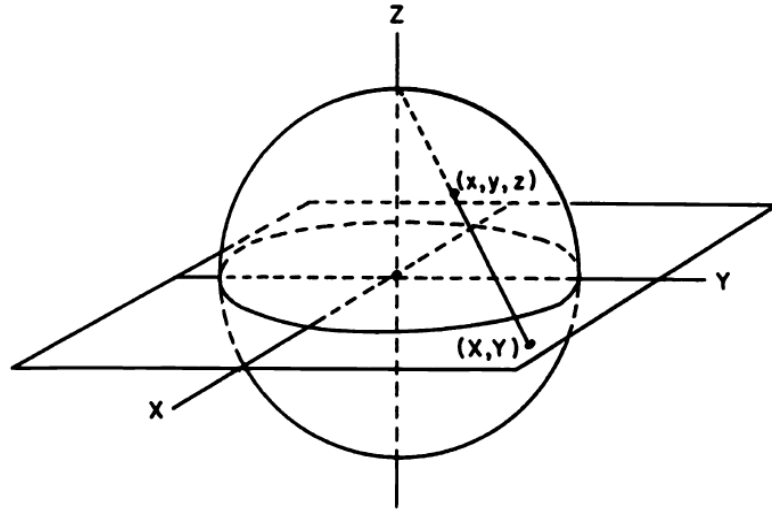


Figure 1 : Projection centrale de hémisphère de S_2 sur (x, y) -plan

Ce type de projection centrale a l'avantage que les points critiques à l'infini sont étendus le long de l'équateur de la sphère Poincaré et sont donc à caractère plus simple que le point critique à l'infini sur la sphère de Bendixson.

Alors il suit des triangles semblables dans figures (2), que les équations qui définissent (x, y) par (X, Y, Z) est

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}.$$

De la même façon, il suit que les équations qui définissent (X, Y, Z) par (x, y) est donnée par

$$f^+(x, y) = (X, Y, Z) = \left(\frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}, \frac{1}{\Delta} \right),$$

$$f^-(x, y) = (X, Y, Z) = \left(\frac{-x}{\Delta}, \frac{-y}{\Delta}, \frac{-1}{\Delta} \right),$$

avec

$$\Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

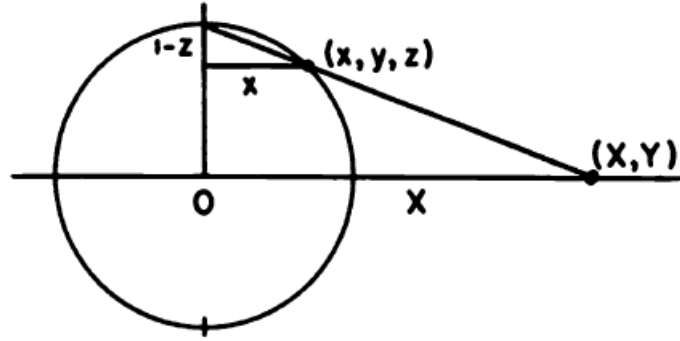


Figure 2 : Une section transversale de la projection centrale de l'hémisphère supérieure

Nous obtenons les champs des vecteurs introduire dans chaque hémisphère. Le champ de vecteurs sur H_+ est $\bar{\mathcal{X}} = Df^+(x, y)\mathcal{X}(x, y)$, telque $(X, Y, Z) = f^+(x, y)$, et celui sur H_- est $\bar{\mathcal{X}} = Df^-(x, y)\mathcal{X}(x, y)$, telque $(X, Y, Z) = f^-(x, y)$.

D'après la présentation sur le disque de *Poincaré* les points critiques à l'infini est caractérisé par la condition $\dot{\theta} = 0$, où r et θ des coordonnées polaires. Si (2.1) sont écrits dans ces coordonnées sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = A_1(\theta) + rB_1(\theta) + r^2C_1(\theta), \\ \dot{\theta} = A_2(\theta) + rB_2(\theta) + r^2C_2(\theta), \end{cases}$$

où $A_i(\theta)$, $B_i(\theta)$, $C_i(\theta)$, $i = (1, 2)$ des fonctions trigonométriques.

Définition 13 Deux portraits de phase sont qualitativement équivalentes s'il existe un homéomorphisme entre les deux portraits de phase de telle sorte que, si deux points en portrait de phase liée par une orbite, alors leurs images sont aussi liée par une orbite dans l'autre portrait de phase.

Exemple 12 On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy = P(x, y), \\ \dot{y} = 1 + y - x^2 + y^2 = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.3)$$

le portrait de phase de système (2.3) est donné par la figure (3).

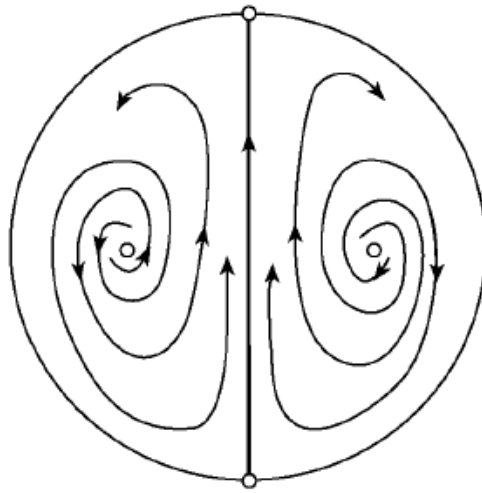


Figure 3 : Le portrait de phase de système (2.3).

Ce système admet quatre points critiques finis, deux points réels $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et deux points complexes $(0, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}))$ et $(0, \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}))$, plus, il existe trois points critiques à l'infini, un réel à $\theta = \frac{1}{2}\pi(\frac{3}{2}\pi)$ et deux complexes à $\theta = \arctan +i$ et $\theta =$

arctan $-i$. Sauf pour l'orbite $x \equiv 0$, tous les points sur l'orbite y sont des points α -limite à $y = -\infty$ ainsi que des points ω -limite à $y = \infty$, toutes les orbites contiennent d'un point α -limite qui coïncide avec un point critique fini vers un ensemble ω -limite qui se compose des points critiques reliés par des orbites par les points ordinaires. L'orbite qui coïncide avec l'axe y divise le portrait de phase en deux régions et sert donc comme une séparatrice entre ces deux régions. Le moindre changement de $P(x, y)$, cependant, par exemple pour $P(x, y) = 2xy + \epsilon$, où ϵ est un petit paramètre, le portrait phase reste inchangé.

Ceci indique que la *structure séparatrice* des portraits de phase doit être prise en compte dans la description qualitative des portraits de phase et que l'étude des phénomènes de bifurcation est nécessaire pour trouver la partition de l'espace des coefficients dans les régions où les portraits de phase sont qualitativement équivalents.

Exemple 13 On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y + \frac{3}{2}), \\ \dot{y} = x + y - 2y^2, \end{cases} \quad (2.4)$$

le portrait de phase est donné par la figure (4).

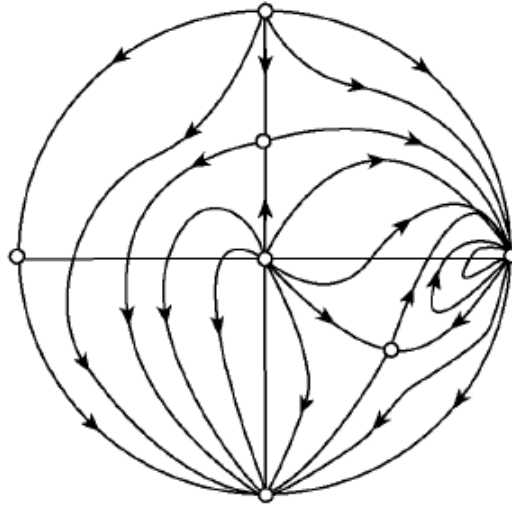


Figure 4 : Le portrait de phase de système
(2.4).

les points critiques finies sont situés à $(0,0)$, $(0, \frac{1}{2})$ et $(6, -\frac{3}{2})$. Le quatrième point d'intersection dégénéré hyperbole $x(y + \frac{3}{2}) = 0$ et la parabole d'équation $x + y - 2y^2 = 0$ est "à l'infini" la direction asymptotique commune $y = 0$. Le point critique infini "à l'infini de l'axe x " correspond à un double racine, étant donné par $C_2(\theta) = -\sin^2 \theta \cos \theta$, et deux coïncidant points critiques infinis.

2.4 Orbites périodiques

Définition 14 On dit que la solution de système (2.1) est périodique si elle satisfait :

$$\begin{cases} x(t + T; x_0, y_0, t_0) = x(t; x_0, y_0, t_0), \\ y(t + T; x_0, y_0, t_0) = y(t; x_0, y_0, t_0), \end{cases} \quad (2.5)$$

où $-\infty < t < \infty$ pour certains $T > 0$. Ils sont représentés dans le plan par une orbite fermée. Tous les points sur l'orbite sont des points α -limite ainsi que des points ω -limite.

Exemple 14 La région des orbites fermées pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + 2y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = -2x, \end{cases} \quad (2.6)$$

est donné par la figure (5)

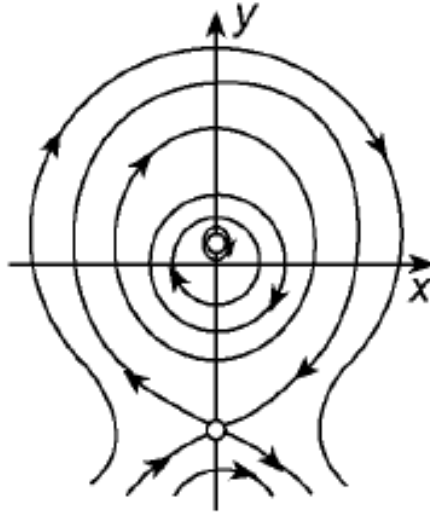


Figure 5 : La Région des orbites fermées pour le système (2.6).

la région délimitée par le point critique $(0, -1 - \sqrt{2})$ et la séparatrice $(x^2 + y^2 - 1)e^y = 2(1 + \sqrt{2})e^{-1 - \sqrt{2}}$ est complètement remplie par des orbites périodiques.

Exemple 15 Le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + 2y + x^2 + xy + y^2 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = -2x - x^2 \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (2.7)$$

admet un cycle limite qui coïncide avec le cercle d'unité (figure (6))

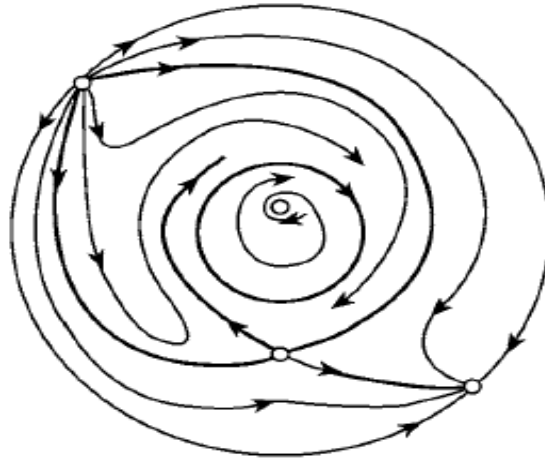


Figure 6 : Le portrait de Phase de système
(2.7).

Dans cet exemple, le cycle limite est un ω -limite des orbites approchant de l'intérieur ainsi que de l'extérieur. Les cycles limites qui sont un ensemble α -limites ou à la fois des ensembles ω -limite peuvent également se produire dans les systèmes quadratiques.

Chapitre 3

Les points critiques des systèmes quadratiques :

3.1 Multiplicité des points critiques :

Définition 15 *On dit que un point critique (x_0, y_0) d'un système quadratique (2.1) admet une multiplicité m s'il existe des nombres $\epsilon_0 > 0$ et $\delta_0 > 0$ tel que tout système de coefficients $\overline{a_{i,j}}, \overline{b_{i,j}}$ ($i, j = 0, 1, 2$) tel que $|\overline{a_{i,j}} - a_{i,j}|, |\overline{b_{i,j}} - b_{i,j}| < \delta < \delta_0$ admet au plus m points critiques dans un voisinage $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon_0$ de (x_0, y_0) , et pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ et $\delta < \delta_0$, il existe un système quadratique qui possède au moins m points critiques dans le voisinage $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon$.*

Si $m = 1$ le point critique est simple ou élémentaire. Perturbations dans les coefficients ne conduisent à la présence continue d'un seul point critique élémentaire. En un tel point les isoclines $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ se coupent en un angle différent de zéro, et si le point est situé dans (x_0, y_0) alors $\Lambda(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0) \neq 0$.

L'écriture de ces isoclines comme :

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= P_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}P_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \\
&P_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}P_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 = 0, \\
Q(x, y) &= Q_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}Q_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \\
&Q_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}Q_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 = 0,
\end{aligned}$$

en résulte que les isoclines de (2.1), $\lambda P(x, y) + \mu Q(x, y) = 0$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, peuvent être écrites comme $(\lambda P_x(x_0, y_0) + \mu Q_x(x_0, y_0))(x - x_0) + (\lambda P_y(x_0, y_0) + \mu Q_y(x_0, y_0))(y - y_0) +$ termes quadratiques $= \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) +$ termes quadratique $= 0$.

Cela conduit au système

$$\begin{cases} \lambda P_x(x_0, y_0) + \mu Q_x(x_0, y_0) = \alpha, \\ \lambda P_y(x_0, y_0) + \mu Q_y(x_0, y_0) = \beta, \end{cases}$$

et montre, avec un $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$, que toute direction $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, correspond à une isocline unique à travers une point critique élémentaire.

Dans les points critiques avec multiplicité $m > 1$, ou des points d'ordre supérieur, la condition $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$ n'est pas satisfaite. Puisque nous ne considérons pas des systèmes quadratiques dégénérés, le nombre de points critiques finis est fini alors que $m \neq \infty$. Depuis deux coniques (isoclines coniques) ont au plus quatre d'intersections différent des points, la multiplicité d'un point critique dans un système quadratique est au plus ou égal à 4, alors $1 \leq m \leq 4$.

Définition 16 *La multiplicité finie m_f d'un système quadratique est la somme des multiplicités de tout les points critiques finis (réels ou complexes).*

Exemple 16 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = xy, \end{cases}$$

admet quatre points critiques finis sont $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$ donc $m_f = 4$.

Exemple 17 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -\epsilon^2 + x^2 - y^2, \\ \dot{y} = xy, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\epsilon \in \mathbb{R}$. Pour $\epsilon \neq 0$, le système contient deux points critiques élémentaires réels $(\epsilon, 0)$ et $(-\epsilon, 0)$, et deux complexes élémentaires $(0, i\epsilon)$ et $(0, -i\epsilon)$, alors $m_f = 4$. Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ ne prendre pas seulement les réelles, mais aussi les points critiques complexes coïncident avec l'origine et un point critique de multiplicité $m = 4$.

Théorème 8 Si $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$, les coordonnées x des points critiques de (2.1) sont donnée par les solutions de l'équations :

$$Ax^4 + B_1x^3 + C_1x^2 + D_1x + E_1 = 0, \quad (3.2)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de y et donc un point critique finie. Pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{02}^2 + b_{02}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (2.1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.
- (ii) 3 si seulement si $A = 0$, $B_1 \neq 0$.
- (iii) 2 si seulement si $A = B_1 = 0$, $C_1 \neq 0$.
- (iv) 1 si seulement si $A = B_1 = C_1 = 0$, $D_1 \neq 0$.
- (v) 0 si seulement si $A = B_1 = C_1 = D_1 = 0$, $E_1 \neq 0$.
- (vi) ∞ si seulement si $A = B_1 = C_1 = D_1 = E_1 = 0$, $C_1 \neq 0$.

Théorème 9 Si $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$, les coordonnées y des points critiques de (2.1) sont donnée par les solutions de l'équation :

$$Ay^4 + B_2y^3 + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0, \quad (3.3)$$

pour toute solution correspond exactement une valeur finie de x et donc un point critique finie. Pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 = 0$ l'équation n'est pas vérifiée et pour $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (2.1) égale :

- (i) 4 si seulement si $A \neq 0$.
- (ii) 3 si seulement si $A = 0, B_2 \neq 0$.
- (iii) 2 si seulement si $A = B_2 = 0, C_2 \neq 0$.
- (iv) 1 si seulement si $A = B_2 = C_2 = 0, D_2 \neq 0$.
- (v) 0 si seulement si $A = B_2 = C_2 = D_2 = 0, E_2 \neq 0$.
- (vi) ∞ si seulement si $A = B_2 = C_2 = D_2 = E_2 = 0, C_2 \neq 0$.

Théorème 10 Si $a_{20}^2 + a_{02}^2 + b_{20}^2 + b_{02}^2 = 0, a_{11}^2 + b_{11}^2 \neq 0$ la multiplicité finie m_f de (2.1) égale :

- (i) 2 si seulement si $c_{25}c_{35} \neq 0$.
- (ii) 1 si seulement si de tous $c_{25} = 0, c_{35} \neq 0, c_{15} + c_{23} \neq 0$, où $c_{25} \neq 0, c_{35} = 0, c_{15} - c_{23} \neq 0$.
- (iii) 0 si seulement si de tous $c_{25} = 0, c_{35} \neq 0, c_{15} + c_{23} = 0, c_{13} \neq 0$ où $c_{25} \neq 0, c_{35} = 0, c_{15} - c_{23} = 0, c_{12} \neq 0$ où $c_{25} = 0, c_{35} = 0, c_{15} \neq 0$.
- (iv) ∞ si seulement si de tous $c_{25} = 0, c_{35} \neq 0, c_{15} + c_{23} = 0, c_{13} = 0$ où $c_{25} \neq 0, c_{35} = 0, c_{15} - c_{23} = 0, c_{12} = 0$ où $c_{25} = 0, c_{35} = 0, c_{15} = 0$.

Dans ces théorèmes on utilise les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= c_{46}^2 - c_{45}c_{56}, \\
B_1 &= 2c_{46}(c_{26} - \frac{1}{2}c_{35}) + 2c_{56}(c_{34} - \frac{1}{2}c_{25}), \\
B_2 &= -2c_{45}(c_{26} - \frac{1}{2}c_{35}) + 2c_{46}(c_{34} - \frac{1}{2}c_{25}), \\
C_1 &= c_{26}(c_{26} - \frac{1}{2}c_{35}) + c_{36}(c_{34} - \frac{1}{2}c_{25}) - \frac{1}{2}c_{56}(3c_{23} + 2c_{15}) + 2c_{16}c_{46}, \\
C_2 &= c_{24}(c_{26} - \frac{1}{2}c_{35}) + c_{34}(c_{34} - \frac{1}{2}c_{25}) - \frac{1}{2}c_{46}(3c_{23} + 2c_{15}) + 2c_{14}c_{46}, \\
D_1 &= -c_{23}c_{36} - 2c_{13}c_{56} + 2c_{16}(c_{26} - \frac{1}{2}c_{25}), \\
D_2 &= c_{23}c_{24} + 2c_{12}c_{45} + 2c_{14}(c_{34} - \frac{1}{2}c_{25}), \\
E_1 &= c_{16}^2 - c_{13}c_{36}, \\
E_2 &= c_{14}^2 - c_{12}c_{24}.
\end{aligned}$$

Où,

$$\begin{aligned}
c_{12} &= a_{00}b_{10} - a_{10}b_{00}, & c_{13} &= a_{00}b_{01} - a_{01}b_{00}, & c_{14} &= a_{00}b_{20} - a_{20}b_{00}, \\
c_{15} &= a_{00}b_{11} - a_{11}b_{00}, & c_{16} &= a_{00}b_{02} - a_{02}b_{00}, & c_{23} &= a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}, \\
c_{24} &= a_{10}b_{20} - a_{20}b_{10}, & c_{25} &= a_{10}b_{11} - a_{11}b_{10}, & c_{26} &= a_{10}b_{02} - a_{02}b_{10}, \\
c_{34} &= a_{01}b_{20} - a_{20}b_{01}, & c_{35} &= a_{01}b_{11} - a_{11}b_{01}, & c_{45} &= a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20}, \\
c_{46} &= a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20}, & c_{56} &= a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, il exist les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
c_{12}c_{34} + c_{14}c_{23} &= c_{13}c_{24}, & c_{12}c_{35} + c_{15}c_{23} &= c_{13}c_{25}, & c_{12}c_{16} + c_{16}c_{23} &= c_{13}c_{26}, \\
c_{12}c_{45} + c_{15}c_{24} &= c_{14}c_{25}, & c_{12}c_{46} + c_{16}c_{24} &= c_{14}c_{26}, & c_{12}c_{36} + c_{16}c_{25} &= c_{15}c_{26}, \\
c_{13}c_{45} + c_{15}c_{34} &= c_{14}c_{35}, & c_{13}c_{46} + c_{16}c_{34} &= c_{14}c_{36}, & c_{13}c_{56} + c_{16}c_{35} &= c_{15}c_{36}, \\
c_{14}c_{56} + c_{16}c_{45} &= c_{15}c_{46}, & c_{14}c_{56} + c_{16}c_{45} &= c_{15}c_{46}, & c_{23}c_{46} + c_{26}c_{34} &= c_{24}c_{36}, \\
c_{23}c_{56} + c_{26}c_{35} &= c_{25}c_{36}, & c_{24}c_{56} + c_{26}c_{45} &= c_{25}c_{46}, & c_{34}c_{56} + c_{36}c_{45} &= c_{35}c_{46}.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que sous la transformation $x \longleftrightarrow y$, $a_{ij} \longleftrightarrow b_{ij}$ puis $c_{12} = -c_{13}$, $c_{15} = -c_{15}$, $c_{23} = c_{23}$, $c_{24} = -c_{36}$, $c_{25} = -c_{35}$, $c_{26} = -c_{34}$, $c_{45} = c_{56}$, $c_{46} = c_{46}$.

En fait, si $a_{02}^2 + b_{02}^2 = 0$, alors $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ ont un facteur commun y dans les termes du système quadratique, ce qui montre qu'ils ont l'axe x comme direction

asymptotique commune. En conséquence, tous les isoclines $\lambda P(x, y) + \mu Q(x, y) = 0$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ont cette direction en commun et du faisceau des isoclines (conique) ont un point de base infinie à "aux fins de l'axe des x ". Une direction asymptotique commune de $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ correspond à un facteur commun dans

$$\begin{cases} P_2(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ Q_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases}$$

Théorème 11 *Les expressions*

$$\begin{cases} P_2(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ Q_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases}$$

admet un facteur commun si et seulement si $A \equiv c_{46}^2 - c_{45}c_{56} = 0$. Le facteur commun est :

1. *Linéaire* si $c_{45}^2 + c_{46}^2 + c_{56}^2 \neq 0$, alors il y a un point de base infini du faisceau de coniques, représentant les isoclines dans la direction donnée par $c_{45}x + c_{46}y = 0$ si $c_{45} \neq 0$, et $c_{46}x + c_{56}y = 0$ si $c_{56} \neq 0$, (Cette direction peut aussi s'écrire $(c_{45} + c_{46})x + (c_{56} + c_{46})y = 0$).
2. *Quadratique* si $c_{45}^2 + c_{46}^2 + c_{56}^2 = 0$, alors il y a deux directions (peut être coïncider ou complexe) dans lesquelles il ya des points du base infini, ceux-ci étant donnée par $P_2(x, y) = 0$ et/ou $Q_2(x, y) = 0$.

Démonstration 1 *Nous pouvons écrire*

$$\begin{cases} P_2(x, y) = (\alpha_1x + \beta_1y)(\alpha_2x + \beta_2y) = \alpha_1\alpha_2x^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)xy + \beta_1\beta_2y^2, \\ Q_2(x, y) = (\alpha_3x + \beta_3y)(\alpha_4x + \beta_4y) = \alpha_3\alpha_4x^2 + (\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3)xy + \beta_3\beta_4y^2, \end{cases}$$

avec, $\alpha_i, \beta_i \in C, i = 1, 2, \dots, 4$. alors on a

$$\begin{cases} c_{45} = \alpha_1\alpha_3(\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2) + \alpha_2\alpha_4(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1), \\ c_{46} = \alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 - \alpha_3\alpha_4\beta_1\beta_2, \\ c_{56} = \beta_2\beta_4(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) + \beta_1\beta_3(\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2), \end{cases}$$

de sorte que

$$c_{46}^2 - c_{45}c_{56} = (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2).$$

Ainsi $P_2(x, y) = 0$ et $Q_2(x, y) = 0$ ont un facteur commun (linéaire ou quadratique) si et seulement si $A \equiv c_{46}^2 - c_{45}c_{56}$. On suppose maintenant qu'il existe au moins un facteur commun linéaire, alors pour $\alpha = \alpha_1 = \alpha_3, \beta = \beta_1 = \beta_3$ il suit que

$$\begin{cases} c_{45} = \alpha^2(\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2), \\ c_{46} = \alpha\beta(\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2), \\ c_{56} = \beta^2(\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2), \end{cases}$$

s'il existe un seul facteur linéaire commun, puis $\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 \neq 0$, et $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, c_{45}^2 + c_{46}^2 + c_{56}^2 \neq 0$. Si en dehors de $\alpha x + \beta y$ il existe une autre (peut-être le même) facteur linéaire en commun, puis $\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 = 0$ et $c_{45}^2 + c_{46}^2 + c_{56}^2 = 0$. Si $c_{45} \neq 0$, alors $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ et $a_{11}^2 + b_{11}^2 \neq 0$ et de $P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0$, il peut être obtenir les isoclines

$$c_{14} + c_{24}x + c_{34}y - c_{45}xy - c_{46}y^2 = 0,$$

$$c_{15} + c_{25}x + c_{35}y + c_{45}x^2 - c_{56}y^2 = 0,$$

ayant une direction asymptotique commune donnée par $c_{45}x + c_{46}y = 0$, de même, si $c_{56} \neq 0$, la direction asymptotique commune peut s'écrire $c_{46}x + c_{56}y = 0$.

3.2 Indice de Poincaré des points critiques :

Indépendamment de sa multiplicité, l'indice de Poincaré est également une propriété intéressante pour caractériser un point critique.

Définition 17 Soit C une courbe fermée simple dans le plan de phase ne traverse pas des points critiques de (2.1) et soit ϕ l'angle de (P, Q) avec l'axe positif x . Alors, l'indice $I(C)$ de la courbe fermée C par rapport au champ du vecteurs $(P(x, y), Q(x, y))$ est défini par $\frac{\Delta\phi}{2\pi}$, où $\Delta\phi$ est la changement totale dans

$$\phi(x, y) = \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

Comme point (x, y) traverse C exactement une fois dans la direction positive, l'indice $I(C)$ peut être calculer en utilisant la formule :

$$I(C) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \tan^{-1} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}.$$

Remarque 9 On utilise la formule de Bendixson $i = 1 + \frac{1}{2}(e - h)$, où e est le nombre de secteurs elliptiques et h le nombre secteurs hyperboliques au point critique adjacent pour déterminé l'indice de Poincaré.

Un *secteur hyperbolique* est représenté par la figure (7). Il est caractérisé par l'existence de deux orbites chaque orbite approche du point critique dans une direction déterminée, de telle sorte qu'il existe un voisinage du point critique délimitée par ces orbites dans lequel seules orbites existent d'un voisinage pour $t \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow -\infty$.

Un *secteur elliptique* est représenté par la figure (8). il est caractérisé par l'existence d'un voisinage du point critique contenant une boucle, étant une orbite, définie sur $-\infty < t < \infty$ et l'approche du point critique pour $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow \infty$.

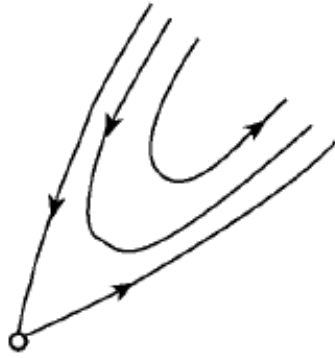


Figure 7 : Un secteur
hyperbolique

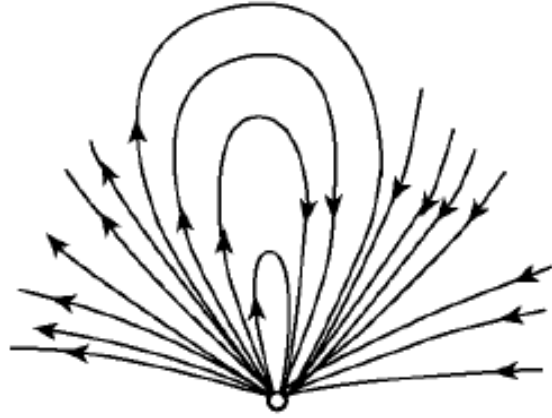


Figure 8 : Un secteur elliptique

Théorème 12 *Si le nombre de points critiques finie et infinie est fini, alors $i_t = 1$.*

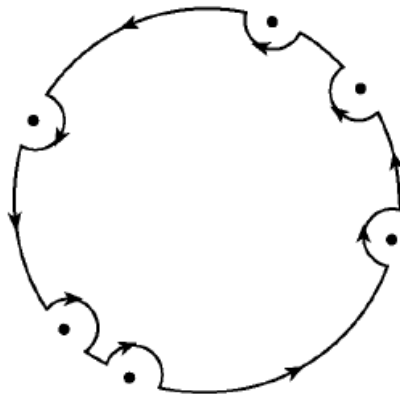


Figure 9 : La courbe C

Démonstration 2 *Considérer, comme il est représenté par la figure (9), une courbe C composé de cercle de Poincaré moins la partie coupé par le cercle de rayon autour de chaque ϵ point critique sur le cercle ainsi qu'une partie de ces cercles situés à disque de Poincaré. Déterminer la rotation du champ de vecteur lorsque la courbe C est traversé*

dans le sens antihoraire. Comme la partie de C coïncidant avec la cercle de Poincaré se compose d'orbites, de la rotation du champ de vecteurs sur cette partie tend à 2π comme $\epsilon \rightarrow 0$ contribution O . de la rotation sur les cercles autour de l'infinies points critiques ont tendance à $-2\pi_i$ car ils sont traversés dans le sens horaire direction. Le résultat découle de $2\pi - 2\pi_i = 2\pi i_f$.

3.3 Types des points critiques finis

Comme on a déjà vu le comportement des orbites près d'un point critique est un problème local, c-à-d la notion d'une limite peut être utilisé, pour étudier quel type possible de points critiques des systèmes quadratiques, on trouve des méthodes disponibles.

En fait, l'application de ces méthodes a conduit à un corps pratiquement définitive de connaissances sur les points critiques dans les systèmes quadratiques. Une distinction sera faite entre les points critiques finis .

Soit (x_0, y_0) un point critique de (2.1), alors $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, puis une première division en classes des points critiques peut être obtenue en considérant le système localement linéarisé

$$\begin{cases} \dot{x} = P_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ \dot{y} = Q_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q_y(x_0, y_0)(y - y_0). \end{cases}$$

Notons que λ_1, λ_2 des valeurs propres de la matrice

$$D = \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

il est bien connu que le produit $\lambda_1\lambda_2$ des valeurs propres de D égale

$$\Lambda(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0),$$

et son somme $\lambda_1 + \lambda_2$ égale à $d(x_0, y_0) = P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0)$, qui est également

l'expression pour la divergence du champ de vecteurs (P, Q) sur (x_0, y_0) . Les cas suivant peuvent être distingués :

1. Points critiques élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$.
2. Points critiques semi-élémentaires, alors $\Lambda(x_0, y_0) = 0$, $d(x_0, y_0) \neq 0$.
3. Points critiques dégénérés, alors $\Lambda(x_0, y_0) = d(x_0, y_0) = 0$.

Le dernier peut être divisé en :

1. Points critiques nilpotents, alors $P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2 \neq 0$ sur (x_0, y_0) .
2. Points critiques dans systèmes essentiellement homogène, alors $P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2 = 0$ sur (x_0, y_0) .

Points critiques élémentaires

Une discussion sur les points critiques élémentaires peuvent être trouvés dans plusieurs ouvrages (voir section (3.1)), nous rappelons certains comportements qualitatives factorielles. La base des orbites près des points critiques élémentaires qui se produisent dans les systèmes du second degré sont représenté dans la Figure (10).

Si $\Lambda(x_0, y_0) < 0$, le point est un selle (Figure (10a)), il a quatre secteurs hyperboliques et les séparatrices approchent du point différent angles, l'indice de Poincaré est égal à -1 .

Si $\Lambda(x_0, y_0) > 0$ l'indice de Poincaré est égal à $+1$, pour cette raison, il est souvent appelé un antiselle. autre distinction donnons :

1. Si $\Lambda(x_0, y_0) < \frac{1}{4}d^2(x_0, y_0)$ le point est un nœud avec deux directions qui s'approche les orbites (Figure (10b)).
2. Si $\Lambda(x_0, y_0) = \frac{1}{4}d^2(x_0, y_0)$ est le point un nœud avec une ou un nombre infini de directions qui s'approche les orbites (Figure (10c, d)).
3. Si $\Lambda(x_0, y_0) > \frac{1}{4}d^2(x_0, y_0)$, le point est une foyer ou centre (Figure (10e, f)), selon les termes du quadratique. En fait, l'étude du conditions sur les termes quadratiques pour les figures suivantes

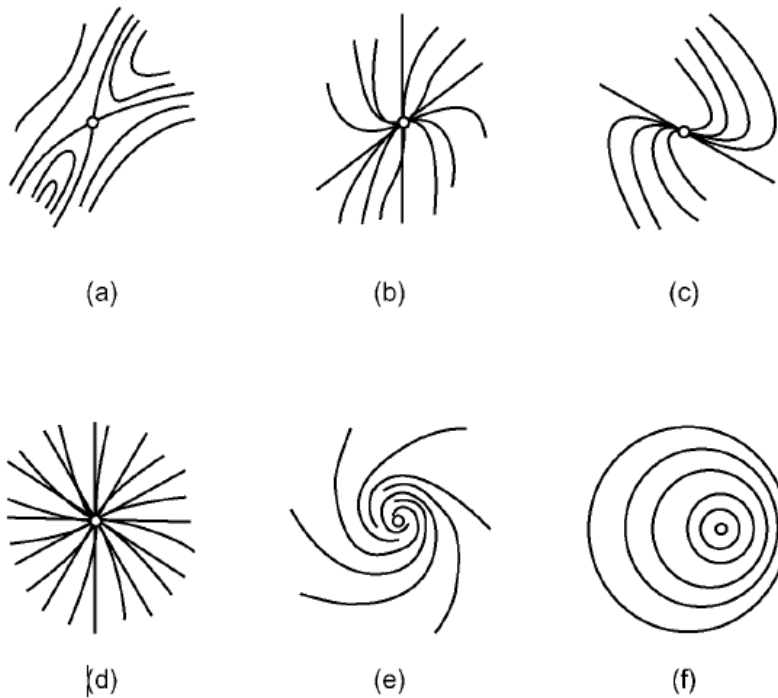


Figure 10 : Le comportement qualitatif des orbites près des points critiques élémentaires des systèmes quadratiques

En effet, on va étudier les conditions sur les termes quadratiques pour lesquelles le point critique est un centre. Dans la figure (10) les flèches se dirigent dans la direction lorsque t augmente, ce qui donne les cas de nœud et de foyer stable, le cas instable correspond à l'inversion des flèches. Pour le point selle et le point centre dans l'instabilité n'est pas affectée par l'inversion des flèches.

Remarque 10 Pour les différent types des points critiques nous utilisons les notations suivants e^{-1} un selle , un antiselle e^1 et pour les points critiques complexes c_1^0 . Pour les points d'ordre supérieur, nous allons utiliser la notation m_q^i , si le point est réel et c_q^0 si complexe, i signifie alors la valeur de sa l'indice Poincaré et q son multiplicité.

Points critiques semi-élémentaires :

Si un système quadratique contient un point critique semi-élémentaire, par un déplacement, il peut être transformé à l'origine et le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases}$$

Si $\Lambda(x_0, y_0) = 0$ peut être écrit comme

$$\Lambda(x, y) = 2a_{20}x + a_{11}y + 2c_{45}x^2 + 4c_{46}xy + 2c_{56}y^2 = 0.$$

Il existe quatre types des points critiques semi-élémentaires :

- (i) m_2^0 : un second noeud de selle, si $a_{20} \neq 0$.
- (ii) m_3^{-1} : une troisième selle, si $a_{20} = 0$, $a_{11}b_{20} > 0$.
- (iii) m_3^1 : un troisième noeud, si $a_{20} = 0$, $a_{11}b_{20} < 0$.
- (iv) m_4^0 : un quatrième noeud, si $a_{20} = a_{11} = 0$, $a_{02}b_{20} \neq 0$.

Points critiques nilpotents :

Si un système quadratique contient un point critique nilpotent (x_0, y_0) par un changement, il peut être transféré à l'origine et le système peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases}$$

En raison laquelle le vecteur propre de la matrice D de coefficients correspondant à la partie linéaire est orientée selon l'axe x . Ceci s'applique également à toutes les orbites approchent du point critique. peut-être, tous les isoclines sont en $(0, 0)$ également dirigé le long de l'axe x et peut être représenté par

$$y + (a_{20} + kb_{20})x^2 + (a_{11} + kb_{11})xy + (a_{02} + kb_{02})y^2 = 0,$$

où $-\infty < k < \infty$. La fonction $\Lambda(x, y) = 0$ peut être écrite comme

$$-2b_{20}x - b_{11}y + 2c_{45}x^2 + 4c_{46}xy + 2c_{56}y^2 = 0.$$

Il existe quatre types de points critiques nilpotents dans les systèmes quadratiques :

- (i) m_2^0 : un second point de rebroussement, si $b_{20} \neq 0$.
- (ii) m_3^{-1} : un troisième selle, si $b_{20} = 0$, $a_{20}b_{11} < 0$.
- (iii) m_3^1 : un troisième point avec un elliptique et un secteur hyperbolique; si $b_{20} = 0$, $a_{20}b_{11} > 0$.
- (iv) m_4^0 : un quatrième noeud de selle, si $b_{20} = b_{11} = 0$, $a_{20}b_{02} \neq 0$.

Les points critiques nilpotents est représenté par la figure (11).

1. Pour $b_{20} > 0$ le point critique nilpotent représenté par (a) dans la figure (11).
2. Pour $a_{20} < 0$ le point critique nilpotent représenté par (b) dans la figure (11).
3. Pour $a_{20} > 0$ le point critique nilpotent représenté par (c) dans la figure (11).
4. Pour $a_{20} > 0$ le point critique nilpotent représenté par (d) dans la figure (11).

Le comportement des isoclines et la courbe $\Lambda(x, y) = 0$ dans $(0, 0)$ est similaire à celui près d'un point critique semi-élémentaire.

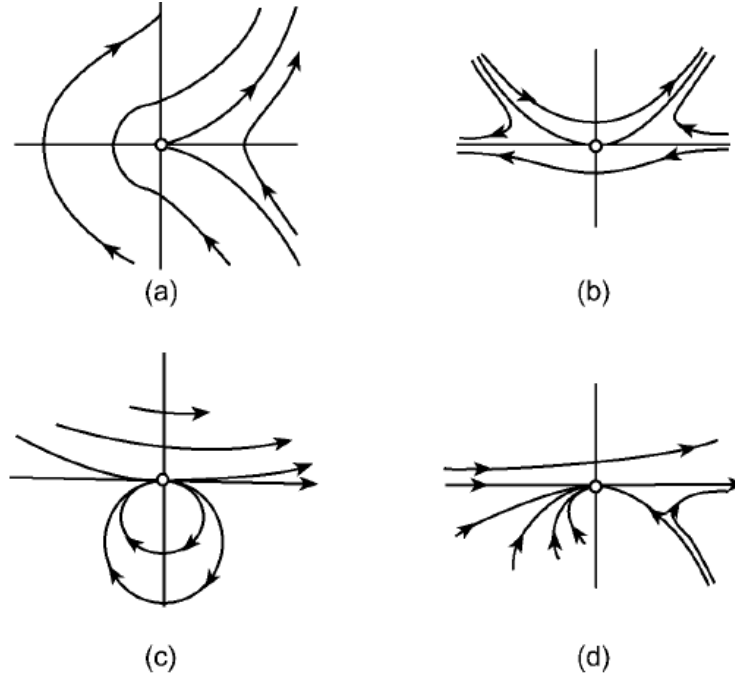


Figure 11 : Les points critiques nilpotents dans les systèmes quadratiques

Dans le point m_2^0 l'origine isocline coupe $(0, 0)$ en deux différent trajectiores réels ou complexes, les autres isoclines en $(0, 0)$ tangent à l'axe x . La courbe $\Lambda(x, y) = 0$ coupe l'axe x en $(0, 0)$ transversalement.

Dans les troisièmes points de l'ordre m_3^{-1} et m_3^1 l'origine isocline se compose d'une branche traversant $(0, 0)$ à l'axe x et une branche coïncidant avec l'axe x . Tous les autres sont en isoclines $(0, 0)$ tangente à l'axe x et y ont une valeur non nulle égale de la courbure. La courbe $\Lambda(x, y) = 0$ est tangent à l'axe x de l'autre côté et a la courbure opposée.

Dans un m_4^0 isoclines sont en $(0, 0)$ tangente à l'axe x et, en dehors de l'origine isoclines, y ayant la même courbure non nulle. La courbe $\Lambda(x, y) = 0$ se compose de deux branches qui coïncidant avec l'axe des x et une transversale à l'axe x .

Les points critiques essentiellement homogènes dans les systèmes quadratiques

Si un système quadratique admet un point critique (x_0, y_0) telle que $\Lambda(x_0, y_0) = d(x_0, y_0) = 0$ et d'ailleurs en (x_0, y_0) il ya $P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2 = 0$, alors par un décalage du point critique peut être transféré par système homogène suivante :

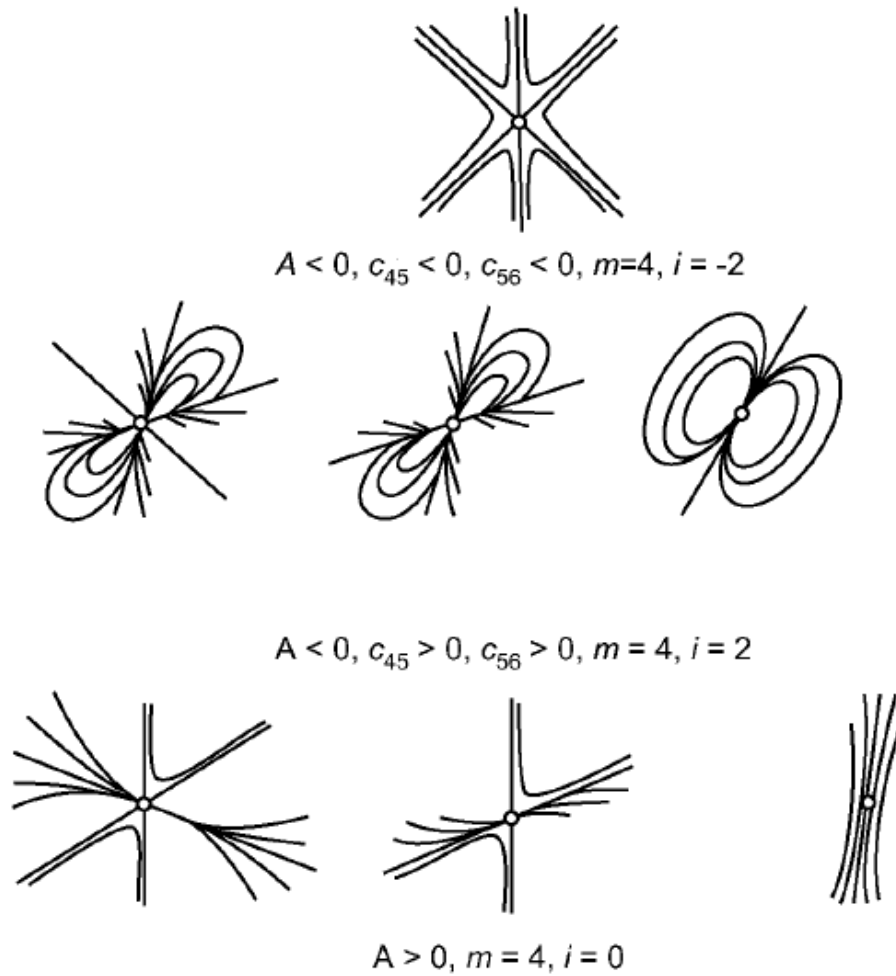


Figure 12 : Les systèmes quadratiques essentiellement homogène

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases}$$

Nous rappelons que $c_{45} = a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20}$, $c_{46} = a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20}$, $c_{56} = a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}$, et $A = c_{46}^2 - c_{45}c_{56}$, et $A \neq 0$ si $(0, 0)$ est le seul point critique. Ensuite, nous pouvons distinguer les cas suivants pour la structure topologique près du point critique.

- (i) Si $A < 0$, $c_{45} + c_{46} < 0$ alors $C_2(\theta) = 0$ il existe un, deux, ou trois solutions réelles différentes représentant chacun une solution de ligne droite passant par $(0, 0)$ et produisant six secteurs hyperboliques. L'indice de Poincaré est égal à -2 , alors le point est m_4^{-2} .
- (ii) Si $A > 0$ alors $C_2(\theta) = 0$. Il existe un, deux, ou trois solutions réelles et deux solutions complexes. Il existe deux secteurs hyperboliques avec au moins un angle d'ouverture π . Dans ce dernier cas, il existe deux secteurs paraboliques entre les secteurs hyperboliques. L'indice de Poincaré est égal à 0 , alors le point est m_4^0 .
- (iii) Si $A < 0$, $c_{45} + c_{46} > 0$ alors $C_2(\theta) = 0$ du deux solutions et, deux solutions complexes possibles. Il existe deux secteurs elliptiques, quelle que soit l'angle d'ouverture $\leq \pi$. Dans ce dernier cas, il existe deux secteurs paraboliques entre les secteurs elliptiques. L'indice de Poincaré est égal à 2 , alors le point est m_4^2 .

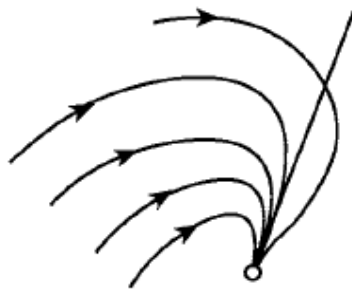


Figure 13 : Le secteur parabolique

Un *secteur parabolique* est représenté dans la figure (13). Il est caractérisé par l'existence de deux orbites chacune approchant le point critique dans le même direction telle que il existe un voisinage du point critique délimitée par ces orbites dans lequel seules orbites existent qui abordent également le point critique cette direction. Ces orbites soit tout approche du point critique pour $t \rightarrow \infty$ ou pour tout $t \rightarrow -\infty$.

3.4 Isoclines des systèmes quadratiques

Dans cette section nous effectuons une étude systématique de ces isoclines et comment étudions la connaissance de leurs propriétés aide à obtenir les caractères des points critiques.

Définition 18 *Les isoclines de (2.1) sont donnés par :*

$$\begin{aligned} \lambda P(x, y) + \mu Q(x, y) = \lambda a_{00} + \mu b_{00} + (\lambda a_{10} + \mu b_{10})x + (\lambda a_{01} + \mu b_{01})y \\ + (\lambda a_{20} + \mu b_{20})x^2 + (\lambda a_{11} + \mu b_{11})xy + (\lambda a_{02} + \mu b_{02})y^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ce qui est un faisceau de coniques (à l'occasion λ et μ peuvent également prendre des valeurs complexes).

Pour des valeurs réelles de λ et μ de l'équation (3.4) de type elliptique, parabolique ou hyperbolique selon $D_1 < 0$, $=$ ou > 0 , respectivement, où le discriminant est donné par :

$$\begin{aligned} D_1 = (\lambda a_{11} + \mu b_{11})^2 - 4(\lambda a_{02} + \mu b_{02})(\lambda a_{20} + \mu b_{20}) \\ = (a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02})\lambda^2 - 2(2a_{20}b_{02} - a_{11}b_{11} + 2a_{02}b_{20})\lambda\mu + (b_{11}^2 - 4b_{20}b_{02})\mu^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considérée comme fonction de et l'équation (3.5) de type elliptique, parabolique ou hyperbolique selon que $D_2 < 0$, $= 0$, ou > 0 respectivement, où le discriminant D_2 est donné par

$$\begin{aligned}
D_2 &= 4(2a_{20}b_{02} - a_{11}b_{11} + 2a_{02}b_{20})^2 - 4(a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02})(b_{11}^2 - 4b_{20}b_{02}) \\
&= 16(c_{46}^2 - c_{45}c_{56}) = 16A,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où

$$c_{45} = a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20}, c_{46} = a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20}, c_{56} = a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}.$$

Maintenant

Si $A < 0$, de sorte que $D_2 < 0$, D_1 est positive ou négative pour toutes les valeurs de $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ l'un ou l'autre positif ou négatif. Tous les isoclines sont hyperboliques si $D_1 > 0$ et elliptiques Si $D_1 < 0$.

La dernière étude indique, cependant que $D_1 < 0$ ne peut se produire, seulement les isoclines hyperboliques sont possibles pour $A < 0$.

Si $A = 0$, et (3.5) n'est pas dégénéré, en plus des isoclines hyperboliques ils existent deux isoclines réels coïncident de type parabolique, alors pour $A = 0$ et si (3.5) est dégénérée, c-à-d

$$a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} = 2a_{20}b_{02} - a_{11}b_{11} + 2a_{02}b_{20} = b_{11}^2 - 4b_{20}b_{02} = 0.$$

Toutes les isoclines réels sont de type parabolique.

Si $A > 0$ ils existent d'isoclines réels de type elliptique et hyperbolique ainsi que deux isoclines réels différents de type parabolique. Tous membres du faisceau de coniques, étant les isoclines (3.4) de (2.1) passant par une base de points du faisceau, ils coïncident avec les points critiques du champ de vecteurs $(P(x, y), Q(x, y))$.

Les éléments intéressant d'un faisceau de coniques sont ses coniques dégénérées et une conique centrale. Une conique dégénérée se compose, de deux lignes réelles ou complexes, se croisent en parallèles ou coïncidant dans la partie finie ou l'infinie du plan.

La conique centrale est le lieu géométrique des points milieux des coniques dans le faisceau. Notre objective est donc de trouver la relation entre les différents types des isoclines dégénérés et le caractère d'une part avec les propriétés de points critiques tels que le nombre la position relative et le caractère, d'autre part.

Exemple 18 *Nous distinguons les différents types des isoclines selon le signe du discriminant D_1 soit les isoclines :*

$$\begin{cases} P(x, y) = xy + y^2 + x - 2y = 0, \\ Q(x, y) = 6xy + y^2 - 5x - y = 0, \end{cases}$$

l'isocline $G(x, y) = \lambda P(x, y) + \mu Q(x, y) = 0$ est donné par :

$$G(x, y) = xy + y^2 + x - 2y - 5(6xy + y^2 - 5x - y) = 0$$

où $\lambda = 1$, $\mu = -5$ son discriminant est donné par : $D_1 = -224 < 0$, donc l'isocline est de type elliptique.

Faisceau des isoclines, conique centrale et les isoclines dégénérés

Les coniques dégénérées du faisceau de coniques constituées par les isoclines (3.4) et déterminés par le calcul de Hessien H de $P(x, y) + Q(x, y) = 0$ où H est donné par :

$$H = \begin{vmatrix} \lambda a_{00} + \mu b_{00} & \frac{1}{2}(\lambda a_{10} + \mu b_{10}) & \frac{1}{2}(\lambda a_{01} + \mu b_{01}) \\ \frac{1}{2}(\lambda a_{10} + \mu b_{10}) & \lambda a_{20} + \mu b_{20} & \frac{1}{2}(\lambda a_{11} + \mu b_{11}) \\ \frac{1}{2}(\lambda a_{01} + \mu b_{01}) & \frac{1}{2}(\lambda a_{11} + \mu b_{11}) & \lambda a_{02} + \mu b_{02} \end{vmatrix}$$

Ainsi

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda^2\mu + \gamma\lambda\mu^2 + \delta\mu^3 = 0 \tag{3.7}$$

Où

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_{00}a_{20}a_{02} - \frac{1}{4}a_{00}a_{11}^2 + \frac{1}{4}a_{10}^2a_{02} + \frac{1}{4}a_{10}a_{01}a_{11} + \frac{1}{4}a_{01}^2a_{20}, \\
\beta &= a_{00}a_{02}b_{20} + a_{00}a_{20}b_{02} + a_{20}a_{02}b_{00} - \frac{1}{2}a_{00}a_{11}b_{11} - \frac{1}{4}a_{11}^2b_{00} - \frac{1}{2}a_{10}a_{02}b_{10} \\
&\quad - \frac{1}{4}a_{10}^2b_{02} + \frac{1}{4}a_{10}a_{11}b_{01} + \frac{1}{4}a_{10}a_{01}b_{11} + \frac{1}{4}a_{01}a_{11}b_{10} - \frac{1}{2}a_{10}a_{02}b_{10} - \frac{1}{4}a_{01}^2a_{20}, \\
\gamma &= a_{00}b_{20}b_{02} + a_{02}b_{00}b_{20} + a_{20}b_{02}b_{00} - \frac{1}{4}a_{00}b_{11}^2 - \frac{1}{2}a_{11}b_{00}b_{11} \\
&\quad - \frac{1}{4}a_{02}^2b_{10} - \frac{1}{2}a_{10}b_{10}b_{02} + \frac{1}{4}a_{11}b_{10}b_{01} + \frac{1}{4}a_{01}b_{10}b_{11} - \frac{1}{2}a_{10}a_{02}b_{10} - \frac{1}{4}a_{01}^2a_{20}, \\
\delta &= b_{00}b_{20}b_{02} - \frac{1}{4}b_{00}b_{11}^2 + \frac{1}{4}b_{10}^2b_{02} + \frac{1}{4}b_{10}b_{01}b_{11} + \frac{1}{4}b_{01}^2b_{20}.
\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 0$, $\mu = 0$ n'est pas solution de (3.7) et nous écrivons :

$$f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \equiv \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{\gamma\lambda}{\alpha\mu} + \frac{\delta}{\alpha} = 0. \quad (3.8)$$

Alors

$$f'\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \equiv 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2\frac{\beta\lambda}{\alpha\mu} + \frac{\lambda}{\mu} = 0. \quad (3.9)$$

Et (3.8) admet des racines double ou triple si $f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = f'\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ en lequel même la condition $D = 0$, où

$$D = \frac{1}{(3\alpha)^4} [(-9\alpha\gamma + \beta\gamma)^2 - 4(3\alpha\gamma - \beta^2)(3\alpha\delta - \beta^2)]. \quad (3.10)$$

De la condition supplémentaire $f''\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 0$ on peut constater qu'une racine triple prévient si $3\alpha\gamma + \beta^2 = 0$ et une racine double (plus une racine simple) si : $3\alpha\gamma + \beta^2 \neq 0$.

La racine triple est donnée par $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\beta}{3\alpha}$ et ceci se produit pour $\frac{3\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{3\delta}$.

La racine double est donnée par

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(9\alpha\gamma + \beta\gamma)}{2(\beta^2 - 3\alpha\delta)},$$

et se produit pour $D = 0$, $3\alpha\gamma + \beta^2 \neq 0$ On peut encore démontrer que (3.8) a :

1. Trois racines réelles simples, si $D < 0$,
2. Une racine réelle simple et deux racines complexes conjuguées si $D > 0$.

Si $\alpha = 0$, $\mu = 0$ est une solution de (3.7) et l'équation peut être résolue comme une équation quadratique si $\beta \neq 0$, est comme équation linéaire si $\beta = 0, \gamma \neq 0$ et elle a une solution triple $\mu = 0$ si $\beta = \gamma = 0$.

En fin si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ l'équation est dégénérée.

Les trois paires solutions (λ, μ) de (3.7) chacune détermine une conique dégénérée qui soit de type hyperbolique, étant alors constituée par l'intersection de deux lignes réelles de type elliptique, puis constitués par l'intersection de deux lignes complexes coupant en un point réel, ou de type parabolique, alors constituée de deux lignes parallèles, réelles différentes, coïncider ou complexe ; aucune une ou deux de ces lignes peuvent être situés à l'infini. Donc il existe six lignes isocliniques.

Si (3.8) est dégénérée (λ, μ) , tout les paires des solutions et il existe un nombre infini des isoclines dégénérés. Le lieu géométrique des points milieux des faisceaux de coniques $\lambda P(x, y) + \mu Q(x, y) = 0$ sera indiquée comme conique centrale du faisceau et donné par :

$$\begin{aligned} \Lambda(x_0, y_0) &\equiv P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0) \\ &= c_{23} - 2 \left(c_{34} - \frac{1}{2}c_{25} \right) x + 2 \left(c_{26} - \frac{1}{2}c_{35} \right) y + 2c_{45}x^2 + 4c_{46}xy + 2c_{46}y^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Évidemment le type de la conique centrale est déterminé par le signe du déterminant $A = c_{46}^2 - c_{45}c_{56}$.

1. Si $A < 0$ il est de type elliptique,
2. Si $A = 0$ de type parabolique
3. Si $A > 0$ de type hyperbolique.

La conique centrale est dégénérée si $H = 0$, où H est le déterminant de l'Hessienne

$$\begin{aligned}
H = & -4c_{23}(c_{46}^2 - c_{45}c_{56}) - 2[c_{45}(c_{26} - \frac{1}{2}c_{35})^2 + \\
& + 2c_{46}(c_{26} - \frac{1}{2}c_{35})(c_{34} - \frac{1}{2}c_{25}) + c_{56}(c_{34} - \frac{1}{2}c_{25})^2]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Le centre de la conique centrale est situé dans $(x_c, y_c) = -\frac{1}{4}A(B_1, B_2)$, tandis que $\Lambda(x_c, y_c) = -H/4A$ (sont de signe invariant par translation et rotation des axes de coordonnées). Par une translation de telle sorte que le centre de la conique centrale est à l'origine, et une rotation telle sorte que les axes se trouvent le long des axes de coordonnées, pour $H \neq 0, A \neq 0$ (3.11) peuvent être écrit sous la forme :

$$\frac{4AS_1}{H}x^2 + \frac{4AS_2}{H}y^2 = 1, \tag{3.13}$$

où S_i ($i = 1, 2$) sont les racines :

$$S_{1,2} = c_{45} + c_{56} \pm \sqrt{(c_{45} + c_{56})^2 + (c_{46}^2 - c_{45}c_{56})} \tag{3.14}$$

De

$$S^2 - 2(c_{45} + c_{56})S - 4(c_{46}^2 - c_{45}c_{56}) = 0. \tag{3.15}$$

Montrant le troisième signe invariant $c_{45} + c_{56}$, invariant par translation et de rotation.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire, est de faire un survol théorique sur les systèmes différentiels planaires, on étudier l'allure des trajectoires (stabilité des solutions) des systèmes linéaires et non linéaires. D'autre part on a traité les types des points critiques finis des systèmes quadratiques et leurs multiplicités pour obtenir le portrait de phase, et la notion de la multiplicité finie m_f , plus l'indice de Poincaré des points critiques. Finalement, nous effectuons l'étude systématique des isoclines des systèmes quadratiques et comment étudions la connaissance de leurs propriétés aide à obtenir les caractères des points critiques.

Bibliographie

- [1] M.M.PEIXOTO, *Dynamical Systems. Proceedings of a Symposium held at the University of Bahia*, 389–420, Acad. Press, New York, 1973.
- [2] L.PERKO, "*Differential Equations and Dynamical Systems*", Texts in Applied Mathematics 7, Springer.
- [3] V.I.ARNOLD, "*Geometrical Methods in the Theory of Differential Equations*", Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [4] A.A.ANDRONOV, E.A.LEONTOVICH, I.I.GORDON AND A.G.MAIER, "*Qualitative Theory of Second Order Dynamic Systems*" Translated from the Russian, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973.
- [5] HARTMAN "*Systèmes Dynamiques Le Premier Retour*" Journées X-UPS septembre 1996".
- [6] JOHN.REYN "*Phase Portraits of Planar Quadratique Systems*" Delft University of Technology, The Netherlands, Springer.
- [7] F.VERHULST "*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*" Universitext, 2nd Edition, Springer, Berlin, 1996.
- [8] A.A.ANDRONOV, E.A.LEONTOVICH, I.I.GORDON AND A.G.MAIER, "*Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*," Translated from the Russian, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973.