Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Garna Loubna

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : mathématique appliquée

Thème

PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LE LAPLACIEN

Soutenu publiquement le 14 octobre 2020 devant le jury composé de

K.Sidhoum	Président
DERBAZI Ammar	Encadreur
K.Dakar	Examinateur

Promotion 2019/2020

Résumé

Dans ce mémoire on a donné un rappel sur la théorie des distributions, on va parle sur la définition et la dérivation de distribution, la convergence et son convolution. Nous définissons les espaces de Sobolev puis les propriétés de ces espaces qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire sont alors présentées ou démontre.
On a vu comment démontrer l'existence et l'unicité du problème de Dirichlet homogène par le théorème de Lax-Milgram et quelques inégalités.

Remerciement

Je remercie ALLAH le clément et le miséricordieux Mes premiers remerciements vont à docteur Ammar Derbazi qui a dirigé mes travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentillesse Je remercie également tous les membres de jury pour l'honneur qu'ils mes en acceptant de présider et examiner ce travail.
Je ne saurai oublier de remercier docteur BENSAID le chef de département de mathématique et l'ensemble des enseignants département de mathématique qui ont participé dans notre formation

dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère , a mon cher père , a mon mari qui m'a toujours soutenu ,qui m'a aide à affronter les difficultés , a tout mes enseignants pour leurs utiles conseils , leur patience, leur persévérance A mes très chères sœurs et mes frères et mon fils

A toute ma famille

A toute les amis

Table des matières

Introduction

Problème de Dirichlet, portent le nom du savant Johann Peter Gustav lejeune Dirichlet qui est un mathématicien allemand (né le 13 février 1805 et décédé le 05 mai 1859).

En 1829, Dirichlet a publié un mémoire célèbre qui donne des conditions sur les fonctions afin de déterminer si la série de Fourier converge .avant lui, non seulement Fourier mais aussi Poisson et Cauchy avaient tenté sans succès de trouver une prouve de convergence rigoureuse.

Le mémoire met en évidence une erreur de Cauchy et présente un test appelé aujourd'hui test de Dirichlet pour la convergence des série. la fonction de Dirichlet introduite dans cet article est un exemple de fonction non intégrable et dans la démonstration du théorème. l'auteur introduit le noyeau de Dirichlet et l'intégrale de Dirichlet.

Dirichlet a également étudié le problème aux limites ,pour l'équation de Laplace, démontrant l'unicité de la solution, depuis on appelle problème de Dirichlet ce type de problème en théorie des équations aux dérivées partielles.

L'objet de ce mémoire est étudié l'existence et l'unicité du problème de Dirichlet.

Ce mémoire contient trois chapitres :

le premier chapitre contient les bases de la théorie de distribution : La définition de distribution, leur dérivation et convergence et son convolution.

Dans le deuxième chapitre nous allons commencer par donner certain rappels sur l'espace L^p. ensuite, on parle de les espaces de Sobolev qui jouent un rôle très importantes dans l'étude de ce problème.

Le dernier chapitre on va étudier l'existence et l'unicité du problème de Dirichlet dans le cas homogène.

Chapitre 1

Distribution

1.1 Définition et exemples de distribution

1.1.1 Définition de fonction test

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, une fonction test sur Ω est une fonction dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivable à support bornée.
L'ensemble de ces fonctions est désigné par $D(\mathbb{R})$ où simplement D est espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

1.1.2 Définition de distribution

On appelle distribution (sur $\mathbb{R}$) une forme linéaire continue sur D que veut dire une application $T : \varphi \in D \longrightarrow T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi_1 + \varphi_2\rangle &= \langle T, \varphi_1\rangle + \langle T, \varphi_2\rangle && (1.1)\\
\langle\ T, \lambda\varphi\rangle &= \lambda\langle T, \varphi\rangle && (1.2)\\
|\langle T, \varphi\rangle| &= |\int_\Omega T(x)\varphi(x)dx| && (1.3)\\
&\leq C \sup_{X\in\Omega} |\varphi(x)| && (1.4)
\end{aligned}$$

L'espace des distributions noté par D' un espace dual de l'espace vectoriel des fonctions test

Remarque 1.1. *on a deux types de distribution :*

- ***Distribution régulière :*** *soit f une fonction localement intégrable, f définie une distribution dite régulière noté T_f définie par :*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

- ***Distribution singulière :*** *tout distribution qui n'est pas régulière est dite singulière.*

Exemple 1.1. *distribution de Dirac à l'origine δ est définie par $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ elle est n'est pas régulière*

1.1.3 Propriétés

- Étant données deux fonctions localement intégrable f et g égale presque partout définissant une même distribution alors $T_f = T_g$
- $T_f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ pour presque tout x.

1.1.4 Des exemples sur distribution

- $F(x) = \ln|x|$ La fonction $\ln|x|$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ car elle est localement intégrable, en effet, la fonction $\ln|x|$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc localement intégrable.

  En autre, dans un voisinage de 0 par exemple $]-1,1[$ l'intégrable $\ln|x|dx$ converge on à :

$$\int_{-1}^{0} \ln(-x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \ln(-x) = -1$$

  et

$$\int_{0}^{1} \ln(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1} \ln(x) = -1$$

donc $\int_{-1}^{1}\ln(|x|)$ existe alors elle localement intégrable donc elle définit une distribution.

- La fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

elle définit une distribution car elle localement intégrable.

- La fonction signe : sgn : $\left\{\frac{|x|}{x}\right\}$ est une distribution.
- La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est un fonction localement intégrable alors elle définit une distribution.
- On à

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| \text{ si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases}$$

1.2 Dérivation de distribution

1.2.1 Définition de dérivée de distribution

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathbb{C}^1$ (à dérivée première continue) on a :

$$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)dt$$

On utilisent intégration par partie donc :

$$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)dt$$

et on a $[f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ Car φ à support borné donc

$$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)dt$$

Alors $\langle T_{f'}, \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle$

Exemple 1.2. *On a la fonction sign :*

$$sng = \begin{cases} -1 \ \ si \ x < 0 \\ \\ 1 \ \ si \ x > 0 \end{cases}$$

Soit $\varphi \in D$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle sgn', \varphi\rangle &= -\langle sgn, \varphi'\rangle && (1.5)\\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} sgn(x)\varphi'(x)dx && (1.6)\\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx && (1.7)\\
&= [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - [\varphi(x)]_{0}^{+\infty} && (1.8)\\
&= \varphi(0) - (-\varphi(0)) && (1.9)\\
&= 2\varphi(0) = 2\langle \delta, \varphi\rangle && (1.10)
\end{aligned}$$

Proposition 1.1. *Toute distribution admet des dérivées de tout ordre qui sont aussi des distributions.*

Démonstration 1.1 (Démonstration). *Soient T une distribution et $\varphi \in D$, on a par définition.*

$$\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle$$

$$\langle T'', \varphi\rangle = -\langle T', \varphi'\rangle = \langle T, \varphi''\rangle$$

$$\langle T''', \varphi\rangle = -\langle T'', \varphi'\rangle = \langle T', \varphi''\rangle = -\langle T, \varphi'''\rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle T^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle T, \varphi^j \rangle$$

Où $\varphi', \varphi'', \varphi''' \cdots \varphi^{(j)}$ *Existent car* $\varphi \in C^\infty$, *montrant maintenant que* $T^{(j)}$ *est une distribution , elle est linéaire , soient* $\varphi_1, \varphi_2 \in D$. *Et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$\langle T^{(j)}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T^{(j)}, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T^{(j)}, \varphi_2 \rangle$$

Pour établir la continuité de $T^{(j)}$ *, on suppose que la suite* (φ_k) *converge dans* D *vers* φ, *alors par définition* $(\varphi_k^{(j)})$ *converge uniformément vers* $\varphi^{(j)}$ *et par conséquence* $\langle T^{(j)}, \varphi_k \rangle = (-1)^j \langle T, \varphi_k^{(j)} \rangle$ *converge vers* $(-1)^j \langle T, \varphi^{(j)} \rangle = \langle T^{(j)}, \varphi \rangle$

1.3 Opération élémentaire

Pour tout fonction test on a :

- **Somme :** pour deux distribution T_1, T_2

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$$

- **Produit par nombre :** pour une distribution T et un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$: $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$
- **Produit par une fonction C^∞ :** Soient un distribution T de D' et α une fonction C^∞ on définit leur produit αT par : $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$

1.4 Multiplication des distribution :

Il n'existe pas de moyen de multiplier entre elle deux distribution quelconque, autre si f et g sont deux fonction localement intégrable alors leurs produit ne l'est pas nécessairement localement intégrable.

1.5 Convergence d'une distribution :

1.5.1 Définition de convergence d'une distribution :

On dit qu'une suite de distribution (T_k) converge dans D' vers une distribution T si pour tout $\varphi \in D$, la suite numérique $\langle T_k, \varphi \rangle$ converge dans $\mathbb{C}$ vers le nombre $\langle T, \varphi \rangle$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

Exemple 1.3. *On va montre que δ_k converge 0 on a $\langle \delta_k, \varphi \rangle = \varphi(k)$ et puisque φ est à support bornée alors $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle = \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \varphi(k) = 0$*

Proposition 1.2. *Soit $f_k(x)$ une suite de fonction localement intégrable et supposons qu'elle converge uniformément vers une fonction $f(x)$, alors la fonction $f(x)$ est localement intégrable et la suite des distributions f_k associées aux fonction $f_k(x)$ converge vers la distribution f associée à $f(x)$.*

Démonstration 1.2. *On a :*

$$\begin{aligned}
|\langle f_k, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| &= |\int_{-\infty}^{+\infty} (f_k(x) - f(x))\varphi(x)dx)| && (1.11)\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f_k(x) - f(x)||\varphi(x)|dx) && (1.12)\\
&\leqslant \sup |f_k(x) - f(x)|. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|dx \right). && (1.13)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} (\sup |f_k(x) - f(x)|) = 0$(converge uniforme) et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|dx$ est fini. (φ à support bornée) alors $\langle f_k, \varphi \rangle$ Converge vers $\langle f, \varphi \rangle$.

Proposition 1.3. *Soit $(f_k(x))$ une suite de fonction localement intégrable supposant que :*

- *La suite $(f_k(x))$ converge simplement presque par tout vers une fonction $f(x)$*
- *Il existe une fonction localement intégrable $g(x)$ tell que $|f_k(x)| \leqslant g(x)$. alors la fonction $f(x)$ est localement intégrable et la suite des distributions f_k associées aux fonction $f_k(x)$ converge vers la distribution f associée à $f(x)$.*

Démonstration 1.3. *On a la fonction $f(x)$ est localement intégrable et pour toute fonction $\varphi \in D$ On a :*

$$\begin{aligned}
\lim_{k \longrightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle &= \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\varphi(x)dx && (1.14)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k \longrightarrow \infty} f_k(x)\varphi(x)dx && (1.15)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx && (1.16)\\
&= \langle f, \varphi \rangle && (1.17)
\end{aligned}$$

Proposition 1.4. *Si une suite de distribution (T_k) Converge vers une distribution T alors les distributions dérivées (T'_k) convergent vers T'.*

Démonstration 1.4. *Par la définition de la dérivée de distribution on a :*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \langle T'_k, \varphi \rangle = -\lim_{k \longrightarrow \infty} \langle T_k, \varphi' \rangle = -\langle T_k, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle$$

d'où $\lim_{k \longrightarrow \infty} T'_k = T'$

1.6 Convolution

1.6.1 Rappel sur le produit de convolution de deux fonction

Le produit convolution de deux fonctions f et g est définit par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

1.6.2 Translation d'une distribution

Soit $f(x)$ une fonction localement intégrable et f la distribution qui lui est associée , on veut déterminer la distribution associée à $f(x-a)$ où a est constante posons par définition : $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$, on a pour tout $\varphi \in D$.

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau_a f)(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\varphi(x)dx$$

En posant $y = x - a$ on obtient :

$$\langle \tau_a f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y+a)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)(\tau_{-a}\varphi)dy = \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle$$

Et généralement , pour une distribution T , on a $\langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle$.

Proposition 1.5. *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors la fonction $f * g$ existe et on a :*

$$|f * g|_\infty \leqslant \| f \|_2 \| g \|_2$$

Démonstration 1.5. *En posons $\tau_t g(x) = g(x-t)$ on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau_t g(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid g(x-t) \mid^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid g(s) \mid^2 ds < +\infty$ Où $s = x - t$ et dès lors $\tau_t g \in L^2(\mathbb{R})$, l'inégalité de Schwarz entraine que :*

$$\begin{aligned} \mid f * g \mid^2 (x) &= \mid \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\tau_t g(t)dt \mid^2 && (1.18)\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau_t g(x)|^2 dt && (1.19)\\ &= \| f_2 \|_2^2 \| g \|_2^2 . && (1.20) \end{aligned}$$

Donc $f * g$ est bien définie et $\mid f * g \mid_\infty \leq \| f \|_2 \cdot \| g \|_2$

Proposition 1.6. *Soit $f.g \in L^1(\mathbb{R})$ alors :*

- *$f * g$ existe presque par tout $f * g \in L^1(\mathbb{R})$*
- *$\| f * g \|_1 \leqslant \| f \|_1 . \| g \|_1$.*
- *$(f * g) * h = f * (g * h)$ où $h \in L^1(\mathbb{R})$*

Démonstration 1.6.

- *En effectuant le changement de variable $u = t, v = x - t$ dont le Jacobien est égale à 1 , on obtient immédiatement*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \| g(x-t) \mid dxdt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(u) \mid du \int_{-\infty}^{+\infty} \mid g(v) \mid dv < +\infty$$

. Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dès lors ,la fonction $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dx$ existe presque

par tout et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

- *On a :*

$$\| f * g \|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)dx \tag{1.21}$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} | f(t) || g(x-t) | dtdx \tag{1.22}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} | f(u) | du \int_{-\infty}^{+\infty} | g(v) | dv \tag{1.23}$$
$$= \| f \|_1 . \| g \|_1 \tag{1.24}$$

- *On a :* $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, x \in \mathbb{R}$

$$((f * g) * h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x).h(y-x)dx, y \in \mathbb{R}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)h(y-x)dtdx$$

$et(g * h)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)h(z-s)ds, z \in \mathbb{R}$

$$(f * (g * h))(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)(g * h)(y-r)dr$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)g(s)h(y-r-s)drds$$

en posant $r = t$, *et* $s = x - t$ *on obtient :*

$$(f * (g * h))(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)h(y-t-x+t)dxdt$$

donc $f*(g*h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)h(y-x)dtdx$ *alors* $((f*g)*h) = f*(g*h)$

1.7 Convolution d'une distribution

Soient f et g dans $L^1(\mathbb{R})$, la fonction $f * g$, étant dans $L^1(\mathbb{R})$, elle définit une distribution régulière $T * g$ pour tout fonction φ de $D(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt\varphi(x) \right\} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(x)dx)g(t)dt \right]$$

Il apparait naturellement la quantité

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+t)dy = \langle T_f, \tau_{-t}\varphi \rangle$$

. Donc :$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle T_g, \langle T_f, \tau_{-t}\varphi \rangle \rangle$ Alors :$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle g(t), \langle f(x), \varphi(x+t) \rangle \rangle$

Chapitre 2

Espace de Sobolev

2.1 Les espace L^P

2.1.1 Fonction mesurable

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\alpha = \{x \in \Omega | f(x) \geqslant \alpha\}$ est mesurable au sens de Lebesgue

2.1.2 Fonction intégrable

On dit que une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si $\int |f| < \infty$.

2.1.3 Espace de Lebesgue

Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p < \infty$ on appelle l'espace de Lebesgue L^p l'ensemble : $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | f$ mesurable et $|f|^p$ intégrable de plus, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$., on pose :

$$\| f \|_{L^p} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable , alors on définit $\| \, . \, \|_{L^\infty}$:

$$\| f \|_{L^\infty} = \sup ess(f) = \inf\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \text{ p.p } \}. \tag{2.1}$$

Théorème 2.1. *On a les trois propriétés suivantes :*

- L^P *est un espace vectoriel et* $\| \, . \, \|_{L^p}$ *est une norme pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.
- L^P *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.
- L^P *est séparable pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.

Théorème 2.2 (Théorème de convergence dominée). *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonction mesurables tell que* $|f_n| \leq g$ *Presque par tout, ou* g *est une fonction intégrable supposons de plus* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ *Presque par tout alors* f *est intégrable et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n = \int f$

2.1.4 Définition de support d'une fonction continue

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue , on appelle support de f l'ensemble $\text{supp}(f) = adh\{x \in w : f(x) \neq 0\}$

2.1.5 Définition de l'espace $C_c(\Omega)$

On désigne par $C_c(\Omega)$, l'espace des fonctions continue sur Ω à support compact ; c'est-à-dire $C_c(\Omega) = \{f : \text{supp}(f) \subset \Omega\}$.

2.1.6 Inégalité de Holder

Soit p' la conjugué de p que veut dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ Alors $f.g \in L^1$ et on a : $\int_\Omega |f.g| \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^{p'}}$

2.1.7 Inégalité de Young

Soient a et b deux réels positifs, p et p' des réels strictement positifs vérifiant $\{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\}$ alors an a : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$

2.2 Convergence faible dans les espaces L^P

Définition 2.1. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert*

- *Si* $1 \leq p < +\infty$ *on dit qu'une suite* u_n *converge faiblement vers* u *dans* L^p *si* $u_n, u \in L^p$ *et si* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega u_n(x) - u(x)]\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in L^{p'}$, *on note dans ce cas là* $u_n \rightharpoonup u$.

b *Si* $p = +\infty$, *on dit que la suit* u_n *converge faiblement vers* u *dans* L^∞*si* $u_n, u \in L^\infty$ *et si* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega u_n(x) - u(x)]\varphi(x)dx = 0$.

2.3 Forme linéaire et dual de L^p

Définition 2.2 (Définition de forme linéaire). *Une forme linéaire sur un espace vectoriel* E *est une application linéaire* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.3 (Définitions de la continuité d'une forme linéaire). *Une forme linéaire* f *dans* E *est continue si et seulement s'il existe* $C > 0$ *une constante tell que* $\| f \|_E \leq C$.

2.3.1 Dual d'un espace de Banach

Soit E un espace de Banach, on désigne par E' l'espace dual de E c'est-à-dire $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{est une forme linéaire et continue}\}$
E' est muni de la norme dual :

$$\| f \|_{E'} = \sup_{x \in E} | f(x) | = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0.}} \frac{| f(x) |}{\| x \|_E}$$

Théorème 2.3 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit* $1 < p < +\infty$ *et soit* $\varphi \in (L^p)'$, *alors il existe* $u \in L^p$ *unique tell que :* $\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \forall f \in L^p$. *De plus on a :* $\| u \|_{L^{p'}} = \| \varphi \|_{(L^p)'}$.

Remarque 2.1. - *Théorème de Fubini : Soit* Ω_1 *et* Ω_2 *Des ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *On suppose que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *alors pour presque par tout* $x \in \Omega_1, F(x, y) \in$

$L^1_y(\Omega_2)$ *et* $\int_{\Omega_2} \mid F'(x,y) \mid dy \in L^1_x(\Omega_1)$.

De même , pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega) et \int_{\Omega_1} \mid F(x,y) \mid dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

de plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dxdy$$

- D^α *est la dérivée d'ordre* $\mid \alpha \mid$: $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$

2.4 Espace de Sobolev en dimension 1

2.4.1 Définition de dérivée faible

On dit que $u \in L^p(I), 1 \leq p < +\infty$ à une dérivable faible si $\exists v \in L^p(I)$ tell que :

$$\int_I u(t)\varphi'(t)dt = -\int_I v(t)\varphi(t)dt, \forall \varphi \in D$$

Définition 2.4 (Définition de l'espace de Sobolev $W^{1,p}$). *Pour* $1 \leq p < +\infty$ *On définit l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ *par* $\{u \in L^p(I), u' \in L^p$ *tell que* u' *la dérivée faible de* $u\}$ *muni de norme* $\| u \|_{W^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \| u' \|_{L^p}$ *Pour* $p = 2$ *on note* $W^{1,2}(I) = H^1(I)$ *et on le muni du produit scalaire :* $\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2}$ *et sa norme associée* $\| u \|_{H_1} = (\| u \|^2_{L_2} + \| u' \|^2_{L_2})^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 2.1. *Soit* $I =]-1;1[$ *on va montre que la fonction :* $u(x) = \frac{1}{2}(\mid x \mid + x)$ *appartient à* $W^{1,p}$ *pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$ *et que*

$$u'(x) = H(x) = \begin{cases} 1 \ si \ 0 < x < 1. \\ \\ 0 \ si \ -1 < x < 0. \end{cases}$$

On a u *est continue et bornée elle appartient donc à* L^p *pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$ *on va montre que sa dérivée aux sens de distribution vaut* H *: On a pour tout*

$\varphi \in C_c^1(I)$.

$$-\int_I u\varphi' = -\int_{-1}^0 u\varphi' - \int_0^1 u\varphi' = \int_0^1 \varphi = \int_I H\varphi$$

ainsi , $u' = H$ *or* H *est bornée sur* I *et donc* $H \in L^p$ *pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.

Propriété 2.1 (Propriétés $W^{1,P}$). *L'espace de Sobolev est :*

- *Un espace de Banach pour* $1 \leq p < +\infty$.
- *Réflexif* $1 < p < +\infty$.
- *Séparable* $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration 2.1. - ***Si*** $(u_n)_{n\geq 1}$ ***est une suite de Cauchy dans*** $W^{1,P}(I)$ ***alors*** $(u_n)_{n\geq 1}$ ***et*** $(u'_n)_{n\geq 1}$ ***sont Cauchy dans*** $L^p(I)$ ***donc*** $u_n \xrightarrow[n\to+\infty.]{L^p} u$

et $u'_n \xrightarrow[n\to+\infty.]{L^p} v$ ***Pour tout*** $\varphi \in D^1(I) : \langle u, \varphi\rangle = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \langle u'_n, \varphi\rangle = -\langle v, \varphi\rangle$ ***donc u a une dérivée faible et*** $u' = v$

- *Soit :*

$$T : W^{1,p}(I) \longrightarrow L^p(I) \times L^p(I). \tag{2.2}$$

$$u \longrightarrow T(u) = (u, u'). \tag{2.3}$$

alors T *est une isométrie si l'on met sur le produit* $(L^p(I) \times L^p(I))$ *la norme* $\| u, v \| = \| u \|_p + \| v \|_p$ *et* $L^p(I) \times L^p(I)$ *est séparable et pour* $1 < p < +\infty$ *et réflexif donc* $W^{1,P}(I)$ *aussi*

2.5 Propriétés et caractérisation des fonctions de $W^{1,P}(I)$

lemme 2.1. *Soit* $f \in L^1_{Loc}(I)$ *telle que* $\int_I f\varphi' = 0, \forall \varphi \in C_c^1(I)$ *alors il existe une constante* C *tell que* $f = C$ *presque par tout.*

lemme 2.2. *Soit $g \in L^1_{Loc}(I)$, pour y_0 fixé dans I on pose*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt, x \in I$$

. alors $v \in C(I)$ et $\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_c(I)$

Théorème 2.4. *Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors il existe une fonction $\tilde{u} \in C(I)$ tell que $u = \tilde{u}$ Presque par tout sur I et $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \forall x, y \in \bar{I}$*

Démonstration 2.2. *On fixe $y_0 \in I$ et on pose $\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$ alors $\bar{u}(x) \in C(I)$ et on va calculer $\int_I \bar{u}\varphi'$*

$$\int_I \bar{u}\varphi' = \int_I [\int_{y_0}^{x} u'(t)dt]\varphi'(x)dx = -\int_x^{y_0} dx \int_x^{y_0} u'(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^{b} dx \int_{y_0}^{x} u'(t)\varphi'(x)dt$$

On applique le théorème du Fubini on obtient :

$\int_I \bar{u}(t)\varphi'(t) = -\int_a^{y_0} u'(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b u'(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx = -\int_a^{y_0} u'(t)dt[\varphi(t) - \varphi(a)]dx + \int_{y_0}^b u'(t)dt[\varphi(b) - \varphi(t)]dx = -\int_I u'(t)\varphi(t)dt$

Remarquons ensuite que $\{\varphi' : \varphi \in D^1(I)\} = \{\psi \in D^0(I) telque : \int_I \psi(t)dt = 0\}$ En effet , si $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [a,b]$ on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ Puisque φ' est continue $\int_I \varphi'(t)dt = \varphi(a) - \varphi(b) = 0$. Inversement si $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq [a,b]$ et $\int_I \psi(t)dt = 0$. On pose $\varphi(x) = \int_a^x \psi(t)dt$, comme ψ est continue ; φ est continument dérivable et $\varphi' = \psi$, de plus $\varphi(x) = 0$ pour $x \leq a$ (car $\psi(t) = 0$ pour $t \leq a$ et $\varphi(x) = 0$ pour $x \geq b$) par ce que d'une part $\int_a^b \psi(t)dt = \int_I \psi(t)dt = 0$ et d'autre part $\psi(t) = 0$ Pour $t \geq b$.

Considérons alors les formes linéaires :

$$J_1 : \begin{cases} D^o(t) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi \longrightarrow \int_I \psi(t)dt. \end{cases}$$

$$J_2 : \begin{cases} D^o(t) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi \longrightarrow \int_I [u(t) - u_0(t)]\psi(t)dt. \end{cases}$$

Les égalités précédents disent $\ker J_1 \subseteq \ker j_2$ *il existe donc* $C \in \mathbb{R}$ *tell que :* $J_2 = CJ_1$ *cela veut dire que :* $\int_I [u(t) - \bar{u}(t) - c]\psi(t)dt = 0, \forall \psi \in D^0(I)$ *c'est en particulier vrai pour tout* $\psi \in D^1(I)$ *et l'on vu qu'alors* $u - \bar{u} - c = 0$ *presque par tout sur* I *, ainsi* u *est presque par tout égale sur* I *à la fonction* $\bar{u} + c$ *qui est continue sur* I.

2.5.1 Caractérisation des fonctions de $W^{1,P}(I)$

Soit $u \in L^p$ avec $1 < p < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- $u \in W^{1,p}$

2- Il existe une constante C tell que : $| \int u\varphi' | \leq C \parallel \varphi \parallel_{L^{p'}} \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$

Démonstration 2.3. $1 \Rightarrow 2$ *: soit* $u \in W^{1,p}$ *donc* $u' \in L^p$*, en utilisant l'inégalité de Holder on obtient directement :*

$$| \int_I u\varphi' | = | \int u'\varphi | \leq \parallel u' \parallel_{L^p(I)} . \parallel \varphi \parallel_{L^{p'}(I)} \leq C \parallel \varphi \parallel_{L^{p'}(I)}$$

. $2 \Rightarrow 1$ *: on considère la forme linéaire* $\psi : C_c^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\psi(\varphi) = \int u\varphi'$. *comme* C_c^∞ *est un sous espace dense de* $L^{p'}$ *Et puisque* ψ *est continue pour la norme de* $L^{p'}$*, alors on peut la prolonger en une forme linéaire et continue* $\bar{\psi}$ *sur* $L^{p'}$*, d'après le théorème de représentation de Riesz , il existe* $g \in L^p$ *tell que :* $\langle \bar{\psi}, \varphi \rangle = \int g\varphi, \forall \varphi \in L^{p'}$ *et donc particulier* $\int u\varphi' = \int g\varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty$ *d'où* $u \in W^{1,p}$.

Proposition 2.1. *Soit* (u_n) *une suite de* $W^{1,P}$ *tell que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* L^p *et* u'_n *converge vers une certaine limite dans* L^p*, alors* $u \in W^{1,p}$ *et* $\parallel u_n - u \parallel_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$.

Démonstration 2.4. *Supposons que* u'_n *converge vers une fonction* a *dans* L^p*, comme on a* $u_n \in W^{1,p}(I), \int_I u_n\varphi = -\int_I u'_n\varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$.
en passant à la limite ; on obtient : $\int_I u\varphi = -\int_I a\varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$.
donc $u \in W^{1,p}, u' = a$ *et* $\parallel u_n - u \parallel_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$

lemme 2.3. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *alors il existe une constante* $C > 0$ *tell que* $\forall x \in [a, b], \forall u \in W^{1,p}(a, b) : | u(x) | \leq C \mid u \mid_{W^{1,p}(a,b)}$.

Démonstration 2.5. *On a :* $| u(x) | \leq | u(a) | + \int_a^x u'(t)dt$ *On applique inégalité de Holder , on obtient* $| u(x) | \leq | u(a) | + (b-a)^{\frac{1}{p'}} | u' |_p \leq C(| u(a) | + | u' |_p)$ *On déduit que l'application* $u \longrightarrow \| u \| = | u(a) | + | u' |_p$ *est une norme sur* $W^{1,p}(a,b)$ *de plus* $(W^{1,p}(a,b), \| . \|)$.

2.6 Théorème de densité

Théorème 2.5 (Théorème de densité). *Soit* $u \in W^{1,p}(I)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$ *; alors il existe une suite* u_n *dans* C_c^∞ *tell que* $u_{n/I} \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}(I)$.

2.6.1 Corollaire

On suppose que I n'est pas bornée et on prend $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$ alors on a : $\lim\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} u(x) = 0$

Démonstration 2.6. *Par le théorème de densité ; il existe une suite* $(u_n)_{n \geq 1} \in C_c^1(\mathbb{R})$ *tell que* $u_{n|I} \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}(I)$, *on déduit que* $\| u_n - u \|_{L\infty(I)} \longrightarrow 0$ *et donc on obtient* $\lim\limits_{\substack{(|x| \in I) \\ x \longrightarrow \infty}} u(x) = 0$, *en effet si* $\varepsilon > 0$ *est donnée On choisit n assez grand pour que* $\| u_n - u \|_{L^\infty} (I) < \varepsilon$ *or pour* $| x |$ *assez grand on a* $u_n(x) = 0($ *puisque* $u_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ *)et donc* $| u(x) | < \varepsilon$

2.6.2 Dérivation d'un produit

Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $uv \in W^{1,p}(I)$ Et :

$$(uv)' = u'v + uv' \cdots \tag{2.4}$$

de plus on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_x^y u'v = u(x).v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv', \forall x, y \in \bar{I} \tag{2.5}$$

Démonstration 2.7. *On a* $u \in L^{\infty}$ *et donc* $uv \in L^p$ *commençons par le cas où* $1 \leq p < \infty$ *, soit* (u_n) *et* (v_n) *des suites de* $C_c^1(\mathbb{R})$ *telles que* $u_{n|I} \longrightarrow u$ *et* $v_{n|I} \longrightarrow v$ *dans* $W^{1,p}(I)$ *alors* $u_n \longrightarrow u$ *et* $v_n \longrightarrow v$ *dans* $L^{\infty}(I)$ *et par conséquent* $u_n v_n \longrightarrow uv$ *dans* L^{∞} *et dans* L^p *on a de plus* $(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \longrightarrow u'v + uv'$ *dans* L^p.

Il en résulte que $uv \in W^{1,p}(I)$ *et que* $(uv)' = u'v + uv'$ *en appliquant la proposition* $\| u_n - u \|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$ *on obtient ensuite.*

2.5 en intégrant 2.4. supposons maintenant que $u, v \in W^{1,\infty}(I)$ *alors* $vu \in L^{\infty}(I)$ *et* $u'v + uv' \in L^{\infty}(I)$.

il nous reste à vérifier que $uv \in W^{1,p}(I)$*, c'est-à-dire que* $\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi, \forall \varphi \in C_c^1(I)$.

Pour cela, fixons un intervalle ouvert bornée $J \subset I$ *tell que* $\operatorname{supp}\varphi \subset J$*, par conséquent,* $u, v \in W^{1,p}(J)$ *pour tout* $p < \infty$ *et d'après ce qui précède on sait que* $\int_J uv\varphi' = -\int_J (u'v + uv')\varphi$ *c'est-à-dire* $\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi$

2.7 Résolution des problème aux limites par un méthode variationnelle

Théorème 2.6 (Théorème de Lax-Milgram). *Soient* H *un espace de Hilbert et* a *une forme bilinéaire sur* H *si* a *est continue et coercive que veut dire* $\exists \alpha > 0, C > 0$ *tell que* $| a(u,v) | \leq C \| u \| \| v \|$ *et* $a(u,u) \geq \alpha \| u \|^2$

alors on peut affirmer que si L *est une forme linéaire sur* H *:*

- *Il existe un unique* $u \in H$ *tell que* $a(u,v) = L(v), \forall v \in H$.
- *Si de plus* a *est symétrique , si on pose* $J(u) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$ *Alors* $J(u) = \min_{v \in H} J(v)$

Démonstration 2.8. *Par application de théorème de Riesz sur les formes linéaires continue, il existe un vecteur* $f \in H$ *tell que* $\forall v \in H, L(v) = \langle f, v \rangle$ *Par application de ce même théorème aux formes bilinéaire continue, il existe un endomorphisme linéaire continue* $A \in L(H)$ *tel que* $\forall u, v \in H, a(u,v) = \langle Au, v \rangle$ *La proposition* (a) *se réécrit alors :* $\exists u \in H, Au = f$ *pour prouver cette proposi-*

tion , il suffit donc de montre que A est une bijection de H sur H. On montre dans un premier temps que l'opérateur est injectif, puis qu'il est surjectif par la coercivité de a et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $v \in H$.

$$\alpha \parallel v \parallel^2 \leq a(v,v) = \langle Av, v\rangle \leq \parallel Av \parallel \parallel v \parallel \tag{2.6}$$

d'où $\parallel Av \parallel \geq \alpha \parallel v \parallel$ pour tout v de H, ce qui montre que A est injectif et d'image fermée. Notons Z cette image par le théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé on sait que $H = Z \oplus \bar{Z}$
soit ensuite un élément W de $Z^{\perp}$, on a par définition $\langle AW, W\rangle = 0$ et donc : $\alpha \parallel w \parallel^2 \leq a(w,w) = \langle AW, W\rangle = 0$ d'où $w = 0$ ainsi , $Z^{\perp}$ est réduit à $\{0\}$, ce qui montre que A est subjectif.
L'endomorphisme A est bijectif, il excite donc un unique u de H tel que $Au = f$ et il est donné par $u = A^{-1}f$

Remarque 2.2. *sans calcule u, on a inégalité*

$$\parallel u \parallel \leq \frac{\parallel L \parallel'}{\alpha}$$

où $\parallel . \parallel'$ désigne la norme de l'espace dual H'

lemme 2.4 (lemme de picard). *Soit (x,d) un espace métrique complet non vide et soit S une application de X dans lui-même satisfaisant à la propriété de contraction suivante : il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que : $\forall(u,v) \in X \times X, d(Su, Sv) \leq \varepsilon d(u,v)$ alors il existe une seule fonction u de X qui soit un point fixe de S C'est-à-dire $Su = S$.*

Démonstration 2.9. *Existence : soit $u_0 \in X$ et définissions la suite $(u_j)_{j\geq 0}$:*

$$u_{j+1} = Su_j \text{ alors pour tout } j \geq 0, d(u_{j+1}, u_j) \leq \varepsilon d(u_0, u_1)$$

En effet c'est vrais pour $j = 0$ supposons qu'a l'étape j, l'inégalité soit vrais, alors $d(u_{j+2}, u_{j+1}) \leq \varepsilon d(u_{j+1}, u_j) \leq \varepsilon d(u_0, u_1)$ Par conséquent, la suite $(u_j)_{j \geq 0}$ est de Cauchy dans (X, d) Car si :

$$K < P, d(u_k, u_p) \leq \sum_{j=k}^{j=p-1} d(u_j, u_{j+1}) \tag{2.7}$$

$$\leq d(u_0, u_1) \sum_{j=k}^{j=p+1} \varepsilon^j \leq \frac{\varepsilon^k}{1-\varphi} d(u_0, u_1) \tag{2.8}$$

Soit u dans X tel que $d(u_j, u)$ tend vers zéro quand J tend vers l'infini puisque, $u_{j+1} = Su_j$ par continuité de S on déduit alors que $Su = u$
***Unicité** : si u et v deux points fixe de S alors par la propriété de contraction : $d(Su, Sv) \leq \varepsilon d(u, v)$ Soit $d(u, v) = 0$ c'est-a-dire $u = v$*

Remarque 2.3. *Inégalité de Cauchy Schwarz :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \, on \ a : |\langle x, y \rangle| \leq \| x \| . \| y \|$$

2.8 Les espaces $W^{m,p}, H^m, H_0^1, H^{-1}$

2.8.1 Définition de l'espace $W^{m,p}$

Soit $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W^{m,p}(I)$ par récurrence :

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I)\}$$

muni de la norme $\| u \|_{W^{m,p}} = \| u \|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \| D^\alpha u \|_{L^p}$ Pour $p = 2$, on note $W^{m,2}$ par l'espace $H^m(I)$ elle définie par :

$$H^m(I) = \{u \in L^2(I), D^\alpha u \in L^2(I), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : | \alpha | \leq m\}$$

est muni de la produit scalaire :

$$\forall u, v \in H^m(I) : \langle u, v \rangle_{H^m} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}$$

2.8.2 Définition de l'espace $H_0^1(I)$

Est un sous espace de $H^1(I)$ et est définie comme étant l'adhérence de $C_c^\infty(I)$ dans $H^1(I)$, ce qu'on note aussi : $H_0^1(I) = \overline{C_c^\infty(I)}^{H^1(I)}$

2.8.3 Définition de l'espace $H^{-1}(I)$

$H^1(I)$ est le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(I)$ L'espace $H^{-1}(I)$ admet la caractérisation suivante : $H^{-1}(I) = \{f \in D'(I)/f = g_0 + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$, où $g_0 \cdots , g_d \in L^2(I)\}$

Chapitre 3

Pproblème de Dirichlet

3.1 Problème aux limites

3.1.1 Définition du problème aux limites

Le problème aux limites est constitue d'une équation aux dérivée partielles dont on recherche une solution prenant de plus des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution.

Exemple 3.1. *l'équation différentielle du second ordre* $\forall x \in [0, \pi/2], y''(x)+y(x) = 0$. *Avec les conditions initiales :*

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi/2) = 2 \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation on a le rappel suivante :
Pour résoudre une équation homogène on va calculer Delta (Δ) : $\Delta = b^2 - 4ac$ *avec l'équation homogène est :* $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$
si $\Delta > 0$ *: il y a deux racines* r_1, r_2 *:*
$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *alors la solution de l'équation est :* $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
si $\Delta = 0$ *admet une racine double* r *:* $r = -b/2a$ *la solution est :* $y(x) = (Ax+B)e^{rx}$ *si* $\Delta < 0$ *il y a deux racines complexes conjuguées* $\alpha \pm i\beta$*, c-à-d :* $r_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, r2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ *donc la solution est :* $y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Alors : on va calculer Δ *de l'équation* $y'' + y = 0$ *donc* $\Delta = -4 < 0$ *alors la solution de l'équation sous la forme* $y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x).r_1 = \frac{i\sqrt{|-4|}}{2} = i, r_2 = \frac{-i\sqrt{|4|}}{2} = -i$ *donc* $\alpha = 0, \beta = 1$ *alors* $y(x) = A\cos(x) + Bsin(x)$*, maintenant en appliquant les conditions aux bord on a*

$$\begin{cases} y(0) = Acos(0) + Bsin(0) = 0 \\ y(\pi/2) = Acos(\pi/2) + Bsin(\pi/2) \end{cases}$$

donc $A = 2, B = 0$ *donc la solution est bien définie de façon unique et vaut* $y(x) = 2\sin x$

3.2 Le laplacien

Définition 3.1. *Si* f *est une fonction de classe* C^2 *définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *qui admet des dérivées partielles on appelle le laplacien de* f *la fonction* $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

3.3 Fonction harmonique

Définition 3.2. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *, une fonction* $v \in C^2(\Omega)$ *est dite harmonique dans* Ω *si* $\Delta v = 0$ *dans* Ω*.*

3.4 Inégalité de Poincaré

Définition 3.3. *Soit* Ω *un ouvert bornée,*$\exists$ *une constante* $C > 0$ *tell que , pour tout* $u \in H_0^1(\Omega)$ *on a :*

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|$$

3.5 Problème de Dirichlet pour le laplacien

Définition 3.4 (Définition de problème de Dirichlet). *On appelle problème de Dirichlet une equation de laplacien avec conditions aux limites de type Dirichlet, pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ trouve une fonction harmonique u dans Ω continue sur $\bar{\Omega}$ valant u_0 sur le bord $\partial\Omega$.*

La formulation abrégée de ce problème est alors :

Trouver u tell que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \ dans \ \Omega \\ u = u_0 \ \ sur \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Ou Δ désigne le laplacien

Remarque 3.1. *On a deux cas sur le problème de Dirichlet :*

1^{er} *cas : si $u_0 = 0$ on appelle le problème 3.1 problème de Dirichlet non homogène.*

2^{me} *cas : si $u_0 = g$ tell que g fonction continue et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ On appelle le problème 3.1 problème de Dirichlet non homogène.*

Dans ce chapitre on va étudier le problème de Dirichlet homogène

3.6 Problème de Dirichlet homogène

Définition 3.5. *Le problème de Dirichlet homogène est un type essentiel de problème de Dirichlet pour le laplacien.*

Ce problème s'énonce de la façon suivante : étant donnée une fonction $f \in L^2(\Omega)$,trouver une fonction u définie dans Ω et solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \ dans \ \Omega \\ u = 0 \ \ sur \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

3.6.1 Formulation variationnelle

Définition 3.6 (définition et démonstration). *On considéré le problème de Dirichlet homogène*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \ dans \ \Omega \\ u = 0 \ \ sur \ \partial\Omega \end{cases}$$

On suppose que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *est la solution de le problème en multipliant l'équation* $(-\Delta u = f)$ *par* $v \in H_1$ *et en intégrant sur* Ω *on obtient :*

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega f v dx$$

D'après la formule d'intégration par partie on a :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \partial\delta = \int_\Omega f v dx$$

ou $\partial\delta$ *est la mesure superficielle de bord* $\partial\Omega$ *comme* v *est à support compact dans* Ω *donc* $v = 0$ *sur le bord* $\partial\Omega$ *, alors le terme de bord est nul :* $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} v \partial\delta = 0$ *on en déduit que u vérifie :*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \tag{3.3}$$

cette égalité appelée la formulation variationnelle du problème : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$

réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ *est solution de* 3.3, *alors puisque* $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, *on a pour tout* $\varphi \in D(\Omega)$: $\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f \varphi dx$
cette égalité s'écrit encore : $\sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ *et par définition de la dériva-*

tion au sens des distributions il vient :

$$-\sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$$

C'est-à-dire $-\Delta u = f$

Corollaire 1. *Soit* $f \in L^2(\Omega)$, *si pour toute fonction* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ *;on a* $\int_\Omega f(x)\varphi(x) = 0$ *alors* $f = 0$ *presque Partout dans* Ω.

Démonstration 3.1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $C_c^\infty(\Omega)$ *convergeant vers* f *dans* $L^2(\Omega)$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\int_\Omega f(x)f_n(x) = 0$ *en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtiens* $\| f \|_2 = 0$ *d'où le résultat.*

Proposition 3.1. *soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in C(\Omega)$, *Si* $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *est solution classique de problème de Dirichlet homogène alors u est solution de* 3.3, *réciproquement, si u est solution de la formule* 3.3 *et* $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *alors u solution classique de problème*

Démonstration 3.2. *Par construction de la formulation variationnelle, il est claire que si u est solution classique de problème homogène alors u est solution de la formulaire variationnelle* 3.3 *Réciproquement : soit* $u \in C^2(\bar{\Omega} \cap H_0^1(\Omega)$ *telle que :*$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$
Soit $v \in C_c^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, *par application de la formule d'intégration par partie on obtient :*

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} v d\delta = 0$$

D'après le corollaire 3.3 *on déduite* $\Delta u(x) + f(x) = 0$ *pour tout* $x \in \Omega$, *de plus, comme* $u \in H_0^1(\Omega), u = 0$ *sur* $\partial\Omega$

Corollaire 2. *Soit* Ω *est un ouvert borné, alors la formulation variationnelle admet une unique solution* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de plus , u réalise le minimum dans* $H_0^1(\Omega)$ *de l'énergie J définie par :* $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f v dx$

Théorème 3.1. *Soit f une fonction, de $L^2(\Omega)$, alors les problèmes suivantes sont équivalents :*

i) Trouver :

$$u \in H_0^1(\Omega), \ \textit{tel que } -\Delta u = f \ \textit{dans } D'(\Omega) \tag{3.4}$$

ii) Trouver :

$$u \in H_0^1(\Omega), \ \textit{tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx \tag{3.5}$$

iii) Trouver

$$u \in H_0^1(\Omega) \ \textit{qui minimise la fonctionnelle : } J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - \int_\Omega f v(x) dx \ \textit{sur } H_0^1(\Omega \tag{3.6}$$

Démonstration 3.3. *Nous allons tout d'abord montre que* 3.4 $\Longleftrightarrow$ 3.5 *:*
Si u solution de 3.5 alors puisque $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx = \int_\Omega f v(x) dx$$

Or par définition de la dérivée au sens des distributions :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx = \langle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle_{D' \times D} = -\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi, \varphi \rangle_{D' \times D}$$

Donc :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \sum_{k=1}^{N} \langle -\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi \rangle_{D' \times D} = \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{D' \times D} = \langle f, \varphi \rangle_{D' \times D}$$

ce qui signifier bien $-\Delta u = f$ au sens des distributions réciproquement, si u vérifier $-\Delta u = f$ dans $D'(\Omega)$ alors les calculs précédents, effectues dans l'autre sens montrent que : $\int_\Omega \nabla u.\nabla \varphi dx = \int_\Omega f v(x) dx$.
pour tout fonction $\varphi \in D(\Omega)$ et donc pour tout fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ par densité

de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ d'où u est bien solution de 3.5.

3.5 $\Longleftrightarrow$3.6 pour cela calculons pour une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ et un réel t quelconques :

$$\begin{aligned} J(u+tv) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)(x)|^2 dx - \int_\Omega f(u+tv)(x)dx \qquad (3.7)\\ &= J(u) + t\int_\Omega \nabla u \nabla v(x)dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - t\int_\Omega fvdx. \qquad (3.8)\end{aligned}$$

On en déduit que si u est solution de 3.5 alors : $\forall v \in H_0^1(\Omega), J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ et donc u réalise bien le minimum de J sur $H_0^1(\Omega)$ (car $u+v$ décrit $H_0^1(\Omega)$,quand v décrit $H_0^1(\Omega)$).

Réciproquement, si u minimise J, alors $J(u+v) \geq J(u)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et tout $t \in \mathbb{R}$ d'où $\forall t \in \mathbb{R}, t(\int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)dx - \int_\Omega fv(x)dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx > 0$.

En divisant, alors cette relation par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0, en obtient : $\int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)dx - \int_\Omega fv(x)dx \geq 0$ En faisons de même avec $t < 0$, on obtient l'intégralité dans l'autre sens d'où u est solution de 3.5

Remarque 3.2. *La solution de la formulation variationnelle s'appelle une solution faible du problème de Dirichlet homogène.*

3.6.2 Existence et l'unicité de problème de Dirichlet

Proposition 3.2. *Si l'ouvert Ω est borné, le problème de Dirichlet homogène admet une unique solution*

Démonstration 3.4. *On applique le théorème de Lax-Milgram ci-dessus avec : $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$ et $L(v) = \int_\Omega fvdx$*

ceci sur l'espace $V = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme :

$$\| v \|_V = |v|_{H_0^1} = \| \Delta v \|_{L^2(\Omega)}$$

- *La forme bilinéaire $a(u,v)$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ en effet, à laide* *de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :*

$$|a(u,v)| = |\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx| \leq \int_\Omega |\nabla u.\nabla v| dx$$

.

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{\frac{1}{2}} && (3.9) \\ &= \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} . \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} && (3.10) \\ &= \| u \|_V \| v \|_V && (3.11) \end{aligned}$$

D'où $|a(u,v)| \leq \| u \|_V \| v \|_V$ *D'autre part* $a(u,v)$ *est* $V-$*elliptique, en effet :*

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega (\nabla v)^2 dx && (3.12) \\ &\leq \int_\Omega |\nabla v|^2 dx && (3.13) \\ &= \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} = \| v \|_V && (3.14) \end{aligned}$$

D'où $a(v,v) = \| v \|_V$

$L(v)$ *est continue sur* H_0^1 *, en effet a l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré on a :*

$$\begin{aligned} | L(v) | &= |\int_\Omega f v dx| && (3.15) \\ &\leq (\int_\Omega |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} . (\int_\Omega |v|^2 dx)^{\frac{1}{2}} && (3.16) \\ &= \| f \|_{L^2(\Omega)} . \| v \|_{L^2(\Omega)} && (3.17) \\ &\leq C(\Omega) \| f \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} && (3.18) \end{aligned}$$

On pose $M = C(\Omega \| f \|_{L^2(\Omega)})$.

D'où $|L(v)| \leq M \| v \|_V$.

Le théorème de Lax-Milgram nous assure donc l'existence et l'unicité de la *solution* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de problème 3.6.*

De plus,puisque la forme bilinéaire a (u,v) est symétrique si on pose : $J(u) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$ *alors :*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla v)^2 dx - \int_\Omega fvdx \textit{ sur l'espace } H_0^1(\Omega)$$

conclusion

La formulation variationnelle permet de traduire, par dualité, un problème d'équation différentielle ou d'EDP (équation aux dérivées partielle) avec condition aux bords (ou aux limites).

Cette formulation permet de montre, sous des hypothèses plus faibles, l'existence et l'unicité é de la solution de problème, elle transforme ainsi le problème initial en celui de la recherche des extrémums d'une fonctionnelle sur un espace de Hilbert.

L'étude théorique de certains problèmes aux limites. Est base sur la formulation variationnelle de ces problèmes. Celle-ci permet d'obtenir aisément l'existence et l'unicité des solutions.

Par le théorème de lax-Milgram et l'égalité de Poincaré. Cette formulation variationnelle est de plus bien adaptée à l'approximation numérique de ces problèmes.

Bibliographie

[1] A.Lesfari, master maths, université chouail doukkal .

[2] A.Lesfari, distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace **France** (2012).

[3] A. Fatima, (2015).

[4] A. Henrot, école des mines de Nancy , Dep , génie industriel et mathématiques appliquées (2017).

[5] B. Dehman, ministère de l'enseignement supérieur de la recherche scientifique et de la technologie ,université virtuelle de Tunis .

[6] C. Zuily, l'université de paris XL-Orsay (2002).

[7] J. rochat, (16 décembre 2009).

[8] M. Kern, école nationale supérieure des mines de paris (2005).

[9] O.Guichard, université de Strasbourg. .

[10] ouacif samir et Meznad Loucif, Approximation de la solution variationnelle par la méthode des éléments finis , analyse et probabbilités (2016).