Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Khamadj Samiha & Attaoua Djamila

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Système Dynamique

Thème

Nouvelles méthodes algèbriques avec le point fixe commun

Soutenu publiquement le 05 septembre 2020 devant le jury composé de

Dr-Ben turki	Président
Dr-Chebel Zoheir	Encadreur
Dr-Azra	Examinateur

Promotion 2019/2020

Remerciements

Si nous péchons, c'est de nous-mêmes et de Satan, et si nous avons tort, on doit reconnaitre notre tore. Donc, Nous remercions ALLAH tout puissant de nous avoir donné la foie, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin des personnes braves et nous sommes tombées dans de bonnes mains.

Nous remercions Dr-Zoheir Chebel pour son aide, ses conseils et ses pensées ;nous vous accorderons ce crédit dans toutes notre vie.

Il n'était pas seulement un Encadreur , mais il a été notre professeur pendent des années , et il était notre monteur et notre père enseignant, merci pour ses conseils qui nous ont été d'une grande utilité et qui nous a appris à programmer LaTeX, et également le prof TOUWATI.

Nous témoignons toute notre gratitude à tout les membres du département de Mathématiques et notamment aux enseignants (Pr-Ben turki ,Pr-Dbicha , Dr-Gebouli , ...) qui ont contribué à notre formation et qui nous ont permis de travailler dans de bonnes conditions.

Dédicace

A la personne la plus signifiante dans ma vie ;
A la voix qui guide mes décisions ;
Au visage tracé dans mes yeux ;
A l'esprit qui m'entoure à tout instant
A chére mère
Qui est dans chaque détail de ma journée .

A ma force , ma soutien : **Mon cher père**
Les remerciements ne sont qu'une goute de pluie dans la mer
de votre don ,ô, très précieux . De mon âme tu es **mon père**
et la fierté de toi est mon honneur

A mes frére et ma soeur :
HAMAZA,FAISEL,DJIHAD,NOORSEEN
Qui sont mon bonheur , et mon soutien dans cette vie .

Pour une fille qui ont quitté cet univers , l'amitié avec toi était quelque chose que je ne pouvais pas expliquer , donc je ne vais l'expliquer . Tu es l'une des choses les plus importantes qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui
♡ ***MANEL MAAREF*** ♡
A mon âme sœur , mon compagnon , mon bonheur et mon sourire :
RIHAB
Bien-aimé de mon coeur , ma chére : AICHA
A mon bel oiseau : CHAIMA

En fin de compte , je ne peux pas terminer cette dédicace sans remercier mon collège DJAMILA , le travaille avec elle est magnifique donc merci beaucoup JOJO

De Samiha

Je dédie également cette recherche à mon
père et ma sœur Maryemque Dieu ait pitié d'eux tout,
comme je n'oublie pas ma généreuse famille, vieux et jeune,
en particulier ma mère, Rabiha Zainab, ses filles Meftah
et ses enfants, Soriya, Saida, Nacir, Rachid et le jeune
Wafa
Et la dernière dédicace à ma collègue Samiha, qui m'a accompagné tout au long de ma carrière universitaire.

De Djamila

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux sur le point fixe commun dans des espaces métriques complets. Notre travail consiste à étudier quelques résultats d'existence et l'unicité du point fixe commun pour des fonctions Torsions qui commutent entre eux avec les hypothèses de continuité, et parfois de compacité et convexité. De plus, cette étude est clôturée par des applications. Trouver les conditions d'existence du point fixe commun dans la boule et établir un critère de trouver la racine réelle des polynômes de degré 3 et 5.

Mots Clés : *Point fixe commun, espace métrique, convexité et la continuité, complétude, fonction torsion.*

Abstract

This memory is part of the continuity of work on the common fixed point on complete metric space ; Our work consists to study the conditions of existence and the uniqueness of the common fixed point for the Torsion functions which are commutating and continuous and looking the result in particular case when the space is compact and convex.

Moreover, this study closed by two applications. Finding a conditions of the existence of a common fixed point in the ball and a criteria to find a real root of an polynomial his degree 3 or 5.

Key Words : *Common fixed point, metric space, continuity and convexity, completeness, torsion function.*

Table des matières

Introduction

Un point fixe est un point qui reste le même, lorsque on prend son image par une application ou une transformation. On le trouve partout et sur les différentes disciplines, que vous étudiez les fractales, les cours de la bourse, les équations de la physique mathématique ou vérifiez un compteur électrique. Afin de rencontrer des points fixes, il faut prouver leurs existence, qui nous ramènent, en général, à la résolution de notre problème.

Les théories du point fixe est née environ vers le **XIXe** siècle, dans les travaux établaient par des grands mathématiciens, comme **Émaile Picard, Banach, Brouwer, Schauder.** La théorie du point fixe est le cœur de l'analyse non linéaire, elle fournit les outils nécessaires et parfois suffisante donnés sous la forme de théorèmes. elle établit l'existence et dans certain cas l'unicité des problèmes non linéaires. Ces résultats théoriques nous permettent d'assurer, par exemple l'existence des zéros d'un polynôme, où la détermination explicite les solutions de quelques équations différentielles. Toute une branche importante de l'analyse fonctionnelle non linéaire a été développée, et un processus d'approximation successive d'existence est mis en évidence, afin de calculer la solution et vérifier son unicité.
En 1922, Banach reconnait le rôle fondamental de la complétude métrique, une propriété partagée par certains espaces couramment exploités de l'analyse et facilite la tache, en rendant les suites de Cauchy convergentes. Pendant de nombreuses années, l'activité dans la théorie du point fixe est connue par le principe de contraction de Banach et ses applications.
Nous avons considéré les théorèmes du point fixe et leurs applications aux **Fonctions Torsions contractions** pour une nouvelle recherche inspirée de l'article de **juncgk[1]**, qui assure l'existence du point fixe commun entre deux fonctions, qui commutent entre elles, qui sont liées par une Torsion de contraction, et qui est donnée par, pour tout x, y appartient à l'espace métrique complet X, on a :

$$d(g(x), g(y) \leq kd(f(x), f(y)).$$

Cette théorie du point fixe commun est apparue, environ dans les années 1960.
On revanche, l'article de **juncgk[1]** apparue en 1976, donne une nouvelle formulation de cette théorie, qui généralise la contraction, et qui affirme l'existence d'un point fixe commun et son unicité à deux fonctions en Torsion contraction qui commutent entre elles. Si l'on remplace la deuxième fonction g par l'identité, on retrouve la contraction classique.

Notre recherche est basée essentiellement sur l'article de "Jungck". Nous établissons le théorème de "Jungck", mais avec des conditions différentes. On garde les mêmes hypothèses et remplace uniquement la condition de l'inclusion par deux suites de Picard l'une qui est convergente et l'autre est bornée.

1. **Dans le premier chapitre**, nous rappelons quelques notions de base, espace métrique, espace normé, espace de Banach. On expose le théorème d'existence et d'unicité classique du point fixe d'une contraction avec les différentes version comme le théorème de Brower dans la boule fermée, plus général, Schauder pour les espaces de Banach convexes compacts.
2. **Dans le deuxième chapitre**, nous présentons les deux cas de théorème du point fixe commun donné par "Jungck" et la nouvelle version lorsqu'on change l'inclusion par des les deux suites de Picard. Quelques théorèmes et corollaires sont déduits à la lumière

de notre construction. L'idée est venue d'étendre les deux théorèmes pour plusieurs fonctions commutatives et les formuler avec les deux différentes versions d'hypothèses.

3. **Le troisième chapitre**, se consacre à l'application.
   — Application à la boule
   — Application à la recherche des racines exactes des polynômes de degré trois et cinq, sachant qu'il n'y a aucun moyen ou méthode de les résoudre. Ainsi, des exemples illustrent notre méthode.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

Dans ce chapitre , on introduit les définitions , les notations de base, les lemmes, et quelque théorèmes des points fixes qui sont utilisés le long de ce mémoire.

1 Généralités

Nous rappellerons ici quelques définitions des espaces mathématiques les plus importants et résultats préliminaires que nous utiliserons pour la suite. Ainsi, que les principales théories du point fixe à utiliser dans les chapitres suivants.

1.0.1 Espace métrique

On dispose sur $\mathbb{R}$ de la distance usuelle

$$\begin{gathered} \mathrm{d}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\mathrm{x,y}) \longmapsto \mathrm{d(x,y)} = \mid x - y \mid . \end{gathered}$$

On l'utilise pour définir la convergence des suites et la continuité des fonctions .
Le but ici est de généraliser cette notion.

Définition 1.1 *Une distance sur un ensemble* $\boldsymbol{E}$ *est une application*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

tel que :

1. $\forall x \in \boldsymbol{E}, \forall y \in \boldsymbol{E}, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
2. $\forall x \in \boldsymbol{E}, \forall y \in \boldsymbol{E}, d(x, y) = d(y, x).$ *(symétrique)*
3. $\forall x \in \boldsymbol{E}, \forall y \in \boldsymbol{E}, \forall z \in \boldsymbol{E}, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$ *(inégalité triangulaire)*

Exemple 1.2 *Distance usuelle sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *: d(x,y)=*$\mid x-y \mid$.

$$d(x,y) = \parallel x-y \parallel, \text{ dans } \quad \mathbb{R}^n$$

.

Exemple 1.3 *La distance triviale (ou discrète) :* $\forall x \neq y, d(x,y) = 1$ *,*
Le couple (E,d) est appelé espace métrique discret .

Définition 1.4 *Un espace métrique (E,d) est complet si est seulement si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Définition 1.5 *Un espace métrique (E,d) compact s'il est seulement et si tout suite des points de E admet une valeur d'adhérence (c'est à dire contient une sous-suite convergente).*

1.0.2 Suites et Continuités

Définition 1.6 *Soit (E,d) est un espace métrique, on appelle*

boule ouverte *de centre* $a \in E$ *et de rayon* $r \geq 0$ *l'ensemble B(a,r) =* $\{ x \in E;$ *d(x,a)* $< r \}$
boule fermée *de centre* $a \in E$ *et de rayon* $r \geq 0$ *l'ensemble* $\overline{B}_(a,r) = \{ x \in E;$ *d(x,a)* $\leqslant r \}$
sphère *de centre* $a \in E$ *et de rayon* $r \geq 0$ *l'ensemble S(a,r) =* $\{ x \in E;$*d(x,a)* $= r \}$.

Définition 1.7 *Soit E un espace métrique.*

1. ***Point d'accumulation*** *: Soit une suite* $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ *de E,* γ *un point de E. On dit que c' est un point d'accumulation de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si et seulement si :*

   $$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, d(u_n, \gamma) < \epsilon$$

   .

2. ***Point d'adhérence*** *: Soit A partie non vide de E , et* γ *un élément de E . On dit que le point* γ *est un point d'adhérence à A dans E si toute boule centrée en* γ *posséde un point dans A ,c'est-à-dire :*

   $$\forall r > 0, B(\gamma, r) \cap A \neq \emptyset, \text{ où } r \text{ le rayon de la boule.}$$

Définition 1.8 *Soit (E,d) un espace métrique et* (u_n) *une suite dans E.*
La suite u_n *converge vers* ℓ *in E si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, \ell) < \epsilon$$

.

Dans ce cas, un tel ℓ *est unique est s'appelle la limite de la suite* (u_n)*, et on note par* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *. On dit aussi que* (u_n) *converge vers* ℓ *.*

Lemme 1 *Si la suite* (u_n) *converge vers* ℓ *, alors toute sous-suite de* (u_{n_k}) *converge vers* ℓ*. Et réciproquement bien sur, puisque* (u_{n_k}) *est un sous-suite de* (u_n)*.*
Par contre une suite non convergente peut avoir des sous-suites convergents.

Lemme 2 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 1.9 *Soit (E,d) un espace métrique et* (u_n) *une suite dans E.*
La suite (u_n) *est de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) < \epsilon.$$

Théorème 1.10 *Soit* (u_n) *une suite de nombre réels tels que la suite* $(u_{n+1} - u_n)$ *converge vers zéro . Alors l'ensemble des points d'accumulation de* (u_n) *est un intervalle fermé dans* $\mathbb{R}$*, éventuellement dégénéré.*

Théorème 1.11 *Soient E un espace métrique, A une partie de E et* γ *un élément de E. Alors* γ *est un point d'adhérence à A si et seulement s'il existe une suite (* u_n *) de points de A qui converge vers* γ*.*

Proposition 1 *Une suite de Cauchy* (u_n) *qui possède une valeur d'adhérence est convergente.*

Preuve 1 *Pour tout* ϵ *,il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n, m \geq n_0, d(u_n, u_m) < \frac{\epsilon}{2}$$

Soit γ *une valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *. Il existe une sous-suite* $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ *qui converge vers* γ *.*
Donc ,il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall\ n \geq n_1$ *,*$d(u_{\varphi(n)}, \gamma) < \frac{\epsilon}{2}$ *. Alors,*

$$\forall n \geq max(n_0, n_1), d(u_n, \gamma) \leqslant d(u_n, u_{\varphi(n)}) + d(u_{\varphi(n)}, \gamma) < \epsilon.$$

Ce qui montre que la suite converge.

Définition 1.12 *Soit* $\boldsymbol{f} : E \longrightarrow F$ *une application entre deux espaces métriques* $(E, d) et (F, d')$*.*
L'application ***f*** *est continue en* $a \in E$ *si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \alpha \Longrightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

L'application ***f*** *est continue si seulement si elle continue en tout point a de E .*

L'application ***f*** *est uniformément continue si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, \forall y \in E d(x, y) < \alpha \Longrightarrow d'(\boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{f}(y)) < \epsilon.$$

Proposition 2 *Soit* ***f*** *:* $E \longrightarrow F$ *une application entre deux espaces métrique (E,d) et (F,d') .*
L'application ***f*** *est continue en* $a \in E$ *si et seulement si : pour toute suite* $u = (u_n)_n \geqslant 0$ *de E convergent vers a , la suite* $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ *converge vers* ***f(a)****.*

1.1 Espace de Banach

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.13 *Une* ***norme*** *est une application définie sur* ***X*** *a valeurs dans* $\mathbb{R}$*, notée ,*$\|.\|$ *et telle que les trois propriétés suivantes soient satisfaites :*

1. $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. *(séparation)*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X : \| \lambda x \| = |\lambda| \|x\|$. *(homogénéité)*

3. $\forall x, y \in X, \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. *(inégalité triangulaire)*

Définition 1.14 *Un* ***espace vectoriel normé*** *est un couple (X,$\|.\|$) avec* ***X*** *espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et ($\|.\|$) est un norme sur* ***X*** *.*

Exemple 1.15 *soit* ***[a,b]*** *un intervalle de $\mathbb{R}$ et notons C^0([a,b]) l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur [a,b] et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
L'application $\| \,.\, \|_{C^0([a,b])}$ qui à f ϵ C^0([a,b]) associe

$\|f\|_{C^0([a,b])} = sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|$, *définit une norme sur* $C^0([a,b])$.
On peut aussi définir une autre norme sur $C^0([a,b])$: $\|f\|_1 = \int_a^b \|f(t)\|dt$.
On peut donc avoir plusieurs normes sur le même espace .

1.2 Espace de Banach

Définition 1.16 *On appelle un espace de* ***Banach*** *tout espace vectoriel normé* ***complet****.*

Proposition 3 *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.17 *Soit E un espace vectoriel.* ***Un produit scalaire*** *est Une application $\langle .,. \rangle$:E $\times$E $\rightarrow$ $\mathbb{K}$ tel que est une* ***forme bilinéaire*** *si toutes les applications partielles x $\mapsto \langle x, y\rangle$ et y $\mapsto \langle x, y\rangle$ sont linéaires.*

1. *Elle est* ***symétrique*** *si $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ pour tout x,y ϵ E.*

2. *Elle est* ***définie positive*** *si $\langle x, x\rangle \geq$ 0 pour tout $x \in$ E et si ($\langle x, x\rangle$=0 $\Longleftrightarrow$ x=0).*

3. *Un* ***produit scalaire*** *est une forme bilinéaire,symétrique ,définie ,positive .*

Définition 1.18 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle$ x,y $\rangle$ et qui et complet pour la norme associée $\langle x, y\rangle^{\frac{1}{2}}$.*

Corollaire 1.19 *Soit H un espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle$.,. $\rangle$. Alors $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ définit une norme.*

1.4 Espace euclidien

Définition 1.20 *Un* ***espace euclidien*** *est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive. On la note (x,y)$\longmapsto \langle x, y\rangle$ où $\langle x, y\rangle$ qu'on l'appelle* ***Produit scalaire***

Définition 1.21 *On appelle* ***norme induite par le produit scalaire*** $\langle .,. \rangle$ *l'application*

$$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Plus généralement , on dit qu'une norme est ***euclidienne*** *si elle est induite par un produit scalaire .*

Remarque 1 *L'espace euclidien est un cas particulier de l'espace de Hilbert.*

Proposition 4 *Soit (E,d) un espace euclidien alors* $\forall\ x,y \in E$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Exemple 1.22 1. *Produit scalaire et norme dans* $E = \mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire usuel*

$$\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2. *La norme associée est la norme euclidienne :*

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

3. *l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :* $\forall (x,y) \in E^2$,

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2).$$

Remarque 2 *Deux vecteurs x et y de E sont dits* ***orthogonaux*** *ssi* $\langle x, y \rangle = 0$.

1.4.1 Convexité

Définition 1.23 *On dit que* $C \in E$ *est un ensemble convexe si :*

$$\forall t \in [0,1], \forall (a,b) \in C^2, ta + (1-t)b \in C.$$

1.4.2 compacité

Définition 1.24 *Soient E un ensemble quelconque et A une partie de E . un recouvrement de A est une famille* $(B_i)_{i \in I}$ *des parties de E vérifiant :*

$$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Théorème 1.25 ***(Théorème de Bolzano-Weierstrass)*** *Un espace métrique E est compact au sens de(**l'axiome de Borel**) si et seulement si toute suite d'éléments de E admet une valeur d'adhérence dans E ou, d'équivalente , admet une sous-suite qui converge vers un élément de E.*

Définition 1.26 *Un espace métrique (E,d) est pré-compact si pour tout* $\epsilon > 0$*, il admet un recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon* ϵ.

Proposition 5 *Soit (E,d) un espace métrique, E est compact si et seulement si E complet et pré-compact.*

1.5 Contraction

Définition 1.27 *Soit (E,d) un espace métrique , une application* $\boldsymbol{f}$ *:E*$\longrightarrow$ *E est dit :*

1. *lipschitzienne (ou k-lipschitzienne) si et seulement s'il existe une constante* $k \geq 0$ *telle que pour tout x,y* $\in$ *E on a :* $d(f(x),f (y)) \leq k\ d(x,y)$.
2. *Contraction ou une application contractante si* $0 < k < 1$
3. *Non expansive si et seulement si elle est 1-lipschitzienne .*
4. *Contractive si et seulement si, pour tout x,* $y \in E, x \neq y$, *on a* : $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

Remarque 3 *une fonction lipschitzienne est nécessairement continue. Donc contraction* $\Longrightarrow$ *contractive* $\Longrightarrow$ *non expansive* $\Longrightarrow$ *lipschitzienne et que toutes ces fonctions sont uniformément continues.*

1.5.1 Suite de Picard

Définition 1.28 *Soit f une fonction définie de l'espace X dans lui même. Soit* x_0 *un élément de X.*
On appelle suite de Picard la suite donnée par l'expression $(f^n(x_0))$.

1.5.2 Théorème de point fixe d'une contraction

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles . Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe .

Définition 1.29 *Soit (E,d) un espace métrique, une application f est définie par :* $\boldsymbol{f}$: *E*$\longrightarrow$ *E, on dit que x est un point fixe de f si f(x) = x.*

Théorème 1.30 *Soit (E,d) un espace métrique complet et* $\boldsymbol{f}: E \longrightarrow E$ *une contraction avec k sa constante de Lipschitz . Alors f admet une unique point fixe* $x \in E$ *.*
En outre ,pour tout $x_0 \in E$ *,*

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) = x$$

avec

$$d(f^n(x_0), x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0))$$

Preuve 2 *(i) L'unicité :*
Supposons qu'il existe x,y tel que x = f(x) et y = f(y) .
Alors

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Par conséquent , d(x,y) = 0 ce qui entraine x = y.
(ii) Existence :
Soit $x \in E$ *.Nous allons établir que* f^n *est une suite de Cauchy . Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, on a*

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq k(f^{n-1}(x), f^n(x)) \leq ... \leq k^n d(x, f(x)).$$

Ainsi, pour $m > n$ *,ou* $n > 0$ *, on a*

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)) + ... + d(f^{m-1}(x), f^m(x))$$

$$\leq k^n d(x,f(x)) + ... + k^{m-1} d(x,f(x))$$
$$\leq k^n d(x,f(x))[1+k+k^2+...+k^{m-n-1}]$$
$$= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(x,f(x)).$$

Ainsi pour $m > n$ *,* $n \geq 0$,

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x,f(x)). \tag{1.1}$$

Ceci montre que $f^n(x), f^m(x)$ *est une suite de Cauchy et comme E est un espace complet, alors, il existe* $x_0 \in E$ *tel que :* $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = x_0$.
De plus, la continuité de f entraine que

$$x_0 = \lim_{n\to+\infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(f^n(x)) = f(x_0).$$

par conséquent, x_0 *est un point fixe de f. Alors si* $m \to \infty$ *dans* ***(1.1)*** *alors*

$$d(f^n(x), x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x,f(x)).$$

Théorème 1.31 *Soit (E,d) un espace métrique complet. M un compact de E. On définit* ***f*** $: M \longrightarrow M$ *une fonction continue sur M, satisfait :*

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y) \text{ pour } x,\ y \in M \text{ et } x \neq y.$$

Alors, f admet un point fixe unique dans M.

Preuve 3 *L'unicité est facile à prouver.*
Pour l'existence, il suffit de remarquer que l'application $K : x \longmapsto d(x,f(x))$ *atteint son minimum en un point que nous notons* x_0 *in M. Nous avons* $f(x_0) = x_0$ *car autrement,*

$$K(f(x_0)) = d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0) = K(x_0) \text{ contradiction.}$$

Nous allons présenter maintenant une version locale du principe de contraction de Banach.

Théorème 1.32 *Soit (E,d) un espace métrique complet et soit :*

$$B(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) < r\}, \text{ ou } x_0 \in E \text{ et } r > 0.$$

Supposons que $f : B(x_0,r) \longrightarrow E$ *est une contraction (c'est-à-dire* $d(f(x),f(y)) \leq k\ d(x,y)$ *, pour tout x,* $y \in B(x_0,r)$ *avec,* $0 \leqslant k < 1$*) vérifie :*

$$d(f(x_0), x_0) < (1-k)r.$$

Alors, f admet un point fixe unique dans $B(x_0,r)$.

Preuve 4 *Comme* $d(f(x_0), x_0) < (1-k)r$*, alors, il existe* r_0 *tel que* $0 \leqslant r_0 < r$ *avec,*

$$d(f(x_0, x_0) < (1-k)r_0.$$

Maintenant, nous montrons que :

$$f : \overline{B(x_0,r_0)} \longrightarrow \overline{B(x_0,r_0)}$$

Nous notons que si $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$*, alors,*

$$d(f(x), x_0) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0, x_0) \leq kd(x, x_0) + (1-k)r_0 \leq r_0. \tag{1.2}$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème ***(1.30)*** *pour déduire que f a un unique point fixe dans* $x_0 \in \overline{B(x_0, r_0} \subset B(x_0, r)$*. Là encore, il est facile de voir que f admet un et un seul point fixe dans* $B(x_0, r)$*.*

Nous allons examiner brièvement le comportement d'une fonction de contraction définie de $\overline{B_r} = \overline{B}(0, r)$ *(la boule fermée de rayon r et de centre 0) à valeur dans un espace de Banach X.*

Théorème 1.33 *Soit* $\overline{B_r} \subset E$ *la boule fermée de rayon* $r >$ *0 et de centre 0, et X un espace de Banach.*

$$f : \overline{B_r} \longrightarrow X, \text{ une contraction tel que } f\left(\partial\overline{B_r}\right) \subseteq \overline{B_r}.$$

Alors, f a un unique point fixe dans $\overline{B_r}$*.*

Preuve 5 *Considérons la fonction :*

$$g(x) = \frac{x + f(x)}{2}$$

Nous montrons d'abord que g :$\overline{B_r} \longrightarrow \overline{B_r}$*, Soit*

$$x^* = r\frac{x}{\| x \|} oux \in \overline{B_r}, etx \neq 0.$$

Si $x \in \overline{B_r}$*, et* $x \neq$ *0, alors*

$$\|f(x) - f(x^*)\| \leq k\|x - x^*\| = k(r - \|x\|)$$

et comme $x - x^* = \dfrac{x}{\| x \|}(\| x \| - r)$*, alors*

$$\begin{aligned} \| f(x) \| &\leq \| f(x^*) \| + \| f(x) - f(x^*) \|, \\ &\leq r + k(r - \| x \|), \\ &\leq 2r - \| x \|. \end{aligned}$$

Par suite ,pour $x \in \overline{B_r}$*, et* $x \neq$ *0, on a :*

$$\|g(x)\| = \|\frac{x + f(x)}{2}\| \leq \frac{\|x\| + \|f(x)\|}{2} \leq r.$$

De plus, par continuité on a aussi :

$$\| g(0) \| \leq r,$$

et par conséquent, g :$\overline{B_r} \longrightarrow \overline{B_r}$ *.*
En outre, g :$\overline{B_r} \longrightarrow \overline{B_r}$ *est une contraction car,*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{\|x - y\| + k\|x - y\|}{2} = \frac{[1 + k]}{2}\|x - y\|.$$

L'application du théorème ***(1.30)*** *à g entraine que g admet un unique point fixe* $u \in \overline{B_r}$ *(c'est-à-dire* $\boldsymbol{u = g(u)}$ *par suite* $\boldsymbol{u = f(u)}$*.*

1.6 Les différents théorèmes du point fixe

Le principe de cette section est l'étude de quelques théorèmes du point fixe ; on commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux, **le théorème du point fixe à Banach** pour les fonctions contractantes, on verra ensuite des théorèmes plus puissants et un peu plus profonds, on pourra ainsi étudier successivement **le théoréme du point fixe de Brouwer** valable en dimension finie puis **le théoréme de Schauder** qui en est la généralisation en dimension infinie.

1.6.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique
Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe . Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation . Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie. La plus simple est parfois donné sous la forme suivante :

Théorème 1.34 *Dans le plan, toute application f continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.*

Dans un espace euclidien de dimension finie :

Théorème 1.35 *Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet*
un point fixe. Il peut encore être un peu plus général.

Théorème 1.36 *Toute application continue f d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe*

Preuve 6

1. *Dimension un :*
   En dimension un, le résultat est à la fois intuitif et aisé à démontrer. On note $[a; b]$ le domaine de définition de f. La fonction f est continue et à valeur dans le même segment. Dire que cette fonction f admet un point fixe, revient à dire que son graphe croise celui de la fonction identité définie sur $[a; b]$. Une démonstration n'est pas difficile à établir. Considérons la fonction continue g définie par :

   $$g(x) = f(x) - x :$$

   Elle est positive en a, négative en b. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que la fonction g possède un zéro dans $[a; b]$. Ce zero de g est un point fixe de f.
2. *Dimension deux :*

   En dimension deux, un raisonnement intuitif permet de montrer que le résultat est probablement vrai. La démonstration est néanmoins plus délicate. Si K, le domaine de définition de f est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon,K est semblable a une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers K.
   L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire, si h est égal a $\phi \circ f$, $h(x) = x$ Autrement dit, on peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient a dire que l'on peut choisir pour compact K, l'ensemble $[-1; 1] \times [-1; 1]$, sans perte de généralité. Si l'on définit la fonction g comme celle

qui à x associe$h(x) - x$, cela revient a montrer que la fonction g atteint le vecteur nul sur $[-1;1] \times [-1;1]$. Si g_k, pour k égal a 1 ou 2, sont les deux fonctions coordonnées de g, cela revient a montrer l'existence d'un point x_0, tel que g_1 et g_2 admettent toutes deux pour zero la valeur x_0.

La fonction g_1 est une fonction de $[-1;1] \times [-1;1]$ dans $[-1;1]$. Elle peut s'interprète comme une carte d'une région, qui est en chaque point donné l'altitude. Sur la zone $-1\times[-1;1]$, cette altitude est positive, en revanche sur $-1\times[-1;1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui part d'un point $[-1;1] \times 1$pour finir sur un point de $[-1;1] \times -1$. Le même raisonnement appliquée a g_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point de $-1 \times [-1;1]$ pour terminer sur un point de $1 \times [-1;1]$. Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $f \circ \phi$

se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $f \circ \phi$

3. *Dimension finie :*

   L'approche intuitive du paragraphe précédent se généralise à toute dimension finie. Pour s'en persuader, étudions le cas de la dimension 3. L'objectif est toujours de montrer l'existence d'un zéro de la fonction g, qui maintenant possède trois coordonnées. La première coordonnée est positive sur la face gauche du cube et négative sur la face droite. Il y a tout lieu de penser que la zone des zéros contient une nappe. Cette nappe coupe le cube en au moins deux composantes connexes, l'une contenant une portion de la face de droite l'autre celle de gauche. Si l'axe des y décrit la direction devant-derrière le même raisonnement laisse penser 'a l'existence d'une nappe, qui coupe encore en au moins deux composantes connexes le cube. L'intersection des deux nappes contient probablement une ligne, partant de la face du haut pour rejoindre celle du bas. La troisième composante de g décrit cette fois-ci une nappe . Cette nappe semble croiser nécessairement la ligne. Ce point d'intersection est un point fixe recherché.

Corollaire 1.37 *Toute application continue $f : K \to K$, ou K est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, admet un point fixe.*

Preuve 7 *Il existe $r > 0$, tel que $K \subset B_f(0,r)$. Puisque K est un convexe compact, il existe une projection $\pi : B_f(0,r) \to K$. On note i l' injection de K dans $B_f(0,r)$, alors l'application $i \circ f \circ \pi : \overline{B}(0,r) \to B_f(0,r)$ est continue, donc il existe $x \in B_f(0,r)$ tel que $(i \circ f \circ \pi)(x) = xi.e.f(\pi(x)) = x$. Comme f est à valeur dans K, on a donc $x \in C$ i.e. $x = \pi(x)$ et f admet donc bien un point fixe.*

Théorème 1.38 *(Théorème Kakutani)*
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit K un convexe compact de E et $F_i : K \to K$ une famille quelconque d'applications affines continues qui commutent deux à deux. Alors il existe un point fixe commun à tous les applications F_i

Théorème 1.39 *Soit K un convexe compact d'un espace métrique E et $F : K \to K$ une multi-application fermée à valeurs dans un convexes non-vides, c'est à dire que, pour tout $x \in K$, $F(x)$ est une partie convexe et non vide (et, dont la fermeture de F est compacte) de K. Alors F admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe un point $x \in K$ tel que $x \in F(x)$*

1.6.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach . Le Théorème du point fixe du Schauder est plus topologique ,est affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe , qui n'est pas nécessairement unique. Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.40 *Soit K un sous-ensemble non vide, convexe compact d'un espace de Banach E et supposons $f : K \to K$ une application continue.*
Alors admet un point fixe.

Preuve 8 *Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme K est compact f uniformément continue ; donc, si on fixe $\epsilon > 0$, alors, il existe $\sigma > 0$ tel que, pour tout x, $y \in K$, on a*

$$\|x - y\| \leq \sigma \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon.$$

De plus, il existe un ensemble fini de points $\ , x_2, ...; x_p \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon σ centrées aux x_i recouvrent K ; C'est-à-dire $K \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} B(x_j, \sigma)$.

Si on désigne par : $L = Vect(f(x_j))_{1\leq j\leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ qui est compact convexe de dimension finie .
Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : K \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \quad si \quad \|x - x_j\| & \geq \sigma \\ 1 - \frac{\|x-x_j\|}{\sigma} & sinon \end{array} \right\}$$

Il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \sigma)$ et elle est nulle en dehors. Donc, on a, pour tout $x \in K$,

$$\textstyle\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0.$$

On peut définir sur K les fonctions continues positives ϕ_j, par

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{j=1}^{p} \psi_k(x)},$$

et pour lesquelles on a,

$$\textstyle\sum_{k=1}^{p} \phi_k(x) = 1 \text{ pour tout } x \in K.$$

On pose alors, pour $x \in K$,

$$g\ (x) = \textstyle\sum_{j=1}^{p} \phi_j(x) f(x_j)$$

.

La fonction g est continue (car elle est la somme de fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est une combinaison convexe des points $f(x_j)$) dans un compact.
,Donc, si on prend la restriction $g\backslash K^* : K^* \to K^*$, alors g possède un point fixe $y \in K^*$, par application du corollaire 1.37.

De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y)[f((y) - f(x_j)] \end{aligned}$$

Or, si on prend uniquement les boules dans lesquelles le point y se retrouve, on en déduit que : $\phi_j(y) \neq 0$, alors $\|y - x_j\| \leq \sigma$, et par suite :

$$||f(x_j) - f(y)|| \leq \epsilon$$

.

On a pour tout j :

$$||f(y) - y|| \leq \sum_{j=1}^{p} \phi_j(x)||(f(y) - f(x_j)||$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y)\epsilon \leq \epsilon.$$

Donc, pour tout entier m on peut trouver un point $y_m \in K$, tel que $\|f(y_m) - (y_m)\| \leq 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$, on peut extraire une sous suite (y_{mk}), qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors f étant continue, la suite $(f(y_{mk}))$ est convergente vers $f(y^*)$, et on conclut que $f(y^*) = y^*$, c'est-à-dire y^* est un point fixe de f dans K.

CHAPITRE 2

PRINCIPE DU POINT FIXE COMMUN

Dans ce chapitre nous allons rappeler un théorème intéressant au résultat dût à Jungck en (1976) [5], qui a pu établir une condition suffisante d'avoir un point fixe commun pour deux fonctions.

1.7 Définitions et propriétés

1.7.1 Définition d'une Torsion

Définition 1.41 *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques munissent des distances respectivement d et d'. Soient f et g deux fonctions définissent par :*

$$f, \quad g : X \to X'.$$

On dit que la fonction f exerce une Torsion sur la fonction g, s'il existe une constante réelle $k \geq 0$, telle que la condition suivante est vérifiée :

$$d'(g(x), g(y)) \leq kd'(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in X. \text{ condition de Torsion} \tag{1.3}$$

Dans ce cas, on note la condition de Torsion par : $g - k - f$. Si la fonction f est continue et $k < 1$ on dit que la fonction g est une $g - k - f$ contraction Torsion continue.

En général, toutes les fonctions k-lipschitziennes sont des $g - k - f$ Torsions dont la fonction f est égale l'identité qui est automatiquement équivalente à la définition classique d'une fonction Lipschitzienne, elle est illustrée par l'exemple suivant :
Si la fonction g est une $g - k - f$ Torsion d'un espace normé X vers lui-même et f est une application affine exprimée par : $f(x) = ax + b$, On obtient :

$$\|g(x) - g(y)\| \leq k \|x - y\|,$$

cette dernière inégalité n'est autre que l'application classique k-lipschitzienne.

1.7.2 Propriétés

Proposition 6 *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques, et soient les fonctions définies par :*

$$f : X \to X,$$
$$g : X' \to X',$$

1. *Si la fonction g est une $g - k - f$ Torsion et si la fonction f est lipschitzienne, alors, la fonction g est aussi lipschitzienne.*
2. *Si la fonction g est une $g-k-f$ Torsion contraction, et si la fonction f est k'-contraction, alors, la fonction g est aussi une kk'-contraction.*
3. *Si la fonction f est continue, alors, la fonction g est aussi continue.*
4. *Si la fonction f est uniformément continue, alors g est uniformément continue.*
5. *Si la fonction g est injective, alors, la fonction f est aussi injective.*

Définition 1.42 *Soit la fonction f définie en l'espace métrique réel (X, d) vers l'espace métrique réel (X', d'). On dit que la fonction f est une fonction de Cauchy continue si chaque suite de Cauchy de X, son image par la fonction f est une suite de Cauchy.*

Corollaire 1.43 *Soit la fonction g est une $g - k - f$ Torsion continue en l'espace métrique réel (X, d) vers lui-même, si f est une fonction de Cauchy alors la fonction g est une fonction de Cauchy continue.*

Proposition 7 *Soit (X, d) espace métrique et soit la fonction*

$$f_1, f_2 : X \to X,$$
$$g_1, g_2 : X \to X.$$

On considère $g_1 - k - f_1$, $g_2 - k' - f_2$ deux fonctions Torsion dans l'espace X vers X.
On suppose que les fonctions f_1 et g_2 commutent, alors $g_1 \circ g_2 - kk' - f_2 \circ f_1$ est une fonction Torsion.

Preuve 9 *Direct par un simple calcul.*

Corollaire 1.44

1. *Toute combinaison linéaire de fonctions Torsions est une fonction Torsion.*
2. *Chaque combinaison convexe de famille de fonctions Torsion contractions est une fonction Torsion contraction.*

Lemme 3 *Soit (X, d) l'espace métrique réel et on suppose que (x_n) et (y_n) sont deux suites de Cauchy dans l'espace X.*
Soit la suite donnée par $z_n = d(x_n, y_n)$ est définie dans l'espace $\mathbb{R}$ par la distance valeur absolue usuelle dans $\mathbb{R}$, alors, elle est une suite de Cauchy et donc, elle est convergente dans $\mathbb{R}$.

Lemme 4 *Soit (x_n) une suite définie dans un espace métrique complet (X, d). S'il existe $k \in (0, 1)$ tel que $d(x_{n+1}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (x_n) est convergente dans X.*

Proposition 8 *soit la fonction g est une $g - k - f$ Torsion d'un espace métrique réel (X, d) vers lui-même, Si la fonction f est équicontinue, alors, la fonction g est aussi une fonction équicontinue dans l'espace X.*

1.7.3 Théorème de Jungck

Théorème 1.45 ***Théorème de Jungck [5]***
soit f une fonction continue dans un espace métrique complet (X, d) vers lui-même. Alors la fonction f possède un point fixe dans X si et seulement s'il existe une constante réelle $k \in]0, 1[$ et une fonction $g : X \to X$, qui commute avec f et qui satisfait :

$$g(X) \subset f(X) \quad et \quad d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y)), \forall x, y \in X. \tag{1.4}$$

Alors, les fonctions f et g admettent un point fixe commun dans l'espace X. Il est unique si l'inégalité (1.4) est satisfaite.

Preuve 10 ***Preuve du théorème de Jungck***
D'abord montrons la condition nécessaire.
Supposons que la fonction a au moins un point fixe a c.à.d, $f(a) = a$ pour $a \in X$.
Considérons la fonction g définie sur X vers lui même tel que $g(x) = a, \forall x \in X$.
Alors, $f \circ g(x) = f(a) = a$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = a$, $\forall x \in X$. Ainsi, $f \circ g(x) = g \circ f(x), \forall x \in X$,
Ceci nous confirme que les fonctions f et g commutent.
D'autre part : $g(x) = f(a) = a, \forall x \in X$. Donc, $g(X) \subset f(X)$.
Finalement, soit $k \in]0, 1[$, on a pour tout $x, y \in X$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$d(g(x), g(y)) = d(a, a) \leq kd(f(x), f(y)).$$

Ainsi, l'inégalité (1.4) est satisfaite.
Montrons que la condition suffisante, qui assure que les fonctions f et g ont un point fixe commun unique.
Soient x_0, x_1 deux éléments de X, tel que $g(x_0) = f(x_1)$. En général, par récurrence, on choisit la suite x_n tel que :

$$g(x_{n-1}) = f(x_n); \tag{1.5}$$

Cette construction est possible grâce à l'inclusion $g(X) \subset f(X)$. On applique la relation 1.4 à notre suite, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq kd(f(x_n), f(x_{n-1})).$$

D'après le lemme 4, notre suite $f(x_n)$ est convergente vers un point t de X. De l'égalité 1.5, la suite $g(x_n)$ est aussi convergente vers le même point t. Mais f et g commutent, donc,

$$f(g(x_n)) = g(f(x_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le passage à la limite de cette dernière égalité nous fait obtenir, $f(t) = g(t)$.
Par conséquence, $f(f(t)) = g(f(t)) = g(g(x))$. Ceci nous permet de faire le calcul suivant.

$$d(g(t), g(g(t))) \leq kd(f(t), f(g(t))) = kd(g(t), g(g(t))).$$

Comme $(1 - k)d(g(t), g(g(t))) \leq 0$. Mais $k \in]0, 1[$, d'où, $g(t) = g(g(t))$. Nous avons aussi $g(t) = g(g(t)) = f(g(t))$. Donc, $g(t)$ est un point fixe commun à f et g.
Maintenant, nous allons prouver l'unicité de point fixe commun sous la $g - k - f$ Torsion contraction continue.
En effet, soient r, r' deux points fixes communs à f et g, c.à.d, $r = g(r) = f(r)$ et $r' = g(r') = f(r')$. On calcule la distance entre les points r, r' :

$$d(r, r') = d(g(r), g(r') \leq kd(f(r), f(r')) = kd(r, r').$$

D'où : $(1 - k)d(r, r') \leq 0$. Mais $k < 1$, donc $r = r'$. Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.46 *[5] Soit n un entier positif, $k \geq 1$ un réel et considérons la fonction g surjective définie dans l'espace métrique complet X vers lui-même. On suppose qu'elle vérifie l'inégalité suivante.*

$$d(g^n(x), g^n(y)) \geq kd(x, y). \tag{1.6}$$

Alors, la fonction g a un point fixe unique.

Preuve 11 *On remarque que les conditions du théorème 1.45 sont vérifiées. En effet, on a l'inégalité 1.6 et en plus, $g^n(X) = I(X) = X$, ou I désigne l'application d'identité. Comme I commute avec toutes les fonctions, d'où commute avec g^n. En appliquons le théorème 1.45, la fonction g^n a un point fixe unique $c \in X$. c.à.d, $g^n(c) = c$. D'une autre part : $g^n(g(c)) = g(c)$. Ce qui signifie que $g(c)$ est aussi un point fixe de g^n. L'unicité du point fixe de g^n conduit à l'égalité $g(c) = c$. Ceci termine notre preuve.*

1.7.4 Point de coïncidence

Définition 1.47 ***Point de coïncidence***
On appelle point de coïncidence deux fonctions f et g définies dans l'espace X dans lui-même, un élément x_0 de X tel qu'ils ont la même image, c.à.d, $f(x_0) = g(x_0)$ les fonctions f et g commutent au point x_0.

Théorème 1.48 ***Théorème du Point de coïncidence***
Soient f et g deux fonctions définies de l'espace X dans lui même. Si la fonction g est une $g - k - f$ Torsion contraction continue et les fonctions f et g ont au moins un point de coïncidence, alors les fonctions f et g possèdent un point fixe commun unique dans l'espace X.

Preuve 12 ***Preuve théorème du Point de coïncidence***
Considérerons le point x_0 de X, est un point de coïncidence des deux fonctions f et g. Dans ce cas, soit $f(x_0) = g(x_0) = z$. En utilisant la loi de composition des fonctions et de la commutativité on a :

$$g \circ f(x_0) = g(z) = f \circ g(x_0) = f(z).$$

Montrons que z est un point fixe commun à f et g.
En effet,supposons que la distance $d(z, g(z) \neq 0$, et calculons la distance suivante :
$d(z, g(z)) = d(g(x_0), g(z)) \leq kd(f(x_0), f(z)) = kd(z, g(z))$. *Ou $k < 1$,*
d'où une contradiction. Forcement $d(z, g(z)) = 0$, c.à.d, $g(z) = z$. Ceci termine la preuve.

1.7.5 Exemple d'un point de coïncidence

Exemple 1.49 *Soient les fonctions f et g définies par l'expression :*

$$f(x) = e^{1-x^2} \quad et \quad g(x) = x^2, x \in [-1, 1].$$

Soit l'élément $x_0 = -1$, de l'intervalle $[-1, 1]$. Donc, $f(-1) = g(-1) = 1$, $f \circ g(-1) = g \circ f(-1) = 1$, $f(1) = g(1) = 1$. On remarque que la fonction f et g ont un point fixe commun unique car la fonction g est une $g - k - f$ Torsion continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. Ceci nous confirme le théorème 1.48.

1.8 Point fixe commun

Dans la suite de notre travail, on a besoin des notations suivantes. Soit un élément x_0 d'un ensemble non vide X. On définit par la composée successive de la loi de composition des fonctions données par les suites suivantes.
$g^0(x_0) = x_0, f^0(x_0) = x_0$ et Par induction, $g^{n+1}(x_0) = g(g^n(x_0), f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)$, pour $n \in \{1, 2, ...\}$.

1.8.1 Les principaux résultats

Dans ce qui suit, on donne les théorèmes de la convergence des suites de Picard, et les conditions nécessaires et suffisantes d'existence du point fixe commun.

Théorème 1.50 *Soit la fonction g est une $g - k - f$ Torsion contraction continue de l'espace métrique complet X vers lui-même. Supposons que les fonctions g et f commutent dans X. Soit un point quelconque $x_0 \in X$; si la suite $f^n(x_0)$ est une suite de Cauchy de X, alors la suite $g^n(x_0)$ est aussi une suite de Cauchy de l'espace X.*

Preuve 13 *On suppose que $(f^n(x_0))$ est une suite de Cauchy pour un point arbitraire $x_0 \in X$, il s'ensuit, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et l'inégalité suivante est vérifiée : $\forall n \geq p \geq N, d(f^{n+p}(x_0), f^n(x_0)) < \epsilon$.*
Il suffit de s'assurer que la suite $(g^n(x_0))$ est une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned} d(g^{n+1}(x_0), g^n(x_0)) &= d(g \circ g^n(x_0), g \circ g^{n-1}(x_0)) \leq kd(f \circ g^n(x_0), f \circ g^{n-1}(x_0)), \\ &\leq kd(g^n \circ f(x_0), g^{n-1} \circ f(x_0)) \leq k^2 d(g^{n-1} \circ f^2(x_0), g^{n-2} \circ f^2(x_0)), ... \\ &\leq k^p d(g^{n-p+1} \circ f^p(x_0), g^{n-p} \circ f^p(x_0))... \leq k^n d(g(f^n(x_0)), f^n(x_0)). \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} d(g^{n+p}(x_0), g^n(x_0)) \quad &\leq \sum_{i=0}^{i=p-1} d(g^{n+p-i}(x_0), g^{n+p-i-1}(x_0)), \\ &\leq \sum_{i=0}^{i=p-1} k^{n+p-i-1} d(g(f^{n+p-i-1}(x_0)), f^{n+p-i-1}(x_0)), \\ &\leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + ... + k^n)\epsilon \leq \frac{k^n - k^{p+n}}{1-k}\epsilon \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci nous confirme que la suite est de Cauchy.

Corollaire 1.51 *Soit la fonction g est une $g - k - f$ Torsion contraction continue de l'espace métrique complet X vers lui-même. Supposons que les fonctions f et g commutent. Si la suite $f^n(x_0)$ est de Cauchy de l'espace X, alors la suite $g^n(x_0)$ converge dans l'espace .X*

Dans le théorème suivant, donne une condition nécessaire et suffisante d'existence du point fixe commun de deux fonctions continues. Par contre dans le théorème énoncé par Jungck [5] donne une condition suffisante d'existence et nécessaire uniquement pour le cas particulier ou la fonction g est constante.

Théorème 1.52 ***Théorème point fixe commun***
Soit la fonction g qui est une $g-k-f$ Torsion contraction continue de l'espace métrique complet X vers lui même. En plus supposons que les fonctions f et g commutent entre elles. Les fonctions f et g possèdent un point fixe commun unique si et seulement s'il existe un point $x_0 \in X$ tel que la suite $(f^n(x_0))$ converge vers un point $t \in X$ et la suite $(f^n(r))$ est bornée dans X. Notons que le point r représente la limite de la suite convergente $(g^n(x_0))$ dans X.

Preuve 14 *La condition nécessaire est évidente. Montrons la condition suffisante. Supposons que la suite $f^n(x_0)$ est converge vers le point $t \in X$.*
La suite $g^n(x_0)$ est de Cauchy, comme l'espace X est complet, par le lemme 1.50, on en déduit qu'elle converge vers le point $r \in X$.
Le calcul des limites pour chacune des suites ci-dessus nous fait aboutir aux deux égalités suivantes.

$$\begin{aligned} t = f(t) \quad &\textit{implique que} \quad g(t) = g \circ f(t), \quad \textit{Par composition de } f. \\ r = g(r) \quad &\textit{implique que} \quad f(r) = f \circ g(r), \quad \textit{Par composition de } g. \end{aligned}$$

Calculons la distance suivante en appliquant l'inégalité donnée par la $g-k-f$ Torsion contraction.
D'une part on a :
$d(g \circ g(t), r) \leq kd(f \circ g(t), f \circ g(r)) = kd(g(t), g \circ f(r)) \leq k^2 d(f(t), f^2(r)) = k^2 d(t, f^2(r))$,
D'autre part :
$d(g \circ g^2(t), r) \leq kd(f \circ g^2(t), f \circ g(r)) = kd(g^2(t), g \circ f(r)) \leq k^2 d(f \circ g(t), f^2(r)) = k^2 d(g(t), g \circ f^2(r)) \leq k^3 d(f(t), f \circ f^2(r)) = k^3 d(t, f^3(r))$.
Par une récurrence, on aboutit à l'inégalité suivante : $d(g^n(t), r) \leq k^n d(t, f^n(r))$.
Par passage à la limite, et en utilisant que les fonctions f et g sont continues et la suite $f^n(r)$ est bornée dans X, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} d(g^n(t), r) \leq \lim_{n \to +\infty} k^n d(t, f^n(r)) = 0.$$

Ainsi, si on s'appuie sur l'argument de la commutativité et de la continuité une autre fois, nous aurons :

$$\lim_{n \to +\infty} g^n(t) = r = g(r) = \lim_{n \to +\infty} g^n(f(t)) = \lim_{n \to +\infty} f \circ g^n(t) = f(\lim_{n \to +\infty} g^n(t)) = f(r).$$

Ceci nous confirme que r est un point fixe commun à f et g. Prouvons maintenant l'unicité du point fixe commun.
En supposant, qu'ils existent deux points communs r et r' à f et g. En calculant la distance entre les points r et r', on obtient :

$$d(r, r') = d(g(r), g(r')) \leq kd(f(r), f(r')) = kd(r, r'),$$

La dernière inégalité implique que $(1-k)d(r, r') \leq 0$. Or $k < 1$, d'où r=r'. Cette dernière affirme l'unicité du point fixe commun à f et g. Ce qui termine la preuve.

Corollaire 1.53 *Soit n un entier strictement positif, $k \geq 1$ un réel. Soit la fonction g définie dans l'espace métrique complet X vers lui même. On suppose qu'elle vérifie l'inégalité suivante.*

$$d(g^n(x), g^n(y)) \geq kd(x, y). \tag{1.7}$$

Si la fonction g est continue et la suite $g^n(x_0)$ converge vers un point $c \in X$ pour un certain point $x_0 \in X$. Alors, la fonction g a un point fixe unique.

Remarque 4 *Ici, la fonction g n'est pas forcement surjective.*

Corollaire 1.54 *Soient les fonctions f et g définies dans l'espace métrique complet X vers lui même. On suppose qu'elle vérifie l'inégalité suivante.*

$$d(g^m(x), g^m(y)) \leq kd(f(x), f(y)), k \in]0, 1[. \tag{1.8}$$

Si la fonction f est continue et la suite $f^n(x_0)$ converge vers un point $t \in X$ pour un certain point $x_0 \in X$. Notons que la suite $g^{mn}(x_0)$ est convergente vers le point $r \in X$. Si la suite $f^n(r)$ est bornée, alors, les fonctions f et g ont un point fixe commun unique.

Preuve 15 *Les conditions du théorème 1.52 sont remplies, donc, il existe un point fixe commun unique $c \in X$, tel que :*

$$c = g^m(c) = f(c).$$

Par composition de la fonction g à cette dernière et en employant la commutativité, on obtient :

$$g(c) = g^m(g(c)) = f(g(c)).$$

Ceci montre que $g(c)$ est aussi un point fixe commun à g^m et f. L'unicité donne $g(c) = c$. Le corollaire est démontré.

1.8.2 Point fixe commun limite

Corollaire 1.55 *Soient f et g deux fonctions définies dans l'espace métrique complet X dans lui-même et qui commute entre eux dans X. On suppose que la fonction g est une $g - k - f$ Torsion continue contraction de l'espace métrique complet (X, d) vers lui-même. Supposons qu'il existe un élément x_0 de l'espace X tel que les suites $f^n(x_0)$ et $g^n(x_0)$ convergent vers la même limite dans X. Alors, les fonctions f et g ont un point fixe commun unique dans l'espace X.*

Remarque 5 *D'après la condition du théorème 1.55 les courbures des fonctions f et g se coupent en a un seul point, qui représente l'unique point fixe commun aux deux fonctions f et g.*

Corollaire 1.56 *Soit la fonction g qui est une $g-k-f$ Torsion contraction continue de l'espace métrique complet X vers lui-même. En plus supposons que les fonctions f et g commutent. Si les suites $f^n(x_0)$ et $(g \circ f)^n(x_0)$ convergent vers la même limite dans l'espace X pour un point $x_0 \in X$, alors, les fonctions f et g ont un point fixe commun unique.*

Exemple 1.57 *On prend les fonctions définissent par l'expression :*

$$f(x) = \exp(-x + 1) \quad et \quad g(x) = \ln(x + e - 1), \quad x \in [0, 2].$$

On considère le point $x_0 = 1.7031$.
Le calcul des limites des suites, aboutit immédiatement aux résultats suivants :

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(x_0) = \lim_{n \to +\infty} g^n(x_0) = 1.$$

L'hypothèse 1.55 est accomplie. Alors l'équation $f(x) = g(x) = x$ a pour solution $x = 1.0$. qui représente l'unique point fixe commun de la fonction f et g.

1.8.3 Point fixe commun sur un convexe compact

Théorème 1.58 *Soient f et g deux fonctions et la fonction g est une $g-k-f$ Torsion contraction continue de l'espace convexe compact M vers lui-même de l'espace métrique complet (X,d). Si f et g commutent entre eux dans M, alors, ils ont un point fixe commun unique.*

Preuve 16 *Il suffit d'appliquer la preuve du théorème de Schauder voir 8 à la fonction f, ensuite, en utilisant : pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$, tel que $\|f(y_m)-y_m\| \leq 2^{-m}$. On fait tendre $m \to \infty$. On obtient : f(c)=c.*

Donc, que f admet un point fixe f(c)=c. Alors, la suite $f^n(c)$ converge vers ce point. Dans ce cas, on applique le théorème 1.50 à la suite $g^n(c)$, ce qui implique que $g^n(c)$ est aussi converge vers un autre un point r.
D'après théorème point fixe commun 1.52 la suite $f^n(c)$ converge vert $c \in K$ et la suite $f^n(r)$ est bornée dans le compact K. Notons que le point r représente la limite de la suite convergente $g^n(c)$ dans K, et f et g commutent entre eux et ils sont en Torsion contraction continuent, alors, admettent un point fixe commun r unique.

1.8.4 Dans le cas d'une contraction

Lemme 5 *Soient f et g deux fonctions définies dans l'espace métrique complet X dans-lui même et qui commutent entre eux dans l'espace X. On suppose que la fonction g est une $g-k-f$ Torsion contraction continue. Si, en plus, la fonction f est une contraction, alors, les fonctions f et g ont un unique point fixe commun dans l'espace X.*

Preuve 17 *Comme f est une contraction donc, elle admet un point fixe attractive. Ceci implique la suite de Picard converge pour tout point de l'espace X et le faite que g commute avec f en appliquant le théorème 1.52, on obtient le résultat. Ceci termine la preuve.*

Théorème 1.59 *Soient f et g deux fonctions définies dans l'espace métrique complet X dans lui-même et qui commutent entre eux dans l'espace X. On suppose que la fonction g est une $g-k-f$ Torsion contraction continue. Si la fonction f a un point fixe local respectivement (global) attractive en l'espace X, alors les fonctions f et g ont un unique point fixe commun local respectivement(global) dans l'espace X.*

1.8.5 Point fixe commun des fonctions composées

Corollaire 1.60 *Soit les fonctions g_1-k-f_1 et $g_2-k'-f_2$ deux Torsions contractions continues de l'espace convexe compact M vers lui-même contenu dans l'espace métrique complet X. Supposons que la composition des fonctions f_1 et g_2 commutent de même pour la composition des fonctions f_2 et g_1 dans l'espace M, par rapport à la loi de compositions des fonctions. Alors, les fonctions $g_1 \circ g_2$ et $f_2 \circ f_1$ ont un unique point fixe commun dans l'espace M.*

Corollaire 1.61 *Soit la famille de fonctions $g_i i \in \{1,...,n\}$ sont des $\{g_i - k_i - f, i = 1,...n\}$ Torsions contractions continues, et qui commutent avec la fonction f définie dans le convexe compact M vers lui-même, qui est contenu dans l'espace métrique complet X. Alors la combinaison convexe des fonctions $g_i i \in \{1,...,n\}$ de cette famille qui résulte, elle constitue une fonction Torsion contraction, et donc, elle possède un point fixe commun unique avec la fonction f.*

1.9 Les deux Principes jumelés

1.9.1 Point fixe commun de trois fonctions

Théorème 1.62 *Soit f une fonction continue dans l'espace métrique complet (X, d) vers lui-même. La fonction f admet point fixe dans X si et seulement s'ils existent deux constantes réelles $k, k' \in (0, 1)$ et deux fonctions $h, g : X \to X$, chacune de ces fonctions commutent respectivement avec la fonction f et la condition suivante vérifiée :*

$$g(X) \subset f(X) \quad \textit{ou} \quad h(X) \subset f(X) \quad \textit{et} \quad d(h(x), h(y)) \leq kd(g(x), g(y)) \leq kk'd(f(x), f(y)). \tag{1.9}$$

En effet, h, f et g ont un unique point fixe commun dans X, si la condition (1.9) vérifiée .

Preuve 18 *Dans le cas ou, on suppose, qu'on a $h(X) \subset f(X)$. Les fonctions f et g remplissent les conditions du théorème [5]. Son application, montre qu'il existe un unique point commun $c \in X$ tel que $g(c) = f(c) = c$. Si (x_n) est une suite de X et qui vérifie l'égalité $f(x_n) = g(x_n)$, et qui converge vers le point fixe commun c de X. Elle vérifie aussi l'égalité suivante :*

$$d(h(x_n), h(c)) \leq kd(g(x_n), g(c)) \leq kk'd(f(x_n), f(c)).$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} d(h(x_n), h(c)) \leq k \lim_{n\to+\infty} d(g(x_n), g(c)) \leq kk' \lim_{n\to+\infty} d(f(x_n), f(c)) = 0.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} d(h(x_n), h(c)) = 0.$$

D'une autre manière, on sait que f, g et h commutent deux à deux d'où, le point c vérifie :

$$f(h(c)) = h(f(c)) = h(c) \quad \textit{et} \quad g(h(c)) = h(g(c)) = h(c).$$

Ceci nous confirme que $h(c)$ est un point fixe commun de f et g. Ainsi, en utilisant l'unicité, on obtient $h(c) = c$. Même chose dans le cas où on utilise l'autre inclusion $h(X) \subset f(X)$.
Ce qui termine notre preuve.

Corollaire 1.63 *Soit f une fonction continue dans l'espace métrique complet (X, d) vers lui-même . Alors, la fonction f admet un point fixe dans l'espace X si et seulement s'ils existent deux constantes réelles $k, k' \in (0, 1)$ et deux des fonctions $h, g : X \to X$, qui commutent entre elles et avec aussi f, en plus la condition suivante doit être vérifiée :*
Pour tout entiers m, s

$$g^s(X) \subset f(X) \quad \textit{or} \quad h^m(X) \subset f(X) \quad \textit{et} \quad d(h^m(x), h^m(y)) \leq kd(g^s(x), g^s(y)) \leq kk'd(f(x), f(y)). \tag{1.10}$$

Dans ce cas les fonctions h, f et g ont un unique point fixe commun dans X si (1.10) est vérifiée.

Corollaire 1.64 *Soit f une fonction continue dans l'espace métrique complet (X, d) vers lui-même . Alors f as un point fixe en X si et seulement si il existe deux constantes réelles $k, k' \in]0, 1[$ et des fonctions $h, g : X \to X$ qui commutent entre eux et aussi avec la fonction f et la condition suivante doit être vérifiée :*
Pour tout entiers m, r, s.

$$g^r(X) \subset f^s(X) \quad \textit{or} \quad h^m(X) \subset f^s(X) \quad \textit{and} \quad d(h^m(x), h^m(y)) \leq kd(g^r(x), g^r(y)) \leq kk'd(f^s(x), f^s(y)). \tag{1.11}$$

Dans ces conditions, les fonctions h, f et g ont un unique point fixe commun dans X si l'inégalité (1.11) est vérifiée.

1.9.2 Point fixe commun de trois fonctions

Théorème 1.65 *Soit f une fonction continue dans l'espace métrique complet (X, d) vers lui-même. Alors f admet point fixe dans X si et seulement s'ils existent deux constantes réelles $k,\ k' \in]0, 1[,\ h,\ g : X \to X$, qui commutent entre elles, et aussi avec f, en plus, il existe un élément x_0 dans X, tel que :*
La suite $f^n(x_0)$ converge vers la limite l et l'une suites qui suit doit être bornée $f^n(r)$ ou bien $f^n(s)$. Notons que les valeurs r et s sont les limites des suites suivantes données par :

$$\lim_{n\to+\infty} g^n(x_0) = r,\ \lim_{n\to+\infty} h^n(x_0) = s.$$

et en plus, l'inégalité suivante doit être vérifiée,

$$d(h(x), h(y)) \leq kd(g(x), g(y)) \leq kk'd(f(x), f(y)). \tag{1.12}$$

Dans ces conditions, les fonctions h, f et g ont un point fixe commun unique dans X si l'inégalité (1.12) est vérifiée.

CHAPITRE 3

APPLICATION

Dans cette partie, nous allons donner deux applications essentielles qui motivent notre recherche du point fixe commun et qui donne une perspective prometteuse dans cet axe.
La première concerne la boule fermée de rayon r. Nous examinons brièvement le comportement de la fonction Torsion contraction définie sur la boule fermée $\overline{B_r} = \overline{B(x_0, r)}$ de rayon r et de centre x_0 de l'espace de Banach X. Les résultats sont présentés par les théorèmes suivants.

1.10 Application à la boule d'unité

1.10.1 Premier théorème sur la boule

Théorème 1.66 *Soit (X, d) un espace métrique complet et on suppose que la fonction g est une $g-k-f$ Torsion contraction continue définie de l'espace X vers lui-même. Supposons que les fonctions f et g commutent entre elles dans X.*
Soit la boule donnée par $B(f(x_0), r) = \{f(x) \in X : d(f(x), f(x_0) < r\}$, avec $x_0 \in X$ et r un réel strictement positif. On définie la restriction des fonctions f et g par :

$$g : B(f(x_0), r) \to X, \quad f : \overline{B(f(x_0), r)} \to \overline{B(f(x_0), r)},$$

avec, l'hypothèse que $d(f(x_0), g(x_0)) < (1-k)r$. Alors, les fonctions f et g ont un point fixe commun unique dans la boule $B(f(x_0), r)$.

Preuve 19 *Il existe un réel strictement positif r_0 avec $0 < r_0 < r$ et $d(f(x_0), g(x_0)) < (1-k)r_0$. On doit vérifier que la fonction g est bien définie sur la boule fermée. C.à.d*

$$g : \overline{B(f(x_0), r_0)} \to \overline{B(f(x_0), r_0)}.$$

Considérons $g(x) \in B(f(x_0), r_0)$, alors,

$$\begin{aligned} d(g(x), f(x_0)) \quad & \leq d(g(x), g(x_0)) + d(g(x_0), f(x_0)), \\ & \leq kd(f(x), f(x_0)) + d(g(x_0), f(x_0)), \\ & \leq kr_0 + (1-k)r_0 \leq r_0. \end{aligned}$$

Ces conditions permettent d'appliquer le théorème 1.58. On en déduit que g et f ont un unique point fixe commun dans la boule $\overline{B(f(x_0), r_0)} \subseteq B(f(x_0), r)$. C'est facile de voir que les fonctions f et g ont un unique point fixe commun dans la boule $B(f(x_0), r)$.

1.10.2 Deuxième théorème de la boule

Théorème 1.67 *Soit (X, d) un espace métrique complet et on suppose que la fonction $g-k-f$ Torsion contraction continue définie de l'espace x vers lui-même.*
Soit $B(f(x_0), r) = \{f(x) \in X : d(f(x), f(x_0)) \leq r\}$, avec $x_0 \in X$ et $r > 0$.
On prend la restriction des fonctions f et g par

$$g : B(f(x_0), r) \to X, \quad f : \overline{B(f(x_0), r)} \to \overline{B(f(x_0), r)} \text{ avec l'hypothèse que } d(f(x_0), g(x_0)) < (1-k)r.$$

On suppose qu'il existe un élément x_0 dans cet espace tel que les suites $f^n(x_0)_{n\geq 0}$ et $g^n(x_0)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite dans $B(f(x_0), r)$. Alors, les fonctions f et g ont un point fixe commun unique dans la boule $B(f(x_0), r)$.

Preuve 20 *Il suffit d'appliquer le théorème* (1.66) *et le corollaire* (1.55).

1.10.3 Troisième théorème de la boule

Théorème 1.68 *Soit $\overline{B_r}$ la boule fermée de rayon $r > 0$, et de centre zero dans l'espace de Banach X. Soient les fonctions f et g définies par $f, g : \overline{B_r} \to X$ et $f(\overline{B_r}) = \overline{B_r}$. On suppose que les fonctions f et g commutent entre elles et elles vérifient la condition suivante :*

$$f\left(\frac{f(x) + g(x)}{2}\right) = \frac{1}{2}(f \circ f(x) + f \circ g(x)). \tag{1.13}$$

Si la fonction g est une $g - k - f$ Torsion contraction continue, alors les fonctions f et g ont un point fixe commun unique dans la boule fermée $\overline{B_r}$.

Preuve 21 *Considérons $H(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2}$.*
Premièrement, on doit vérifier que H est bien définie dans la boule fermée, c.à.d $H : \overline{B_r} \to \overline{B_r}$.
Soit $g(x^*) = r\frac{g(x)}{\|g(x)\|}$, $f(x^*) = r\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ avec $x \in \overline{B_r}$ et $g(x) \neq 0$, $f(x) \neq 0$.
Maintenant si $x \in \overline{B_r}$ et $x \neq 0$,
$\| g(x) - g(x^*) \| \leq k \| f(x) - f(x^*) \| = k(r - \| f(x) \|)$.
Puisque $f(x) - f(x^*) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}(\| f(x) \| - r)$, il en résulte

$$\begin{aligned} \| g(x) \| \quad & \leq \| g(x^*) \| + \| g(x) - g(x^*) \|, \\ & \leq r + k(r - \| f(x) \|) \leq 2r - \| f(x) \| . \end{aligned}$$

Alors, pour $x \in \overline{B_r}$ et $x \neq 0$,

$$\| H(x) \| = \| \frac{g(x) + f(x)}{2} \| \leq \frac{\| g(x) \| + \| f(x) \|}{2} \leq r.$$

Par l'argument de continuité, on a $\| H(0) \| \leq r$, et par conséquence $H : \overline{B_r} \to \overline{B_r}$.
De plus, $H : \overline{B_r} \to \overline{B_r}$ est une $H - \frac{1+k}{2} - f$ fonction Torsion contraction continue.
En effet,

$$\| H(x) - H(y) \| \leq \frac{\| f(x) - f(y) \| + k \| f(x) - f(y) \|}{2} = \frac{1+k}{2} \| f(x) - f(y) \| .$$

Les fonctions H et f commutent d'après l'égalité (1.13). *On applique le théorème* (1.58) *sur le compact $\overline{B_r}$ qui donne que les fonctions H et f ont un unique point fixe commun $u \in \overline{B_r}$. Bien-sûr si $H(u) = f(u) = u$. Alors on peut déduire que $f(u) = g(u) = u$. Ce qui achève la preuve.*

Corollaire 1.69 *Soit $\overline{B_r}$ la boule fermée de rayon $r > 0$, et centre zero, en l'espace X. Soient deux fonctions f, g et H tel que g est une $g - k - f$ Torsion, elles sont définies par f, g, H : $\overline{B_r} \to X$ et $f(\overline{B_r}) = \overline{B_r}$ et*

$$H(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2}. \tag{1.14}$$

Supposons qu'il existe un élément x_0 dans la boule fermée $\overline{B_r}$, pour lequel les suites $(f^n(x_0)$ et $(H^n(x_0)$ ont la même point limite dans la boule fermée $\overline{B_r}$. Alors, les fonctions f et g ont un point fixe commun unique dans la boule fermée $\overline{B_r}$.

Preuve 22 *D'après la démonstration du théorème 1.68, nous révèle que la fonction H est une $H - \frac{1+k}{2} - f$ fonction Torsion contraction continue. Étant donné que les suites $f^n(x_0)$ et $H^n(x_0)$ ont la même limite dans l'espace $\overline{B_r}$; Dans ce cas, elle converge vers le point fixe commun c unique, c.à.d, $f(c) = H(c) = c$. (Voir la démonstration du théorème 1.55). En utilisant l'égalité 1.14, nous aurons,*

$$H(c) = \frac{f(c) + g(c)}{2}.$$

Ceci implique que $g(c) = f(c) = c$.
Comme la fonction g est une $g - k - f$ Torsion contraction continue, alors le point c est un point fixe commun unique. Ceci termine notre preuve.

Remarque 6 *Dans le corollaire 1.69, on n'a pas besoin de la commutativité des fonctions.*

1.11 Application pour les Polynômes

1.11.1 Polynômes

Dans tout ce chapitre , $\mathbb{K}$désigne soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Définition 1.70 *Une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée **polynôme à coefficients réels**(abrégé en polynôme dans ce qui suit)s'il existe un entier $n \geq 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots.., a_n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$P(x) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n.$$

*Les nombres a_n sont appelés **coefficients dominants** de polynôme P,l'entier n **degré** de P, On décrète que le degré du polynôme nul est $-\infty$. Si ce coefficient est égale à 1 , on dit que P est un polynôme **unitaire***
$\mathbb{R}[X]$ l' ensemble des polynôme à coefficient réels.De même , on note $\mathbb{Q}[X]$ l' ensemble des polynômes à coefficients rationnels et $\mathbb{Z}[X]$ l' ensemble des polynôme à coefficients entiers.

Définition 1.71 *Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X_k$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_p X_p$ deux polynôme dans $\mathbb{K}[X]$*

1. *La somme de P et Q si le polynôme $P + Q = \sum_{k=0}^{max(n,p} (a_k + b_k)X^k$.*

2. *Le produit de P et Q si le polynôme $P \times Q = \sum_{k=0}^{n+p} (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i})X^k$.*

3. *Le degré de la somme $d(P + Q) \leq max(d(P), d(Q))$, et pour le produit $d(P \times Q) = d(P) + d(Q)$*

Définition 1.72 *Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X_k$ *et* Q *deux polynôme , le* ***polynôme composé*** *de* P *et* Q *est le polynôme* $P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k$.

Exemple 1.73 *Si* $P = X^2 + 1$ *et* $Q = 2X + 3$,*alors* $P \circ Q = (2X + 3)^2 + 1 = 4X^2 + 12X + 10$, *alors que* $Q \circ P = 2(X^2 + 1) + 3 = 2X^2 + 5$.

Proposition 9 *Si* P *et* Q *sont deux polynômes,* $d\ (P \circ Q) = d(P) \times d(Q)$.

1.11.2 Racines de polynômes

Nous voyons ici que la connaissance des racines d'un polynôme permet de le factoriser. Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{C}$

Définition 1.74 *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $x \in \mathbb{K}$. *On dit que* x *est une* ***racine*** *du polynôme* P *si* *P(x)=0.*

Théorème 1.75 *Soient* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *a est racine de P , autrement dit P(a)= 0.*
2. *Il existe un polynôme* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que :*

$$P(x) = Q(x)(x - a).$$

Preuve 23 *Il est clair que le deuxième point implique le premier . Quant à la réciproque , le point clé est d'utiliser la division euclidienne .En effet , supposons que P(a)= 0.Écrivons alors la division euclidienne de P par X-a sous la forme P(x)=Q(x)(x-a)+k(x) avec k un polynôme de degré au plus .Ainsi , R est un nombre réel , notée c , P(x)=Q(x)(x-a)+c . Évaluons cette quantité en x=a : 0=P(a)=Q(a)(a-a)+ c .Donc c=0, ce qu'on voulait démontrer*

Exemple 1.76 *Choisi polynôme de degré 3 ,* $P = 2X^3 - 3X^2 + 5X - 4$ *. On constate que 1 est racine évidente de P :P(1)= 2-3+5-4 = 0, donc P est factorisable par X-1 : P=(X-1)*$(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$. *Par identification , on obtient a=2 ; b-a=-3 ; c-b=5 ; -c=-4, donc a=2 ; b=-1 et c=4 ,soit* $P = (X - 1)(2X^2 - X + 4)$. *Ce dernier facture ayant un discriminant négatif, P n'admet pas d'autre racine réelle que 1 .*

Théorème 1.77 *Soit* $n \geqslant 0$ *un entier.Un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *de degré n a au plus n racine différent dans* $\mathbb{K}$.

Preuve 24 *On raisonne par récurrence sur n. Pour n=0, c'est vrai car par définition un polynôme de degré 0 est une constant non nulle. Soit* $n \geqslant 1$ *et supposons le résultat acquis pour tous les polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *degré n-1. Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *de degré n. Si P n'a pas de racines dans* $\mathbb{K}$*, il n'y a rien à faire. Sinon, soit* $a \in K$ *une racine de P. D'après le théorème précédent, on peut écrire P(X)=(X-a)K(X) avec* $K \in \mathbb{K}[X]$ *un polynôme de degré n-1, qui par hypothèse de récurrence a au plus n-1 racines différentes. On déduit que P a au plus n racines différentes.*

Corollaire 1.78 *Un polynôme admettant une infinité des racines est nécessairement le polynôme nul.*

Remarque 7 *Il existe des polynômes qui n'ont pas de racines réelles ,par example* $P(x) = x^5 + 1$ *. En revanche,un polynôme P à coefficients réels et de degré impaire a au moins une racine réelle.*

Théorème 1.79 *Théorème fondamentale d'algèbre (théorème d'Alembert)*
Tout polynôme non constant, a coefficients complexes, admet au moins une racine. En conséquence, tout polynôme à coefficients entiers, rationnels ou encore réels admet au moins une racine complexe car ces nombres aussi des complexes.

Lemme 6 *Soient* $a \in \mathbb{C}$, *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *L'équation :*$x^n = a$, *admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$

Preuve 25 *On sait que a est un nombre complexe, on peut donc l'écrire sous sa forme polaire :*
$\exists p \in R^+; \exists \theta \in [0; 2\pi]$, *tels que :* $a = p(cos(\theta) + isin(\theta))$
soit $c \in \mathbb{C}$, *tel que* $c = \sqrt[n]{p}(cos(\frac{\theta}{n}) + isin(\frac{\theta}{n}))$
Alors, d'après la formule de Moivre on obtient que
$c^n = p(cos(\theta) + isin(\theta)) = a$
On en déduit que : c , est racine de l'équation$x^n = a$.
D'où l'équation $x^n = a$ *admet au moins une racine dans :* $\mathbb{C}$.

Preuve 26 *Soit la fonction polynôme* $P \in \mathbb{C}^[Z]$ *telle que*
$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z_n$, *avec* $n > 0$ *et* $a_n \neq 0$.
On suppose que a_0 *est non nul, sinon* 0, *est racine évidente du polynôme, et le théorème de d'Alembert est démontré. Soit la fonction*

$$f : z \in \mathbb{C} \to |P(z)| \in \mathbb{R}^+$$

ou $|.|$ *désigne le module d'un nombre complexe. On sait que tout ensemble* $A \in \mathbb{R}$ *non vide et minoré admet une borne inférieure. Or l'ensemble* $Im(f)$ *est non vide, minoré et il est inclue dans* $\mathbb{R}^+$, *il admet, donc, une borne inférieure que l'on notera m. Montrons :*

$$\exists M \quad tel\ que \quad |z| \geq M \Rightarrow |P(z)| \geq 2m$$

On a, d'après l'inégalité triangulaire : $|P(z)| = |z^n||(a_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k z^{n-k}))| \geq |z^n|K$ *tel que*

$$K = ||a_n| - |\sum_{k=0}^{n-1}(a_k z^{k-n})||.$$

On prend $|z| \geq M$ *strictement plus grand que :* $\frac{4m}{|a_n|}$
Cela entraine $K > \frac{|an|}{2}$. *Donc* $|P(z)|$ *est plus grand que* $M^n \frac{|a_n|}{2}$
ce qui implique, qu'il est plus grand que $2m$.
Soit $B = \{z \in \mathbb{C}; | z | \geq M\}$. *On montre que*

$$inf_{z \in B}|P(z)| = inf_{z \in \mathbb{C}}|P(z)|$$

. L'ensemble B est un compact. Comme la fonction f est continue sur B, elle atteint sa borne inférieure, qui est donc son minimum. On en déduit qu'il existe un point z_0 *tel que le minimum de la fonction f soit atteint en* z_0.
Dans la suite, on note $Q(z)$ *le polynôme qui à z associe la valeur* $P(z_0 + z)$.
Q est de même degré que P, et prend son minimum m en 0. On pose :

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_n z^n$$

avec $|b_0| = m$, *et* $b_k \neq 0$, *k étant le plus petit entier tel que le coefficient* b_k *soit non nul (k existe car le polynôme Q n'est pas constant).*
Soit $g : t \in \mathbb{R} \to |Q(t, c)| \in \mathbb{R}$, *avec* $c \in \mathbb{C}$ *tel que*
$c^k = -b_0.\bar{b_k}$. ($\bar{b_k}$ *est le conjugue de* b_k). *La fonction g s'écrit :*

$$g(t) = |b_0 - b_0|bk|^2 t^k + c_{k+1}t^{k+1} + ... + c_n t^n|,$$

avec

$$c_i \in \mathbb{C}, \forall i \in k+1...n$$

. Ce qui montre que, si $|t| < 1$ *alors :*

$$g(t) < m(1 - |b_k|^{2t^k}) + |t|^{k+1}|c_{k+1} + ... + c_{nt}^{n-k-1}| \leq m(1 - |b_k|^{2t^k}) + |t|^{k+1}N,$$

ou N est un majorant de : $\sum_{i=k+1}^{n} |c_i|$.
Si

$$|t| < m\frac{|bk|^2}{2N}$$

on obtient :

$$g(t) \leq m(1 - \frac{|b_k|^2}{2}t^k).$$

Donc, si t_0 *est choisi strictement positif et suffisamment petit, alors* $g(t_0) < m$*, ce qui revient à dire que* $|g(z_0 + t_0)| < m$.
Ceci montre que m n'est pas le minimum. Donc si $m \neq 0$.
Alors, m n'est pas le minimum de la fonction f*, ce qui est absurde car c'est la définition de m. On en déduit que m est forcément nul et que P admet au moins une racine dans C. Ceci achève la preuve.*

Exemple 1.80 $P(x) = x^4 + 4$*, une racine de cet polynôme est 1+i.*

Dans la deuxième application, on s'intéresse à la recherche d'une racine d'un polynôme est toujours difficile, les approches numériques ne donnent pas la solution exactes. Dans ce conteste notre travail se fait une projection lumineuse afin de trouver une piste qui nous ramène à un calcul simple et exacte. On propose dans ce qui va suivre, une nouvelle méthode de calcul des racines d'un polynôme de degré trois ou de degré cinq, sans passer par le calcul de la relation entre les racines et les coefficients ne peut exister dés que le degré est supérieure ou égale à cinq "voir la théorie de Galois". Cette méthode consiste à donner un critère rapide de trouver la racine d'un polynôme, en général notre méthode est valable pour les degrés impaires. La méthode consiste à trouver un polynôme de degré un et qui commute avec notre polynôme donné. Une fois, ces coefficients sont déterminés par commutation, son point fixe sera le point fixe commun au deux polynômes qui représente la racine cherchée. On remarque que notre polynôme de degré un est toujours une droite parallèle à la deuxième bissectrice qui coupent la courbe de notre polynôme au point fixe commun cherché.

1.11.3 Racine d'un polynôme de degré trois

Théorème 1.81 *L'équation du type* $ax^3 + bx^2 + cx + d = x$ *avec* $a \neq 0$ *où les coefficients satisfont*
$d = -\frac{1}{27a^2}(9ab + 2b^3 - 9abc)$ *a une même solution d'équation* $x - \frac{2b}{3a} = x$*, dont les conditions sur les coefficients sont déterminés par la commutation des deux polynômes.*

Preuve 27 *Considérons les deux polynômes suivants :*
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{et} \quad g(x) = -x - \frac{2b}{3a}$.
La commutativité nous donne :
$f \circ g = a\left(-x - \frac{2b}{3a}\right)^3 + b\left(-x - \frac{2b}{3a}\right)^2 + c\left(-x - \frac{2b}{3a}\right) + d =$

$-\frac{1}{27a^2}\left(27a^3x^3+27a^2bx^2+27ca^2x-27da^2+18cab-4b^3\right)$

$$g\circ f=-\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)-\frac{2b}{3a}=-\frac{1}{3a}\left(3a^2x^3+3bax^2+3cax+3da+2b\right)$$

$$f\circ g=g\circ f\Rightarrow -27da^2+18cab-4b^3=27da^2+18ba$$

$$\Rightarrow d=-\frac{1}{27a^2}\left(9ab+2b^3-9abc\right).$$

Exemple 1.82 *Soit* $f:[-1,0]\to[-1,0]$

On considère l'équation $x=f(x)$ *,avec* $f(x)=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{19}{48}$.
Notant que $f'(x)=\frac{1}{4}\left(x^2+x+1\right)$ *and* $\forall x\in[-1,0]$, $|f'(x)|<1$.
Afin de résoudre l'équation recherchons une fonction $g:g(x)=\alpha x+\beta$ *qui commute avec* f *et nous résolvons l'équation* $g(x)=x$.

$$f\circ g=\frac{1}{12}\left(\alpha x+\beta\right)^3+\frac{1}{8}\left(\alpha x+\beta\right)^2+\frac{1}{4}\left(\alpha x+\beta\right)-\frac{19}{48}$$
$$=\frac{1}{12}x^3\alpha^3+\frac{1}{8}x^2\alpha^2\left(2\beta+1\right)+\frac{1}{4}x\alpha\left(\beta+\beta^2+1\right)+\frac{1}{12}\beta^3+\frac{1}{8}\beta^2+\frac{1}{4}\beta-\frac{19}{48}$$
$$g\circ f=\alpha\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{19}{48}\right)+\beta=\frac{1}{12}\alpha x^3+\frac{1}{8}\alpha x^2+\frac{1}{4}\alpha x-\frac{19}{48}\alpha+\beta$$

$$f\circ g=g\circ f\Rightarrow\begin{cases}\alpha^3=\alpha\\ \alpha^2\left(2\beta+1\right)=\alpha\\ \frac{1}{4}\alpha\left(\beta+\beta^2+1\right)=\frac{1}{4}\alpha\\ \frac{1}{12}\beta^3+\frac{1}{8}\beta^2+\frac{1}{4}\beta-\frac{19}{48}=-\frac{19}{48}\alpha+\beta\end{cases}$$

$\alpha^3=\alpha\Rightarrow\alpha=\{1,0,-1\}$

gardons la solution $\alpha=-1$, *depuis pour* $\alpha=0$ *nous rencontrons la fonction constante et pour* $\alpha=1$ *nous rencontrons la fonction identité*

$\alpha^2\left(2\beta+1\right)=\alpha\Rightarrow 2\beta+1=-1$
$\Rightarrow\beta=-1$
les deux dernières équations du système sont vérifiées pour $\alpha=-1$*et* $\beta=-1$
$g(x)=-x-1$
$g(x)=x\Rightarrow -x-1=x\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{19}{48}=x\Rightarrow\{[x=-0.5],[x=2.622\,5],[x=-3.622\,5]\}$
les solutions sont : $\{[x=0.507\,94-1.322\,8i],[x=0.507\,94+1.322\,8i],[x=0.507\,94]\}$

Exemple 1.83 *Considérons les deux polynômes suivants :*
$f(x)=-2x^3+x^2+4x-\frac{14}{27}$ *et* $g(x)=-x+\frac{1}{3}$.
$f\circ g=-2\left(-x+\frac{1}{3}\right)^3+\left(-x+\frac{1}{3}\right)^2+4\left(-x+\frac{1}{3}\right)-\frac{14}{27}=2x^3-x^2-4x+\frac{23}{27}$
$g\circ f=-\left(-2x^3+x^2+4x-\frac{14}{27}\right)+\frac{1}{3}=2x^3-x^2-4x+\frac{23}{27}$
$x=g(x)\Rightarrow -x+\frac{1}{3}=x$, *la solution est :* $\frac{1}{6}$
$2x^3-x^2-4x+\frac{23}{27}=x$, *les solutions sont :* $\{[x=0.166\,67],[x=-1.440\,6],[x=1.773\,9]\}$
Notez que la condition $|f'(x)|<1$ *n'est pas nécessaire.*

Exemple 1.84 *Considérons les deux polynômes suivants :*
$21x^3-32x^2+54x-\frac{255\,008}{11\,907}=x$, *les solutions sont :*
$\{[x=0.507\,94+1.322\,8i],[x=0.507\,94]\}$
$-x+\frac{64}{63}=x$, *la solution est :* $\{[x=0.507\,94]\}$
$21\left(-x-1.016\right)^3-32\left(-x-1.016\right)^2+54\left(-x-1.016\right)-21=-21.0x^3-96.008x^2-184.06$
$x-130.92$
$-\left(21x^3-32x^2+54x-21\right)-1.016=-21.0x^3+32.0x^2-54.0x+19.984$

$21\left(-x+1.0159\right)^3-32\left(-x+1.0159\right)^2+54\left(-x+1.0159\right)-21.417=-21.0x^3+32.$
$002x^2-54.002x+22.434$
$-\left(21x^3-32x^2+54x-21.417\right)-1.0159=-21.0x^3+32.0x^2-54.0x+20.401$
$y=21x^3-32x^2+54x-\frac{255\,008}{11\,907}$

1.11.4 Racine d'un polynôme de degré cinq

Théorème 1.85 *Soit a,b,c,d,m,n des réels et $a\neq 0$. On considère l'équation*

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+mx+n=x. \tag{1.15}$$

Si les coefficients d and n satisfont l'égalité suivante :

$$d=-\frac{1}{25a^2}\left(4b^3-15abc\right)\ \textit{ et }\ n=-\frac{1}{3125a^4}\left(625a^3b+24b^5-100ab^3c-625a^3bm+250a^2b^2d\right).$$

Alors, le polynôme donné par 1.15 a le même point fixe qu'un polynôme de degré un, bien déterminé par la commutation des polynômes. Ainsi, le point fixe est déterminé par résolution de l'équation suivante :

$$-x-\frac{2b}{5a}=x. \tag{1.16}$$

Preuve 28 *On considère les polynômes de degré cinq et de degré un qui sont donnés par leurs expressions :*

$$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+mx+n\quad \textit{et}\quad g(x)=-x-\frac{2b}{5a}.$$

La condition de commutation, nous fait aboutir à,

$g\circ f(x)=-\left(ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+mx+n\right)-\frac{2b}{5a}=$
$-\frac{1}{5a}\left(5a^2x^5+5bax^4+5cax^3+5dax^2+5max+5na+2b\right)$

$$f\circ g=g\circ f\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{25a^2}\left(25da^2-30cab+8b^3\right)=-d\\ \\ \frac{1}{125a^3}\left(-125ma^3+100da^2b-60cab^2+16b^4\right)=-m\\ \\ -\frac{1}{3125a^4}\left(-3125na^4+1250ma^3b-500da^2b^2+200cab^3-48b^5\right)=-n-\frac{2b}{5a}\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}d=-\frac{1}{25a^2}\left(4b^3-15abc\right)\\ \\ n=-\frac{1}{3125a^4}\left(625a^3b+24b^5-100ab^3c-625a^3bm+250a^2b^2d\right)\end{array}\right.$$

Exemple 1.86 *Soit $f:[0,1]\to[0,1]$*
avec, $f(x)=0.02x^5-0.0324x^4+0.06x^3-0.044715x^2+0.32694.$
Notant que : $f'(x)=0.1x^4-0.129\,6x^3+0.18x^2-0.089\,43x$ et $\forall x\in[0,1]$, $|f'(x)|<1$
Considérons l'équation $x=f(x)$ qui a une solution dans $[0,1]$
afin de résoudre l'équation , on considère la fonction $g:g(x)=-x+0.648$ qui commute avec la fonction f à une erreur inférieure à 10^{-6} et on résolve l'équation $g(x)=x$ qui est la même solution que l'équation $f(x)=x$.
$f\circ g=0.02\left(-x+0.648\right)^5-0.0324\left(-x+0.648\right)^4+0.06\left(-x+0.648\right)^3-$
$0.044715\left(-x+0.648\right)^2+0.32694$
$=-0.02x^5+0.032\,4x^4-0.06x^3+4.471\,5\times10^{-2}x^2-1.430\,8\times10^{-7}x+0.321\,06$
$g\circ f=-\left(0.02x^5-0.0324x^4+0.06x^3-0.044715x^2+0.32694\right)+0.648$

$= -0.02x^5 + 0.032\,4x^4 - 0.06x^3 + 4.\,471\,5 \times 10^{-2}x^2 + 0.321\,06$

Au lieu de résoudre l'équation $x = f(x)$, *il suffira de résoudre l'équation* $x = g(x)$. *Dans ce cas la solution est donnée par :* $-x + 0.648 = x \Rightarrow x = 0.324$ *et c'est la solution de l'équation* $0.02x^5 - 0.0324x^4 + 0.06x^3 - 0.044715x^2 + 0.32694 = x$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$.

Exemple 1.87 $f(x) = x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 4.72x^2 - 0.87616$ *et* $g(x) = -x - 0.8$
$f \circ g = (-x - 0.8)^5 + 2(-x - 0.8)^4 + 5(-x - 0.8)^3 + 4.72(-x - 0.8)^2 - 0.87616 =$
$-x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 4.\,72x^2 + 0.076\,16.$
$g \circ f = -(x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 4.72x^2 - 0.87616) - 0.8 = -x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 4.\,72x^2 + 0.076\,16.$
au lieu de résoudre l'équation $x = f(x)$ *il suffira de résoudre l'équation* $x = g(x)$. *En effet la solution est donnée par :*
$-x - 0.8 = x \Rightarrow x = -0.4.$

Perspective À nos lecteurs qui s'intéressent au sujet, il y a une conjecture à résoudre. Soient f et g deux fonctions continues, qui commutent entre elles et elles sont définies de l'intervalle $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Est-ce-qu'elles possèdent un point fixe commun ?

conclusion

Ce mémoire, conçu en vue de l'obtention du diplôme de Master en

Mathématiques qui présente quelques théorèmes du point fixe commun et quelques applications.

Cette étude consiste à remplacer la suite deJuncky par la suite de picad, d'éviter l'hypothèse de

l'inclusion, ce qui ouvre des voies vers le numérique, la programmation et aussi

la possibilité d'avoir les solutions à des problèmes beaucoup plus complexes

au moyen du point fixe commun, ce qui augmente les chances

d'affirmer ou d'infirmer l'existence de leurs solutions ou non.

Références

[1] V.W.Brant, *A remark on a fixed point theorem for iterated mappings*, this MONTHLY, **75**, page 399–400, (1968).

[2] Gustave Choquet, *Topology, Academic Press*, New York, (1966).

[3] C.H.Edwards, Jr, *Adanced Calculs of Serval Varibles*, Academic Press, New York & London, (1973).

[4] Ardrzj Granas. , James Dugundji, Book, *Fixed point point Theory*, Spinger (2003).

[5] G.Juncgck., *Commuting mapping and fixed point*, Amer. Math. Monthly **83**, page 261–263, (1976).

[6] Ignace I. Kolodner, *Fixed point*, this MONTHLY, **71**, page 906, (1964).

[7] S. Land, *Analysis 1*, Addison-Wesely, Reading, Mass. (1968).

[8] Raul Machuta, *A coincidence theorem*, this MONTHLY, **74** , page 569, (1967).

[9] W. F. Pfeffer, *More on involutions of a circle*, this MONTHLY, **81**, page 613–616, (1974).

[10] Eric Schechter. , *Handbook of Analysis and Ints Fondation*, Academic Press, page 511–512, (1996).

[11] Hans Sagan, *Advanced Calculus*, Houston Mifflin, Boston, (1974).