Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Lacheheb Hasna

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques appliquées
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Thème

Application Multivoque et Stabilité d'une Solution Optimale

Soutenu publiquement 14 Octobre 2020 devant le jury composé de

Président	S. Benaissa	*MAA*	Université de Bordj Bou Arréridj.
Encadreur	S. Addoune	*MCA*	Université de Bordj Bou Arréridj.
Examinateur	H. Debbiche	*MCB*	Université de Bordj Bou Arréridj.

Promotion 2019/2020

Remerciement

*Tout d'abord je tiens a remercier **Allah**, tout puissant de m'avoir donné la force pour dépasser touts les difficultés. Comme je voudrais adresser toute ma reconnaissance à mon encadreur monsieur **S. Addoune** pour sa patience, sa disponibilité ses conseils, ses orientations et son aide lors de la rédaction de ce mémoire.*

*Et je tiens à remercier spécialement le professeur **R. Zaghdane**.*

*Je désire aussi remercier les professeurs de l'université de **B.B.A**, qui m'ont fourni les outils nécessaires pour réussir dans mes études universitaires.*

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes parents, les amies qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements.

Table des matières

Introduction

Il est bien connu que l'analyse variationnelle est une branche dynamique des mathématiques dont les origines remontent à plusieurs siècles. Pendant un certain temps, elle avait été identifiée au calcul des variations, à l'exploration du comportement local de fonctions. Aujourd'hui, on entend par analyse variationnelle un ensemble de théories mathématiques dont celles de la convergence de suites d'ensembles, de l'optimisation, du contrôle, de l'analyse multivoque, de l'analyse non lisse, etc. Ces outils sont utilisés dans de nombreux domaines appliqués tels que l'économie, l'ingénierie, la mécanique et bien sûr dans le traitement de problèmes de mathématiques abstraites. Les problèmes impliquant l'analyse multivoque surgissent, par exemple, lorsque l'ensemble de solution, n'est pas réduit à un point comme dans le cas des problèmes mal posés (resp. les problèmes d'optimisation paramétrés).

Ce travail est divisé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons les outils fondamentaux de l'analyse multivoque. En particulier, les notions élémentaires des ensembles, la continuité et la différentiabilité des multifonctions.

Le deuxième chapitre est consacré aux problèmes d'optimisation paramétrique. On traite des problèmes de type :

$$P_x := \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x,y) \\ \text{ tel que } y \in F(x), \end{cases}$$

avec

$$F(x) = \{y \mid g_j(x,y) \leq 0, j = 1, \cdots, m\}$$

pour un paramètre x dans un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$. On souhaite trouver des minimaux locaux $y = y(x)$ de ce problème.

Noter que pour tout paramètre fixé $x \in X$, le problème P_x représente un problème d'optimisation standard.

Supposons que x_0 est fixé, $F(x_0)$ est l'ensemble des solutions réalisables, x_0 est un minimum local de $F(x_0)$ avec la valeur correspondante $v(x_0) = f(x_0, y_0)$.

L'objet de l'optimisation paramétrique est le suivant

▷ Comment l'ensemble des solutions réalisables $F(x)$ se change par apport à $F(x_0)$ pour un x_0 fixé ?

▷ Existe-t-il un minimum local $y(x)$ de P_x proche de x_0, si oui, comment $y(x)$ et la fonction valeur $v(x) = f(x, y(x))$ change en fonction de x?

L'objective de ce mémoire est

— Donner une introduction sur les applications multivoques (Propriétés algébriques et topologiques).

— Étudier le problème de l'optimisation paramétrique (Stabilité d'une solution optimale).
On termine ce mémoire par une bref conclusion.

Chapitre 1

Applications multivoques

1.1 Introduction

On se propose, dans ce chapitre de donner un éventail de définitions algébriques et topologiques en analyse multivoque. Des divers exemples seront mis en évidence.

On parle de multifonction (ou application multivoque), cette application F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y (ce sont des applications dont les images ne sont pas nécessairement des points comme en analyse classique, mais des ensembles).

On désigne une multifonction, en général par la notation $F : X \rightrightarrows Y$ et $(F : X \to 2^Y)$ les multifonctions interviennent dans divers problèmes notamment comme en économie ou en théorie des jeux, etc.

1.2 Généralités sur les applications multivoques

Si l'application F de X dans Y est telle que l'ensemble $F(x)$ soit toujours composé d'un seul élément, on dit que F est une fonction, où application univoque de X dans Y.

Définition 1.1
Étant donné deux ensembles X et Y si à chaque élément x de X, on associe un sous-ensemble non vide de Y noté $F(x)$. On définit une application multivoque F de X vers Y noté $F : X \rightrightarrows Y$.

Exemples 1.1

- ▷ *Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application univoque. Étant donné $y \in Y$, soit le problème*

  $$\text{Trouver } x \in X \text{ tel que } f(x) = y.$$

  L'ensemble des solutions n'est pas nécessairement un singleton, il peut-être éventuellement vide. On définit ainsi une multifonction $S : Y \rightrightarrows X$

  $$S(y) = \{x \in X : f(x) = y\} = f^{-1}(\{y\}) \quad \text{pour tout } y \in Y.$$

▷ *Soient* X,Y *deux espaces topologiques et* $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *considérons le problème d'optimisation paramétré suivant :*

$$(P_y) \quad \begin{cases} \underset{x}{Minimiser}\ f(x,y) \\ s.c \\ x \in X. \end{cases}$$

Soit $v : Y \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $v(y) = \inf_{x \in X} f(x,y)$. *Cette fonction est appelée fonction valeur (ou fonction marginale). On peut définir une multifonction* $S : Y \rightrightarrows X$ *par :*

$$S(y) = \{x \in X : \inf_{x \in X} f(x,y) = v(y)\}.$$

1.2.1 Domaine, image et graphe d'une multifonction

Définition 1.2

▷ *On appelle graphe de la multiplication* $F : X \rightrightarrows Y$ *l'ensemble*

$$grF := \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

▷ *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multifonction, l'image de* F *est la réunion des valeurs* $F(x)$ *lorsque* x *parcourt* X. *Cet ensemble est définit par :*

$$Im(F) := \bigcup_{x \in X} F(x) = \{y \in Y|\ il\ existe\ x\ tel\ que\ y \in F(x)\}.$$

▷ *Le domaine de* F *est l'ensemble des éléments de* X *dont l'image par* F *est un sous-ensemble non vide de* Y *(la projection de* X*). Autrement dit :*

$$dom(F) := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

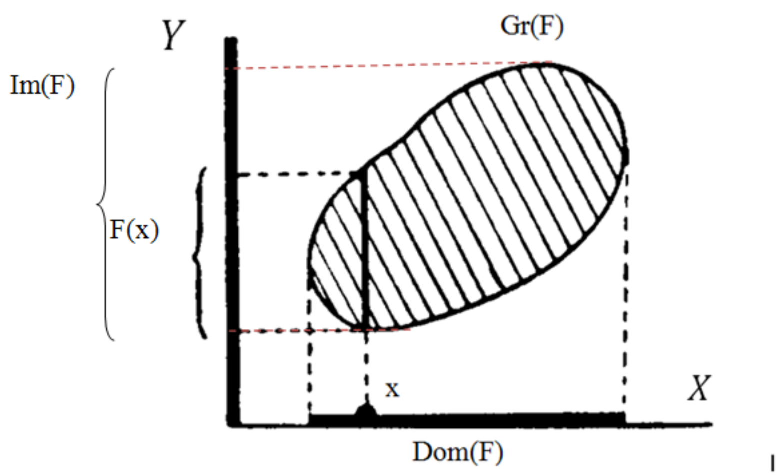

FIGURE 1.1 – Graphe, domaine et image de la multifonction F.

Si K est un sous-ensemble de X, on notera par $F_{|K}$ la restriction de F sur K, définie par :

$$F_{|K}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in K, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$domF_{|K} = domF \cap K.$$

Définition 1.3
Soit X,Y deux espaces vectoriels et $F : X \rightrightarrows Y$

- ♢ *Lorsque $domF \neq \emptyset$, alors son graphe $grF \neq \emptyset$ donc, on dit que F est non triviale.*
- ♢ *F est à graphe fermé si grF est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermé. C'est-à-dire pour toute suite $((x_n, y_n))_n$ dans grF telle que $x_n \to x$ et $y_n \to y$ alors*

$$(x, y) \in grF.$$

Définition 1.4 ([1])

- ▹ *On dit qu'une application multivoque F de X dans Y est compacte (resp. bornée) si (ImF) est compact (resp. bornée) dans Y.*
- ▹ *On dit qu'elle est localement compacte (réciproquement localement bornée) si pour tout $x \in domF$, il existe un voisinage $V(x)$ de x sur lequel F est compacte (resp. bornée).*
- ▹ *F est à valeurs compactes si $F(x)$ est compact pour tout $x \in X$.*

Propriétés 1
Soit F une multifonction on a :

- ▹ *Toute application compacte est à valeurs compacte mais la réciproque est fausse.*
- ▹ *Si $gr(F)$ est compact alors $Im(F)$ est compact mais la réciproque est fausse.*
- ▹ *$Im(F) = Pr_Y(gr(F))$.*

1.2.2 Image réciproque d'une multifonction

Soit X, Y deux ensembles et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque

Définition 1.5
L'inverse d'une multifonction F est une multifonction $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ telle que :

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x),$$

$$(ou\ (y,x) \in grF^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in gr(F)).$$

Ainsi

$$domF^{-1} = ImF \ et \ ImF^{-1} = dom(F).$$

Exemple 1.1
Considérons la multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définit par :

$$F(x) = \begin{cases} \emptyset & si\ x > 0 \\ \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} & si\ x \leq 0. \end{cases}$$

On a $domF = \mathbb{R}_-$.
Et on obtient

$$ImF = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_-} \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} = \mathbb{R}$$

et

$$grF = \{(x, \sqrt{-x}) : x \leq 0\} \cup \{(x, -\sqrt{-x}) : x \leq 0\}.$$

De plus la multifonction inverse est donnée par :

$$F^{-1} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R},\ F^{-1}(y) = \{-y^2\}.$$

1.2.3 Image directe et image réciproque d'un sous ensemble

Définition 1.6 *:*
Soient X, Y deux ensembles, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et A un sous ensemble de X. L'image de A par F est définie par :

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Exemple 1.2
Soit la multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ tel que $F(x) = [x^2, x^2+1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$F(\{0,1\}) = \bigcup_{x \in \{0,1\}} F(x) = [0,2].$$

Définition 1.7
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et B un sous-ensemble de Y
L'image réciproque de B par F notée $F^{-1}(B)$ est définie par :

$$F^{-1}(B) := \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Et le noyau de F noté $F^{+}(B)$ est défini par :

$$F^{+}(B) := \{x \in X : F(x) \subset B\}.$$

▷ Une application F est dite injective si

$$x \neq x' \text{ alors on a } F(x) \cap F(x') = \emptyset.$$

Proposition 1.1 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et A_1, A_2 deux sous ensembles de X. Alors*

1. $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2)$.
2. $F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap F(A_2)$.
3. $Im(F) \setminus F(A) \subset F(X \setminus A)$.
4. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow F(A_1) \subset F(A_2)$.

Démonstration
2. $F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap F(A_2)$.
Soit $y \in F(A_1) \cap F(A_2)$ si et seulement si $y \in F(A_1)$ et $y \in F(A_2)$.
il existe $x \in A_1$ tel que $y \in F(x)$ et il existe $z \in F(A_2)$ tel que $y \in F(z)$, on a $F(x) = F(z)$ si $x = z \in A_1 \cap A_2$.
Si F est injective alors

$$F(x) \cap F(z) \neq \emptyset \text{ alors } x = z, \text{ donc } y \in F(A_1 \cap A_2)$$

$$\text{donc } F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap F(A_2).$$

1.2.4 Composée des multifonctions

Définition 1.8
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : Y \rightrightarrows Z$ des multifonctions, alors la composition $(G \circ F)(x)$ est définie par :

$$(G \circ F)(x) := G(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y) \text{ pour tout } x \in X.$$

Exemple 1.3

Soient F, $G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *sont deux multifonctions telles que :*

$$F(x) := \{x^2, x^2+1\},$$

et

$$G(x) := \{\sqrt{|x|}, \sqrt{|x+1|}\}$$

$$(G \circ F)(x) := G(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y) = G(x^2) \cup G(x^2+1)$$

$$= \{|x|, \sqrt{|x^2+1|}, \sqrt{|x^2+1|}, \sqrt{|x^2+2|}\}.$$

Remarque 1.1

- ♢ *La somme de deux multifonctions fermée n'est pas nécessairement une multifonction fermée.*
- ♢ *La composée de deux multifonctions fermées n'est pas nécessairement une multifonction fermée.*

Exemple 1.4

En effet, prenons $F, G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *telle que*

$$F(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\} & \textit{pour } x \neq 0 \\ \{0\} & \textit{sinon} \end{cases}$$

et

$$G(x) = \begin{cases} [1, x] & \textit{pour } x \geq 1 \\ \emptyset & \textit{pour } x < 1. \end{cases}$$

F, G *sont fermées mais la composée* $G \circ F$ *n'est pas fermé, avec*

$$G \circ F(x) := \begin{cases} [1, \frac{1}{x}] & \textit{si } 0 < x \leq 1 \\ \emptyset & \textit{si } x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty]. \end{cases}$$

Il suffit de prendre la suite $(\frac{1}{n}, 1)_n \subset gr\, G \circ F(x)$ *et* $\lim(\frac{1}{n}, 1) = (0, 1) \notin gr(G \circ F)$.

1.2.5 Opérations sur les multifonctions

Si F_1 et F_2 sont deux applications multivoques de X dans Y, leur réunion est l'application $(F_1 \cup F_2)$ de X dans Y définie par

$$(F_1 \cup F_2)x = F_1 x \cup F_2 x.$$

L'intersection de F_1 et de F_2 est l'application $(F_1 \cap F_2)$ de X dans Y définie par

$$(F_1 \cap F_2)x = F_1x \cap F_2x.$$

Le produit cartésien de F_1 et de F_2 est l'application $(F_1 \times F_2)$ de X dans Y définie par

$$(F_1 \times F_2)x = F_1x \times F_2x.$$

Plus généralement, si l'on définit un opérateur $\vee$ sur les ensembles, on posera

$$(F_1 \vee F_2)x = F_1x \vee F_2x.$$

On a

1. $(F_1 \cup F_2)A = F_1A \cup F_2A$
2. $(F_1 \cap F_2)A \subset F_1A \cap F_2A$

   car

   On a $y \in (F_1 \cap F_2)A$ si et seulement si il existe $x \in A$ tel que $y \in (F_1 \cap F_2)x$ et alors $y \in F_1x \cap F_2x$ qui donne $y \in F_1x$ et $y \in F_2x$ donc $y \in F_1A$ et $y \in F_2A$ on conclut $y \in F_1A \cap F_2A$.
3. $(F_1 \times F_2)A \subset F_1A \times F_2A$

   car

   On a $y \in (F_1 \times F_2)A$ si et seulement si il existe $x \in A$ tel que $y \in (F_1 \times F_2)x$ alors $y \in F_1(x) \times F_2(x)$ or il existe $y_1 \in F_1(x)$ et $y_2 \in F_2(x)$: $y = (y_1, y_2)$ donc $y \in F_1A \cap F_2A$.
4. $(F_2 \circ F_1)A = F_2(F_1A)$.

Si F_1, F_2 et F_3 sont des applications de X dans X, on a

$$F_3 \circ (F_2 \circ F_1)x = (F_3 \circ F_2) \circ F_1x \text{ (associative du produit de composition).}$$

Si F est une application de X dans X, il est donc naturel de poser

$$F^2x = F(Fx).$$

$$F^3x = F(F^2x) = F^2(Fx).$$

La fermeture transitive de F est une application $\hat{F}$ de X dans X définie par

$$\hat{F}x = \{x\} \cup Fx \cup F^2x \cup F^3x \cup \cdots .$$

La correspondance $A \to \hat{F}A$ est bien une fermeture, car on a

1. $\hat{F}A \supset A$ croissnce .
2. $A \supset B \Rightarrow \hat{F}A \supset \hat{F}B$ isotonie .
3. $\hat{F}(\hat{F}A) = \hat{F}A$ idempotence .

Théorème 1.1
$A \subset B$ entraîne $F(A) \subset F(B)$.
En effet, si $y \in F(A)$, on a $y \in F(x)$ pour tout $x \in A$, cela entraîne en particulier $y \in F(x), x \in B$, d'où $y \in F(B)$.

Théorème 1.2 *On a*

$$F(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} FA_i.$$

En effet, si $y \in F(\bigcup A_i)$*, on a* $y \in F(x)$*,* $x \in \bigcup A_i$*, donc, pour un indice* i_0*, on a* $y \in F(A_{i_0})$*.*
On a donc

$$y \in \bigcup_{i\in I} F(A_i).$$

Théorème 1.3
On a

$$F(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} F(A_i).$$

En effet, si $y \in F(\bigcap_{i\in I} A_i)$ *on prend* $A_1, A_2 \in \bigcap_{i\in I} A_i$ *il existe* $y \in F(A_1 \cap A_2)$ *tel que* $y \in F(A_1)$ *et* $y \in F(A_2)$ *or il existe* $x_1 \in A_1$ *et* $x_2 \in A_2$ *donc* $y \in F(x_1)$ *et* $y \in F(x_2)$ *ainsi* $y \in F(x_1) \cap F(x_2) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $x_1 = x_2$*. Si* F *injective alors* $x_i = x_j$ *donc* $y \in \bigcap_{i\in I} F(A_i)$ *pour tout* $i \in I$

Théorème 1.4
Soit X *et* Y *deux espaces vectoriels*

- ▷ *Si* $A \subset X$*, et si* F *est une application de* X *valuée sur* Y*, on a*

$$[F(A)]^c \subset F(A^c).$$

- ▷ *Si* F *est injective, on a*

$$[F(A)]^c = F(A^c).$$

- ▷ *Si* $y \in [F(A)]^c$*, on a évidemment* $y \in F(A^c)$ *(puisque* F *est une application valuée sur* Y*), si en outre* F *est injective, on a* $y \in F(A^c) \Rightarrow (\exists x \in A^c) : y \in F(x) \Rightarrow y \notin FA \Rightarrow y \in [F(A)]^c$*.*

1.2.6 Linéarité d'une application multivoque

On considère X et Y deux espaces vectoriels sur un corps commutatif-K.

Définition 1.9
Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ *est dit linéaire si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $F(x) + F(x') \subseteq F(x + x')$*, pour tout couple de vecteurs* $(x, x') \in X \times X$*.*
2. $\alpha F(x) \subseteq F(\alpha x)$*, pour tout couple* $(\alpha, x) \in K \times X$*.*

Proposition 1.2
Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ où X et Y sont deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K est linéaire multivoque si et seulement si son graphe grF est un K-espace vectoriel produit $X \times Y$.

Démonstration
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et grF son graphe. Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de grF alors

$$y \in F(x) \ et \ y' \in F(x')$$

donc

$$y + y' \in F(x) + F(x') \subseteq F(x + x').$$

Ainsi

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \in grF.$$

D'autre part, si $y \in F(x)$ et $\alpha \in K$ alors

$$\alpha y \in \alpha F(x) \subseteq F(\alpha x)$$

or

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

donc

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in grF.$$

On conclut ainsi que si F est linéaire multivoque son graphe est un sous espace vectoriel de $X \times Y$.

Proposition 1.3
La composition des applications linéaires multivoques est une application linéaire multivoque.

Démonstration
En effet, Soient $G : X \rightrightarrows Y$ et $F : Y \rightrightarrows Z$ deux applications linéaires multivoques où X, Y et Z sont trois espaces vectoriels sur un corps commutatif K.
Considérons x et x' deux vecteurs de X alors

$$G(x) + G(x') \subseteq G(x + x').$$

Donc

$$F(G(x) + G(x')) = \bigcup_{y \in G(x)+G(x')} F(y) \subseteq \bigcup_{y \in G(x+x')} F(y) = F(G(x + x')) = FoG(x + x').$$

Si α est un scalaire de K et x un vecteur de X alors

$$\alpha G(x) \subseteq G(\alpha x).$$

Par conséquent si

$z \in \alpha F(G(x) = \alpha \cup_{y \in G(x)} F(y)$ il existe donc $y \in G(x)$ avec $z \in F(y) \subseteq F(\alpha x)$.
Or, $\alpha y \in \alpha G(x) \subseteq G(\alpha x)$ donc

$$z \in F(G(\alpha x)) = \bigcup_{y' \in G(\alpha x)} F(y').$$

1.3 Continuité de multifonctions

Les concepts de multifonction semi-continues ont été introduit en 1932 par G-Bouligand et K-Kuratowski [7]. Par suite nous allons introduire deux concepts de continuité, l'un attribué à Berge et l'autre à Hausdorff.

1.3.1 La notion de continuité au sens de Berge

Définition 1.10 [*12*, *7*]
Soit F une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y, on dit que :

- ▷ *F est semi-continue inférieurement au sens de Berge, qu'on note B-s.c.i. en $x_0 \in dom(F)$ si pour tout $y_0 \in F(x_0)$ et pour tout voisinage V de y_0 (dans Y), il existe un voisinage U de x_0 (dans X) tel que $F(x) \cap V \neq \emptyset$ pour tout $x \in U$.*
- ▷ *F est semi- continue supérieurement au sens de Berge, qu'on note B-s.c.s en $x_0 \in dom(F)$ si pour tout ouvert V dans Y vérifiant $F(x_0) \subset V$, il existe $U \in V(x_0)$ tel que $F(x) \subset V$, pour tout $x \in U$.*
- ▷ *F est semi-continue inférieurement dans X(ou plus simplement, que F est B-s.c.i) si elle est semi-continue inférieurement en tout point de X ; on dite que F est semi-continue supérieurement dans X(ou plus simplement, que F est B-s.c.s) si elle est semi-continue supérieurement en tout point de X.*
- ▷ *F est continue au sens de Berge si F est B-s.c.s et B-s.c.i.*

Exemple 1.5
Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \{-1, 1\} & \text{pour } x \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

Cette multifonction est B-s.c.i en tout $x_0 \neq 0$, car pour tout voisinage V de $y_0 = -1$ (resp $y_0 = 1$) on a

$$F(x) \cap V \neq \emptyset$$

pour tout x.

Mais F n'est pas B-s.c.i en 0, En effet, pour $y_0 = 0 \in F(0)$ et $V :=] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ on a pour tout $U \in V(0)$ il existe

$$x \in U : F(x) \cap V = \emptyset$$

D'autre part, on a F est B-s.c.s. en tout point x_0, En effet, considérons, pour $x_0 > 0$ (resp $x_0 < 0$), un ouvert quelconque V dans $\mathbb{R}$ contenant $\{-1, 1\}$, et $U :=]x_0 - \varepsilon . x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ est tel que $x_0 - \varepsilon > 0$ (resp $x_0 + \varepsilon < 0$).

Alors $F(x) = \{-1, 1\} \subset V$ pour tout $x \in U$.

Maintenant, pour $x_0 = 0$ et un ouvert V contenant $[-1, 1]$ alors

$$F(x) \subset V$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On peut montrer sans aucune difficulté, que F est B-s.c.i (resp B-s.c.s) si pour tout ouvert (resp fermé) A dans Y, le sous-ensemble $F^{-1}(A) := \{x \in X, F(x) \cap A \neq \emptyset\}$ est un ouvert (resp fermé) dans X, voir [12].

Proposition 1.4 [*12*]
Soient X, Y des espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. Alors

1. *F est s.c.i en x_0 si est seulement si pour toute $y_0 \in F(x_0)$ et pour toute suite $(x_n)_n \subset X$ telle que $x_n \longrightarrow x_0$, il existe une suite $(y_n)_n$ convergeant vers y_0 telle que $y_n \in F(x_n)$.*
2. *Si Y est compact et F fermée alors F est B-s.c.s.*
3. *Si F est à valeurs fermées et B-s.c.s alors F est fermée.*

Théorème 1.5 [*1*]
Soient F et G deux applications multivoques de X dans Y telles que pour tout $x \in X$, $F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$. On suppose que :

1. *F est semi-continue supérieurement en $x_0 \in X$,*
2. *$F(x_0)$ est compacte,*
3. *le graphe de G est fermé. Alors l'application $F \cap G$ définie par $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$ est semi-continue supérieurement en x_0.*

Démonstration

Soit $V = V(F(x_0) \cap G(x_0))$ un voisinage ouvert de $F(x_0) \cap G(x_0)$. Nous devons trouver un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que pour tout $x \in V(x_0)$, on a

$$F(x) \cap G(x) \subset V(F(x_0) \cap G(x_0)).$$

- Si $F(x_0) \subset V(F(x_0) \cap G(x_0))$, alors il existe un voisinage $V(F(x_0))$ de $F(x_0)$ tel que

$$V(F(x_0)) \subset V(F(x_0) \cap G(x_0)).$$

Comme F est B-s.c.s., alors il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que

$$F(V(x_0)) \subset V(F(x_0)).$$

Donc
$$F(V(x_0)) \cap G(V(x_0)) \subset F(V(x_0)) \subset V(F(x_0)) \subset V(F(x_0) \cap G(x_0)).$$

- Si $F(x_0) \not\subset V(F(x_0) \cap G(x_0))$, alors nous introduisons le sous-ensemble
$$K = F(x_0) \cap (Y \setminus V),$$
qui est compact (car $F(x_0)$ est compact). Le graphe de G étant fermé, pour tout $y \in K$, on a $y \notin G(x_0)$ et donc $(x_0, y) \notin gr\, G$. Comme le graphe de G est fermé, il existe un voisinage ouvert $V_y(x_0)$ de x_0 et $V(y)$ de y tels que
$$gr\, G \cap (V_y(x_0) \times V(y)) = \emptyset.$$
Ainsi
$$\text{pour tout } x \in V_y(x_0), G(x) \cap V(y) = \emptyset. \tag{1.1}$$
K étant compact, nous pouvons le recouvrir par un nombre fini n de voisinages $V(y_i), y_i \in K, 1 \leq i \leq n$. La réunion
$$M = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V(y_i)$$
est un voisinage de K et $M \cup V$ est un voisinage de $F(x_0)$. Par la semi-continuité supérieure de F en x_0, il existe un voisinage $V_0(x_0)$ de x_0 tel que
$$\text{pour tout } x \in V_0(x_0), F(x) \subset M \cup V. \tag{1.2}$$
Notons
$$V(x_0) = V(x_0) \bigcap (\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{y_i}(x_0)).$$
Ainsi pour tout $x \in V(x_0)$, les relations (1.1) et (1.2) impliquent que
$$F(x) \subset M \cup V,$$
$$G(x) \cap M = \emptyset.$$
Donc $F(x) \cap G(x) \subset V$ pour tout $x \in V(x_0)$.

1.3.2 Semi-continuité extérieure et inférieure

Avant de rappeler ces notions, il est important de faire un rappel concernant les limites inférieures et supérieures d'une application multivoque [6, 14].

Définition 1.11
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $x_0 \in X$.

(a) On appelle limite supérieure de F en x_0, l'ensemble
$$\limsup_{x \to x_0} F(x) \triangleq \{y \in Y, \exists\, x_n \to x_0, \exists \{y_n\} : y_n \in F(x_n), y_n \to y\}.$$

(b) On appelle limite inférieure de F en x_0, l'ensemble
$$\liminf_{x \to x_0} F(x) \triangleq \{y \in Y, \forall\, x_n \to x_0, \exists \{y_n\} : y_n \in F(x_n), y_n \to y\}.$$

On peut donner des définitions équivalentes des limites topologiques avec l'aide de la fonction distance :

$$\limsup_{x\to x_0} F(x) = \{y \in Y \,|\, \liminf_{x\to x_0} d(y, F(x)) = 0\},$$

$$\liminf_{x\to x_0} F(x) = \{y \in Y \,|\, \limsup_{x\to x_0} d(y, F(x)) = 0\}.$$

La limite topologique extérieure (inférieure) est toujours fermée, où évidement l'inclusion

$$\lim_{x\to x_0} \inf F(x) \subset \lim_{x\to x_0} \sup F(x)$$

est toujours vraie.

Une application multivoque F est dite semi-continue extérieurement (s.c.e) au point $x_0 \in X$ si

$$\lim_{x\to x_0} \sup F(x) \subset F(x_0).$$

Si F est (s.c.e) à touts les points $x \in X$, alors elle est fermé.

La fermeture d'une multifonction F est équivalente à la fermeture de son graphe grF en $X \times Y$.

La multifonction F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si

$$\lim_{x\to x_0} \inf F(x) \supset F(x_0).$$

On dit que F est continue en $x_0 \in X$ si elle est (s.c.e) et (s.c.i) en ce point. On a

$$\lim_{x\to x_0} \sup F(x) = \lim_{x\to x_0} \inf F(x) = F(x_0).$$

Exemples 1.2

- ▷ *La multifonction $F(x) = g(x)$ est s.c.e (s.c.i) si et seulement si la fonction $g(x)$ est continue.*
- ▷ *La multifonction $F(x) = \{y \,|\, h(x,y) = 0\}$ est s.c.e si la fonction h est continue.*
- ▷ *La multifonction $F(x) = \{y \,|\, h(x,y) \leqslant 0\}$ est s.c.e si la fonction h est s.c.e.*
- ▷ *La la multifonction constante $F(x) = U$, où U est un ensemble fermé, est continue si U est (s.c.e) et (s.c.i).*

1.4 Propriétés de type lipschitz des applications multivoques

Avant de présenter les différentes propriétés lipschitziennes associées aux applications multivoques, nous allons rappeler quelques définitions utiles pour la suite.

La distance d'un point x à un ensemble A est la quantité

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|.$$

Par convention, $d(x, \phi) = +\infty$.
Si au contraire, A est non vide, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $y \in A$ tel que

$$\|x - y\| \leq d(x, A) + \varepsilon.$$

Définition 1.12
Soit (X, d) un espace métrique. Une application $F : X \to X$ est dit lipschitzienne s'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$d(F(x), F(y)) \leq c\, d(x, y) \tag{1.3}$$

pour tous $x, y \in X$. La plus petite constante c qui satisfait l'inégalité (1.3) est appelée constante de lipschitz de F, noté Lip(F).

1.4.1 Distance de Hausdorff

Définition 1.13
Soient A, B deux parties d'un espace métrique (X, d).
On définit l'excès de A sur B et on note $e(A, B)$ par

$$e(A, B) := \begin{cases} \sup\limits_{x \in A} d(x, B) = \sup\limits_{x \in A} \inf\limits_{y \in B} d(x, y) & \text{si } B \neq \emptyset \text{ et } A \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } B = \emptyset \text{ et } A = \emptyset \\ +\infty & \text{si } B = \emptyset \text{ et } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } B \neq \emptyset \text{ et } A = \emptyset. \end{cases}$$

Notons qu'en générale

$$e(A, B) \neq e(B, A).$$

Définition 1.14 ***(Distance de Hausdorff)****.*
Soit A et B deux sous-ensembles fermés et non vides de X. La distance de Hausdorff (ou distance de Pompieu-Hausdorff) entre A et B est définie par

$$d_H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Exemple 1.6
Dans $\mathbb{R}$, considérons $A = [0, 1]$ et $B =]2, 4[$.
Un calcul élémentaire donne que $e(A, B) = 2$, $e(B, A) = 3$ et donc $d_H(A, B) = 3$.
$e(\mathbb{R}^+, A) = +\infty$, *$e(A, \mathbb{R}^+) = 0$ donc $d_H(\mathbb{R}^+, A) = +\infty$.*

Notons que l'excès n'est pas symétrique et si $e(A, B) = 0$, ceci n'implique pas que $A = B$ donc l'excès ne peut pas définir une distance.

Propriétés
Soient A, B, C et D des parties non vides d'un espace métrique (X, d).

1. Si A, B sont bornées alors $d_H(A, B) \in \mathbb{R}$,
2. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ et $e(A, B) = e(\bar{A}, \bar{B})$,
3. $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$,
4. Si $A \subset C$ alors $e(A, B) \leq e(C, B)$ et si $B \subset C$ alors $e(A, C) \leq e(A, B)$.
   Lorsque X est un espace vectoriel normé et soit $\lambda \in [0, 1]$, on a
5. Si C est convexe alors $e(\lambda A + (1 - \lambda)B, C) \leq \lambda e(A, C) + (1 - \lambda)e(B, C)$,
6. $e(A + C, B + D) \leq e(A, B) + e(C, D)$,
7. $e(A, \lambda B + (1 - \lambda)C) \leq \lambda e(A, B) + (1 - \lambda)e(A, C)$.

Démonstration

On va montrer quelques propriétés.

2. $e(A, B) = 0$ si et seulement si $\bar{A} \subset \bar{B}$ et $e(A, B) = e(\bar{A}, \bar{B})$.

On a $d(x, B) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{B}$ donc on montre sans aucune difficulté le premier résultat c'est-à-dire

$$e(A, B) = 0.$$

Maintenant, comme $\sup_A = \sup_{\bar{A}}$ (resp. $\inf_B = \inf_{\bar{B}}$), on conclut que

$$e(A, B) = e(\bar{A}, \bar{B}).$$

3. $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$

On va montrer la relation suivant :

$$d(x, B) \leq d(x, y) + d(y, B) \text{ pour tout } x, y \in X. \tag{1.4}$$

En effet,soient $x, y \in X$, d'après l'inégalité triangulaire, il vient que

$$d(x, B) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ pour tout } z \in B$$

$$d(x, B) \leq d(x, y) + \inf_{z \in B} d(y, B).$$

En prenant la borne inférieure sur les y dans C (pour x quelconque), il vient

$$d(x, B) \leq d(x, y) + e(C, B)$$

et en prenant la borne supérieure sur les x dans A donc

$$e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B).$$

5. Si C est convexe alors $e(\lambda A + (1 - \lambda)B, C) \leq \lambda e(A, C) + (1 - \lambda)e(B, C)$. X un e.v.n, C convexe dans X et $\lambda \in [0, 1]$ alors

$$\begin{aligned} d(\lambda x + (1 - \lambda)y, C) &\leq d(\lambda x + (1 - \lambda)y, z) \text{ pour tout } z \in C \\ &\leq d(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda u + (1 - \lambda)v) \text{ pour tout } u, v \in C \\ &\leq \lambda\|x - u\| + (1 - \lambda)\|y - v\| \text{ pour tout } u, v \in C \end{aligned}$$

il vient que

$$\begin{aligned} d(\lambda x+(1-\lambda)y,C) &\leq \lambda d(x,C)+(1-\lambda)d(y,C) \\ &\leq \lambda e(A,C)+(1-\lambda)e(B,C). \end{aligned}$$

1.4.2 La notion de continuité au sens de Hausdorff

Définition 1.15 *[6]*
Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction.

1. *F est semi-continue inférieurement au sens de Hausdorff, qu'on note H-s.c.i en $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B \text{ pour tout } x \in x_0 + \delta B,$$

2. *F est semi-continue supérieurement au sens de Hausdorff qu'on note H-s.c.s en $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B \text{ pour tout } x \in x_0 + \delta B,$$

3. *F est dit continue au sens de Hausdorff en $x_0 \in X$ si elle est H-s.c.i et H-s.c.s en x_0.*

Proposition 1.5 *[2]*
Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction.
F est dit lipschitz en x_0 s'il existe une constante $\kappa > 0$ est un voisinage V de x_0 tels que pour tout $x \in V$

$$e(F(x), F(x_0)) \leq \kappa\, d(x, x_0)$$

ou de façon équivalente dans des e.v.n

$$F(x) \subset F(x_0) + \kappa \|x - x_0\| B_Y$$

où B_Y est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans Y.

Remarque 1.2
Semi continuité en terme des exés.

- ▷ *Lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} e(F(x_0), F(x)) = 0$ alors F est H-s.c.i en x_0.*
- ▷ *Lorsque F est H-s.c.s en x_0 alors $\lim\limits_{x \to x_0} e(F(x), F(x_0)) = 0$.*
- ▷ *La réciproque est vraie si $F(x_0)$ est compacte.*
- ▷ *F est continue au sens de Hausdorff si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} d_H(F(x), F(x_0)) = 0$.*

Exemple 1.7
La multifonction $F : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} [0, \frac{1}{x}] & si\ x > 0 \\ \{0\} & si\ x = 0 \end{cases}$$

est H-s.c.i en 0 mais elle n'est pas H-s.c.s.

En effet, on a

$$e(F(0), F(x)) = d(0, [0, \frac{1}{x}]) = 0 \ et\ e(F(x), F(0)) = \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty.$$

Exemple 1.8

Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \left\{\dfrac{x}{|x|}\right\} & si\ x \neq 0 \\ [-1, 1] & si\ x = 0. \end{cases}$$

Cette multifonction est H-s.c.i (resp. H-s.c.s) en tout $x_0 = 0$.

En effet, si $x_0 > 0$ alors pour tout x voisin de x_0 on a $F(x) = F(x_0) = \{1\}$. D'où $e(F(x_0), F(x)) = e(F(x), F(x_0)) = 0$.

De même, si $x_0 < 0$ on a $F(x) = F(x_0) = \{-1\}$ pour x proche de x_0. Donc F est continue en $x_0 \neq 0$. Ici F est H-s.c.s en 0 mais elle n'est pas H-s.c.i.

En effet, comme $F(x) \subset F(0)$ alors $e(F(x), F(0)) \to 0$ quand $x_0 \to 0$. Mais pour $y_0 = 0 \in F(0), d(0, F(x)) = 1$ pour tout $x \neq 0$ donc $e(F(0), F(x)) \nrightarrow 0$ quand $x \to 0$.

Exemple 1.9

La multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) := [x^2, 2x^2]$ est continue au sens de Hausdorff sur $\mathbb{R}$.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ alors pour $y \in F(x) := [x^2, 2x^2]$ i.e, $y = x^2u_0$ avec $u_0 \in [1, 2]$, on a

$$d(y, F(x_0)) \leq |y - y_0|, \ pour\ tout\ y_0 \in F(x_0) = x_0^2[1, 2].$$

En particulier, pour $y_0 := x^2u_0, d(y, F(x_0)) \leq |x^2 - x_0^2|u_0$. Passant à la borne supérieur de $F(x)$, on obtient

$$e(F(x), F(x_0)) \leq 2|x^2 - x_0^2| \to 0 \ quand\ x \to x_0.$$

De même façon, on montre que $e(F(x_0), F(x)) \to 0$ quand $x \to x_0$ d'où la continuité au sens de Hausdorff en x_0.

De plus, pour $x \in V :=]x_0 - 1, x_0 + 1[$ de x_0, on a

$$\begin{aligned} e(F(x), F(x_0)) &\leq 2|x^2 - x_0^2| \\ &\leq 2|x + x_0||x - x_0| \\ &\leq 2(1 + 2|x_0|)|x - x_0| \ pour\ tout\ x \in V. \end{aligned}$$

Ainsi F est lipschitzienne en x_0 avec $\kappa = 2(1 + |x_0|)$.

Notons $SC(Y)$ et $SCC(Y)$, respectivement, la famille de tous les sous-ensembles compacts non vides et la famille de tous les sous-ensembles compacts convexes non vides de l'espace Y.

Une multifonction F est dite uniformément bornée au point $x_0 \in X$ s'il existe un ensemble compact $Y_0 \subset Y$ et un voisinage X_0 de x_0 tel que $F(X_0) \subset Y_0$ ·

1.4.3 La relation entre la continuité au sens de Hausdorff et la continuité au sens de Berge

Soit X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On a déjà vu la semi-continuité au sens de **Berge** : B et au sens de **Hausdorff** : H.

Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par $B(x, \varepsilon)$ la boule de centre x et de rayon ε, c'est l'ensemble défini par

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Définition 1.16
On dit que F est fortement s.c.i en $x_0 \in X$, si pour tout $y \in F(x_0)$ il existe un voisinage V de y et un voisinage U de x_0 tel que

$$V \subset F(x) \text{ pour tout } x \in U.$$

On a F est continue en x_0 si elle est H-s.c.s. et B-s.c.i. en x_0.
Les relations suivantes sont des conséquences immédiates des définitions ci-dessus.
B-s.c.s. $\Rightarrow$ H-s.c.s.,
H-s.c.i. $\Rightarrow$ B-s.c.i.,
Fortement s.c.i $\Rightarrow$ B-s.c.i.
Démonstration

- ▷ B-s.c.s. $\Rightarrow$ H-s.c.s.
  Soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\Omega = F(x_0) + \varepsilon B_Y$ est un ouvert contenant $F(x_0)$. Comme F est B-s.c.s en x_0, alors il existe un ouvert U contenant x_0 :

$$\Omega \supset F(x) \text{ pour tout } x \in U$$

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B_Y \text{ pour tout } x \in X$$

  donc F est H-s.c.s.
- ▷ H-s.c.i. $\Rightarrow$ B-s.c.i.
  Ω un ouvert tel que $\Omega \cap F(x_0) \neq \emptyset$, il existe un ouvert U contenant x_0 tel que

$$F(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ pour tout } x \in U.$$

  $\Omega \cap F(x_0) \neq \emptyset$ c'est-à-dire il existe $y_0 \in \Omega \cap F(x_0)$ si et seulement si $y_0 \in \Omega$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y_0, \varepsilon) \subset \Omega$ et $y_0 \in F(x_0)$ donc pour tout $\varepsilon > 0$ il $\delta > 0$:

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B_Y.$$

- ▷ Fortement s.c.i en $x_0 \Rightarrow$ B-s.c.i. en x_0.
  On a Ω un ouvert tel que $\Omega \cap F(x_0) \neq \emptyset$, il faut montrer qu'il existe U ouvert contenant x_0 tel que $F(x) \cap \Omega \neq \emptyset$ pour tout $x \in U$.
  On a $\Omega \cap F(x_0) \neq \emptyset$ s'il existe $y_0 \in \Omega \cap F(x_0)$ si et seulement si $y_0 \in \Omega$ et $y_0 \in F(x_0)$. Comme F est fortement s.c.i. c'est-à-dire il existe un ouvert V contenant y_0 et il existe ouvert contenant x_0 tel que $V \subset F(x)$ pour tout $x \in U$ alors

$$y_0 \in \Omega \cap V \subset \Omega \cap F(x) \text{ pour tout } x \in U$$

  or $y_0 \in F(x) \cap \Omega$ donc $F(x) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Propriétés élémentaires

Proposition 1.6
Si l'application F est H-s.c.s. en x_0 et si l'ensemble $F(x_0)$ et fermée alors F est fermée en x_0.

Démonstration

On a F est H-s.c.s. en x_0 et si l'ensemble $F(x_0)$ et fermée en x_0, on suppose que F n'est pas fermée en x_0 alors il existe $x_n \to x_0$ et $y_n \in F(x_n)$ tel que $y_n \to y_0$ alors $y_0 \notin F(x_0)$. On commence à montrer qu'il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que

$$B(y_0, \bar{\varepsilon}) \cap F(x_0) + \bar{\varepsilon}B = \emptyset.$$

Comme F est H.s.c.s. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B \text{ pour tout } x \in B(x_0, \delta),$$

il existe N pour tout $n \geq N$ on a $x_n \in B(x_0, \delta)$.

En particulier pour $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, il existe $\bar{\delta} > 0$ on a

$$F(x) \subset F(x_0) + \bar{\varepsilon}B \text{ pour tout } x \in B(x_0, \bar{\delta})$$

et il existe N, pour tout $n \geq N$ on a

$$y_n \in F(x_n) \subset F(x_0) + \bar{\varepsilon}B \text{ pour tout } x_n \in B(x_0, \bar{\delta})$$
$$y_n \in (F(x_0) + \bar{\varepsilon}B) \cap B(y_0, \bar{\varepsilon}) \neq \emptyset$$

donc $y_n \to y_0, y_n \in B(y_0, \bar{\varepsilon})$ a partir d'un certain rang.

On obtient une contradiction, ce que implique que F est fermée en x_0.

Proposition 1.7 *[4](Lemme 2.2.2)*
Soit x_0 un point de X tel que l'ensemble $F(x_0)$ est fermée, F est B-s.c.s. en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$, $x_n \to x_0$ et $(y_n) \subset Y$, $y_n \in F(x_n) \setminus F(x_0)$ la suite (y_n) a un point d'accumulation appartenant à $F(x_0)$.

Démonstration

Supposons que F est B-s.c.s. en x_0, et on suppose qu'il n'existe aucun point d'accumulation de la suite (y_n) alors l'ensemble A de tous les points y_n est fermé et (pour $\Omega = Y \setminus A$) tel que Ω est ouvert et $\Omega \subset F(x_0)$ on a

$$y_n \in F(x_n) \setminus \Omega \text{ pour tout } n, x_n \to x_0$$

c'est-à-dire $y_n \notin \Omega$

En suit F est B-s.c.s. en x_0 alors il existe $\delta > 0 : \Omega \supset F(x)$ pour tout $x \in B(x_0, \delta)$

pour $x_n \to x_0, x_n B(x_0, \delta)$ puis $y_n \in F(x_n) \subset \Omega$ contradiction et comme F est fermée alors il existe une sous suite

$$y_{n_k} \to y_0 \text{ et } x_{n_k} \to x_0, y_{n_k} \in F(x_{n_k}), y_{n_k} \to y_0 \text{ donc } y_0 \in F(x_0).$$

On conclut que (y_n) admet un point d'accumulation en x_0.

Lemme 1

1. *F est B-s.c.s. en x_0 si F est fermée en x_0 et Y est compact.*
2. *F est B-s.c.s. en x_0 si F est H-s.c.s. en x_0 et $F(x_0)$ est compact.*
3. *F est H-s.c.i. en x_0 si F est B-s.c.i. en x_0 et cl $F(x_0)$ est compact.*

Démonstration

1. On a F est fermée en x_0 et Y est compact alors F est B-s.c.s. en x_0.

On suppose que F n'est pas B-s.c.s alors il existe un ouvert G contenant $F(x_0)$ et il existe un suite $(x_n), x_n \to x_0$ pour tout n tel que $F(x_n) \not\subset G$, alors il existe $y_n \in F(x_n)$ tel que $y_n \notin G$ alors $y_0 \notin G$ donc pour toute suite $(x_n), x_n \to x_0, y_n \in F(x_n) \setminus F(x_0)$. D'autre part on a la suite $(y_n) \subset Y$, et comme Y est compact alors il existe un sous suite y_{n_k} converge vers y_0 tel que $y_0 \in Y$, alors pour toute sous suite $x_{n_k} \to x_0, y_{n_k} \in F(x_{n_k})$ et comme F est fermée alors $y_{n_k} \to y_0$ donc $y_0 \in F(x_0)$.

Alors on a un contradiction donc $F(x_n) \subset G$.

Lemme 2 *[4](Lemme 2.2.4)*

Soit I un ensemble d'indice arbitraire et soit $F_i : X \rightrightarrows Y$, $i \in I$, des multifonctions qui sont fermés à x_0. La multifonction définie par

$$(\bigcap F_i)x = \bigcap_{i\in I} F_i x, i \in I$$

est fermé en x_0.

Lemme 3

Soient les multifonctions $F_1 : X \rightrightarrows Y$ et $F_2 : X \rightrightarrows Y$, B-s.c.i. en x_0 et fortement s.c.i en x_0 respectivement. On a

$$(F_1 \cap F_2)x = F_1 x \cap F_2 x$$

et

$$cl\,(F_1 \cap F_2)x = cl\,(F_1 x \cap F_2 x)$$

sont alors B-s.c.i. en x_0.

Démonstration

Soit Ω un ensemble ouvert satisfaisant $\Omega \cap F(x_0) \neq \emptyset$ et soit y un point contenu dans cette intersection. Par définition de F il existe $y_n \in F_1 x_0 \cap F_2 x_0$ avec $d(x, y_n) < \varepsilon, \varepsilon > 0$. On a $y_n \in \Omega$. Comme F_2 est fortement s.c.i. en x_0 il existe un voisinage ouvert Ω_n de y_n contenu entièrement dans Ω tel que

$$\Omega_n \subset F_2(x) \text{ pour tout } x \in U(x_0).$$

Puisque F_1 est B-s.c.i. en x_0, on a $F_1 x \cap \Omega_n \neq \emptyset$ pour tout $x \in U(x_0)$, donc

$$\emptyset \neq F_1 x \cap F_2 x \cap \Omega_n \subset (F_1 \cap F_2)x \cap \Omega \text{ pour tout } x \in U(x_0).$$

Une simple conséquence du dernier lemme est donnée par

Corollaire 1.1 *Soient F_1, F_2 et F_3 les multifonctions de X en Y avec les propriétés*

1. *F_1 est B-s.c.i. en x_0,*
2. *F_2 est fortement s.c.i en x_0,*
3. *$F_2(x) \subset F_3(x)$ pour tout $x \in X$.*

$F_1 \cap F_3$ est alors B-s.c.i en x_0 si $F_1x_0 \cap F_3x_0 \subset cl\,(F_1x_0 \cap F_2x_0)$ est B-s.c.i.

Lemme 4
Soit la multifonction $F : X \to SC(Y)$ uniformément borné au point x_0. Alors F est continue au sens de Hausdorff (H-s.c.s, H-s.c.i) au point x_0 si et seulement s'il est continue (H-s.c.s., H-s.c.i.) à ce point..

Démonstration
Soit F est H-s.c.s. en x_0. On va montrer que F est H-s.c.s en x_0. Supposons le contraire, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n = 1, 2, \cdots$ il y a des points x_n, y_n satisfaisant les conditions

$$|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}, y_n \in F(x_n), y_n \notin F(x_0) + \varepsilon_0 B. \tag{1.5}$$

Comme F est uniformément bornée en x_0, nous pouvons supposer que la suite y_n est bornée et par conséquent, a une sous-suite convergente.

Nous supposons $y_n \to y_0$, puis par la semi-continuité supérieure de F il s'ensuit que $y_0 \to F(x_0)$.

D'autre part, d'après (1.5) on montre que $y_0 \in Y \setminus F(x_0) + \varepsilon_0 B$, et donc $y_0 \notin F(x_0)$, on obtient la contradiction. La réciproque et rester vrai.

Soit F est s.c.i. en x_0. Supposons que F n'est pas H-s.c.i en x_0. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, $x_n \to x_0$ et $y_0 \in F(x_0)$ tel que $y_0 \notin F(x_n) + \varepsilon_0 B$, pour $n = 1, 2, \cdots$, i.e. $|y_n - y_0| \geq \varepsilon_0$ pour tout $y_n \in F(x_n)$, $n = 1, 2, \cdots$. Ce dernier signifie qu'il n'existe pas une suite y_n telle que $y_n \in F(x_n), n = 1, 2, \cdots, y_n \to y_0$. Par conséquent, F n'est pas H-s.c.i en x_0. La contradiction prouve que F est H.s.c.i. en x_0.

1.5 Différentiabilité de multifonctions

La différentiabilité de multifonctions fait l'objet de plusieurs travaux, par exemple, les travaux de Banks- Jacobs, Gautier, Azé-Chou, Aubin-Frankowska, Mordukhovich, levy-Rock afellar.

Déverses notions de différentiabilité de multifonctions ont été donc introduites à des résultats variés et complémentaires en analyse multivoque, notamment, des résultats concernant l'inversion des multifonctions, le théorème des multifonctions implicites et la régularité métrique.

Définition 1.17
Soit U un ouvert non vide dans X et $F : U \rightrightarrows Y$ une multifonction définie sur U. On dira que F est différentiable en $x_0 \in U$ si F est s.c.i en x_0 et s'il existe un opérateur linéaire continu $A : X \to Y$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B(0, \delta_\varepsilon) : F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon \|x\| \bar{B_Y} \tag{1.6}$$

i.e.

$$e(F(x_0 + x), F(x_0) + A(x)) \leq \varepsilon \|x\|$$

et on note $DF(x_0) := A$ sa dérivée en x_0.

Exemple 1.10
La multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) := [a - x^2, b + x^2]\,(a \leq b)$ est différentiable en $x_0 = 0$ avec $DF(x_0) := 0$.

En effet, il est clair que F est s.c.i en 0 car $F(0) = [a, b] \subset F(x)$ pour tout x.

D'autre part, comme $F(x) := F(0) + x^2[-1, 1]$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ tel que $|x| \leq \varepsilon$ on a

$$F(x) \subset F(0) + \varepsilon |x| \bar{B_{\mathbb{R}}}.$$

D'où la différentiabilité de F en 0 avec $DF(0) = 0$.

Exemple 1.11
Considérons $g : X \to Y$ une fonction différentiable en x et $r : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction différentiable en x_0 telle que $Dr(x_0) = 0$. Alors la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ définie par $F(x) := g(x) + r(x)\bar{B_Y}$ est différentiable en x_0 et $DF(x_0) = Dg(x_0)$.

En effet, il est facile de vérifier que F est s.c.i en x_0, prenons $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour x vérifié $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$, on a

$$g(x + x_0) \in g(x_0) + Dg(x_0)(x) + \frac{\varepsilon}{2} \|x\| \bar{B_Y}$$

$$r(x + x_0) \in r(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \|x\| \bar{B_{\mathbb{R}}}.$$

Ainsi pour $y := g(x + x_0) + r(x + x_0)b \in F(x + x_0)$ où b est quelconque dans $\bar{B_Y}$, il existe $y' := g(x_0) + r(x_0)b \in F(x_0)$ et on a

$$\begin{aligned} \|y - y' - Dg(x_0)(x)\| &\leq \|g(x + x_0) - g(x_0) - Dg(x_0)(x)\| + \|r(x + x_0) - r(x_0)\| \|b\| \\ &\leq \varepsilon \|x\|. \end{aligned}$$

D'où F est différentiable en x_0 et $DF(x_0) = Dg(x_0)$.

On remarque qu'une multifonction différentiable $F : X \rightrightarrows Y$ en un point x_0 peut admettre plusieurs dérivées en ce point. En effet,

Exemple 1.12

Soit Y_0 e.v.n de Y tel que $Y_0 \neq \{0\}$, la multifonction "constante" $F : X \rightrightarrows Y$ telle que $F(x) := Y_0$ est différentiable en $x_0 \in X$ et tout opérateur linéaire continu $A : X \to Y_0$ est une dérivée de F en (x_0) i.e. $DF(x_0) = A$. En effet, c'est clair que F est s.c.i en x_0. Considérons, maintenant, $A \in \mathcal{L}(X, Y_0)$. Alors comme pour tout $x \in X, A(x) \in Y_0$ et du fait que Y_0 est un s.e.v on a

$$F(x_0 + x) = F(x_0) + A(x) = Y_0.$$

Propriété 1

Si $F, G : X \rightrightarrows Y$ et $H : X \rightrightarrows Z$ sont des multifonctions différentiables en $x_0 \in X$. Alors :

(1) *La multifonction $S := F + G : X \rightrightarrows Y$ est différentiable en x_0 avec*

$$DS(x_0) = DF(x_0) + DG(x_0).$$

(2) *La multifonction $P := (F.G) : X \rightrightarrows Y \times Z$ est différentiable en x_0 avec*

$$DP(x_0) = (DF(x_0).DH(x_0)).$$

Démonstration

On va montrer la première propriété. On sait déjà que la somme de deux multifonctions est s.c.i. Comme F (resp. G) est différentiable en x_0, il existe un opérateur linéaire continu $DF(x_0) := A\,(resp.\, DG(x_0) := B)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha, \beta > 0$ de sorte que :

$$F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\bar{B_Y} \text{ pour tout } x \in B(0, \alpha).$$

$$G(x_0 + x) \subset G(x_0) + B(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\bar{B_Y} \text{ pour tout } x \in B(0, \beta).$$

Ainsi pour $x \in B(0, \delta)$ où $\delta = \min(\alpha, \beta)$, il vient que

$$\begin{aligned} S(x_0 + x) &= F(x_0 + x) + G(x_0 + x) \\ &\subset F(x_0) + A(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\bar{B_Y} + G(x_0) + B(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\bar{B_Y} \\ &\subset S(x_0) + (A + B)(x) + \varepsilon\|x\|\bar{B_Y}. \end{aligned}$$

D'où (1). De même façon, on montre la propriété (2).

La différentiabilité de la composée n'est pas toujours assurée, on doit imposer une condition supplémentaire. En effet, on a

Proposition 1.8

Si $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : Y \rightrightarrows Z$ sont différentiables en $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ respectivement et si $F(x_0) = \{y_0\}$ alors $G \circ F$ est différentiable en x_0.

Démonstration

On sait que $G \circ F$ est s.c.i en x_0. Les multifonctions F, G étant différentiables en x_0 et y_0 respectivement, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que :

$$F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\bar{B_Y} \text{ pour tout } B(0, \delta_1)$$

et

$$G(x_0 + x) \subset G(x_0) + B(x) + \varepsilon\|y\|\bar{B_Z} \text{ pour tout } B(0, \delta_2) \tag{1.7}$$

où $A := DF(x_0)$ et $B := DG(x_0)$.

Considérons $z \in (G \circ F)(x_0 + x)$ pour $x \in B(0, \delta)$ où $\delta := min(\delta_1, \frac{\delta_2}{\|A\|+\varepsilon})$, il existe donc $y \in F(x_0 + x)$ tel que : $z \in G(y)$. Comme $F(x_0) = \{y_0\}$ et

$$\begin{aligned} y &\in F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\bar{B_Y} \\ y &\in y_0 + A(x) + \varepsilon\|x\|\bar{B_Y} \end{aligned}$$

il existe alors $u \in \bar{B_Y}$ tel que :

$$y = y_0 + A(x) + \varepsilon\|x\|u.$$

Ainsi $z \in G(y_0 + A(x) + \varepsilon\|x\|u)$ avec :

$$\|A(x) + \varepsilon\|x\|u\| \leq (\|A(x)\| + \varepsilon)\|x\| \leq \delta_2$$

car $\|u\| = 1$ et $\|x\| \leq \frac{\delta_2}{\|x\|+\varepsilon}$. Appliquons alors l'inclusion (1.7), il existe $z_0 \in G(y_0) = G \circ F(x_0)$ tel que :

$$\begin{aligned} \|z - z_0 - B(A(x) + \varepsilon\|x\|u)\| &\leq \varepsilon\|A(x) + \varepsilon\|x\|u\| \\ &\leq \varepsilon(\|A\| + \varepsilon)\|x\|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|z - z_0 - B \circ A(x)\| &\leq \|z - z_0 - B(A(x) + \varepsilon\|x\|u)\| + \|B(\varepsilon\|x\|u)\| \\ &\leq \varepsilon(\|A\| + \|B\| + \varepsilon)\|x\| \end{aligned}$$

ε étant quelconque, on conclut que $G \circ F$ est différentiable en x_0 et $D(G \circ F)(x_0) = B \circ A$.

Définition 1.18
On appelle sélection d'une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$, toute fonction $f : domF \to Y$ vérifiant :

$$f(x) \in F(x) \text{ pour tout } x \in domF.$$

Remarque 1.3

Toute multifonction semi-continue inférieurement en $(x_0, y_0) \in grF$ admet une sélection continue en x_0.

Lemme 5
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction définie sur X tel que $F(x_0) = \{y_0\}$ et $A : X \rightrightarrows Y$ un opérateur linéaire continu. On suppose que F est s.c.i en (x_0, y_0) alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *F est différentiable en x_0 avec $DF(x_0) = A$.*
2. *Toute sélection f de F est différentiable en x_0 avec $Df(x_0) = A$.*

Démonstration

Supposons que F est différentiable en x_0 avec $DF(x_0) = A$. Considérons une sélection f de F, $\varepsilon > 0$. Comme $f(x_0 + x) \in F(x_0 = x)$, il va exister $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(0, \delta)$, on a

$$\begin{aligned} f(x_0 + x) &\in F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\bar{B_Y} \\ f(x_0 + x) &\in y_0 + A(x) + \varepsilon\|x\|\bar{B_Y} \end{aligned}$$

car $F(x_0) = \{y_0\}$. Or $f(x_0) \in F(x_0)$ donc $y_0 = f(x_0)$ et il vient que

$$f(x_0 + x) \in f(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\bar{B_Y}.$$

Ce qui prouve que f est différentiable en x_0 avec $Df(x_0) = A$.

Réciproquement, supposons que toute sélection f de F est différentiable en x_0 avec $Df(x_0) = A$ et supposons que F n'est pas différentiable en x_0 avec $DF(x_0) = A$. Il existe alors $\alpha > 0$ et une suite $(x_0) \to 0$ telle que pour tout entier n :

$$F(x_0 + x_n) \subsetneqq F(x_0) + A(x_n) + \alpha\|x_n\|\bar{B_Y}.$$

Il existe donc une suite (y_n) vérifiant $y_n \in F(x_0 + x_n)$ et $y_n \notin y_0 + A(x_n) + \alpha\|x_n\|\bar{B_Y}$.

Maintenant, comme F est s.c.i en (x_0, y_0), il existe alors une sélection $g : X \to Y$ continue en x_0 de F. Définissons une fonction $f : X \to Y$ en posant :

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \in X \setminus \{x_0 + x_n : n \in \mathbb{N}\} \\ y_n & \text{pour } x = x_0 + x_n. \end{cases}$$

Alors f est une sélection de F non différentiable en x_0 avec la dérivée A. En effet, il est clair que $f(x) \in F(x)$ pour tout $x \in X$ donc c'est bien une sélection. De plus, comme $f(x_0) = g(x_0) \in F(x_0) = \{y_0\}$ donc

$$f(x_0 + x_n) = y_n \notin f(x_0) + A(x_n) + \alpha\|x_n\|\bar{B_Y}$$

d'où f n'est pas différentiable.

Remarque 1.4

Lorsque $F(x_0) = \{y_0\}$ et F est différentiable en x_0 alors la dérivée $DF(x_0)$ est unique. En effet, supposons qu'il existe deux opérateurs linéaires continus $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ tels que (1.6) soit satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$ ainsi pour tout $y \in F(x_0 + x)$ avec x proche de 0, on a les deux inégalités suivantes :

$$\|y - y_0 - A(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\|$$

$$\|y - y_0 - B(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\|.$$

On conclut que pour tout x au voisinage de 0, $\|(A-B)(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ i.e.$\|A-B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon$.

D'où le résultat en faisant tendre ε vers 0^+.

1.6 Propriétés de multifonctions convexes

L'importance de la convexité en théorie mathématique est bien connue. Ce concept joue un rôle central dans la formulation de nombreux résultats très forts en analyse. Parmi ces résultats on peut citer les théorèmes de séparation et de projection, sans oublier son rôle en optimisation. Dans le cadre multivoque, de nombreuses notions de convexité existent dans la littérature.

Définition 1.19
La multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est convexe, si son graphe grF est convexe. On dit que F est à valeurs convexes si $F(x)$ est convexe pour tout $x \in X$.

On remarque que si F est convexe alors elle est à valeurs convexes. En effet, soit $x \in X$, considérons deux éléments y_1 et y_2 de $F(x)$ et $\lambda \in]0,1[$, montrons que $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in F(x)$.

On a $(x, y_1), (x, y_2) \in grF$ qui est convexe, donc $\lambda(x, y_1) + (1-\lambda)(x, y_2) \in grF$, ce qui donne $(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in grF$.

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple 1.13

$$F(x) = \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} : -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}\} & si\ x > 0, \\ \{y \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \leq y \leq -\frac{1}{x}\} & si\ x < 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et pour $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ on a $(1,1), (3, \frac{1}{3}) \in grF$ donc $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = (2, \frac{2}{3})$.

D'autre part $F(2) = \{y : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ on a $\frac{2}{3} \notin F(2)$ car $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ donc $(2, \frac{2}{3}) \notin grF$.

Lemme 6
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *F est une multifonction convexe.*
2. *L'inclusion :*

$$F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \supset \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) \tag{1.8}$$

pour tous $x_1, x_2 \in X$ et $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Démonstration

Soit $y \in \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2)$ il existe $y_1 \in F(x_1)$ et $y_2 \in F(x_2)$ tel que $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, comme (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dans grF alors

$\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \in grF$ donc $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \in grF$

par conséquent $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \in F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, alors $y \in F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$.

D'autre part $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in grF$, et $\lambda \in]0, 1[$, il faut montrer que $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \in grF$.

On a $y_1 \in F(x_1)$ et $y_2 \in F(x_2)$ si $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \in \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) \subset F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, donc $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \in grF$ alors $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \in grF$.

D'où grF est convexe.

Exemple 1.14

- ▷ $F(x) := \{y \in \mathbb{R}^m : g_i(x, y) \leq 0, i = 1, \cdots, m\}$, *l'ensemble des contrainte d'un problème d'optimisation.*
  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m : g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *pour* $i = 1, \cdots, m$.
  Si pour tout i, $g_i(x, .)$ *est quasi convexe pour chaque* x *fixé dans* $\mathbb{R}^n$ *alors* F *est à valeurs convexes.*
  Si pour tout $i = 1, \cdots, m$ *les fonctions* $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *soit convexes alors* F *est convexe.*
- ▷ $g(x, y) = xy, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y n'est pas convexe mais pour* x *fixé,* $g(x, .)$ *est linéaire.*

1.6.1 Processus convexe

Définition 1.20
Soit X ,Y *deux espaces vectoriels et soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multifonction.*
On dit que F *est un processus si son graphe est un cône i.e.* grF *satisfait la propriété suivante :*

$$\lambda grF \subset grF \text{ pour tout } \lambda \geqslant 0$$

si de plus, grF *est convexe (resp.s.e.v) on dit que* F *est un processus convexe (resp. linéaire).*

Définition 1.21
Soient X *et* Y *deux espaces vectoriels topologiques et soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multifonction.*
On dit que F *est un processus convexe fermé si son graphe* grF *est un cône convexe fermé.*

Propriété 2 *Tout processus est caractérisé par la propriété suivante :*

$$\text{pour tout } x \in X \text{ et } \lambda > 0 : \lambda F(x) = F(\lambda x) \text{ et } 0 \in F(0).$$

Démonstration

Soient $x \in X$, $\lambda > 0$ et prenons $y \in \lambda F(x)$. D'où

$$\lambda^{-1} y \in F(x)$$

ainsi

$$\lambda^{-1}(\lambda x, y) = (x, \lambda^{-1} y) \in grF$$

ou encore

$$(\lambda x, y) \in \lambda grF \subset grF$$

car F est une processus. On a alors

$$y \in F(\lambda x).$$

Maintenant $y \in F(\lambda x) i.e. (\lambda x, y) \in grF$
on a

$$(x, \lambda^{-1} y) \in \lambda^{-1} grF \subset grF.$$

d'où

$$(\lambda^{-1} y) \in F(x) i.e. y \in \lambda F(x).$$

Remarque 1.5

Le domaine et l'image d'un processus convexe sont des cônes convexes.

En effet, soit $F : X \rightrightarrows Y$ un processus convexe. On sait que dom F (resp. ImF) et convexe.

Considérons $x \in domF$ i.e. $F(x) \neq \emptyset$. Donc $\lambda F(x) \neq \emptyset$ pour tout scalaire λ. comme F est un processus convexe, $\lambda F(x) = F(\lambda x)$ pour tout $\lambda > 0$ avec $0 \in F(0)$. D'où $domF$ est un cône.

De même manière, on montre que ImF est un cône.

Lemme 7 *Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est un processus convexe si et seulement si F est un processus vérifiant :*

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in X, F(x_1) + F(x_2) \subset F(x_1 + x_2)$$

Proposition 1.9 *Soient X, Y, Z des espace espace vectoriel F, $G : X \rightrightarrows Y$ et $H : Y \rightrightarrows Z$ des processus convexe fermée. Alors :*

1. *Les multifonctions $F^{-1}, \lambda F(\lambda \in \mathbb{R}), F \cap G, F \cup G$ et $(F.G)$ sont des processus convexe fermées.*
2. *Les multifonctions F et G, HoF sont des processus convexes.*

Démonstration

F est un processus c-à-dire pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\lambda grF \subset grF$.

Soit $\beta(\lambda grF) \subset \lambda grF$ on a $\lambda\beta grF \subset \lambda grF$ pour tout $\beta > 0$ donc grF est un cône.

Par suit on a $\lambda F : x \to \lambda F(x)$, pour tout suit $(x_n, y_n) \in gr\lambda F$ converge vers (x, y) alors $(x_n, \frac{y_n}{\lambda}) \in grF$ or $(x, \frac{y}{\lambda}) \in grF$ donc $\frac{y}{\lambda} \in grF$ alors $y \in \lambda grF$ d'où $(x, y) \in gr(\lambda F)$.

Donc $\lambda F(\lambda \in \mathbb{R})$ est un processus convexe.

Chapitre 2

Problèmes d'optimisation paramétrés

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéressera à quelques résultats de l'optimisation paramétrique qui seront d'une grande utilité pour aborder les problèmes de la programmation mathématique bi-niveaux. L'optimisation paramétrique constitue un domaine de recherche très actif [8].

La première étude dans le domaine de l'optimisation paramétrique semble être celle de A.S.Manne en 1953(voir [10]), depuis lors, au moins 400 articles individuels ont paru et le domaine est considérablement élargi, en particulier dans les cinquante dernières années [4].

L'optimisation est la recherche des valeurs x^* appartenant à un ensemble X qui minimise une fonction f définie sur X à valeurs réelles. C'est ce qu'on appelle un problème d'optimisation. On notera ce problème comme suit

$$\min_{x \in X} f(x).$$

On dit que X est l'ensemble admissible du problème et un point de X est dit point admissible. La fonction f est appelée fonction objective ou fonction -coût.

Dans le cadre multivoque on a l'optimisation multivoque n'a pas cessé de progresser depuis les années 80, nous entendons par théorie de l'optimisation multivoque, celle qui étudie les problème de type :

$$P : \begin{cases} \ Minimiser\, F(x) \\ s.c \\ \ x \in X \end{cases}$$

où F est une application multivoque appelées fonction objective à valeurs dans un espace vectoriel normé, appelé espace objectif, partiellement ordonné dans un certain sens que nous aurons à préciser plus loin et X est un sous-ensemble non vide du domaine de F appelé ensemble contrainte ou domaine de faisabilité. Résoudre ce genre de problème revient à déterminer tous les éléments $x^* \in X$ pour lesquels il existe $y^* \in F(x^*)$ tel que y^* soit un élément minimal dans un certain sens de l'ensemble $F(X)$ [14].

2.2 Définitions et notations

Étant donné une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble $X \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ; trouver un élément x^* de X tel que

$$f(x^*) \leq f(x)$$

pour tous les x dans X.

On dit que l'on cherche à minimiser la fonction sur l'ensemble X.

On peut considérons le problème (P) de différentes manières :

$$\inf_{x \in X} f(x), \text{ ou } \inf\{f(x) | x \in X\} \text{ ou } \inf f(X)$$

ou

$$(P) = \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ s.c \\ x \in X. \end{cases}$$

On dit que le problème est réalisable si X est non vide. L'ensemble des solutions optimales du problème (P) est noté $\underset{X}{\operatorname{argmin}} f$. On a alors

$$\operatorname{argmin}\{f(x) | x \in X\}$$

ou

$$\underset{X}{\operatorname{argmin}} f := \{x^* : f(x^*) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in X\}.$$

$f(X)$ est une partie de $\mathbb{R}$ et sa borne inférieure $\inf f(X)$ est appelée la valeur optimale du problème.

On dit que le problème (P) est convexe si X est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction convexe sur X. Si $\inf f(X) > -\infty$, on dit que le problème est borné.

2.3 Optimisation paramétrique

Considérons le problème d'optimisation suivant [8] :

$$(P_x) \quad \begin{cases} \underset{y}{\text{Minimiser}} \ f(x, y) \\ \text{s.c} \\ g(x, y) \leq 0, \\ h(x, y) = 0. \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p,\ h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ sont des fonctions différentiables avec

$$g = (g_1, \cdots, g_p), \quad h = (h_1, \cdots, h_q).$$

Définition 2.1 [8]
Le problème (P_x) est appelé problème d'optimisation paramétré convexe si toutes les fonctions $f(x,.), g_i(x,.), i = 1, \cdots, p$ sont convexes et les fonctions $h_j(x,.), j = 1, \cdots, q$ sont affines sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé.
De même, il sera appelé problème d'optimisation paramétré linéaire quand touts les fonctions $f(x,.), g_i(x,.), i = 1, \cdots, p$, $h_j(x,.), j = 1, \cdots, q$ sont linéaires sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $M(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : g(x,y) \leq 0 \text{ et } h(x,y) = 0\}$ l'ensemble des points admissibles du problème (P_x). De même, on note

$$S(x) = \underset{M(x)}{\operatorname{argmin}} f(x,.)$$

l'ensemble des solutions optimales du problème (P_x), c'est-à-dire.

$$S(x) = \{y^* \in M(x) : f(x,y^*) \leq f(x,y) \text{ pour tout } y \in M(x)\}.$$

La fonction $v : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par

$$v(x) = \inf_{y \in M(x)} f(x,y)$$

est appelée fonction marginale.

On remarque que si $M(x)$ est vide pour un certain x alors $v(x) = +\infty$. Ainsi $v(x)$ est égale à $-\infty$ si (P_x) est non borné.

Exemple 2.1

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème suivant :

$$(P_x) = \begin{cases} \textit{Minimiser } \exp^{-(xy)^2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ici le domaine réalisable (admissible) $M(x) := \mathbb{R}$ est fixé (ne dépend pas de x). De plus, il s'agit d'un problème non contraint dont la fonction objective $f(.,.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue (de classe C^∞) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarquons aussi que $0 \leq f(x,y) \leq 1$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et que

$$\lim_{|y| \to +\infty} f(x,y) = 0$$

pour tout $x \neq 0$.

Ainsi un calcul simple de valeur optimale montre que la fonction marginale $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \neq 0 \\ 1 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est discontinue en $x_0 = 0$.

En fait, ici la fonction de marginale est semi-continue supérieurement en tout point car pour tout suite $(x_n)_n$ *convergeant vers* $x_0 = 0$ *on a*

$$v(x_0) = 1 \geq \limsup_{n \longrightarrow +\infty} v(x_n) \in \{0, 1\}.$$

Mais pour la suite $(x_n) = (\frac{1}{n})$ *qui converge vers* 0 *on a*

$$\liminf_{n \to +\infty} v(x_n) = 0 \leq v(x_0) = 1.$$

Donc la fonction v *n'est pas s.c.i en* 0.

D'autre part, la multifonction $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est telle que* $S(y) = \emptyset$ *si* $y \neq 0$, $S(0) = \mathbb{R}$ *n'est pas continue en* 0 *car elle n'est pas s.c.i en* 0.

En effet, pour $y_0 \in S(0)$, $V :=]y_0 - \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2}[$ *et pour tout* $U \in V(0)$ *(un voisinage quelconque de* 0*) il existe* $x \in U$ *tel que* $S(x) \cap V = \emptyset$ *et il existe une suite* $x_n \to x_0 = 0$ *tel que* $S(x_n) \cap V = \emptyset$ *on a*

$$S(y) \cap V = \emptyset \textit{ pour tout } y \in U \setminus \{0\}.$$

Ici S *est s.c.s en* 0.

2.4 Continuité des ensembles des solutions du problème paramétrée

Plusieurs questions soulevées par la théorie et l'application de l'optimisation paramétrée motive l'étude de la continuité des ensembles des solutions des systèmes d'inégalités paramétriques.

Considérons une application multivoque $M \cap F : X \rightrightarrows Y$ comme $(M \cap F)(x) = M(x) \cap F(x)$ et qui satisfait aux conditions générales suivantes :

$$X \text{ et } Y \text{ sont des espaces métriques,} \tag{2.1}$$

$$M(x) = \{y \in Y \mid g_i(x, y) \leq 0\} \text{ pour tout } x \in X, \tag{2.2}$$

où g_i est, pour chaque $i \in J$, une fonction à valeur réelle définie sur $Y \times X$,

$$J \text{ est un ensemble d'indice et peut être infini sauf indication contraire ,} \tag{2.3}$$

$$F : X \rightrightarrows Y \text{ est une application multivoque.} \tag{2.4}$$

Afin de démontrer que $M \cap F$ est B-s.c.s. (ou H-s.c.s.) en x_0 en général on doit supposer qu'il existe un ensemble compact $K \subset X$ tel que pour tous les paramètres dans un certain voisinage $V(x_0)$ les ensembles $M(x)$ sont contenus dans K.

Théorème 2.1 *[4](Théorème 3.1.1)*
Si les fonctions g_i, $i \in J$, *sont s.c.i. sur* $Y \times \{x_0\}$ *tel que* $x_0 \in X$ *et* F *soit fermé en* x_0 *alors* $M \cap F$ *est fermé en* x_0.

Démonstration

Le Lemme 2 suffit à montrer que M est fermée en x_0. Si $x_n \subset X$ et $y_n \subset Y$ sont des suites arbitraires avec $x_n \to x_0$ et $y_n \to y_0$ et $g_i(x_n, y_n) \leq 0$ il suit $g_i(x_0, y_0) \leq \liminf g_i(x_n, y_n) \leq 0$ puisque les g_i sont s.c.i. par hypothèse sur $Y \times \{x_0\}$. Puisque $y_0 \in M(x_0)$.

Théorème 2.2

Soit g_i, $i \in J$, s.c.i. sur $Y \times \{x_0\}$, et U un voisinage de x_0, on a ensuite

1. *$M \cap F$ est B-s.c.s (H-s.c.s) en x_0 si F est fermée en x_0 et il existe un ensemble compact $K \subset Y$ tel que*
$$(M \cap F)x \subset K \text{ pour tout } x \in U.$$
2. *$M \cap F$ est B-s.c.s en x_0 si F est H-s.c.s en x_0 et que l'ensemble $F(x_0)$ est compacte et non vide.*

Démonstration Pour prouver 2., supposons que $M \cap F$ n'est pas B-s.c.s en x_0. Il existe alors un ensemble ouvert Ω contenant $(M \cap F)x_0$ et une suite $(x_n) \subset X$, $x_n \to x_0$ avec

$$(M \cap F)x_n \setminus \Omega \neq \emptyset \text{ pour tout } n.$$

Soit y_n, pour tout n, des éléments de l'ensemble de différences ci-dessus. Comme F est H-s.c.s. en x_0 il existe $z_n \in F(x_0)$ avec $\lim_{n \to +\infty} d(y_n, z_n) = 0$. De plus, il existe dans le compact $F(x_0)$ un point d'accumulation y_0 de tout z_n qui doit en même temps être une point d'accumulation de la suite (y_n). Comme M est fermé à x_0 Théorème 2.1 y_0 est contenue dans $M(x_0) \cap F(x_0)$ et donc aussi dans Ω. Il s'ensuit que l'ensemble ouvert Ω contient un nombre infini de points y_n, ce qui contredit $y_n \notin \Omega$.

Lemme 8

Soit $Y = \mathbb{R}^n, x_0 \in X$, et $y_0 \in M(x_0) \cap S$ tel que $S \subset \mathbb{R}_n$ est une ensemble convexe compacte. De plus, g_i pour chaque $i \in J$ avoir la forme

$$g_i(x, y) = f_i(x, y) - \tau_i(x)$$

où, pour tout $i \in J$, les fonctions f_i et τ_i signifient les propriétés suivantes

$$f_i : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R} \text{ est s.c.i en } \mathbb{R}^n \times (x_0)$$
$$\tau_i : X \to \mathbb{R} \text{ est s.c.s en } x_0$$
$$f_i(., y_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ est quasi convexe on } \mathbb{R}^n \text{ pour tout } x \in X$$

Enfin, soit, $x_n \subset X$ une suite avec $x_n \to x_0$, et une suite $(y_n) \subset \mathbb{R}^n$ avec $y_n \in M(x_n)$ et V une voisinage de S alors

$$y_n \notin cl\, V \text{ pour tout } n.$$

Pour chaque n l'intersection du segment de droite $conv\,(y_0, y_n)$ avec l'ensemble V ne contient un seul point, et la suite (z_n) de ces points a un point d'accumulation z_* avec la propriété

$$z_* \in M(x_0) \cap bd\, V.$$

On note $bd\, M = cl\, M \cap cl(Y \setminus M)$

Théorème 2.3 *[4] (Théorème 3.1.3) Si $x_0 \in X$ et $Y = \mathbb{R}^n$, la multifonction $M \cap F$ est B-s.c.s en x_0 sous les hypothèses complémentaires suivantes :*

1. *F est fermé en x_0 et B-s.c.i en x_0, les ensembles $F(x)$ sont convexes pour tout $x \in X$,*
2. *$g_i(x, y) = f_i(x, y) - \tau_i(x)$ pour tout $i \in J$ et tout $x \in X$ où les fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}$ sont s.c.i sur $\mathbb{R}^n \times x_0$ et $\tau_i : X \to \mathbb{R}$ sont s.c.s. à x_0 pour tous $i \in J$,*
3. *il existe un point $y_0 \in (M \cap F)x_0$ tel que $f_i(., y_0)$ soit s.c.s. en x_0 pour chaque $i \in J$,*
4. *les fonctions $f_i(x, .)$ sont quasi convexes pour tout $i \in J$ et tout $x \in X$,*
5. *$(M \cap F)x_0$ est un ensemble borné.*

Démonstration

On va démontrer qu'il existe un U voisinage de x_0 et un V voisinage de $(M \cap F)x_0$

$$(M \cap F)x \subset K = cl\, V \text{ pour tout } x \in U \tag{2.5}$$

et après, d'après le Théorème 2.2 que $M \cap F$ est s.c.s.B en x_0. Supposons que (2.5) n'est pas valide. Alors il existe $x_n \in U$, et $y_n \in \mathbb{R}^n$ pour chaque $n = 1, 2, \cdots$ avec les propriétés $y_n \in\in (M \cap F)x_n$ et $y_n \notin K$ pour tout n. On posons maintenant $S = (M \cap F)x_0$, d'après les conditions du Lemme 8 et pour $x_0, y_0, (x_n), (y_n)$, à cause des hypothèses $(2), (3), (4)$ et (5) il existe donc un $z_* \in \mathbb{R}^n$ et les nombres $\alpha_n \in (0, 1)$ tels que

$$z_* \in M(x_0) \cap bd\, K, \tag{2.6}$$

$$z_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)x_0 \in bdK, \tag{2.7}$$

et sans perte de généralité

$$z_n \to z_*, n \to \infty, \tag{2.8}$$

Puisque F est B-s.c.i. en x_0 il existe une suite $(g_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $g_n \to y_0$ et $g_n \in F(x_n)$ pour tout n. En utilisant les coefficients α_n pour tout n de (2.7) on définit

$$\bar{g_n} = \alpha_n y_n + (1 - \alpha_n)g_n.$$

De la convexité de $F(x_n)$ il suit que $\bar{g_n} \in F(x_n)$ et par (2.8) $\bar{g_n} = z_n + (1 - \alpha_n)(g_n - y_0)$ enfin $\bar{g_n} \to z_*$. Comme F est fermé en x_0 on trouve

$$z_* \in F(x_0). \tag{2.9}$$

(2.6) et (2.9) impliquent alors $z_* \in (M \cap F)x_0 \cap bd\, K$. Par définition de K cependant tout point de l'ensemble $(M \cap F)x_0$ doit être un point intérieur de K et on a donc une contradiction, avec (2.5) est valide.

La condition de convexité imposée aux ensembles $F(x)$ pour tout $x \in X$ dans le Théorème 2.3 peut être affaiblie si la H-semi-continuité supérieure en x_0 est substituée à la fermeture de F en x_0.

Corollaire 2.1
La multifonction $M \cap F$ est B-s.c.s. en x_0 avec les conditions (2), (3),(4), et (5) de Théorème 2.3 si $Y = \mathbb{R}^n$, x_0 un point tel que $F(x_0)$ est un sous-ensemble fermée et convexe de $\mathbb{R}^n$ et que F est H-s.c.s. et B-s.c.i. en x_0 .

Une conséquence immédiate des Théorèmes 2.2,2.3 et du Lemme 1 est donnée par

Corollaire 2.2
Si la multifonction $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est fermée et B-s.c.i. en $x_0 \in X$ et si les ensembles $F(x)$ sont convexes pour tout $x \in X$ alors F est continue au sens de Hausdorff en x_0 à condition que l'ensemble $F(x_0)$ est borné et non vide.

Les exemples suivants montrent que chacune des conditions du Théorème 2.3 est essentiel.

Exemple 2.2
Supposons $X = Y = \mathbb{R}$,

$$F(x) = G = \{y \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq y \leq +1\} \text{ pour tout } x \in X,$$

$g(x, y) = y + \tau(x)$ *où ,*

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

et $M(x) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, g(x, y) \leqq 0\}$. On a évidemment $(M \cap F)0 = [-1, 0]$ et $(M \cap F)x = G$ pour tout $x \neq 0$ c'est-à-dire que $M \cap F$ n'est pas fermée et non B-s.c.s. en $x_0 = 0$. Dans cet exemple g n'est pas s.c.i. sur $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Théorème 2.4
Soit $J = \{1, \cdots, m\}$ et $x_0 \in X$. Il existe pour chaque $i \in J$ une fonction $\delta_i : X \to \mathbb{R}$ qui est continue en x_0, telle que

$$g_i(x_0, y) - g_i(x, y) \leq \delta_i(x) \text{ pour tout } x_0 \in X \text{ et } \delta_i(x_0) = 0.$$

M est alors H-s.c.s. en x_0 si

$$\Phi(z) = \{y \in Y \,|\, g_i(x_0, y) \leq z_i \text{ pour tout } i \in J\}, z \in \mathbb{R}^m,$$

est H-s.c.s. en $z = 0$. De plus, $M(x) \subset \Phi(\delta(x))$ où $\delta(x) = (\delta_1(x), \cdots, \delta_m(x))$ pour tout $x \in X$ et $M(x_0) = \Phi(0)$.

Démonstration

Les hypothèses du théorème donnent immédiatement $M(x) \subset \Phi(\delta(x))$ et $M(x_0) = \Phi(0)$. En raison de la semi-continuité supérieure (H) de Φ et de la continuité de δ_i alors on trouve

$$M(x_n) \subset \Phi(\delta(x_n)) \subset V\,\Phi(\delta(x_0)) = V\,\Phi(0) = V\,M(x_0)$$

pour chaque suite $(x_n) \subset X$ avec $x_n \to x_0$ et pour n suffisamment grand.

Théorème 2.5
Soit M et F des applications qui satisfont (2.1) *à* (2.5) *(Partie 2.4). En outre soit J un ensemble d'indices fini, soit F est B-s.c.i. en x_0, et soit*

1. *les fonctions g_i, pour $i \in J$, soit s.c.s. sur $M_0(x_0) \times \{x_0\}$ et*
2. *$(M \cap F)x_0 \subset cl\,(M_0 \cap F)x_0$. Alors $M \cap F$ est B-s.c.i. en x_0.*

Démonstration
On a M_0 est fortement s.c.i. puisque si $y_0 \in M_0(x_0)$ alors

$$g_i(x,y) < \text{ pour tout } (x,y) \in V(y_0) \times U(x_0)$$

d'après 1. on a

$$V(y_0) \subset M_0(x) \text{ pour tout } x \in U(x_0).$$

Exemple 2.3
Si $X = Y = \mathbb{R}$, $F(x) = \{0\} \cup \{1\}$, et $M(x) = \{y \leq x\}, x \in X$, alors on a $(M \cap F)1 = \{0,1\}, (M_0 \cap F)1 = \{0\}$, et $(M \cap F)x = \{0\}$ pour $0 \leq x < 1$, donc $M \cap F$ n'est pas B-s.c.i. en $x_0 = 1$. Toutes les conditions de Théorème 2.5 sont satisfait (pour $x_0 = 1$) sauf 2..

Une propriété importante des fonctions strictement quasi convexes sur X' est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{Si } x, y \in X', x \neq Y, \text{ sont des points pour lesquels } f(x) = f(y) \\ &\text{alors il existe au plus un } z \in ri\,conv\,\{x,y\} \text{ avec } f(z) > f(x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

S'il y avait deux nombres α, β satisfaisant $0 < \alpha < \beta < 1$ et les points correspondants $z^\alpha = \alpha x + (1-\alpha)y, z^\beta = \beta x + (1-\beta)y$ satisfaisant les inégalités et $f(z^\beta) > f(x)$ et si sans perte de généralité $f(z^\alpha) \leqq f(z^\beta)$ alors z_β serait contenu dans $ri\,conv\{z^\beta, x\}$ donc en raison de la quasi-convexité stricte on aurait $f(z^\beta) < f(z^\alpha)$, ce qui contredit l'inégalité précédente.

Théorème 2.6 *[4](Théorème 3.1.6)*
Soit Y un espace normé linéaire réel, F soit B-s.c.i. en $x_0 \in X$, $(M_0 \cap F)x_0$ est non vide et $F(x_0)$ un ensemble convexe. De plus, soit, pour tout $i \in J = \{1, \cdots, m\}$, les fonctions g_i sont s.c.s. sur $M_0(x_0) \times \{x_0\}$ et les fonctions $g_i(x_0, .)$ soient strictement quasi convexes sur $F(x_0)$. Alors $M \cap F$ est B-s.c.i. en $x_0 \in X$.

Démonstration
Nous appliquons le Théorème 2.5, selon lequel il suffit de montrer que $(M \cap F)_{x_0} \subset cl(M_0 \cap F)_{x_0}$. Par hypothèse, il existe un point $\bar{y} \in (M_0 \cap F)_{x_0}$. Nous supposons que $y \in (M \cap F)_{x_0}$ est un point arbitraire mais fixe et y_α sont des points donnés par

$$y_\alpha = \alpha\bar{y} + (1-\alpha)y, 0 < \alpha < 1.$$

En raison de (2.11), il existe alors un $\alpha_i > 0$ tel que

$$g_i(x_0, y) \leqq g_i(x_0, \bar{y}) < 0 \text{ tel que } \alpha \in (0, \alpha_i)$$

si $g_i(x_0, y) = g_i(x_0, \bar{y})$. Si par contre $g_i(x_0, y) \neq g_i(x_0, \bar{y})$ on a par définition d'une fonction strictement quasi convexe

$$g_i(x_0, y_\alpha) < \max\{g_i(x_0, y), g_i(x_0, \bar{y})\} \leqq 0$$

pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et on pose alors $\alpha_i = 1$. Ainsi $g_i(x_0, y_\alpha) < 0$ pour tout $i \in J$ et pour tout $\alpha \in (0, \min \alpha_i)$. Et par la convexité de $F(x_0)$ on a alors $x_\alpha \in M_0(x_0) \cap F(x_0)$ pour tout $\alpha \in (0, \min \alpha_i)$ et lorsque $\alpha \to 0$.

2.5 Multifonction défini par des contraintes d'inégalité

2.5.1 Cas convexe

Dans cette section, nous considérons la multifonction $M : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$

$$M(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x, y) \leq 0, i = 1, \cdots, m\} \text{ tel que } x \in X. \tag{2.11}$$

Avec des conditions générales

$$X \text{ est un espace métrique ,} \tag{2.12}$$

$$g_i : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^n \times X \text{ pour chaque } i \in \{p, \cdots, m\}, \tag{2.13}$$

$$g_i(x, .) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^n \text{ pour chaque } i \in \{I, \cdots, m\} \text{ et } x \in X. \tag{2.14}$$

Compte tenu des Théorèmes 2.3 et 2.6, il suffit souvent de supposer que les $g_i(x, .)$ sont quasi convexes ou strictement quasi convexes. Nous introduisons maintenant quelques concepts et notations

Soit Y un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble

$$O^+Y = \{u \in \mathbb{R}^n \mid y + \alpha u \in Y \text{ pour tout } y \in Y, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 0\} \tag{2.15}$$

est appelé le cône de récession de Y. De même l'ensemble

$$L^+Y = \{u \in \mathbb{R}^n \mid y + \alpha u \in Y \text{ pour tout } y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{2.16}$$

est l'ensemble de sommets du cône de récession de Y. Y est évidemment un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que $I \subset \{1, \cdots, m\}$, la multifonction $M^I : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est définie par

$$M^I(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | g_i \leq 0, i \in I\}, x \in X. \tag{2.17}$$

Si $I = \emptyset$, alors $M^\emptyset(x) = \mathbb{R}^n$. L'ensemble d'indices caractéristiques d'un sous-ensemble convexe $Y_x \subset M(x), x \in X$ est donné par

$$ch\, Y_x = \{i \in \{1, \cdots, m\} \mid g_i(x, y) = 0\} \text{ pour tout } y \in Y_x. \tag{2.18}$$

On note $ri\, M$: l'ensemble de tous les parties $x \in M$ pour lesquels il existe un ensemble ouvert $D \subset M$, tel que $x \in D \cap aff\, M \subset M$.

Lemme 9 [4](*Lemme* 3.2.1)
Soit $x \in X$ fixe et $M(x)$ une application qui remplit les conditions (2.12) *à* (2.15). *Si Y est un sous-ensemble convexe non vide de $M(x)$ alors*

$$ri\, Y_x \subset \{y \in \mathbb{R}^n | g_i(x,y) = 0 \quad \forall\, i \in ch\, Y_x, g_j(x,y) < 0 \quad \forall\, j \notin ch\bar{}Y_x\} \tag{2.19}$$

Démonstration

On suppose que l'inclusion est fausse. Alors d'après (2.18) il existe $z \in ri\, Y_x$ et $k \notin ch\bar{}Y_x$ tel que $g_k(x,z) = 0$ encore d'après (2.18) on peut trouver un $t \in Y_x$ avec $g_k(x,t) < 0$ et $z \in ri\, Y_x$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$z + \alpha(z - t) \in Y_x$$

mais

$$0 = g_k(x,z) \leq \frac{1}{1+\alpha} g_k(x, z + \alpha(z-t)) + \frac{\alpha}{1+\alpha} g_k(x,t) < 0$$

contradiction.

Le théorème suivant spécialise les résultats de la section 2.4 au cas d'un système d'inégalités paramétriques donné par

Théorème 2.7 *[4](Théorème 3.2.1)*
Soit M une application multivoque satisfaire les conditions (2.1) *à* (2.5) *et soit $x_0 \in X$. Alors*

1. *M^I est fermé en x_0 pour chaque $I \subset \{1, \cdots, m\}$,*
2. *si $M^I(x_0)$ est un ensemble borné et non vide et $\emptyset \neq I \subset 1, \cdots, m$ il s'ensuit que M^I est B-s.c.s en x_0,*
3. *si $M(x_0) \neq \emptyset$ et $I = ch\, M(x_0)$ il s'ensuit que M est B-s.c.i. en x_0 de même pour M^I, en particulier M^I est B-s.c.i. en x_0.*
4. *si $M(x_0) \neq \emptyset$ et $I = ch\, M(x_0)$ et M^I est B-s.c.i. en x_0 il s'ensuit que M est H-continu en x_0 à condition que $M(x_0)$ est un ensemble borné, et enfin*
5. *si $M(x_0)$ est non vide et il existe un $i \in ch\, M(x_0)$ tel que $g_i(x_0, .)$ est strictement convexe alors il s'ensuit que M est H-continue en x_0.*

Maintenant on a la multifonction M^I, $I = ch\, M(x_0)$, pour $x_0 \in X$ est B-s.c.i.en x_0 . La condition de convexité (2.15) implique

$$M^I(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, g_i(x_0, y) = 0, i \in I\}, \quad I = ch\, M(x_0), x_0 \in X \tag{2.20}$$

Théorème 2.8 [4]*(Théorème 3.2.2)*
Soit $x_0 \in X$ et $I = ch\, M(x_0)$ satisfont les conditions suivantes :

1. *$M^I(x)$ est non vide pour tout $x \in X$,*
2. *$M^I(x_0)$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$, et*
3. *$dim\, L^+ M^I(x) = dim L^+ M^I(x_0)$ pour tout $x \in X$.*

Les multifonction M^I et M sont alors B-s.c.i. en x_0.

Corollaire 2.3
La proposition du Théorème 2.8 est toujours valable si la condition 2. est remplacée par la condition que toutes les fonctions $g_i(x_0,.), i \in I = ch\, M(x_0)$, soient convexes et faiblement analytique sur $\mathbb{R}$.

Démonstration
Il faut montrer que :

$$x(\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y \in M^I(x_0)$$

pour deux points quelconques $x \in M^I(x_0)$ et $y \in M^I(x_0)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. En supposant alors que $x, y \in \mathbb{R}^n$, puisque $M^I(x_0)$ est convexe alors $x(\alpha) \in M^I(x_0)$ pour tout $\alpha \in [0,1]$ et d'après on obtient

$$g(x_0, x(\alpha)) = 0 \text{ pour tout } i \in I \text{ et pour tout } \alpha \in [0,1]$$

Comme $g_i(x_0,.)$ est faiblement analytique pour chaque $i \in I$, il s'ensuit que $g(x_0, x(\alpha)) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $i \in I$. Il est évident que toutes les fonctions analytiques convexes et toutes les fonctions strictement convexes sont également faiblement analytiques.

2.5.2 Cas linéaire

Dans cette partie, nous examinons les conditions dans lesquelles l'ensemble de solutions d'un système linéaire d'inégalités est une application multivoque continue. On défini l'ensemble suivant

$$G(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay \leq y, y_1, \cdots, y_s \in \mathbb{Z}\} \tag{2.21}$$

où A est une matrice fixe $(m \times n), \mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les entiers, s un nombre naturel satisfaisant $0 < s < n$ et x un vecteur de l'ensemble $X \subset \mathbb{R}^m$. $G(x)$ est intégré dans le polyèdre convexe

$$M(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay < x\} \tag{2.22}$$

et à $G(x)$ on associe l'ensemble U_G des "demi-points de réseau" du cône de récession de $M(x)$

$$U = O^+M(x) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au \leq 0\} \tag{2.23}$$

c'est-à-dire

$$U_G = \{U \in \mathbb{R}^n \mid Au \leq 0, u_1, \cdots, u_s \in \mathbb{Z}\} \tag{2.24}$$

Théorème 2.9
Si le polyèdre convexe $M(x)$ est non vide pour $x \in X$ alors il existe une multifonction $K : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ H-continue dont les images sont des polyèdres compactes convexes, tels que $M(x)$ peut être représenté par

$$M(x) = K(x) + U \text{ pour tout } x \in X \tag{2.25}$$

La continuité de l'application K peut être représentée comme suit : Le Théorème 2.1 implique la fermeture de l'application K sur X, de même K est l.s.c.-B sur X. Puisque les ensembles d'images $K(x)$ sont compacts et convexes pour tout $x \in X$.

Corollaire 2.4
Si $M(x)$ est non vide pour tout $x \in X$ alors M est H-continue sur X.

Dans la suite de cette sous-section, nous examinons des hypothèses supplémentaires qui peuvent être utilisées pour établir la H-semi-continuité supérieure ou la continuité de la multifonction G.

Théorème 2.10
Soit la matrice A avoir uniquement des éléments rationnels. Si $G(x)$ est non vide pour tout $x \in X$ alors il existe un multifonction $K_G : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ H-s.c.s avec des ensembles d'images compacts qui défini par

$$G(x) = K_G(x) + U_G \text{ pour tout } x \in X \tag{2.26}$$

Corollaire 2.5
Soit la matrice A des éléments rationnels. Si $G(x)$ est non vide pour tout $x \in X$ alors $G : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est H-semi-continue supérieur.

Démonstration
Si $x_0 \in X$ et $(x_n) \subset X, x_n \to x_0$ sont choisis arbitrairement alors tout $y_n \in G(x_n)$ alors

$$y_n = v_n + u_n, \quad v_n \in K_G(x_n), u_n \in U_G \text{ pour tout } n.$$

comme $v_0 \in K_G(x_0)$ est un point d'accumulation alors

$$\text{il existe } n' \text{ tel que } v_n + u_n \in V(K_G(x_0)) + U_G \text{ pour tout } n \geq n'$$

donc

$$V(K_G(x_0)) + U_G \subset V(K_G(x_0) + U_G).$$

2.6 Fonctions Marginales

Dans cette section, nous présentons les conditions de stabilité du problème dépendant des paramètres

$$P_x = \inf\{f(x,y) \mid y \in M(x)\}, \text{ pour tout } x \in X$$

sous des perturbations du paramètre x.

Le mot stabilité ne représente pas une propriété bien définie mais plutôt divers types de semi-continuité de la fonction de valeur ou fonction marginale

$$v = v(x) = \inf\{f(x,y) \mid y \in M(x)\},$$

l'ensemble des solutions optimales du problème P_x

$$S = S(x) = \{x \in M(x) \,|\, f(x, y) = v(x)\}.$$

ou des ensembles ε-optimaux

$$S_\varepsilon = S_\varepsilon(x) = \{y \in M(x) \,|\, f(x, y) < v(x) + \varepsilon\},$$

$$\bar{S} = \bar{S}(x, \varepsilon) = \{y \in M(x) \,|\, f(x, y) \leq v(x) + \varepsilon\}.$$

Pour l'essentiel, nous considérons les conditions dans lesquelles la fonction de valeur est semi-continue supérieure ou inférieure ou l'ensemble des solution optimale de problème P_x est H-s.c.s ou B-s.c.i.

2.6.1 Convexité d'une fonction Marginale

Maintenant, nous considérons la fonction marginale

$$v = \inf\{f(x, y) \,|\, y \in F(x)\}.$$

Lemme 10
Soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction, alors la fonction v est convexe.

Démonstration
Soit $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$. Et on a

$$\begin{aligned} v(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \inf\{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) \,|\, y \in F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\} \\ &\leq \inf\{f(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \,|\, y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(x_2)\} \\ &\leq \inf\{\lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2) \,|\, y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(x_2)\} \end{aligned}$$

$$= \lambda_1 v(x_1) + \lambda_2 v(x_2) \tag{2.27}$$

pour tous $x_1, x_2 \in X$ et $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, On a l'inégalité suivant

$$v(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 v(x_1) + \lambda_2 v(x_2)$$

est vrais, donc v est convexe.

Corollaire 2.6 *Soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}, dom\, v \subset domF$ si $domf = X \times Y$.*

Démonstration
On a $v(x) = \inf\limits_{y \in F(x)} f(x, y)$. Si $F(x) \neq \emptyset$ alors $x \in dom\, v$. i.e. $v(x) < \infty$.
Supposons que $x \notin domF$, puis $F(x) = \emptyset$ et $v(x) = \inf \emptyset = +\infty$.
De cette contradiction résulte l'inclusion $dom\, v \subset domF$. Inversement, $v \leq f(x, y) < +\infty$. i.e. $x \in dom\, F$ et $dom\, F \subset dom\, v$.

▷ Dans cette section, nous présentons les cas suivants

1. $\inf\{f(x, y) \,|\, x \in M(x)\}, M : X \rightrightarrows Y$, X et Y deux espaces métriques,

2. $\inf\{f(x) \mid x \in M(x)\}, M : X \rightrightarrows Y$, X est un espace normé, $M(x)$ et $f : X \to \mathbb{R}$ sont convexes,

3. $\inf\{f(x) \mid x \in M(x)\}, M : X \rightrightarrows Y$, $M(x)$ est convexe, $f(x,.)$ est quasi convexe,

4. $M(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x,y) \leq 0,\ i \in I\}$, $f(x,.)$ et $g_i(x,.)$ sont quasi-convexes,

5. $f(x,.)$ et $g_i(x,.)$ sont convexes, I est fini,

6. $\inf\{f(x) \mid g_i(y) \leq x_i,\ i = 1, \cdots, m\}$, f, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont convexes

7. $\inf\{f(x,y) \mid x \in X \subset \mathbb{R}^m$, X est un polyèdre, $f(.,x)$ est concave.

2.6.2 Relations entre les propriétés de continuité de la fonction valeur, l'ensemble des solutions optimales et l'ensemble des contraintes

Théorème 2.11
Soit la multifonction M fermé en x_0 et K un sous-ensemble compact non vide de Y. Alors

1. *v est semi-continue inférieure en x_0 si f est semi-continue inférieure sur $(M(x_0) \cap K) \times (x_0)$ et $S(x) \cap K \neq \emptyset$ est valable pour tout $x \in X$,*
2. *v est semi-continue supérieur en x_0 si f est semi-continue supérieure sur $(S(x_0) \cap K) \times (x_0), S(x) \cap K \neq \emptyset$ est valable pour tout $x \in X$, et la multifonction v est fermée en x_0,*
3. *S est fermé en x_0 si v est semi-continue supérieure en x_0 et f est semi-continue inférieure sur $Y \times (x_0)$,*
4. *S est B-s.c.s. en x_0 si les hypothèses de 3. sont remplies et $S(x) \subset K$ est vrai pour tout $x \in X$.*

Démonstration

(1) Supposons $(x_n) \subset X, x_n \to x_0$. En choisissant y_n parmi $S(x_n) \cap K$, nous trouvons qu'il existe une sous-suite convergente (x_{n_k}) de (x_n) telle que $x_{n_k} \to x_0, k \to \infty$. Puisque M est fermé en x_0, le point y_0 est contenu dans $M(x_0) \cap K$. La semi-continuité inférieure de f en (x_0, y_0) implique alors

$$\limsup v(x_n) = \limsup f(x_n, y_n) \geq \liminf_{k \to +\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq f(x_0, y_0) \geq v(x_0)$$

Corollaire 2.7
Soit M fermé en $x_0, M(x_0)$ non vide, f continue et l'espace métrique Y est compact. Alors v est semi-continue inférieure en x_0, et v est semi-continue supérieure en x_0 si et seulement si S est B-s.c.s. en x_0.

Théorème 2.12

1. -a *v est semi-continue supérieur en x_0 si M est B-s.c.i. en x_0 et f est semi-continue supérieure sur $M(x_0) \times (x_0)$,*

   -b *v est semi-continue supérieure en x_0 si M est B-s.c.i. en x_0 et il existe un $y_0 \in S(x_0)$ tel que f est semi-continue supérieure en (x_0, y_0).*

2. *v est semi-continue inférieure en x_0 si M est H-s.c.s. en $x_0, M(x_0)$ est compact et f est semi-continue inférieure sur $M(x_0) \times (x_0)$.*

3. *S est B-s.c.s. en x_0 si v est semi-continue supérieure en x_0 et les hypothèses de 2. sont valables.*

Théorème 2.13 *(S. DOLEOKI). Soit $M(x_0)$ fermé. Alors*

1. *v est B semi-continue inférieure en x_0 si la fonction $f(x,y) = f(y)$ ne dépend pas de x et elle est B semi-continue inférieure sur $M(x_0)$ et si M est B-s.c.s. en x_0,*

2. *si par contre M n'est pas B-s.c.s en x_0 alors il existe une fonction continue f : $Y \to \mathbb{R}$ telle que*

$$v(x) = \inf\{f(x) \mid y \in M(x)\}$$

   n'est pas semi-continue inférieure en x_0.

Démonstration

1. Si v n'est pas semi-continue inférieur alors il existe des suites $x_n \subset X, y_n \subset Y$ et $\varepsilon > 0$ tel que $x_n \to x_0, y_n \in M(x_n), f(y_n) < v(x_0) - \varepsilon$. Évidemment, cela implique $y_n \in M(x_n) \setminus M(x_0)$ pour tout n. Puisque M est B-s.c.s. alors il existe par le Lemme 1.7 un point d'accumulation y_0 de la suite (y_n) et qui appartenant à $M(x_0)$. La semi-continuité inférieure de f conduit cependant à une contradiction :

$$v(x_0) \leq f(y_0) \leq \limsup f(y_n) \leq v(x_0) - \varepsilon.$$

2. Puisque M n'est pas B-s.c.s., il existe une suite $(x_0), x_n \to x_0$, et un ensemble ouvert $\Omega \supset M(x_0)$ tel que

$$M(x_n) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ pour tout } n.$$

   On défini $A = Y \setminus \Omega$ et

$$s(y) = d(y, A) + d(y, M(x_0)), \quad f(y) = d(y, A).s(y)^{-1}$$

   où $y \in Y$, on trouve que f est bien définie et continue puisque A et $M(x_0)$ sont des ensembles fermés disjoints et donc $s(y) > 0$. Clairement

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in A \\ 1 & \text{si } y \in M(x_0) \end{cases}$$

   et nous concluons ainsi que la fonction

$$v(x) = \inf\{f(y) \mid y \in M(x)\}$$

   n'est pas semi-continue inférieure en x_0

2.6.3 Problèmes paramétrés convexes

Dans cette section, nous exploitons les propriétés de convexité pour examiner le problème paramétrés

$$P_x = \inf\{f(x,y) \,|\, y \in M(x)\},\ x \in X$$

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ pour désignent respectivement l'ensemble de solubilité et l'ensemble de paramètres réalisables :

$$\mathfrak{A} = \{x \in X \,|\, S(x) \neq \emptyset\},$$
$$\mathfrak{B} = \{x \in X \,|\, M(x) \neq \emptyset\}.$$

Théorème 2.14
Soit Y et Z des espaces normés linéaires réels, Ω et X des sous-ensembles ouverts, non vides et convexes de Y et Z respectivement avec des topologies induites et soit

$$F : X \rightrightarrows Y$$

une multifonction qui est B-s.c.i. en $x_0 \in X$ et qui satisfait la propriété suivant

$$\frac{1}{2}F(x_1) + \frac{1}{2}F(x_2) \subset F(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \text{ pour tout } x_1, x_2 \in X. \tag{2.28}$$

De plus, soit f indépendant de x_0, la restriction $f_{|\Omega}$ convexe et semi-continue supérieure

$$M(x) = F(x) \cap \Omega, M(x_0) \neq \emptyset$$

alors v est continue en x_0.

Démonstration
D'après le Lemme 3 M est B-s.c.i en x_0. Ainsi d'après le Théorème 2.12 v est s.c.s. en x_0. Si $\varepsilon > 0$ est fixé et pour un voisinage U de x_0 on a

$$v(x) > v(x_0) - \varepsilon \text{ pour tout } x \in U. \tag{2.29}$$

Puisque X est un sous-ensemble ouvert de Z les voisinages U sont identiques aux boules ouvertes $K_\delta = \{y \in Z \,|\, \|y - x_0\| < \delta\}$, pour $\delta > 0$ on a

$$v(x) < v(x_0) + \varepsilon \text{ pour tout } x \in U \tag{2.30}$$

(puisque v est semi-continue supérieure en x_0). Maintenant on fixe $x \in U$ et on prend $y \in M(x)$ et on choisi un point $u = x_0 + (x_0 - x)$ appartient à U d'après (2.30) et comme $v(x_0) < +\infty$ il existe $z \in M(u)$ tel que $f(z) < v(x_0) + \varepsilon$. Ω est convexe d'après (2.28) alors $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \in M(x_0)$. On utilise la convexité de f on obtient

$$\begin{aligned}
&v(x_0) \leq f(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}(v(x_0) + \varepsilon)\\
&v(x_0) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}(v(x_0) + \varepsilon)\\
&2v(x_0) < f(x) + v(x_0) + \varepsilon\\
&v(x_0) - \varepsilon < f(x)
\end{aligned}$$

Puisque $y \in M(x)$ a été choisi arbitrairement, nous trouvons que (2.29) est vrai.

$\triangleright$ La preuve reste la même si Y est un espace métrique linéaire.

Le Théorème 2.28 peut notamment être appliqué à des problèmes paramétrés du type

$$\inf\{f(y) \,|\, \Omega, g(y) - x \in K\}, x \in Y$$

si Ω et f sont définis comme dans le théorème, K est un cône convexe contenu dans l'espace normé Y et $g : \Omega \to Y$ est un opérateur continu satisfaisant la condition de convexité

$$g(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2) - \frac{1}{2}[g(y_1) + g(y_2)] \in K \text{ pour tout } y_1, y_2 \in K.$$

Si $F(x) = \{y \in \Omega \,|\, g(y) - x \in K\}$. on constate que (2.28) est vrai. De plus, s'il existe un point $y_0 \in \Omega$ tel que $g(y_0) - x_0 \in int\, K$. Alors F est B-s.c.i. en x_0. La multifonction F_0 avec

$$F_0(x) = \{y \in \Omega \,|\, g(y) - x \in int\, K.$$

est alors fortement semi-continue inférieure en x_0 et $F(x_0) \subset cl\, F_0(x_0)$ puisque pour chaque $y \in F(x_0)$ tous les points du segment de droite ouvert entre y et y_0 sont contenus dans $F_0(x_0)$ et la semi-continuité inférieure de F découle du Corollaire 1.1.

Théorème 2.15

Soit Y un espace normé linéaire réel, $M : X \rightrightarrows Y$ est H-s.c.s. en $x_0 \in X$ et l'ensemble $M(x_0)$ est non vide et convexe. Soit de plus la fonction f indépendante de X et convexe et continue sur Y. La fonction v est alors semi-continue inférieure en x_0.

Nous considérons maintenant le problème (P_x) sous les conditions suivantes :

$$Y = \mathbb{R}^n, \tag{2.31}$$

$$M : X \rightrightarrows Y \text{ est B-s.c.i en } x_0 \in X, \tag{2.32}$$

$$S(x_0) \text{ est non vide et borné }, \tag{2.33}$$

$$f(x, .) \text{ est quasiconvexe sur } Y \text{ pour chaque } x \in X \text{ fixe }, \tag{2.34}$$

$$f \text{ est semi-continue inférieure sur } Y \times (x_0) \text{ et il existe un point } y_0 \in S(x_0) \tag{2.35}$$

$$\text{tel que } f \text{ soit semi-continue supérieure en } (x_0, y_0),$$

$$M(x_0) \text{ est convexe et fermé }. \tag{2.36}$$

Théorème 2.16

Si les conditions (2.31) à (2.36) sont remplies, tous les ensembles $M(x), x \in X$, sont convexes et l'application M est fermée en x_0 alors v est continue en x_0, et S est B-s.c.s. en x_0.

Corollaire 2.8

Dans les conditions du Théorème 2.16, l'ensemble des solutions ε-optimal S_ε défini par

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in M(x) \,|\, f(x, y) < v(x) + \varepsilon\}$$

est B-s.c.i. en x_0 pour $\varepsilon > 0$.

Corollaire 2.9
Si les conditions du Théorème 2.16 sont remplies l'application $\bar{S}$ définie par

$$\bar{S}(x,\varepsilon) = \{y \in M(x) \,|\, f(x,y) \leq v(x) + \varepsilon\}, \quad x \in X, \quad \varepsilon \geq 0.$$

est B-s.c.s. en $(x_0, 0)$.

D'après le dernier corollaire et le Lemme 1.7, pour tout suite (y_n) de solutions ε-optimales de (P_x) : La suite (y_n) possède un point d'accumulation et chacun de ses points d'accumulation est appartient à l'ensemble de solutions (S_{x_0}). Si on admet la possibilité $(S_{x_0}) = \emptyset$ alors on obtient un contre-exemple comme suit

Exemple 2.4
$X = Y = \mathbb{R}$, $M(0) = \{0\}$, $M(x) = \{\frac{1}{x}\}$, $x \neq 0$, $f(x,y) = y$. *v ni inférieure ni supérieure semi continue en $x = 0$, S n'est pas H-s.c.s en $x = 0$.*

Corollaire 2.10
Si les conditions (2.31) *à* (2.36) *sont satisfaites et M est H-s.c.s. en x_0 alors v est continue en x_0 et S est B-s.c.s. en (x_0).*

Il est évident que le Théorème 2.30 peut être appliqué à des problèmes paramétrés où

$$M(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, g_i(x,y) \leq 0 \text{ pour tout } i \in I\} \tag{2.37}$$

si f et tous g_i sont quasi-convexes par rapport à y, cependant la condition (2.32) (M est B-s.c.i. en (x_0)) semble présenter des difficultés. L'exemple (2.4) illustre le fait que la condition est nécessaire même juste pour établir la semi-continuité inférieure de v.

Théorème 2.17
Soit les conditions (2.31) *et* (2.33) *remplies pour le problème (P_x) et les ensembles $M(x)$ définis par* (2.37) *avec un ensemble d'indices arbitraire I. Soit les fonctions, f et g_i, $i \in I$, semi-continues inférieures sur $\mathbb{R}^n \times (x_0)$ et quasi convexes pour tout x par rapport à $y \in \mathbb{R}^n$. S'il existe un point $y_0 \in S(x_0)$ tel que $f(.,y_0)$ et $g_i(.,y_0)$ Sont semi-continus supérieurs en (x_0) alors v est semi-continu inférieur en (x_0).*

Exemple 2.5

$$(P_x) = \min\{y \in \mathbb{R} \,|\, xy = 0, y \geq -1\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ici $v(0) = -1$ et $v(x) = 0$, $x \neq 0$ aussi $S(0) = \{-1\}$, $S(x) = \{0\}$, $x \neq 0$

Nous tournons maintenant notre attention vers les problèmes (P_x) décrits par des fonctions convexes et faiblement analytiques. Contrairement aux théorèmes précédents, nous n'avons plus besoin de conditions de point intérieur, de semi-continuité supérieure de M ou de compacité de l'ensemble des solutions $S(x_0)$ pour établir la continuité de la fonction de valeur.

Définition 2.2
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite faiblement analytique si ce qui suit est vrai, pour deux vecteurs quelconques $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}$: Si la fonction $f_{x,u}(\alpha) = f(x + \alpha u)$ est constant sur un intervalle ouvert $(\alpha, \bar{\alpha})$ alors $f_{x,u}(\alpha) = f(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons d'abord le cas particulier que (P_x) est de la forme

$$\inf\{f(y) \,|\, y \in \mathbb{R}^n, g_i(y) \leq x, i = 1, \cdots, m\}, \quad x \in X. \tag{2.38}$$

où X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ et

$$M(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, g_i(y) \leq x, i = 1, \cdots, m\}, \quad x \in X. \tag{2.39}$$

Théorème 2.18
Soit les fonctions f, g_i, $i = 1, \cdots, m$, convexes sur $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$ et

$$J = \{i \,|\, g_i \text{ est faiblement analytique}\}.$$

Alors

1. *la fonction valeur v correspondant à (2.38) est continue en x_0 et S est fermée en x_0 si $M(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$ et il existe un point $y_0 \in M(x_0)$ tel que*

$$g_i(y_0) < x_{i_0} \qquad \text{pour tout } i \in \{1, \cdots, m\} \setminus J.$$

2. *l'ensemble des solution optimale S est B-s.c.i en x_0 si $S(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$ et f et tous g_i sont faiblement analytiques.*

Corollaire 2.11
Dans les conditions du Théorème 2.18(2), il existe une fonction continue $y : X \to \mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$y(x) \in S(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

Nous considérons un problème paramétrée

$$(P_x) = \min\{f(x, y) \,|\, g_i(x, y) \leq 0, i = 1, \cdots, m\}, \quad x \in X, \tag{2.40}$$

où X est un espace métrique f, g_i sont continus sur $\mathbb{R}^n \times X$ et $f(x, .)$, $g_i(x, .)$, $i = 1, \cdots, m$, sont convexes sur $\mathbb{R}^n$ pour chaque $x \in X$.

D'après la définition (2.18), l'ensemble d'indices caractéristiques de $S(x)$ représenter comme suite

$$ch\, S(x) = \{i \in \{, 1 \cdots, m\} \,|\, g_i(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in S(x)\}. \tag{2.41}$$

Par S_I, nous désignons la multifonction défini par

$$S_I(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x, y) \leq v(x), g_i(x, y) \leq 0, i \in I\}, \quad x \in X, \tag{2.42}$$

tel que $I \subset \{, 1 \cdots, m\}$.

Lemme 11
Considérons un problème d'optimisation paramétrique de la forme (2.40) *et soit* $x_0 \in \mathfrak{A}$ *et* $\delta > 0$ *tels que*

1. $f(x_0, .)$ *et* $g_i(x_0, .)$ *sont des fonctions faiblement analytiques pour tout* $i \in I = ch\, S(x_0)$, *et*
2. $dimL^+\, S_I(x) = dimL^+\, S_I(x_0)$. *Si* $M_{|\mathfrak{A}}$ *est B-s.c.i en* x_0 *et* $S_{|\mathfrak{A}}$ *est aussi B-s.c.i en* x_0.

Lemme 12
Soit P *un polyèdre convexe dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : P \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe sur* P. *Alors* f *est semi-continue supérieure sur* P.

Nous considérons maintenant les problèmes

$$\inf\{f_0(x, y) \,|\, y \in Y, f(x, y) \leq 0, \text{ pour tout } i \in I\} \tag{2.43}$$

avec des conditions

$$I \text{ est un ensemble d'indices arbitraires et } X \text{ est un espace linéaire,} \tag{2.44}$$
$$X \text{ est un polyèdre convexe contenu dans } \mathbb{R}^m, \tag{2.45}$$
$$f_0, f_i, \text{ pour tout } i \in I, \text{ sont des fonctions convexes à valeurs réelles sur } Y \times X, \tag{2.46}$$
$$\text{les valeurs} v(x) \text{ sont finies pour tout } x \in X. \tag{2.47}$$

On confirme facilement que v est convexe sur X et que le théorème suivant suit immédiatement.

Théorème 2.19
La fonction de valeur v *au problème* (2.43) *est semi-continue supérieure sur* X *si les conditions* (2.44) *à* (2.47) *sont satisfaites*

Soit le problème suivant

$$\inf\{f(x, y) \,|\, y \in M\}, \quad x \in X, \tag{2.48}$$

satisfaire les conditions suivantes

$$M \text{ est un ensemble non vide}, X \text{ est un polyèdre convexe contenu dans } \mathbb{R}^m, \tag{2.49}$$
$$f : M \times X \to \mathbb{R} \text{ est concave en } x \text{ pour tout } y \text{ fixe,} \tag{2.50}$$
$$\text{les valeurs } v(x) \text{ sont finies pour tout } x \in X. \tag{2.51}$$

Théorème 2.20
La fonction de valeur v *correspondant au problème* (2.48) *est semi-continue inférieure sur* X *si les conditions* (2.49) *à* (2.51) *sont satisfaites*

Démonstration
Pour x_1, $x_2 \in X$ et $\alpha \in (0,1)$ on a

$$\begin{aligned} v(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &\geq \inf\{\alpha f(x_1, y) + (1-\alpha) f(x_2, y) \,|\, y \in M\} \\ &\geq \alpha v(x_1) + (1-\alpha) v(x_2). \end{aligned}$$

Donc v est concave sur M et semi-continue inférieure d'après le Lemme 12.

Conclusion

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, analyser et résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble.

Dans le cadre multivoque, on a, l'optimisation multivoque, qui consiste à minimiser une application multivoque appelées fonction objective à valeurs dans un espace vectoriel normé, appelé espace objectif, partiellement ordonné dans un certain sens et X est un sous-ensemble non vide du domaine de F appelé ensemble contrainte ou domaine de faisabilité. Résoudre ce genre de problème revient à déterminer tous les éléments $x^\star \in X$ pour lesquels il existe $y^\star \in F(x^\star)$ tel que $y^\star$ soit un élément minimal dans un certain sens de l'ensemble $F(X)$.

Ce mémoire a pour objectif de présenter quelques résultats de l'optimisation multivoque qui constitue un domaine de recherche très actif.

Bibliographie

[1] Ahoulou Kacou Rémy, Méthode des sous et des sur-solutions dans l'étude des Équations Différentielles Multivoques du Second Ordre, Thèse de Doctorat, Université de cocody Abidjan. 2007.

[2] Ayadi Amina Azeb Chikh Zineb, Théorème de Point Fixe sur un Espace Métrique Partiel et Cône, Master Academique, Université , Hamma Lakhdar d'eloued (2018).

[3] Bara Bchir, Sur les Perturbations Singulières dans les Inclusions Différentielles - Sur la Compétition dans le Chémostat avec Inhibiteur Externe, Thèse de Doctorat, Université Aboubakr Belkaïd ?. Tlemcen, 2019.

[4] B. Bank, J.Guddat, D. Klatte, B. Kummer, K. Tammer (auth)-Non-linear Parametric Optimisation-Basel : Boston, Stuttgart, Birkhauser 1983.

[5] Benahmed Sfya, Sur les Méthodes Variationnelles en Analyse Multivoque, Thèse de Doctorat, Université de Toulouse, 2009.

[6] Bernd Luderer, Leonid Minchenkoand et Tatyana Satsura, "Multivalued and Nonlinear Programming Problems with Perturbations", Springer Science, 2002.

[7] Claude Berge-Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques, Dunod, Paris 1982.

[8] Harrache Fazia epouse Hermime, Application de la Programmation bi-niveaux au Problème de Contrôle Optimal, Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2013.

[9] Géraldine Pascaline, Convergence de Fisher et H-Différentiabilité des Applications Multivoques. Thèse de Doctorat, Université des Antilles et de Guyane, 2011.

[10] Manne.A.S, Note on Parametric Linear Programming. Rand-corps. Rev. P468 (1953).

[11] Mehamdi Mohamed Lamine, Sur la Linéarité des Applications Multivoques, Mémoire de Magister, Université Mentouri- Constantine, le 27 Mai 2010.

[12] Mohammed Merouani, Stabilité Différentielle dans un Problème d'Optimisation Paramétré, Mémoire de Magister en Mathématiques, Université d'Oran, 2011.

[13] Oumaameur Hassani, Analyse Multivoque et Inclusions Différentielles, Mémoire de Master Académique, Université Dr Tahar Moulay-Saïda, Juin 2015.

[14] Yvesner Marcelin, Développements récents en Analyse Multivoque : Prédérivées et Optimisation Multivoque, Thèse de Doctorat, Université des Antilles, 2016.