Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

KAHIA Soumaya et CHALABI Randa

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse mathématique et applications

THÈME

Contrôlabilité approchée et exacte de quelques système d'évolution

Soutenu publiquement le **05 septembre 2020** devant le jury composé de:

Mr.	**BENNOUR Abdelaziz**	**MAB**	BBA	Encadreur
Mr.	**ALIA Ishak**	**MCB**	BBA	Examinateur
Mr.	**GHERMOUL Bilal**	**MAA**	BBA	Examinateur

Promotion 2019/2020

REMERCIEMENT

Nous remercions DIEU tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire et qui nous à aidées à accomplir notre travail dans de bonnes conditions.

Louange à DIEU, maitre de l'univers et paix et salut sur notre prophète MOHAMED.

Nous adressons nos remerciments

Au Dr **BENNOUR Abdelaziz**, notre encadreur pour ses précieux conseils, soutien, sympathie et patience.

Nous remercions également tous nos enseignants et enseignantes de département du MI.

Nous adressons notre profonde reconnaissance aux membres de jury pour avoir bien accepter d'évaluer notre travail.

A toutes les personnes qui ont participé à ce projet, en particulier Dr **DJ.BENTERKI** et Dr **R.BENTERKI** de département du MI de l'université de BBA.

Un grand merci à monsieur Dr **BELKACEM Nazihedine** de département du MI de l'université de BBA.

Nous ne saurions oublier Dr **BARROUK**.**Nabila** de l'université de Souk Ahras.

A vous tout merci ...

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons quelques méthodes dans le but d'étudier la contrôlabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles. L'objet principal de ce mémoire est d'étudier les propriétés du contrôle simultané de deux équations d'ondes unidimensionnelles (fortement couplées) lorsque le contrôle agit sur le bord. Plus précisément on s'intéresse plus à la contrôlabilité approchée et exacte de systèmes hyperboliques formés de deux équations des ondes linéaires couplées, le couplage est une fonction régulière mais elle peut changer de signe, avec un seul contrôle par le bord, nous choisissons d'étudier le cas avec des vitesses d'ondes identiques et différents. On commence par rappeler des résultats généraux d'existence et d'unicité de solutions pour ces systèmes et de dualité entre contrôlabilité et observabilité, puis on présente un outil (l'inégalité de Ingham) permettant d'établir des inégalités d'observabilité.

Notre preuve du résultat principal est basée sur une description précise du spectre associé au système et qui se comporte asymptotiquement comme l'équation des ondes. On prouve des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité approchée et exacte.

Mots clés: Existence et unicité; Inégalité d'observabilité; Spectre ; Ingham; Contrôlabilité approchée; Contrôlabilité exacte.

Table des Matières

1 Notions préliminaires **2**

1.1 Les Espaces 2

1.1.1 Espaces de Hilbert 2

1.1.2 Les espace L^p 2

1.1.3 Espace $L^p(0, T; X)$ 4

1.1.4 Espace de Sobolev 5

1.1.5 Espace des fonctions à valeurs vectorielles 6

1.2 Semi-groupes de contractions et les opérateures maximaux dissipatifs 7

1.2.1 Les semi-groupes 7

1.2.2 Les opérateures maximaux dissipatifs 7

2 Contrôlabilité de systémes d'équation aux deriveé partielles **8**

2.1 Définition des différentes notions de contrôlabilité 9

2.1.1 Contrôlabilité en dimension finie 11

2.2 Quelques outils pour l'étude de contrôlabilité des système d'évolution 13

2.2.1 Base de Riesz 13

2.3 L'inégalité de Ingham 15

2.3.1 Le théorème d'Ingham 15

2.3.2 Contrôlabilité de l'équation des ondes 16

3 (Application). Contrôlabilité approché et exacte d'un système hyperpolique couplée **22**

Introduction générale

La contrôlabilité des équations aux dérivées partielles est un sujet en plein développement. Son histoire a commencé avec le cas de la dimension finie, son extension à la dimension infinie à connu plusieurs temps, le premier a concerné la notion de contrôlabilité faible en particulier dans le cas parabolique, les théories de la contrôlabilité régionale se sont ensuite développées dans les années 70'.

Les années 90' sont marquées par des points forts parmi eux, **C.Bardos, G.Lebeau** et **J.Rauch** donnent une condition nécessaire et suffisante d'exacte contrôlabilité de l'équation des ondes contrôlée sur une partie du bord.

Le champ d'application de la contrôlabilité trés nombreux dans toutes les disciplines par exemple, on peut citer une voiture sur laquelle on agit grâce aux pédales d'accélérateur et de frein ou en tournant le volant, une pousette ou un chariot de supermarché, le contrôle étant les forces que l'on applique sur les cannes de la poussette ou sur la barre du chariot avec nos deux mains, la contrôlabilité peut aussi réduire la douleur et la prolonger la vie. par exemple, contrôler une épidémie comme l'étude de la thérapie des tumeurs au cerveau (modèle de glioblastome) ou réaliser une opération chirurgicale au laser.

Le but de ce travail est d'étudier la contrôlabilité exacte et approchée d'un système de deux équations hyperpoliques avec un seul contrôle. Les outils utilisés pour atteindre ce but sont essentiellement l'inégalité de type Ingham. Cette thèse est divisée en trois chapitres.

- Chapitre 1 : Notions préliminaire, dans ce chapitre on donne l'essentiels des espaces fonctionels utilisés (l'espace de Hilbert, les espace de L^p, l'espace de Sobolev et l'espace des fonctions à valeurs vectorielles) et les propriétés élémentaire des semi-groups de contraction et les opérateures maximaux dissipatifs.

- Chapitre 2 : contrôlabilité de système d'équation aux dérivée partielles, on présente dans ce chapitre, des résultats généraux d'existence et d'unicité de solution, les differentes notions de contrôlabilité des système d'èquations aux dérivés partielles (contrôlabilité exacte, contrôlabilité approchée) ensuite quelques outils qui sont utilisés pour démontre la contrôlabilité d'équation aux dérivée partielles de types équation des ondes.

- Chapitre 3 : Ce chapitre concerne la contrôlabilité de systèmes hyperboliques linéaires couplés. Nous montrons les résultats de contrôlabilité approchée et exacte de ce système.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle qui contient quelques notions essentielles qui concernent les espace de Hilbert, les espaces L^p et de Sobolev enfin espaces des fonctions à valeurs vectorielles qu'ils sont nécessaire de connaître pour aborder la suite de ce mémoire.

1.1 Les Espaces

1.1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.1 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. un produit scalaire $\langle f,\ g\rangle$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive.*

Rappelons que

$$\|f\| = \langle f,\ f\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Est une norme associée au produit scalaire.

Définition 1.2 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle f, g\rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle f,\ f\rangle^{\frac{1}{2}}$.*

1.1.2 Les espace L^p

On désigne par $L^1(\Omega)$ avec Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ l'espace des fonctions intégrables

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \int_\Omega |f|\, dx < +\infty\}$$

Telles que

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

Définition 1.3 *Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < \infty$; on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R};\quad f \quad \textit{mesurable et} \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

Il s'agit d'une intégrale au sense de Lebesque.

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme 1.1 est un espace de Banach, de plus, il est séparable pour $1 \leq p < \infty$ et, pour $1 < p < \infty$, réflexif.

Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant à la norme 1.1 étant donné par

$$\langle f, \ g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Pour $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \ \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } \ |f(x)| \leq C \ p.p. \text{ sur } \Omega. \ \}$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = Inf\,\{C;\ |f(x)| \leq C \ p.p. \text{ sur } \Omega\}$$

Définition 1.4 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$ *, l'exposant conjugué* $p^{'}$ *de* p *est défini par la relation:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$$

On utilise la convention

$$p^{'} = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si} \quad p \in (0, \infty) \\ \infty & \text{si} \quad p = 1 \\ 1 & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$

Quelques inégalités

Inégalité de Hőlder

soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p^{'}}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f \cdot g \in L^1$ et

$$\int |\ fg| \leq \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^{p^{'}}}$$

Lorsgue $p = p^{'} = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de cauchy-schawrtz

pour touts f, $g \in H$:

$$\int |fg| \leq (\int |f|^2)^{\frac{1}{2}} (\int |g|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Proof. [Inégalité de Hőlder] La conclusion est évidente si $p = 1$ si $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Rappelons l'**inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p^{'}}b^{p^{'}} \qquad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0 \tag{1.2}$$

La démonstration de 1.2 est : la fonction log étant concave sur $]0,\ \infty[$ on a

$$\log(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p^{'}}b^{p^{'}}) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p^{'}}\log b^{p^{'}} = \log ab.$$

Donc

$$|f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{p}\,|f(x)|^p + \frac{1}{p^{'}}\,|g(x)|^{p^{'}} \qquad p.p.\ x \in \Omega$$

Il en résulte que $fg \in L^1$ et que

$$\int |f|\,|g| \leq \frac{1}{p}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p^{'}}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}^{p^{'}} \tag{1.3}$$

Remplaçant dans 1.3 f par $\lambda\ f$ $(\lambda > 0)$

$$\int |\lambda f|\,|g| \leq \frac{1}{p}\,\|\lambda f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p^{'}}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}^{p^{'}}$$

Il vient

$$\int |f|\,|g| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda p^{'}}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}^{p^{'}}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}^{\frac{p^{'}}{p}}$

$$\begin{aligned}
\int |f|\,|g| &\leq \frac{(\|f\|_{L^p}^{-1}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}^{\frac{p^{'}}{p}})^{p-1}}{p}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{(\|f\|_{L^p}^{-1}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}^{\frac{p^{'}}{p}})p^{'}}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}^{p^{'}} \\
&\leq \frac{\|f\|_{L^p}}{p}\,\|g\|_{L^{p^{'}}} + \frac{\|f\|_{L^p}}{p^{'}}\,\|g\|_{L^{p^{'}}} \\
&\leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}\,(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}})
\end{aligned}$$

Et comme $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}}) = 1$, alors

$$\int |\ fg| \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p^{'}}}$$

■

1.1.3 Espace $L^p(0, T; X)$

Définition 1.5 *Pour tout $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on désigne pour $L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions u mesurables sur $]0, T[$ à valeurs dans X tel que:*

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Si X est de hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle_X$, $L^2(0,T;X)$ est un espace de hilbert pour le produit scalaire:

$$\langle u,v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t),v(t) \rangle_X \, dt.$$

1.1.4 Espace de Sobolev

Définition 1.6 (Dérivée faible) *On dit que $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ a une dérivée faible s'il existe $g \in L^p(\Omega)$ tel que*

1. $\langle f, \varphi' \rangle = - \langle g, \varphi \rangle$, $\quad \forall \varphi \in D(\Omega)$.

Pour $1 \leq p < \infty$ on définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega),\ f \text{ a dérivée faible, } f' \in L^p(\Omega) \}.$$

L'espace de Sobolev muni de la norme

$$\boxed{\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}.}$$

Et plus généralement

Espace $W^{k,p}(\Omega)$

Il y a deux écriture pour tout entier $k \geq 1$

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega),\ f \text{ ayant } k\text{-ème dérivée faible, } f^{(k)} \in L^p(\Omega) \right\}$$

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in W^{k-1,p}(\Omega),\ f' \in W^{k-1,p}(\Omega) \right\}.$$

Si $p = 2$ et $k = 1$ on note

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

On muni de produit scalaire

$$\boxed{\langle f,g \rangle_{H^1} = \langle f,g \rangle_{L^2} + \langle f',g' \rangle_{L^2}} \tag{1.4}$$

La norme associée

$$\boxed{\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.}$$

Qui est équivalent à $\|f\|_{W^{1,2}}$

$$\|f\|_{H^1} \leq \|f\|_{W^{1,2}} \leq \sqrt{2}\, \|f\|_{H^1}$$

Pour $k \geq 1$ on note

$$\boxed{H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).}$$

Définition 1.7 *On définit $H_0^1(\Omega)$ comme étant la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, c-à-d :*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}.$$

Proposition 1.8 *$H_0^1(\Omega)$ muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

$W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$H^{-1}(\Omega)$ dual de $H_0^1(\Omega)$

$$\boxed{H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)}$$

$H^{-m}(\Omega)$ dual de $H_0^m(\Omega)$
Si $(m \geq k)$

$$\boxed{D(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset H_0^k(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega) \subset D^*(\Omega)}$$

$D^*(\Omega)$ le dual algébriques de $D(\Omega)$

1.1.5 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Définition 1.9 *Une fonction à valeurs vectorielles est une fonction d'un ensemble X quelconque dans un espace vectoriel E sur un corps $\Bbbk$ (commutatif)*

En mathématiques, une fonction à valeurs vectorielles ou fonction vectorielle est une fonction dont l'espace d'arrivée est un ensemble de vecteurs, son ensemble de définition pouvent être un ensemble de scalaire ou de vecteurs.

On considére un espace de Banach X de norme $\|.\|_X$ et un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$
On note $C(I;X)$ l'espace des fonctions continues de I dans X
pour $k \geq 0$ on netera

$C^k(I;X)$ (resp$C^k(\bar{I};X)$) l'espace des fonctions de I (resp.$\bar{I}$) dans X qui sont k fois continûment différentiables, soit

$$C^k(I;X) = \{v : I \to X;\ D^\alpha v \in C(I;X) \text{ pour } |\alpha| \leq k\}$$

$C^k(\bar{I};X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{C^k(\bar{I};X)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\bar{I}} \|D^\alpha v(x)\|_X$$

$C^\infty(I;X)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur I à valeurs dans X et par $D(I;X)$

$C_0^\infty(I;X)$ l'espace des fonctions de $C^\infty(I;X)$ à support compact dans I

$D'(I;X)$ l'espace des distributions sur I à valeurs dans X défini par

$$D'(I;X) = \mathcal{L}(D(I;X);X)$$

$\mathcal{L}(U;V)$ désigne l'espace des fonctions linéaires et continues de U dans V.

1.2 Semi-groupes de contractions et les opérateures maximaux dissipatifs

1.2.1 Les semi-groupes

Définition 1.10 *Un application $S(t) : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{L}(H)$ (resp. $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(H)$) est appelée semi-groupe fortement continu (resp. groupe) dansH si elle vérifie les propriétés suivantes:*

1. $S(0) = I_d$,
2. $S(s+t) = S(s)S(t), \forall t, s \geq 0$ *(resp.* $\forall t, s \in \mathbb{R}$*).*
3. *pour tout* $x \in H$*, l'application* $S(.)x$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *(resp.* $\mathbb{R}$*).*

Dans la suite, nous les appellerons plus simplement C_0-semi-groupes.

Définition 1.11 *Un C_0-semi-groupes $(S(t))_{t\geq 0}$ sur H est dit de contractions si*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \ \forall t \geq 0.$$

On appelle générateur d'un semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ défini par :

1. $D(A) = \left\{ x \in H \ / \ \lim \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } H \right\}$,
2. $\forall x \in D(A), \quad Ax = \lim \frac{S(t)x - x}{t}$.

1.2.2 Les opérateures maximaux dissipatifs

Définition 1.12 *On dit que A est dissipatif (sur H) si*
$\forall x \in D(A)$. $\operatorname{Re} \langle Ax, \ x \rangle \leq 0$.

Si de plus $\forall \lambda > 0$, $I - \lambda A$ est surjectif de $D(A)$ dans H, alors on dit que A est maximal dissipatif (sur H).

Proposition 1.13 *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérater. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *A est dissipatif sur H.*
2. *A vérifie*
$$\forall x \in D(A), \quad \forall \lambda > 0. \quad \|x\|_H \leq \lambda^{-1} \|\lambda x - Ax\|_H .$$
3. *A vérifie*
$$\forall x \in D(A), \ \forall \lambda \in \mathbb{C}_{>0}, \quad \|x\|_H \leq (\operatorname{Re} \lambda)^{-1} \|\lambda x - Ax\|_H .$$

Où $\mathbb{C}_{>0} = \{\lambda \in \mathbb{C} / \ \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Proposition 1.14 *Si A est maximal dissipatif alors*

1. *$D(A)$ est dense dans H.*
2. *A est fermé (i.e. $gr(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}$ est fermé dans $H \times H$).*
3. *L'adjoint $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$ est maximal dissipatif .*

Chapitre 2

Contrôlabilité de systémes d'équation aux diriveé partielles

Dans ce chapitre, on commence par les différentes notions de contrôlabilité pour les systèmes d'équation aux dérivée partielles de manaière abstaite (contrôlabilité exacte, contrôlabilité approchée), et on présente à la fin du chapitre quelques outils pour l'étude de la contrôlabilété des systéme d'évolution.

Dans la première partie de ce chapitre, on va considérer un système de contrôle abstrait, i.e. un système de la forme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), & t \in]T_0, T[\,, \\ y(T_0) = y^0, \end{cases} \tag{2.1}$$

On appelle

- $A(t) : D(A(t)) \subset H \to H$ et $B(t) : D(B(t)) \subset U \to H_{-1}$ sont des opérateur non bornés,
- H : l'espace des états,
- U : l'espace des contrôles,
- $u_{T_0 T}$: l'ensemble des contrôles $v \in L^2(T_0, T; U)$,
- $y(t) \in H$ l'état du système à l'instant t,
- $y^0 \in H$ l'état initial du système,
- $v(t) \in U$ le contrôle à l'instant t. Et pour $T_0 = 0$, i.e.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), & t \in]0, T[\,, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Théorème 2.1 (Lumer-Philips-Hille-Yosida) *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur.*

1. A est maximal dissipatif si, et seulement si, A est le générateur d'un semi-groupe de contractions $(S(t))_{t>0} \subset \mathcal{L}(H)$. Le semi-groupe $(S(t))_{t>0}$ est alors donné par

$$\forall x \in H, \quad \forall t \geq 0, \quad S(t)x = \lim_{\lambda \to 0_{\lambda>0}} e^{tA_\lambda}x,$$

où $A_\lambda = A(I - \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, *pour tout* $\lambda > 0$.

2. Dans ce cas, pour tout $y^0 \in D(A)$, *le problème de Couchy*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = Ay(t), & t \in [0, \ +\infty[\,, \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

admet une unique solution $y \in C([0, \ +\infty[\,, D(A)) \cap C^1(\ [0, \ +\infty[\,, H)$. *de plus,*

$$\forall t \in [0, \ +\infty[\,, \quad y(t) = S(t)y^0.$$

La solution de système 2.2 se décompose en la somme de la solution homogène ($v = 0$) et de la solution avec donnée initiale nulle($y^0 = 0$) :

$$\boxed{\forall t \in [0, T]\,, \quad y(t; y^0, v) = y(t; y^0, 0) + y(t; 0, v).}$$

Définition 2.2 *Soit* $f \in L^1(0, T; H)$ *et* $y^0 \in H$. *On appelle solution faible de 2.2 la fonction* $y \in C([0, T]\,; H)$ *donnée par*

$$y(t) = S(t)y^0 + \int_0^t S(t - s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]\,. \tag{2.3}$$

On appelle solution classique de 2.2 toute fonction $y \in C([0, T]\,; H) \cap C^1([0, T]\,; H)$ telle que $y(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0, T]$ et vérifiant 2.2 dans $[0, T]$.

Remarque 2.3 *Par définition, le problème 2.2 admet toujours une unique solution faible.*

2.1 Définition des différentes notions de contrôlabilité

Le principe de la contrôlabilité est le suivant : étant données deux états $y^0 \in H$ et $y^1 \in H$ du système 2.1, existe-t-il une fonction v (appelée cotrôle) permettant de passer (en un sens à définir précisément) de l'état y^0 à l'état y^1 en un temps fixé $T > 0$? Le terme “passer” peut-être interprété de différentes manières : par exemple il peut signifier que la valeur à l'instant $t = T$ de la solution qui part de l'état y^0 à l'instant $t = 0$ soit exactement égale à y^1, auquel cas on parle de contrôlabilité exacte; mais il peut aussi signifier que la valeur de cette solution à l'instant T soit suffisamment proche de y^1, sans nécessairement lui être égale, auquel cas on parle de contrôlabilité approchée. Différents concepts de contrôlabilité existent. Donnons celle qui vont nous intéresser dans ce travail

Contrôlabilité exacte

Définition 2.4 *Soient* $T > 0$ *fixé.*

On dit que le système 2.2 est exactement contrôlable au temps $T > 0$ *si :*

$$\boxed{\forall \left(y^0, y^1\right) \in H \times H, \quad \exists v \in U_T \quad t.q. \quad y\left(T; y^0, v\right) = y^1.}$$

Contrôlabilité approchée

Définition 2.5 *Soient $T > 0$ fixé.*

On dit que le système 2.2 est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si :

$$\boxed{\forall \left(y^0, y^1\right) \in H \times H, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists v \in U_T \quad t.q. \quad \left\| y(T; y^0, v) - y^1 \right\|_H < \epsilon.}$$

Remarque 2.6 *Pour des systèmes linéaires ou non linéaires, la contrôlabilité exacte entraîne toujours la contrôlabilité approchée*

$$\boxed{\textit{contrôlabilité exacte} \Longrightarrow \textit{contrôlabilité approchée.}}$$

L'opérateur de contrôlabilité L_T

On a la solution de système 2.2 définie par 2.3

En particulier, pour $t = T$, on a

$$\boxed{y(T; y^0, v) = S_T y^0 + L_T v.}$$

où $S_T \in \mathcal{L}(H)$ est défini par $S_T y^0 = y(T; y^0, 0)$ pour tout $y^0 \in H$ et L_T l'opérateur de contrôlabilité difini par :

$$\begin{cases} L_T: \quad D(L_T) \subset L^2(0, T; U) & \rightarrow \qquad H \\ \qquad\qquad v & \rightarrow \quad L_T(v) = \int_0^T S(T-s)Bv(s)ds. \end{cases}$$

où $D(L_T) = u_T$.

Proposition 2.7 *On dit le système 2.2 est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si, et seulment si, l'opérateur L_T est surjectif.*

Proposition 2.8 *Le système 2.2 est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si, et seulment si,*$\mathrm{Im}(L_T)$ *est dense dans H*

$$\overline{\mathrm{Im}(L_T)} = H.$$

L'opérateur adjoint de L_T

L'opérateur L_T est défini de l'espace de Hilbert $L^2([0, T], U)$ dans l'espace de Hilbert H. C'est un opérateur borné. On a

$$L_T^* : \begin{cases} H & \rightarrow \quad L^2(0, T; U) \\ \theta^0 & \rightarrow \quad L_T^* \theta^0 = v \end{cases},$$

où v est défini par

$$\left\langle L_T^* \theta^0, v \right\rangle = \left(\theta^0, L_T v\right), \quad \forall v \in L^2(0, T; U), \ \forall \theta^0 \in H$$

où $\langle \ , \ \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(0, T; U)$ et $(\ ,)$ désigne le produit scalaire dans H.

Où

$$\begin{aligned}
\left(\theta^0, L_T v\right) &= \left(\theta^0, \int_0^T S(T-s)Bv(s)ds\right) \\
&= \int_0^T \left(\theta^0, S(T-s)Bv(s)\right) ds \\
&= \int_0^T \left(B^* S^*(T-s)\theta^0, v(s)\right) ds \\
&= \left\langle B^* S^*(T-s), v\right\rangle .
\end{aligned}$$

où B^*(resp. $S^*(T-s)$) est la matrice adjointe de B(resp. $S(T-s)$). Donc:

$$L_T^* = B^* S^*(T-s).$$

Précisons le mode de calcul de $L_T^*\theta^0, \theta^0 \in H$, que cette formule induit. D'abord on calcule $S^*(T,s)\theta^0 = \theta(s)$ qui est, par définition de S^*, la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \theta^{'} = -A^*\theta, & s \in (0,T) \\ \theta(T) = \theta^0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Ainsi:

$$v = L_T^*\theta^0 \iff \begin{cases} v = B^*\theta & (0,T) \\ \theta^{'} = -A^*\theta & s \in (0,T) \\ \theta(T) = \theta^0 \end{cases} .$$

Théorème 2.9 *Le système 2.2 est*

- ***exactement contrôlable*** *au temps T si, et seulement si, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $\theta^0 \in D(L_T^*)$, la solution du système 2.4 vérifie*

$$\left\|\theta^0\right\|_H^2 \leq C_T \int_0^T \left\|B^*(s)\theta(s)\right\|_U^2 dt, \tag{2.5}$$

- ***approximativement contrôlable*** *au temps T si, et seulement si, pour tout $\theta^0 \in D(L_T^*)$ la solution θ de 2.4 vérifie le principe de continuation unique suivant : si $B(.)^*\theta = 0$ dans $L^2(0,T;U)$, alors $\theta^0 = 0$.*

L'inégalité 2.5 est appelée **inégalité d'observabilité**.

2.1.1 Contrôlabilité en dimension finie

En posant $H = H_{-1} = \mathbb{R}^n$ et $U = \mathbb{R}^m$ où m et n sont des entiers naturels non nuls. On considère $A \in L^1(0,T;M^n(\mathbb{R}))$ et $B \in L^\infty(0,T;M^{n,m}(\mathbb{R}))$

Pour le cas en dimension finie (c'est à-dire les systèmes d'équations différentilles ordinaires), les notions de contrôlabilité qui sont équivalantes

$$\boxed{\textbf{Contrôlabilité exacte} \iff \textbf{Contrôlabilité approchée}}$$

Car

D'aprèss la proposition 2.7 , la Contrôlabilité exacte a lieu pour le système 2.2 si, et seulement si,

$$\operatorname{Im}(L_T) = \mathbb{R}^n$$

et la Contrôlabilité approchée a lieu si, et seulement si,

$$\operatorname{Im}(L_T) \text{ dense dans } \mathbb{R}^n.$$

En tant que sous-espace d'ans espace vectoriel normé de dimension finie, $\operatorname{Im}(L_T)$ est fermé

$$\overline{\operatorname{Im}(L_T)} = \operatorname{Im}(L_T).$$

Il apparît donc que les deux notions de Contrôlabilité exacte et Contrôlabilité approchée coïncident.

La solution de système

Si $f \in L^1(0,T;\mathbb{R}^n)$ et $y^0 \in \mathbb{R}^n$ alors le probléme 2.2 admet une unique solution

$$y \in W^{1,1}(0,T;\mathbb{R}^n) := \left\{ z \in L^1(0,T;\mathbb{R}^n) \diagup \frac{dz}{dt} \in L^1(0,T;\mathbb{R}^n) \right\}$$

De plus, y est donnée par la formule

$$y(t) = M(t)y^0 + \int_0^t M(t)M^{-1}(s)f(s)ds$$

où $M(t)$ désigne la solution du probléme suivant

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt}(t) = A(t)M(t), & t \in]0,T[\,, \\ y(0) = I. \end{cases}$$

S_T est un opérateur donné par $S_T = M(T)$, et par conséquent que S_T est inversible dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.Telle que $\forall (s,t) \in [0,T]^2$,

$$S(t,s) = M(t)M(s)^{-1}.$$

Matrice de contrôlabilité

Posons

$$Q_T := L_T L_T^* = \int_0^T S\,(T-s)\,BB^*S^*\,(T-s)\,ds,\ T > 0.$$

L'opérateur Q_T est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\left\langle Q_T\theta^0, \theta^0 \right\rangle = \int_0^T \left| B^*S^*\,(T-s)\,\theta^0 \right|^2 ds = \left\| L_T^*\theta^0 \right\|^2 \geq 0,\ \forall \theta^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 2.10 $Q_T := L_T L_T^*$ *s'appelle* matrice de Contrôlabilité *ou* Gramien de Contrôlabilité.

Définition 2.11 *L'application* f_T *qui à* $\left(\theta^0, \theta^{0'}\right)$ *associe* $\left\langle Q_T\theta^0, \theta^0 \right\rangle$ *définit une forme bilinéaire symétrique positive.*

Théorème 2.12 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

A) La paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$,

B) L'opérateure L_T est surjectif,

C) L'opérateure L_{T^*} est injectif,

D) L'opérateure Q_T est inversible,

E) La forme bilinéaire f_T est un produit scalaire sur $H = \mathbb{R}^n$.

Nous pouvons maintenant obtenir un autre critère de contrôlabilité en dimension finie, à savoir le critère de Kalman.

Le critère de Kalman

Le Théorème 2.12 n'est pas toujours commonde à appliquer. Dans ce paragraphe, on démontre un critère de contrôlabilité complétement algébrique et, en général, facilement applicable. On suppose que $A(t) = A$ et $B(t) = B$ sont des matrices constantes sur $(0, T)$ et on note $[A\,|B\,] := \left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right] \in M_{n,nm}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont constituées par celles de $B, ..., A^{n-1}B$.

Théorème 2.13 (Critère de Kalman) *La paire (A, B) est contrôlable si et seulement si*

$$rang\,[A\,|B\,] = n.$$

Proof. voir [28], [13]. ■

Remarque 2.14 *Si $rang B = j$ alors peut être remplacée, dans l'énoncé du théorème, par*

$$rang\left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-j}B\right] = n.$$

2.2 Quelques outils pour l'étude de contrôlabilité des système d'évolution

Plusieurs méthodes sont envisageables pour démontrer une telle inégalité, et, bien entendu, les outils à utiliser dépendent fortement du type de problème considéré. Dans le cadre auquel on s'intéresse ici, i.e. la contrôlabilité frontière d'un système dont on connaît explicitement les valeurs propres et qui se "comporte" asymptotiquement comme l'équation des ondes, on a été amené à utiliser deux outil: les inégalités de type Ingham. On présente l'application de ces outils à la contrôlabilité en dimension un d'espace. On commence par la définition d'une base de Riesz

2.2.1 Base de Riesz

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $a_k \in \mathbb{C}$ de carré sommable et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de ℓ^2 définie par

$$e_k = \left(0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k^{\text{ème}}}}{1}, 0, 0, 0, \cdots\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 2.15 *On appelle base de Riesz de H toute famille $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset H$ pour laquelle il existe un opérateur inversible $B \in L(H, \ell^2)$ tel que*

$$B\varphi_k = e_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

La famille $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *définie par*

$$\theta_k = B^* B\varphi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

est alors une famille biorthogonale à la base de Riesz $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Un critère pour montrer qu'une famille est une base de Riesz est le lemme suivant (cf [16])

Lemme 2.16 *Soit* $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ *une suite d'un espace de Hilbert* H*. Alors les propositions suivantes sont équivalentes*
(i) $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ *est une base de Riesz dans* H.
(ii) $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ *est une famille totale de Bessel dans* H *et admet une famille bi-orthogonale* $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ *qui est aussi une famille totale de Bessel dans* H.

On rappelle qu'une suite $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ d'un espace de Hilbert H est une suite de Bessel si elle vérifie

$$\sum_{k\geq 1} |(\varphi, \varphi_k)_X|^2 < \infty, \quad \forall \varphi \in H.$$

Exemple 2.17 *La famille*

$$\mathcal{B} = \left\{ \Phi_{k,1} := \begin{pmatrix} \varphi_k \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Phi_{k,2} := \begin{pmatrix} \psi_k \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \quad k \geq 1 \right\}$$

est une famille de Bessel et admet une famille bi-orthogonale $\mathcal{B}^*$

$$\mathcal{B}^* = \left\{ \Phi^*_{k,1} := \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix}, \ \Phi^*_{k,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \quad k \geq 1 \right\}$$

où $\varphi_k(x) = \sqrt{2/\pi}\sin(kx)$ *et* $\int_0^\pi \psi_\ell \varphi_k = 0$*. De plus, si on suppose qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|\psi_k\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq \frac{C}{k}, \quad k \geq 1, \tag{2.6}$$

alors $\mathcal{B}$ *est une base de Riesz de* $X := L^2(0, \pi; \mathbb{R}^2)$.

Démonstration: Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de Riesz de $L^2(0, \pi; \mathbb{R}^2)$, on utilisera le lemme 2.16.
1- Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une famille totale de $L^2(0, \pi; \mathbb{R}^2)$, il suffit de prouver que

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \perp \Phi_{k,i}, \quad \forall k \geq 1, \ \ \forall i = 1, 2 \Longrightarrow y = 0.$$

En considérant la famille $\Phi_{k,1}$, et en tenant compte que $\{\varphi_k, \ k \geq 1\}$ est une base (hilbertienne) de $L^2((0, \pi); \mathbb{R})$, on obtient $y_1 = 0$. Puis, en considérant $\Phi_{k,2}$ et en tenant compte que $y_1 = 0$, on obtient $y_2 = 0$. Ceci démontre que la famille est totale dans $L^2(0, \pi; \mathbb{R}^2)$.
2- Pour montrer que $\mathcal{B}^*$ est biorthogonale, calculons $\left\langle \Phi_{k,i}, \Phi^*_{k',i'} \right\rangle$. Par construction de ψ_k orthogonale à φ_k, $\Phi_{k,2}$ est orthogonale à $\Phi^*_{k,1}$, de plus elle est orthogonale $\Phi^*_{j,2}$ pour tout $j \neq k$. De même, $\Phi_{k,1}$ est orthogonale $\Phi^*_{j,2}$ pour tout j et à $\Phi^*_{j,1}$ pour tout $j \neq k$. De plus

$$\left\langle \Phi_{k,1}, \Phi^*_{k,1} \right\rangle = (\varphi_k, \varphi_k) = 1, \quad \left\langle \Phi_{k,2}, \Phi^*_{k,2} \right\rangle = (\varphi_k, \varphi_k) = 1.$$

Puisque la famille $\mathcal{B}$ admet une famille biothogonale dans $L^2((0,\pi);\mathbb{R}^2)$, elle est libre. En effet, en faisant le produit scalaire d'une combinaison linéaire finie et nulle d'éléments de $\mathcal{B}$ avec les élements de la famille bi-orthogonale, on en déduit que tous les coefficients sont nuls.
3- On va maintenant montrer que $\mathcal{B}$ est de Bessel. On notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire dans $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est de Bessel, il suffit de montrer que pour tout $y\in L^2((0,\pi);\mathbb{R}^2)$, chacune des séries de terme général $\left|\langle y,\Phi_{k,1}\rangle\right|^2$, $\left|\langle y,\Phi_{k,2}\rangle\right|^2$ convergent.
On a :

$$\left|\langle y,\Phi_{k,1}\rangle\right|^2\leq\left|\int_0^\pi y_1(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right|^2,$$

et

$$\left|\langle y,\Phi_{k,2}\rangle\right|^2\leq\left|\int_0^\pi y_1(x)\,\psi_k(x)\,dx\right|^2+\left|\int_0^\pi y_2(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right|^2.$$

de (2.6), on obtient

$$\left|\langle y,\Phi_{k,2}\rangle\right|^2\leq\frac{C\left\|y_1\right\|^2_{L^2(0,\pi;\mathbb{R})}}{k^2}+\left|\int_0^\pi y_2(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right|^2.$$

Comme $y_1,y_2\in L^2(0,\pi;\mathbb{R})$, pour $i=1,\ 2$, les séries de terme général $\left|\int_0^\pi y_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right|^2$ sont convergentes et en conséquence, les estimations précédentes assurent la convergence des séries de terme général $\left|\langle y,\Phi_{k,i}\rangle\right|^2$, $i=1,2$.
On démontre de la même manière que $\mathcal{B}^*$ est totale et de Bessel. En conclusion, $\mathcal{B}$ est une base de Riesz de $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$

Exemple 2.18 *[7]La famille*

$$\left\{e^{ikt},te^{ikt},t^2e^{ikt},...,t^me^{ikt}\right\},\quad k\in\mathbb{Z}^*.$$

forme une base de Riesz dans $L^2(0,T)$ pour tout $T\geq 2(m+1)\pi$.

2.3 L'inégalité de Ingham

L'inégalité de Ingham constitue une généralisation de l'identité de Parseval pour les fonctions de la forme

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{i\lambda_nt}$$

lorsque la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété d'écart du type $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq\gamma$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, avec $\gamma>0$. Son application à la démonstration d'inégalités d'observabilité ne peut se faire que dans le cas d'opérateurs diagonalisables pour lesquels on connaît suffisamment les propriétés spectrales.

2.3.1 Le théorème d'Ingham

Théorème 2.19 *[18] Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels et J un intervalle borné de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $\gamma>0$ tel que*

$$\begin{cases}(1)\quad\forall n\in\mathbb{Z}\quad\mu_{n+1}-\mu_n\geq\gamma\\(2)\qquad\qquad|J|>\dfrac{2\pi}{\gamma}.\end{cases}$$

Il existe alors deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ (ne dépendant que de $|J|$ et γ) telles que pour toute suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de carré sommable on ait la double inégalité

$$c_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 \, dt \leq c_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \tag{2.7}$$

où f est définie par

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}.$$

L'inégalité de gauche de (2.7) est appelée inégalité inverse et celle de droite est dite inégalité directe. Dans [18], Ingham avait démontré ce résultat uniquement pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à support fini, dans un premier temps, pour éviter les problèmes de convergence des séries. Puis il concluera pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de carré sommable en utilisant un argument de densité et la complétude. On renvoie à l'article de Ingham, [18], pour la démonstration du Théorème 2.19, ainsi qu'au livre de Komornik et Loreti, [20], pour une application de ce résultat à la contrôlabilité de l'équation des ondes en une dimension d'espace. On trouvera également dans [18], différentes améliorations et variantes du théorème de Ingham, ainsi que des applications à la contrôlabilité d'autres systèmes (par exemple, équations de poutres, de cordes, de membranes sphériques, systèmes couplés poutre-corde).
Dans les applications de ce résultat à la contrôlabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles, c'est l'inégalité de gauche dans (2.7) qui est utilisée pour démontrer les inégalités d'observabilité associées.

2.3.2 Contrôlabilité de l'équation des ondes

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière et $\Gamma \subset \partial\Omega$. On étudie la contrôlabilité frontière de l'équation des ondes sur Γ :

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \Omega \times (0,T) \\ y = v & \Gamma \times (0,T) \\ y = 0 & (\partial\Omega \backslash \Gamma) \times (0,T) \\ y(0) = y^0, \ y'(0) = y^1 & \Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

où $\left(y^0, y^1\right) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et $v \in L^2(\Gamma \times (0,T))$ est un contrôle.

Définition 2.20 *On dit que y est solution faible de (2.8) si y vérifie, pour tout $f \in D(\Omega \times (0,T))$, l'égalité*

$$\int_{\Omega\times(0,T)} y f \mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\left\langle y^0, \theta'(0)\right\rangle + \left\langle y^1, \theta(0)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \int_{\Gamma\times(0,T)} v\partial_\nu\theta \mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$

où θ est la solution de

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f & \Omega \times (0,T) \\ \theta = 0 & \Gamma \times (0,T) \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 & \Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

On rappelle le théorème d'existence et d'unicité des solutions de (2.8) (cf [22]):

Théorème 2.21 *[22] Pour tout* $\left(y^0, y^1, v\right) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Gamma \times (0,T))$, *il existe une unique solution* y *de (2.8) avec*

$$y \in C\left((0,T); L^2(\Omega)\right) \cap C\left((0,T); H^{-1}(\Omega)\right).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ *telle que pour tout* $\left(y^0, y^1, v\right) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Gamma \times (0,T))$ *on ait l'inégalité*

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|y'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|y'\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2((0,T)\times\Gamma)}\right).$$

On peut démontrer que la contrôlabilité du système (2.8) se ramène à l'observabilité de son système adjoint au sens du théorème suivant.

Théorème 2.22 *Soit* $T > 0$. *Le système (2.8) est exactement contrôlable au temps* T *si et seulement s'il existe une constante* $C(T) > 0$ *telle que pour tout* $\left(\theta^0, \theta^1\right) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *on ait l'inégalité*

$$\left\|\left(\theta^0, \theta^1\right)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C(T)\int_0^T \int_\Gamma \left|\partial_\nu \varphi(t,x)\right|^2 \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t \tag{2.10}$$

où θ *est la solution du problème adjoint*

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = 0 & (0,T)\times\Omega \\ \theta = 0 & (0,T)\times\Gamma \\ \theta(0) = \theta^0,\ \theta'(0) = \theta^1 & \Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Observabilité du système adjoint en 1D

On considère, dans la suite, l'équation des ondes en une dimension d'espace sur le domaine $\Omega = (0,\pi)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = y_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,T), \\ y(0,t) = v(t), \quad y(\pi,t) = 0, & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y^0(x),\ \frac{dy}{dt}(x,0) = y^1(x) & x \in (0,\pi), \end{cases} \tag{2.12}$$

où le terme v désigne le contrôle recherché. Le système (2.12) est exactement contrôlable au temps T si, et seulement si, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $\left(\theta^0, \theta^1\right) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$, la solution θ du système adjoint

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \theta_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,T), \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0, & t \in (0,T), \\ \theta(x,0) = \theta^0(x),\ \theta_t(x,0) = \theta^1(x), & t \in (0,T), \end{cases} \tag{2.13}$$

vérifie

$$\left\|\left(\theta^0, \theta^1\right)\right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \leq C_T \int_0^T \left(\theta_x(0,t)\right)^2 \mathrm{d}t \tag{2.14}$$

Théorème 2.23 *Si* $T \geq 2\pi$ *, alors l'équation des ondes (2.12) est exactement contrôlable au temps* T.

La technique utilisée dans notre travail étant trés proche de celle donnée dans la démonstration de ce Théorème, nous allons la présenter de manière assez détaillée.

Pour démontrer le théorème 2.23 nous allons tout d'abord déterminer les valeurs propres de l'opérateur

$$\begin{gathered} L : D(L) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi), \\ L = -\partial_{xx}, \\ D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi). \end{gathered}$$

Valeurs propres et fonctions propres de L

Lemme 2.24 *Les valeurs propres de l'opérateur L sont égales à $-k^2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. La suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par*

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$$

pour tout $x \in [0,\pi]$ est une base hilbertienne formée de vecteurs propres de l'opérateur L associés à la suite de valeurs propres $(k^2)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Proof. Remarquons que L est un opérateur auto-adjoint, positif et inversible sur l'espace $L^2(0,\pi)$, donc ses valeurs propres sont toutes strictement positives. De plus, $D(L)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(0,\pi)$, donc $L^2(0,\pi)$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de L.

Soit λ une valeur propre de L et $\varphi \in D(L) \setminus \{0\}$ une fonction propre associée. Alors φ est une solution non nulle de l'équation

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + \lambda\varphi = 0, & x \in (0,\pi) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Donc φ est de la forme

$$\varphi(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right),$$

avec $c_1 = \varphi(0) = 0$ et $c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = \varphi(\pi) = 0$. Puisque $\varphi \neq 0$, il vient $c_2 \neq 0$ donc $\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$. On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{\lambda} = k$. D'où $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = k^2$ et

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \varphi(x) = c_2 \sin(kx).$$

Choisissons la constante c_2 de sorte que $\|\varphi\|_{L^2(0,\pi)} = 1$. Puisque $\int_0^\pi \sin^2(kx)dx = \dfrac{\pi}{2}$, il vient $c_2 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ et

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx).$$

■

La solution de problème adjoint (2.13).

Soit $(\theta^0, \theta^1) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$. Décomposons θ^0 et θ^1 dans la base Hilbertienne $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sous la forme

$$\theta^0 = \sum_{k\geq 1} \alpha_n \varphi_k \quad \text{et} \quad \theta^1 = \sum_{k\geq 1} \beta_n \varphi_k$$

avec $\sum_{k\geq 1} k^2 (\alpha_k)^2 < \infty$ et $\sum_{k\geq 1} (\beta_k)^2 < \infty$. On a alors

$$\left\| (\theta^0, \theta^1) \right\|^2_{H^1_0(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \sum_{k\geq 1} \left(k^2 (\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2 \right). \tag{2.16}$$

Théorème 2.25 *La solution θ de (2.13) est donnée par*

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\left(\alpha_k - i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{ikt} + \left(\alpha_k + i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{-ikt} \right] \sin(kx). \tag{2.17}$$

Proof. On écrit θ dans la base hilbertienne $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sous la forme

$$\forall\, (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) \qquad \theta(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} b_k\,(t)\, \varphi_k\,(x)\,.$$

θ est solution de (2.13) si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} b''_k\,(t) + k^2 b_k\,(t) = 0, & t \in (0,T)\,, \\ b_k\,(0) = \alpha_k, \;\; b'_k\,(0) = \beta_k, & \end{cases}$$

ce qui équivaut encore à

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} b_k\,(t) = c_{1,k} e^{ikt} + c_{2,k} e^{-ikt}, & t \in (0,T)\,, \\ \alpha_k = c_{1,k} + c_{2,k}, \;\; \beta_k = ik\,(c_{1,k} - c_{2,k})\,. & \end{cases}$$

Ainsi θ est solution de (2.13) si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\; \forall t \in (0,T) \quad b_k\,(t) = \frac{1}{2}\left(\alpha_k - i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{ikt} + \frac{1}{2}\left(\alpha_k + i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{-ikt}.$$

Ce qui donne bien la formule annoncée pour θ. ■

Utilisation du théorème d'Ingham

Soit θ la solution de (2.13) donnée par (2.17). En dérivant la formule de (2.17) par rapport à x on obtient pour tout $t \in (0,T)$

$$\theta_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\left(\alpha_k - i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{ikt} + \left(\alpha_k + i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{-ikt} \right] k\cos(kx).$$

Pour $x = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \theta_x(0,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\left(\alpha_k - i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{ikt} + \left(\alpha_k + i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{-ikt} \right] k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left[(k\alpha_k - i\beta_k)\, e^{ikt} + (k\alpha_k + i\beta_k)\, e^{-ikt} \right], \end{aligned}$$

et donc

$$\theta_x(0,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k e^{i\mu_k t} \tag{2.18}$$

avec pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mu_k = k, \qquad a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(k\alpha_k^0 - i\alpha_k^1\right) & \text{si } k \geq 1 \\ \\ 0 & \text{si } k = 0 \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((-k)\,\alpha_{-k}^0 + i\alpha_{-k}^1\right) & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$$

On calcul

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 &= \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 + \sum_{k\leq -1} |a_k|^2 \\ &= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\pi} (k\alpha_k^0)^2 + (\alpha_k^1)^2 + \sum_{k<1} \frac{1}{2\pi} (k\alpha_{-k}^0)^2 + (k\alpha_{-k}^1)^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k\geq 1} \left(k^2(\alpha_k^0)^2 + (\alpha_k^1)^2\right) \end{aligned}$$

D'après (2.16),

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 = \frac{1}{\pi} \left\|\left(\theta^0, \theta^1\right)\right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)}$$

Donc

$$\left\|\left(\theta^0, \theta^1\right)\right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 .$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1) - k = 1$. Donc le théorème de Ingham (2.19) s'applique avec $\gamma = 1$ et donne pour tout $T > 2\pi$, l'existence de deux constantes $c_1 = c_1(T) > 0$ et $c_2 = c_2(T) > 0$ telles que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ on ait

$$c_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \int_0^T |f(t)|^2\, dt \leq c_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \tag{2.19}$$

où

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{i\mu_k t}.$$

En appliquant l'inégalité de gauche de (2.19) à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on obtient

$$\forall T > 2\pi, \qquad c_1 \frac{1}{\pi} \left\|\left(\theta^0, \theta^1\right)\right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \leq \int_0^T \left(\theta_x(0,t)\right)^2 dt,$$

ce qui démontre l'inégalité d'observabilité (2.14) avec $C_T = \dfrac{\pi}{c_1}$, pour tout $T > 2\pi$.
Notons que (2.14) est encore vraie si $T = 2\pi$ d'après l'identité de Parseval. L'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2$$

signifie exactement que

$$\left\|\left(\theta^0,\theta^1\right)\right\|^2_{H^1_0(0,\pi)\times L^2(0,\pi)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\theta_x\left(0,t\right)\right)^2dt.$$

Dans ce cas, l'inégalité d'observabilité est une égalité.
En conclusion, le théorème de Ingham, a permis d'établir le résultat suivant: Si $T\geq 2\pi$, alors l'équation des ondes (2.12) est exactement contrôlable au temps T.

Chapitre 3

(Application). Contrôlabilité approché et exacte d'un système hyperpolique couplée

Dans cette chapitre, on présente l'application de problème de la contôlabilité approché et exacte d'un système d'équation hyperpolique couplée unidimensionnlle. Le contrôle est exercé à un point limite pour touts les temps. Plus précisément, supposons $T > 0$, et considérons le système linéaire

$$\begin{cases} y_{tt} = Dy_{xx} + A(x)y_t & \text{dans} & Q_T = (0,\pi) \times (0,T) \\ Dy(0,t) = Bv(t), & y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y^0, & y_t(x,0) = y^1 & x \in (0,\pi) \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec les notations suivantes

* $D = diag(1, d^2)$, où d est un nombre réel positif.

* $A \in W^{1,\infty}(0,\pi;\mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ est donné par $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a \neq 0$

* $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ et $v \in L^2(0,T)$ est la fonction de conrôle.

Définition 3.1 *Pour $(y^0, y^1, v) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi) \times L^2(0,T)$, a (faible) solution au système 3.1 est une fonction*

$y = y(\cdot; y^0, y^1, v) \in ([0,T]; \mathbb{L}^2(0,\pi) \cap C^1([0,T]); \mathbb{H}^{-1}(0,\pi))$

satisfait

$\int_{Q_T} y \cdot f dxdt = -\int_0^\pi y^0 \cdot (\theta_t(0) + A^*\theta(0))dx + \langle y^1, \theta(0)\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(0,\pi),\mathbb{H}_0^1(0,\pi)} + \int_0^T v(t)B^*\theta_x(0,t)dt$

pour tout $f \in L^1(0,T;\mathbb{L}^2(0,\pi))$, où $\theta \in C([0,T]; \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \cap C^1([0,T]); \mathbb{L}^2(0,T))$

est la solution unique au système:

$$\begin{cases} \theta_{tt} = D\theta_{xx} - A^*(x)\theta_t + f & \textit{dans } Q_T \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \theta(x,T) = 0, \theta_t(x,t) = 0 & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

On introduit le système adjoint à 3.1, c'est-à-dire l'équation rétrograde en temps.

- On multiple le premier équation de système 3.1 par θ, en effectuant des intégrations par parties, on obtient:

$$\int_0^T \int_0^T y_{tt}(x,t)\theta(x,t)dxdt = \int_0^T \int_0^\pi y_{xx}(x,t)\theta(x,t)dxdt + \int_0^T \int_0^\pi A(x)y_t(x,t)\theta(x,t)dxdt$$

La première intégration:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^T y_{tt}(x,t)\theta(x,t)dxdt \\
= & \int_0^\pi \left[y_t(x,t)\theta(x,t)\right]_0^T dx - \int_0^\pi \int_0^T y_t(x,t)\theta_t(x,t)dxdt \\
= & \int_0^\pi (y_t(x,T)\theta(x,T) - y_t(x,0)\theta(x,0))dx \\
& - \int_0^\pi (y(x,T)\theta_t(x,T) - y(x,0)\theta_t(x,0))dx + \int_0^T \int_0^\pi y(x,t)\theta_{tt}(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

On a $y_t(x,0) = y^1$ et $y(x,0) = y^0$
Donc

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^T y_{tt}(x,t)\theta(x,t)dxdt \\
= & \int_0^\pi y_t(x,T)\theta(x,T)dx - \left\langle y^1, \theta(0)\right\rangle_{\mathbb{H}^{-1}\times\mathbb{H}_0^1} - \int_0^\pi y(x,T)\theta_t(x,T)dx \qquad (3.2) \\
& + \int_0^\pi y^0\theta_t(x,0)dx + \int_0^T \int_0^\pi y(x,t)\theta_{tt}(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

La deuxième intégration:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^\pi Dy_{xx}(x,t)\theta(x,t)dxdt \\
= & \int_0^T \left[Dy_x(x,t)\theta(x,t)\right]_0^\pi dt - \int_0^T \int_0^\pi Dy_x(x,t)\theta_x(x,t)dxdt \\
= & \int_0^T \left[Dy_x(x,t)\theta(x,t)\right]_0^\pi dt - \int_0^T \left[Dy(x,t)\theta_x(x,t)\right]_0^\pi dt + \int_0^T \int_0^\pi y(x,t)D\theta_{xx}(x,t)dxdt. \\
= & \int_0^T (Dy_x(\pi,t)\theta(\pi,t) - Dy_x(0,t)\theta(0,t))dt \\
& - \int_0^T (Dy(\pi,t)\theta_x(\pi,t) - Dy(0,t)\theta(0,t))dt + \int_0^T \int_0^\pi y(x,t)D\theta_{xx}(x,t)dxdt
\end{aligned}$$

d'aprés les conditions et on pose, $\theta(\pi,t) = 0$ et $\theta(0,t) = 0$, on obtient

$$\int_0^T \int_0^\pi y_{xx}(x,t)\theta(x,t)dxdt = \int_0^T Bv(t)\theta_x(0,t)dt + \int_0^T \int_0^\pi y(x,t)D\theta_{xx}(x,t)dxdt. \qquad (3.3)$$

La troisième intégration:

$$\int_0^T\int_0^\pi A(x)y_t(x,t)\theta(x,t)dxdt = \int_0^\pi \left[A(x)y(x,t)\theta(x,t)\right]_0^T dx - \int_0^T\int_0^\pi A(x)y(x,t)\theta_t(x,t)dxdt$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^\pi A(x)y_t(x,t)\theta(x,t)dxdt &= \int_0^\pi (A(x)y(x,T)\theta(x,T) - A(x)y(x,0)\theta(x,0))dx \\ &\quad -\int_0^T\int_0^\pi y(x,t)A^*\theta_t(x,t)dxdt. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Finalement, on trouve: d'aprés 3.2, 3.3 et 3.4

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi y_t(x,T)\theta(x,T)dx - \left\langle y^1,\theta(0)\right\rangle_{\mathbb{H}^{-1},\mathbb{H}_0^1} - \int_0^\pi y(x,T)\theta_t(x,T)dx + \int_0^\pi y^0\theta_t(x,0)dx \\ &+\int_0^T\int_0^\pi y(x,t)\theta_{tt}(x,t)dxdt \\ = \;&\int_0^T Bv(t)\theta_x(0,t)dt + \int_0^T\int_0^\pi y(x,t)\theta_{xx}(x,t)dxdt \\ &+\int_0^\pi (A(x)y(x,T)\theta(x,T) - A(x)y(x,0)\theta(x,0))dx - \int_0^T\int_0^\pi y(x,t)A^*\theta_t(x,t)dxdt\end{aligned}$$

et par suite:

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi y_t(x,T)\theta(x,T)dx + \int_0^\pi y(x,T)(-\theta_t(x,T) - A^*\theta(x,T))dx \\ &+\int_0^T\int_0^\pi y(\theta_{tt} - \theta_{xx} + A^*\theta_t)dxdt \\ = \;& -\int_0^\pi y^0(\theta_t(0) + A^*\theta(0))dx + \left\langle y^1,\theta(0)\right\rangle_{\mathbb{H}^{-1},\mathbb{H}_0^1} + \int_0^T v(t)B^*\theta_x(0,t)dt.\end{aligned}$$

Posons: $\theta_{tt} - \theta_{xx} + A^*\theta_t = 0$, $\theta(x,T) = \theta^0$ et $-\theta_t(x,T) - A^*\theta(x,T) = \theta^1$
qui implique:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi y(T)\theta^1 dx + \left\langle y_t(T),\theta^0\right\rangle_{\mathbb{H}^{-1},\mathbb{H}_0^1} &= -\int_0^\pi y^0(\theta_t(0) + A^*\theta(0))dx + \left\langle y^1,\theta(0)\right\rangle_{\mathbb{H}^{-1},\mathbb{H}_0^1} \\ &\quad +\int_0^T v(t)B^*\theta_x(0,t)dt. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

finalement:

$$\left\{\begin{array}{cc} \theta_{tt} = D\theta_{xx} - A^*\theta_t & \text{dans } Q_T \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t\in(0,T) \\ \theta(x,T) = \theta^0, \quad -\theta_t(x,T) - A^*\theta(x,T) = \theta^1 & x\in(0,\pi)\end{array}\right. \qquad (3.6)$$

On peut réecrire formellement le système (3.6) sous la forme

$$
\begin{cases}
\theta_{tt} = D\theta_{xx} - A^*\theta_t & \text{dans } Q_T \\
\theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\
\theta(x,T) = \theta^0, \quad \theta_t(x,T) = \theta^1 & x \in (0,\pi)
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

La raison en est que l'opérateur $(\theta^0,\theta^1) \to (\theta^0, -A^*\theta^0 - \theta^1)$ est clarement borné inversible de $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$ en lui-même.

Définition 3.2 *Le système* (3.1) *est exactement contrôlable en* $\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *au temps* $T>0$ *si pour tout* $(y^0,y^1),(y_T^0,y_T^1) \in \mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$, *il existe une fonction de contrôle* $v \in L^2(0,T)$ *telle que la solution associée au système* (3.1) *satisfait* $(y(T),y_t(T)) = (y_T^0,y_T^1)$.

Le système (3.1) *est approximativement contrôlable en* $\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *au temps* $T>0$ *si pour tout* $(y^0,y^1),(y_T^0,y_T^1) \in \mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *et* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction de contrôle* $v \in L^2(0,T)$ *telle que la solution associée au système* (3.1) *satisfait*

$$
\left\| (y(T) - y_T^0, y_t(T) - y_T^1 \right\|_{\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)} < \varepsilon.
$$

Proposition 3.3 *1.Le système (3.1) est exactement contrôlable en* $\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *au temps* $T>0$ *si et seulement si pour tout* $(\theta^0,\theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$ *il existe* $C_T > 0$

$$
\left\| (\theta^0,\theta^1) \right\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)} \leq C_T \int |B^*\theta_x(0,t)|^2 \, dt,
$$

2.Le système (3.1) est approximativement contrôlable en $\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *au temps* $T>0$ *si et seulement si*

$$
B^*\theta_x(0,t) = 0 \ \textit{en} \ (0,T) \Leftrightarrow (\theta^0,\theta^1) = (0,0)
$$

où θ *est la solution de* (3.6) *associée à* $(\theta^0,\theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$

Notre objectif maintenant décrire le spectre associé au système 3.7

On a l'espace de Hilbert complex $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$ muni du produit scalaire $u = (\varphi,\psi)$ et $v = (f,g)$ définie par

$$
\langle u,v \rangle = \int_0^\pi (D^{\frac{1}{2}}\varphi_x \cdot \overline{D^{\frac{1}{2}} f_x} + \psi \cdot \overline{g}) dx
\tag{3.8}
$$

Et la norme associeé sera notée par $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)}$.

On a

$$
\theta_{tt} = D\theta_{xx} - A^*\theta_t
$$

Nous prenons

$$
\begin{cases}
\varphi = \theta \\
\psi = \theta_t
\end{cases}
$$

Par la dérivation au sens des distributions

$$
\begin{cases}
\varphi_t = \theta_t = \psi \\
\psi_t = \theta_{tt} = D\theta_{xx} - A^*\theta_t
\end{cases}
$$

Alors pour tout $d > 0$, définir l'opérateur L_d^* par

$$\begin{cases} L_d^* : D(L_d^*) \subset \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi) & \rightarrow \quad \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi), \\ \qquad\qquad u = (\varphi, \psi) & \rightarrow \quad (\psi, D\varphi_{xx} - A^*\psi) \end{cases}$$

telle que $D(L_d^*) = (\mathbb{H}^2(0,\pi) \cap \mathbb{H}_0^1(0,\pi)) \times \mathbb{H}_0^1(0,\pi)$, et A^* c'est le transposée de A

$$\begin{cases} L_d : D(L_d) \subset \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi) & \rightarrow \quad \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi), \\ \qquad\qquad u = (\varphi, \psi) & \rightarrow \quad -(\psi, D\varphi_{xx} + A\psi) \end{cases}$$

avec $D(L_d) = D(L_d^*)$ est l'opérateur adjoint de L_d^* dans $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$ par rapport au produit scalaire 3.8

Dans le premier étape, nous écrivons le spectre de L_d^* et son adjoint

Nous commençons par notre que les opérateurs L_d et L_d^* est un résolvant compact. En effet, L_d est borné inversible

On pose

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\psi \\ -D\varphi_{xx} - A\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

alors

$$-\varphi_{xx} = D^{-1}Y_2 - D^{-1}AY_1$$
$$\varphi_{xx} = D^{-1}AY_1 - D^{-1}Y_2$$

Donc

$$\varphi = -\triangle^{-1}D^{-1}Y_2 + \triangle^{-1}D^{-1}AY_1$$
$$\psi = -y_1$$

car

$$\begin{pmatrix} \varphi_{xx} = \triangle\varphi \\ \triangle^{-1}\varphi_{xx} = \varphi \end{pmatrix}$$

Donc

$$L_d^{-1} = \begin{pmatrix} \triangle^{-1}D^{-1}A & -\triangle^{-1}D^{-1} \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

où $i : \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \rightarrow \mathbb{L}^2(0,\pi)$ est l'injection compacte et $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$ avec $D(\triangle) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ qui a l'inverse compacte de $L^2(0,\pi)$ en lui-même.

Soit $(\varphi, \psi) \in D(L_d^*)$ le probléme des valeurs propres:

$$L_d^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \text{dans}(0,\pi) \tag{3.9}$$

est équivalent à la résolution:

$$\begin{cases} \psi = \lambda\varphi, & \text{dans } (0,\pi) \\ D\varphi_{xx} - \lambda A^*\varphi = \lambda^2\varphi, & \text{dans } (0,\pi) \\ (\varphi, \psi) \in D(L_d^*). \end{cases} \tag{3.10}$$

Présenter les ensembles :

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ikd : k \in \mathbb{Z}^*\right\}, \\
M_2 &= \left\{ik : k \in \mathbb{Z}^*, \frac{k}{d} \notin \mathbb{Z}^*\right\}, \\
M_3 &= \left\{ik : k \in \mathbb{Z}^*, \frac{k}{d} \in \mathbb{Z}^*, \int_0^\pi a\varphi\,|k|\,\varphi\left|\frac{k}{d}\right| = 0\right\}, \\
M_4 &= \left\{ik : k \in \mathbb{Z}^*, \frac{k}{d} \in \mathbb{Z}^*, \int_0^\pi a\varphi\,|k|\,\varphi\left|\frac{k}{d}\right| \neq 0\right\},
\end{aligned}$$

Remarque 3.4 *Pour tout* $x \in (0, \pi)$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$$

Le vecteur propre de l'opérateur de Laplace unidimensionnel, avec les conditions aux limites de Dirichlet associées au valeurs propres $(-k^2)$, *et*

$$a_{k,j} = \int_0^\pi a(x)\varphi_{|k|}(x)\varphi_{|j|}(x)dx,\;\; k, j \in \mathbb{Z}^*.$$

Proposition 3.5 *Soit* $d > 0$ *et* $\tau, s \in \mathbb{R}^*$ *soient des nombres arbitraires qui seront choisis plus tard. ensuite:*

1. Le spectre de L_d^* *est donné par*

$$\sigma(L_d^*) = M_1 \cup M_2$$

2. Pour $d \neq 1$, *tout* $\lambda = ik \in M_2$ *est une valeur propre simple dont l'espace propre est engendré par*

$$\begin{aligned}
V_{2,\lambda}^* &= (\Phi_{2,\lambda}^*, \lambda\Phi_{2,\lambda}^*), \\
& \quad \textit{avec} \\
\Phi_{2,\lambda}^* &: = (\tau\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*),
\end{aligned}$$

Où ψ_λ^* *est la solution unique à:*

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\lambda^2}{d^2}u + \frac{\lambda}{d^2}\tau a(x)\varphi_{|\lambda|}, & \textit{dans } (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0\ . \end{cases} \tag{3.11}$$

3. $M_3 \cup M_4 \subset M_1$ *et* $M_3 \cap M_4 = \varnothing$ *(par construction). En outre si* $d \in \mathbb{Q}$, *alors:*
(a) Tout $\lambda \in M_3$ *est une double valeur propre dont l'espace propre est engendré par*

$$\begin{aligned}
V_{j,\lambda}^* &= (\Phi_{j,\lambda}^*, \lambda\Phi_{j,\lambda}^*),\; j = 1, 2, \\
& \quad \textit{avec} \\
\Phi_{1,\lambda}^* &= \left(0, s\varphi_{|\frac{\lambda}{d}|}\right)\ ,\ \Phi_{2,\lambda}^* = (\tau\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*)
\end{aligned}$$

Où ψ_λ^* est la solution unique au système:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\lambda^2}{d^2}u + \frac{\lambda}{d^2}\tau a(x)\varphi_{|\lambda|}, \qquad dans\ (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0\ , \\ \int_0^\pi u\varphi_{|\frac{\lambda}{d}|}dx = 0\ . \end{cases} \tag{3.12}$$

(b) Tout $\lambda = ik \in M_4$ est doublement algébrique et son espace propre généralisé est engendré par:

$$V_{1,\lambda}^* = (\Phi_{1,\lambda}^*, \lambda\Phi_{1,\lambda}^*), V_{2,\lambda}^* = (\Phi_{2,\lambda}^*, \lambda\Phi_{2,\lambda}^* + \frac{\tau}{s}c_\lambda\Phi_{1,\lambda}^*)$$

avec

$$L_d^*V_{1,\lambda}^* = \lambda V_{1,\lambda}^*; L_d^*V_{1,\lambda}^* = \lambda V_{2,\lambda}^* + \frac{\tau}{s}c_\lambda V_{1,\lambda}^*$$

$$\left\langle V_{1,\lambda}^*, V_{2,\lambda}^* \right\rangle = 0$$

tel que

$$\Phi_{1,\lambda}^* = \left(0, s\varphi_{|\frac{\lambda}{d}|}\right), \Phi_{2,\lambda}^* = (\tau\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*)$$

et

$$c_\lambda = -\frac{1}{2}\int_0^\pi a\varphi_{|\lambda|}\varphi_{|\frac{\lambda}{d}|}$$

Où ψ_λ^* est la solution unique à:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\lambda^2}{d^2}u + \frac{\lambda}{d^2}\tau\left(a(x)\varphi_{|\lambda|} + 2c_\lambda\varphi_{|\frac{\lambda}{d}|}\right) \quad , \qquad dans\ (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0\ , \\ \int_0^\pi u\varphi_{|\frac{\lambda}{d}|}dx = -\frac{\overline{\lambda}\tau c_\lambda}{2|\lambda|^2}. \end{cases} \tag{3.13}$$

4. Pour $d \neq 1$, tout $\lambda = ikd \in M_1\backslash(M_3 \cup M_4)$ est une valeur propre simple dont l'espace propre est engendré par:

$$\begin{aligned} V_{1,\lambda}^* &= (\Phi_{1,\lambda}^*, \lambda\Phi_{1,\lambda}^*) \\ &\quad \textit{avec} \\ \Phi_{1,\lambda}^* &= \left(0, s\varphi_{|\frac{\lambda}{d}|}\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Proof. L'opérateur L_d^* a un résolvant compact si $A = 0$

Soit $\varphi = (\phi_1, \phi_2)$, on prend la deuxième équation de 3.10

$$D\varphi_{xx} - \lambda A^*\varphi = \lambda^2\varphi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \\ \frac{d^2\phi_2}{dx^2} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \lambda^2\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \\ d^2\frac{d^2\phi_2}{dx^2} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ a\phi_1 \end{pmatrix} = \lambda^2\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = \lambda^2\phi_1, & \text{dans } (0,\pi) \\ d^2\frac{d^2\phi_2}{dx^2} = \lambda^2\phi_2 + \lambda a\phi_1, & x \in (0,\pi) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases}$$

Donc on écrire la deuxième équation de 3.10 de la façons suivant:

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = \lambda^2\phi_1, & \text{dans } (0,\pi) \\ \frac{d^2\phi_2}{dx^2} = \frac{\lambda^2}{d^2}\phi_2 + \frac{\lambda}{d^2}a\phi_1, & x \in (0,\pi) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

(1). $\lambda \in M_1$. On a $\Phi^*_{1,\lambda} = \left(0, s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)$ satisfait 3.15. Alors λ un valeur propre de L^*_d et le vecteur propre associée V^*_λ données en 3.14. Donc $M_1 \subset \sigma(L^*_d)$.

(2). $\lambda = ik \in M_2$. Depuis $\frac{k}{d} \notin \mathbb{Z}^*$

on a

$$\frac{\lambda^2}{d^2} = \frac{i^2k^2}{d^2} \text{ et pour } i^2 = -1$$

alors

$$\frac{\lambda^2}{d^2} = -\frac{k^2}{d^2} \neq -j^2 \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}^*.$$

Donc le probléme 3.11 admet un solution unique ψ^*_λ. Ensuite la fonction $\Phi^*_{2,\lambda} := (\tau\varphi\,|\lambda|\,, \psi^*_\lambda)$ satisfait 3.15. Alors λ un valeur propre de L^*_d et $M_1 \subset \sigma(L^*_d)$. De (1) et (2) donne $M_1 \cup M_2 \subset \sigma(L^*_d)$ et $M_2 \cup M_1 \subset \sigma(L^*_d)$.

On note que $M_3 \cup M_4 \subset M_1$ puisque si $\lambda = ik \in M_3 \cup M_4$ alors $\frac{k}{d} \in \mathbb{Z}^*$ il existe $j \in \mathbb{Z}^*$ tel que $k = jd$.

Supposons $d \in \mathbb{Q}$ et on a $\lambda = ik \in M_3$. Notez par ψ^*_λ la solution unique au probléme 3.12. Puis $\Phi^*_{2,\lambda} := (\tau\varphi\,|\lambda|\,, \psi^*_\lambda)$ satisfait 3.15 pour tout constante τ. Mais depuis $\frac{k}{d} \in \mathbb{Z}^*$, il existe $j \in \mathbb{Z}^*$ tel que $k = jd$ il s'ensuit que $\lambda = ijd$.Implique que λ est une double valeur propre puisque $\Phi^*_{1,\lambda} := \left(0, s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)$ satisfait 3.15 et est linéairement indépendant de $\Phi^*_{2,\lambda}$.

Supposons $d \in \mathbb{Q}^*$ et on a $\lambda = ik \in M_4$. la première équation de système 3.15 admet une solution de la forme $\tau\varphi\,|\lambda|$. Mais les conditions définissant M_4 implique que $\tau = 0$ et les solutions non trivial à 3.15 sont de la forme $\Phi^*_{1,\lambda} := \left(0, s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)$ pour certains $s \in \mathbb{R}$. Alors λ admet une fonction propre généralisée $(\varphi, \psi) \in D(L^*_d)$ si cette fonction résolus le système:

$$L^*_d \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \Phi^*_{1,\lambda} \\ \lambda\Phi^*_{1,\lambda} \end{pmatrix}, \quad \text{dans } (0,\pi). \tag{3.16}$$

Pour $\delta \in \mathbb{R}^*$. le système 3.16 écrit:

$$\begin{cases} \psi = \lambda\varphi + \delta\Phi^*_{1,\lambda}, & \text{dans } (0,\pi). \\ D\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \lambda A^*\varphi = \lambda^2\varphi + \delta(A^* + 2\lambda)\Phi^*_{1,\lambda}, & \text{dans } (0,\pi). \end{cases} \tag{3.17}$$

Soit $\varphi = (\phi_1, \phi_2)$ on trouve le deuxième système de 3.17

$$D\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \lambda A^* = \lambda^2\varphi + \delta(A^* + 2\lambda)\Phi^*_{1,\lambda}$$

On a

$$\Phi_{1,\lambda}^{*} = \left(0, s\varphi \left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)$$

alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \\ \frac{d^2\phi_2}{dx^2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \delta \left(\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} + 2\lambda\right)\begin{pmatrix} 0 \\ s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \\ d^2\frac{d^2\phi_2}{dx^2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ a\phi_1 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \delta \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \\ d^2\frac{d^2\phi_2}{dx^2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ a\phi_1 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \delta \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \\ d^2\frac{d^2\phi_2}{dx^2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ a\phi_1 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = \lambda^2\phi_1, & \text{dans } (0,\pi) \\ d^2\frac{d^2\phi_2}{dx^2} = \lambda^2\phi_2 + \lambda a\phi_1 + 2\delta\lambda s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|, & x \in (0,\pi) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases}$$

donc la transformation de deuxième système de 3.17 donnée le système suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = \lambda^2\phi_1, & \text{dans } (0,\pi) \\ \frac{d^2\phi_2}{dx^2} = \frac{\lambda^2}{d^2}\phi_2 + \frac{\lambda}{d^2}(a\phi_1 + 2\delta s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|), & x \in (0,\pi) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Nous choisir $\phi_1 = \tau\varphi\,|\lambda|$ pour la première équation de systéme 3.18 et la deuxième équation (qui est dans (3.13)) admet une solution ϕ_2 si

$$\delta = \frac{\tau}{s}c_\lambda \text{ avec } c_\lambda = -\frac{1}{2}\int_0^\pi a\varphi\,|\lambda|\,\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|.$$

Dans cette condition, la fonction vectorielle $V = \left(\tau\varphi\,|\lambda|\,, \phi_2, \lambda\tau\varphi\,|\lambda|\,, \lambda\phi_2 + \tau c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)$ est une généralisation de la fonction propre associée à $\lambda \in M_4$. En outre,

On a

$$V = \left(\tau\varphi\,|\lambda|\,, \phi_2, \lambda\tau\varphi\,|\lambda|\,, \lambda\phi_2 + \lambda c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right) \quad \text{et} \quad V_{1,\lambda}^{*} = (\Phi_{1,\lambda}^{*}, \lambda\Phi_{1,\lambda}^{*})$$

tel que

$$\Phi_{1,\lambda}^{*} = \left(0, s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)$$

on applique 3.8 $\left\langle V, V_{1,\lambda}^{*}\right\rangle = \int_0^\pi (D^{\frac{1}{2}}\varphi_x \cdot \overline{D^{\frac{1}{2}}f_x} + \psi \cdot \overline{g})dx$
avec

$$\varphi = (\tau\varphi\,|\lambda|\,, \phi_2) \qquad ,\psi = \left(\lambda\tau\varphi\,|\lambda|\,, \lambda\phi_2 + \tau c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)$$

et

$$f = \left(0, s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right) \qquad ,g = \left(0, \lambda s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\langle V, V_{1,\lambda}^{*}\right\rangle &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau\varphi' \left|\lambda\right| \\ \phi_2' \end{pmatrix} . \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s\varphi' \left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix}} + \\
& \begin{pmatrix} \lambda\tau\varphi\left|\lambda\right| \\ \lambda\phi_2 + \tau c_\lambda \varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\lambda} s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix} \\
&= \int_0^\pi \left(\begin{pmatrix} \tau\varphi' \left|\lambda\right| \\ d\phi_2' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ ds\varphi' \left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\lambda\phi_2 + \tau c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right).\overline{\lambda} s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right| \end{pmatrix}\right) \\
&= \int_0^\pi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ d^2 s\varphi' \left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda\overline{\lambda} s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 + \overline{\lambda}\tau c_\lambda s\left(\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)^2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 0 \\ d^2 s\varphi' \left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2' + \lambda\overline{\lambda} s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 + \overline{\lambda}\tau c_\lambda s\left(\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\langle V, V_{1,\lambda}^{*}\right\rangle &= \int_0^\pi \left(sd^2\varphi'\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2' + \lambda\overline{\lambda} s\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 + \overline{\lambda}\tau c_\lambda s\left(\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)^2\right) \\
&= \int_0^\pi \left(sd^2\varphi'\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2' + s\left(\lambda\phi_2 + \tau c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right)\overline{\lambda}\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\right) \\
&= s\int_0^\pi \left(\left|\lambda\right|^2\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 + \left|\lambda\right|^2\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 + \overline{\lambda}\tau c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|^2\right) \\
&= s\int_0^\pi \left(2\left|\lambda\right|^2\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 + \overline{\lambda}\tau c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Il résolus que:

$$\left\langle V, V_{1,\lambda}^{*}\right\rangle = 0$$

alors

$$s\int_0^\pi \left(2\left|\lambda\right|^2\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 + \overline{\lambda}\tau c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|^2\right) = 0$$

$$s\int_0^\pi 2\left|\lambda\right|^2\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 + s\int_0^\pi \overline{\lambda}\tau c_\lambda\varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|^2 = 0$$

$$s2\left|\lambda\right|^2\int_0^\pi \varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 = -s\overline{\lambda}\tau c_\lambda\int_0^\pi \varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|^2$$

$$\int_0^\pi \varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 dx = -\frac{\overline{\lambda}\tau c_\lambda}{2\left|\lambda\right|^2}\int_0^\pi \varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|^2 dx$$

donc

$$\left\langle V, V_{1,\lambda}^{*}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi \varphi\left|\frac{\lambda}{d}\right|\phi_2 = -\frac{\overline{\lambda}\tau c_\lambda}{2\left|\lambda\right|^2}$$

■

1.Résultats de contrôlabilité approchée

Théorème 3.6 *Soient $a \in L^\infty(0,\pi)$ et $d > 0$. Alors le système 3.1 est approximativement contrôlable si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfait:*

$$\begin{aligned} b_2 &\neq 0 \\ \int_0^\pi a(\pi-x)\sin(kx)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)dx &\neq \frac{i(-1)^k d^2 b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right), \qquad \forall k\in\mathbb{Z}^*. \end{aligned}$$

Dans cette section nous aborderons le problème de la contrôlabilité approximative au temps $T>0$ du système (3.1), c'est-à-dire que nous démontrerons le Theoréme 3.6. Rappelons que d est un nombre réel positif, $B^*=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ et $a\in L^\infty(0,\pi)$ est une fonction donnée. A partir de maintenant dans la Proposition 3.5, nous choisissons $s=\tau=1$.

Proposition 3.7 *Supposons que $d\notin\mathbb{Q}$. Ensuite Pour tout $T>0$, le système (3.1) est approximativement contrôlable au temp T si est seulement si, les conditions suivantes sont satisfait:*

$$\begin{aligned} b_2 &\neq 0, \\ \int_0^\pi a(\pi-x)\sin(kx)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)dx &\neq \frac{i(-1)^k d^2 b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right), \qquad \forall k\in\mathbb{Z}^*. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Proof. La tâche maintenant est de prouver que la propriété de continuation unique pour les solutions du problème adjoint (3.7) tient.

Si $d\notin\mathbb{Q}$, de la Proposition 3.5, $\lambda_{1,k}=idk$, $\lambda_{1,k}=ik\in\sigma(L_d^*)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$ et leurs espaces propres associés

sont engendré par:

$$V_{1,\lambda}^*=(\Phi_{1,\lambda}^*, ikd\Phi_{1,\lambda}^*), V_{2,\lambda}^*=(\Phi_{2,\lambda}^*, ik\Phi_{2,\lambda}^*)$$

tel que

$$\Phi_{1,\lambda}^*=(0,\varphi\,|k|)\,,\Phi_{2,\lambda}^*=(\varphi_{|k|},\psi_\lambda^*),$$

et ψ_λ^* est la solution unique à (3.11) et il est donné par la formule:

$$\psi_\lambda^*=m_k^*\sin\left(\frac{k}{d}x\right)+\frac{i}{d}\int_0^x\sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right)a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi)d\xi,$$

$$m_k^*=-\frac{i}{d\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right)}\int_0^x\sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right)a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi)d\xi. \tag{3.20}$$

D'un simple calcul, on obtient:

$$\frac{d\psi_\lambda^*}{dx}(0)=\frac{k}{d}m_k^*. \tag{3.21}$$

$(\alpha_k,\beta_k)\in\mathbb{R}^2$. nous considérons la séquence de solutions à (3.7) donnée par

$$\begin{aligned} \theta_k(x,t) &= e^{\lambda_{1,k}(T-t)}\alpha_k\Phi_{1,\lambda_{1,k}}^*+e^{\lambda_{2,k}(T-t)}\beta_k\Phi_{2,\lambda_{2,k}}^* \\ &= e^{ikd(T-t)}\alpha_k\begin{pmatrix}0\\ \varphi_{|k|}\end{pmatrix}+e^{ik(T-t)}\beta_k\begin{pmatrix}\varphi_{|k|}\\ \psi_\lambda^*\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (3.18):

$$B^* \frac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k b_2 \alpha_k e^{ikd(T-t)} + e^{ik(T-t)} \beta_k \left(b_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} k + b_2 \frac{k}{d} m_k^* \right).$$

En supposant $B^* \frac{\partial \theta_k}{\partial x}(0,.) = 0$ sur l'intervalle $(0,T)$ s'élève à:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} k b_2 \alpha_k e^{ikd(T-t)} + \left(b_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} k + b_2 \frac{k}{d} m_k^* \right) e^{ik(T-t)} \beta_k = 0, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Cette conditions est équivalente à

$$e^{ikd(T-t)} \neq 0 \qquad \text{et} \quad e^{ik(T-t)} \neq 0$$

alors

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k b_2 \alpha_k &= 0, \\ &\quad \text{et} \\ \left(b_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} k + b_2 \frac{k}{d} m_k^* \right) \beta_k &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k b_2 \alpha_k &= 0, \\ k \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + \frac{b_2}{d} m_k^* \right) \beta_k &= 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k b_2 & 0 \\ 0 & k \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + \frac{b_2}{d} m_k^* \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \Rightarrow \det \neq 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k b_2 . k \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + \frac{b_2}{d} m_k^* \right) &\neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^2 b_2 . \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + \frac{b_2}{d} m_k^* \right) &\neq 0 \\ \frac{2}{\pi} k^2 b_2 b_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^2 \frac{b_2^2}{d} m_k^* &\neq 0 \end{aligned}$$

$$m_k^* \neq \frac{-\frac{2}{\pi} k^2 b_2 b_1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} k^2 \frac{b_2^2}{d}}$$

$$m_k^* \neq \frac{-\frac{2}{\pi}k^2 b_2 b_1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}k^2\frac{b_2^2}{d}}}$$

$$m_k^* \neq \frac{-\frac{2}{\pi}b_1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{b_2}{d}}}$$

donc

le système (3.22), il s'ensuit que $\alpha_k = \beta_k = 0$ si, et seulement si:

$$\begin{array}{lcl} b_2 \neq 0 & \Leftrightarrow & b_2 \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1 + \frac{b_2}{d}m_k^* \neq 0 & & m_k^* \neq -\sqrt{\frac{2}{\pi}}d\frac{b_1}{b_2} \end{array}$$

De (3.20), on obtient

on a

$$m_k^* = -\frac{i}{d\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right)}\int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right)a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi)d\xi$$

et

$$m_k^* \neq -\sqrt{\frac{2}{\pi}}d\frac{b_1}{b_2}$$

alors

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{2}{\pi}}d\frac{b_1}{b_2} &\neq -\frac{i}{d\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right)}\int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right)a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi)d\xi \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}}d^2\frac{b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right) &\neq -i\int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right)a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi)d\xi \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}d^2\frac{b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right) &\neq i\int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right)a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi)d\xi \\ \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}d^2\frac{b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right) &\neq \int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right)a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi)d\xi \end{aligned}$$

donc

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} b_2 \neq 0 \\ \int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right)a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi)d\xi \neq -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}d^2\frac{b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right) \end{array}$$

Avec le changement de la variable $x = \pi - \xi$ dans l'intégrale, nous arrivons à (3.19). ■

Proposition 3.8 *Supposons que $d \in \mathbb{Q}^*$. Ensuite Pour tout $T > 0$, le système (3.1) est approximativement contrôlable si, est seulement si*

$$\begin{aligned} b_2 &\neq 0, \\ \int_0^\pi a(\pi - x)\sin(kx)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)dx &\neq \frac{i(-1)^k d^2 b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Proof. soit $d \in \mathbb{Q}^*$. Supposons que $M_3 \neq \varnothing$ et $\lambda = ik \in M_3$. D'aprés la Proposition 3.5, l'espace propre de λ est bidimensionnel et engendré par:

$$
\begin{aligned}
V_{j,\lambda}^{*} &= \left(\Phi_{j,\lambda}^{*}, \lambda\Phi_{j,\lambda}^{*}\right),\ j=1,2, \\
& \quad \text{avec} \\
\Phi_{1,\lambda}^{*} &= \left(0, \varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}\right)\ ,\ \Phi_{2,\lambda}^{*} = \left(\varphi_{|\lambda|}, \psi_{\lambda}^{*}\right)
\end{aligned}
$$

Où ψ_{λ}^{*} est la solution unique à (3.12). soit θ_{λ} la solution du problème adjoint en arriére (3.7) associé aux données initiales:

$$
\left(\theta^{0}, \theta^{1}\right) = \alpha V_{1,\lambda}^{*} + \beta V_{2,\lambda}^{*}
$$

Pour certains nombres réels α, β. Ensuite, comme précédemment, nous avons:

$$
\left(\theta_{\lambda}, \theta_{\lambda}^{'}\right) = e^{\lambda(T-t)} \left(\alpha V_{1,\lambda}^{*} + \beta V_{2,\lambda}^{*}\right)
$$

Ainsi

$$
\theta_{\lambda} = e^{\lambda(T-t)} \begin{pmatrix} \beta\varphi_{|\lambda|} \\ \alpha\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|} + \beta\psi_{\lambda}^{*} \end{pmatrix}
$$

et

$$
\frac{\partial\theta_{\lambda}}{\partial x}(0,t) = e^{\lambda(T-t)} \begin{pmatrix} \beta\frac{\partial\varphi_{|\lambda|}}{\partial x}(0) \\ \alpha\frac{\partial\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}}{\partial x}(0) + \beta\frac{\partial\psi_{\lambda}^{*}}{\partial x}(0) \end{pmatrix}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
B^{*}\frac{\partial\theta_{\lambda}}{\partial x}(0,t) &= e^{\lambda(T-t)} B^{*} \begin{pmatrix} \beta\frac{\partial\varphi_{|\lambda|}}{\partial x}(0) \\ \alpha\frac{\partial\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}}{\partial x}(0) + \beta\frac{\partial\psi_{\lambda}^{*}}{\partial x}(0) \end{pmatrix} \\
&= e^{\lambda(T-t)} \left(\beta\left(b_{1}\frac{\partial\varphi_{|\lambda|}}{\partial x}(0) + b_{2}\frac{\partial\psi_{\lambda}^{*}}{\partial x}(0)\right) + b_{2}\alpha\frac{\partial\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}}{\partial x}(0)\right)
\end{aligned}
$$

Si $b_2 \neq 0$, en choisissant

$$
\alpha = -\frac{b_{1}\frac{\partial\varphi_{|\lambda|}}{\partial x}(0) + b_{2}\frac{\partial\psi_{\lambda}^{*}}{\partial x}(0)}{b_{2}\frac{\partial\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}}{\partial x}(0)}\beta
$$

on obtenons

$$
B^{*}\frac{\partial\theta_{\lambda}}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t \in (0,T).
$$

Ceci montre déjà que le système n'est pas approximativement contrôlable puisque θ_{λ} n'est pas trivial avec le choix précédent de α, β.

Supposons maintenant que $M_3 = \varnothing$. Si $\lambda \in \sigma(L_{d}^{*})$, alors soit $\lambda \in (M_1 \cup M_2) \setminus M_4$ et dans ce cas, comme dans la preuve de la Proposition 3.7, nous obtenons les deux conditions dans (3.23), ou $\lambda = ik \in M_4$ et de la Proposition 3.5, cette valeur propre est double algébrique et son espace propre généralisé est engendré par:

$$
\begin{aligned}
V_{1,\lambda}^* &= (\Phi_{1,\lambda}^*, ik\Phi_{1,\lambda}^*), V_{2,\lambda}^* = (\Phi_{2,\lambda}^*, ik\Phi_{2,\lambda}^* - \frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}\Phi_{1,\lambda}^*) \\
& \text{avec} \\
\Phi_{1,\lambda}^* &= \left(0, \varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}\right) \ , \ \Phi_{2,\lambda}^* = (\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*)
\end{aligned}
$$

Où ψ_λ^* la solution unique à (3.13). Son expression est:

$$
\psi_\lambda^* = m_k^* \sin\left(\frac{k}{d}x\right) + \frac{i}{d}\int_0^x \left(\sin\frac{k}{d}(x-\xi)\right)\left(a(\xi)\varphi_{|\lambda|}(\xi) - a_{k,\frac{k}{d}}\varphi_{|\lambda|}(\xi)\right)d\xi,
$$

$$
m_k^* = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ia_{k,\frac{k}{d}}}{4k} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{d}\int_0^x\int_0^x \left(\sin\frac{k}{d}(x-\xi)\right)\left(a(\xi)\varphi_{|\lambda|}(\xi) - a_{k,\frac{k}{d}}\varphi_{|\lambda|}(\xi)\right)\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}(x)d\xi dx.
$$

Considérer la solution θ_λ à (3.7) associée aux données initiales:

$$
\left(\theta^0, \theta^1\right) = \alpha V_{1,\lambda}^* + \beta V_{2,\lambda}^*
$$

Il est donné par:

$$
\begin{aligned}
\theta_\lambda(x,t) &= e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\Phi_{1,\lambda}^* + \beta_k\left(-\frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}(T-t)\Phi_{1,\lambda}^* + \Phi_{2,\lambda}^*\right)\right) \\
&= e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}\end{pmatrix} + \beta_k\left(-\frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}(T-t)\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{|k|}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varphi_{|k|} \\ \psi_k^*\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}\end{pmatrix} + \beta_k\begin{pmatrix} \varphi_{|\lambda|} \\ -\frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}(T-t)\varphi_{|k|} + \psi_\lambda^*\end{pmatrix}\right) \\
&= e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|} + \beta_k\varphi_{|k|} + \beta_k\left(-\frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}(T-t)\varphi_{|k|} + \psi_k^*\right)\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial x}(0,t) = e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\frac{\partial\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}}{\partial x}(0) + \beta_k\frac{\partial\varphi_{|k|}}{\partial x}(0) + \beta_k\left(-\frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}(T-t)\frac{\partial\varphi_{|k|}}{\partial x}(0) + \frac{\partial\psi_k^*}{\partial x}(0)\right)\right)
$$

On a

$$
\varphi_{|k|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)
$$

$$
\frac{\partial\varphi_{|k|}}{\partial x} = k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx)
$$

Alors

$$
\frac{\partial\varphi_{|k|}}{\partial x}(0,t) = k\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{3.24}
$$

et donc

$$\frac{\partial \varphi_{|\frac{k}{d}|}}{\partial x}(0,t) = \frac{k}{d}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{3.25}$$

Donc par (3.24) et (3.25) et (3.18) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_\lambda}{\partial x}(0,t) &= e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{d} + \beta_k\sqrt{\frac{2}{\pi}}k + \beta_k\left(-\frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}(T-t)k\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{k}{d}m_k^*\right)\right)\\
B^*\frac{\partial \theta_\lambda}{\partial x}(0,t) &= e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2\frac{k}{d} + \beta_k\left(b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}k + b_2\frac{k}{d}m_k^*\right) - \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{2}b_2\beta_k a_{k,\frac{k}{d}}k(T-t)\right).
\end{aligned}$$

En supposont que $B^*\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial x}(0,t) = 0$ sur l'intervalle $(0,T)$ s'élève à:

$$e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2\frac{k}{d} + \beta_k\left(b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}k + b_2\frac{k}{d}m_k^*\right) - \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{2}b_2\beta_k a_{k,\frac{k}{d}}k(T-t)\right) = 0$$

alors

$$\begin{cases}
\alpha_k\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2\frac{k}{d} + \beta_k\left(b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}k + b_2\frac{k}{d}m_k^*\right) = 0\\
\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{2}b_2\beta_k a_{k,\frac{k}{d}}k(T-t) = 0
\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases}
\alpha_k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b_2}{d} + \beta_k\left(b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{b_2}{d}m_k^*\right) = 0\\
\frac{b_2 a_{k,\frac{k}{d}}}{\sqrt{2\pi}}\beta_k = 0.
\end{cases} \tag{3.26}$$

A partir de (3.26), nous déduisons que

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b_2}{d} & b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{b_2}{d}m_k^* \\ 0 & \frac{b_2 a_{k,\frac{k}{d}}}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \Rightarrow \det \neq 0$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b_2}{d}.\frac{b_2 a_{k,\frac{k}{d}}}{\sqrt{2\pi}} &\neq 0\\
\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b_2^2}{d}.\frac{a_{k,\frac{k}{d}}}{\sqrt{2\pi}} &\neq 0\\
\frac{b_2^2}{d\pi}a_{k,\frac{k}{d}} &\neq 0
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{b_2^2}{d\pi}a_{k,\frac{k}{d}} \neq 0 \Leftrightarrow b_2 \neq 0$$

depuis par hypothèse $\lambda \in M_4$ (et donc $a_{k,\frac{k}{d}} \neq 0$). ■

La Proposition 3.7 et la Proposition 3.8 impliquent le Théorème 3.6.

2.Résultats de contrôlabilité exactes.

Dans la proposition 3.5, nous choisissons :

$$s = \frac{1}{2dk} \text{ et } \tau = \frac{1}{k}, \ \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

Proposition 3.9 *Supposons que le système (3.1) est approximativement contrôlable et*

$$d = 1, \ \int_0^\pi a(x)dx \neq 0.$$

Alors le système 3.1 est exactement contrôlable si,et seulement si, $T \geq 4\pi$.

Pour prouver ce résultat, nous devons clarifier un peu plus l'analyse spectrale. d'après le proposition 3.5, On a le spectre de L_d^* est donné par

$$\sigma(L_d^*) = M_1 \cup M_2$$

Si $d = 1$ alors $M_2 = \varnothing$ et $M_1 = M_3 \cup M_4$, donc le spetre de L^* se réduit à M_1

$$\sigma(L^*) = \{ik : \ k \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Dans l'hypothèse $M_3 = \varnothing$, chaque $\lambda_k = ik$ est algébriquement double est la condition définissant M_4 s'écrit

$$\int_0^\pi a(x) \left|\varphi_{|k|}\right|^2 \neq 0, \ \forall k \geq 1$$

Dans cette situation, l'ensemble des valeurs propres est

$$M_1 = \{ik, \ k \in \mathbb{Z}^*\},$$

et les fonctions propres généralisées associées sont pour $k \geq 1$:

$$V_{1,k}^* = (\Phi_{1,k}^*, ik\Phi_{1,k}^*), V_{2,k}^* = (\Phi_{2,k}^*, ik\Phi_{2,k}^* + 2c_k\Phi_{1,k}^*)$$

avec

$$\begin{gathered} L_1^* V_{1,k}^* = ikV_{1,k}^*; L_1^* V_{1,k}^* = ikV_{2,k}^* + 2c_k V_{1,k}^* \\ \left\langle V_{1,k}^*, V_{2,k}^* \right\rangle = 0 \end{gathered} \tag{3.27}$$

$$\Phi_{1,k}^* = \left(0, \frac{1}{2k}\varphi_{|k|}\right), \Phi_{2,k}^* = (\frac{1}{k}\varphi_{|k|}, \psi_k^*) \tag{3.28}$$

$$c_k = -\frac{1}{2}\int_0^\pi a\varphi_{|k|}^2 = -\frac{1}{2}a_{k,k}, \tag{3.29}$$

et ψ_k^* est la fonction unique satisfaisant

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi_k^*}{dx^2} = -k^2\psi_k^* + i(a(x) + 2c_k)\varphi_{|k|} & x \in (0, \pi), \\ \psi_k^*(0) = \psi_k^*(\pi) = 0, \\ \int_0^\pi \psi_k^*\varphi_{|k|} = i\frac{c_k}{2k^2}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Fixons $\varepsilon^* = \left\{V_{1,k}^*, V_{2,k}^*\right\}_{k\in\mathbb{Z}^*}$. est une base (Riesz) en $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$. Certains lemmes sont nécessaires pour cela.

Lemme 3.10 *Supposons que $d=1$ et $M_3=\varnothing$. La famille ε^* est complète en $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$.*

Proof. Il suffit de prouver que si $F=(f,g)\in\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$ est orthogonal par rapport au sous-espace engendrè par ε^* puis $F=0$. Mais l'orthogonalité de F au sous- espace engendrè par ε^* écrit (rappeler que $D=Id$ si $d=1$) ;

d'après 3.8

$$\begin{array}{l} \left\langle F, V_{1,k}^*\right\rangle = \int_0^\pi \left(f_x.\overline{\frac{d\Phi_{1,k}^*}{dx}} - ikg.\overline{\Phi_{1,k}^*}\right)dx = 0, \\ \left\langle F, V_{2,k}^*\right\rangle = \int_0^\pi \left(f_x.\overline{\frac{d\Phi_{2,k}^*}{dx}} + g.\left(-ik\overline{\Phi_{2,k}^*} + 2c_k\overline{\Phi_{1,k}^*}\right)\right)dx = 0, \end{array} \quad k\in\mathbb{Z}^*. \tag{3.31}$$

Alors en particulier, si $f=(f_1,f_2)$ et $g=(g_1,g_2)$,

La premières égalités en 3.31

$$\begin{aligned} \langle F, V_{1,k}^*\rangle &= \int_0^\pi \left(\begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \end{pmatrix}.\overline{\frac{d\Phi_{1,k}^*}{dx}} - ik\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2k}\varphi_{|k|} \end{pmatrix}\right)dx = 0 \\ &= \frac{1}{2k}\int_0^\pi \left(\frac{df_2}{dx}.\frac{d\varphi_{|k|}}{dx} - ikg_2.\varphi_{|k|}\right)dx = 0,\ k\in\mathbb{Z}^*, \end{aligned}$$

et l'itégration par parties

$$\int_0^\pi (kf_2 - ig_2)\varphi_{|k|} = 0,\ k\in\mathbb{Z}^*.$$

Puisque pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, nous avons aussi $-k\in\mathbb{Z}^*$, il s'ensuit que

$$\int_0^\pi (-kf_2 - ig_2)\varphi_{|k|} = 0,\ k\in\mathbb{Z}^*.$$

De ces deux dernières égalités, il apparît que

$$\begin{array}{l} \int_0^\pi f_2\varphi_{|k|} = 0 \\ \\ \int_0^\pi g_2\varphi_{|k|} = 0 \end{array}, k\in\mathbb{Z}^* \implies f_2 = g_2 = 0, \quad dans(0,\pi),$$

puisque $\left\{\varphi_{|k|}\right\}_{k\geq 1}$ est une base dans $L^2(0,\pi)$.

Puisque $f_2=g_2=0$ dans $(0,\pi)$, *la deuxième équation* dans 3.31 écrit :

$$\frac{1}{k}\int \left(\frac{df_1}{dx}\frac{d\varphi_{|k|}}{dx} - ikg_1\varphi_{|k|}\right) = 0,\ k\in\mathbb{Z}^*,$$

et à nouveau l'intégration par parties et la simpmification par k, on obtient :

$$\int_0^\pi (kf_1\varphi_{|k|} - ig_1\varphi_{|k|}) = 0,\ k\in\mathbb{Z}^*.$$

Ces égalités étant vraies pour k et $-k$, on obtient $f_1=g_1=0$ dans $(0,\pi)$. ■

Lemme 3.11 *Supposons que $d = 1$ et $M_3 = \varnothing$. La famille ε^* admet une famille biorthogonale $\varepsilon = \{V_{1,k}, V_{2,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^*}$ où*

$$V_{1,k} = (\Phi_{2,k}, ik\Phi_{2,k} - 2c_k\Phi_{1,k}), V_{2,k} = (\Phi_{1,k}, ik\Phi_{1,k}) \tag{3.32}$$

avec

$$\Phi_{1,k} = \left(\frac{1}{2k}\varphi_{|k|}, 0\right), \ \Phi_{2,k} = (\psi_k, \frac{1}{k}\varphi_{|k|}) \ .$$

où c_k est donné en (3.29) et ψ_k est la solution unique pour

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi_k}{dx^2} = -k^2\psi_k - i(a(x) + 2c_k)\varphi_{|k|} & x \in (0,\pi), \\ \psi_k(0) = \psi_k(\pi) = 0, \\ \int_0^\pi \psi_k\varphi_{|k|} = -i\frac{c_k}{2k^2}. \end{cases} \tag{3.33}$$

De plus ε est complet dans $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$.

Proof. En effet, on peut vérifier que pour tout $k \geq 1$:

$$L_1V_{2,k} = -ikV_{2,k}, \ L_1V_{1,k} = -ikV_{1,k} - 2c_kV_{2,k},$$

et

$$\langle V_{1,k}, V_{2,k}\rangle = 0.$$

Ainsi ε est la famille des vecteurs propres généralisés de L_1. À partir de 3.27 , il suit facilement par des résultats classiques (ou par des calculs directs) que

$$\left\langle V_{j,k}, V_{m,\ell}^*\right\rangle = 0, \ k \neq \ell \geq 1, \ j, m = 1, 2.$$

Des calculs simples donnent également

$$\begin{aligned} \left\langle V_{1,k}, V_{2,k}^*\right\rangle &= \left\langle V_{2,k}, V_{1,k}^*\right\rangle = 0, \\ \left\langle V_{1,k}, V_{1,k}^*\right\rangle &= \left\langle V_{2,k}, V_{2,k}^*\right\rangle = 1. \end{aligned}$$

L'intégralité de cette famille est prouvée exactement de même manière que pour ε^*.

Cela met fin à la prouve. ■

Notre objectif suivant est de prouver que si a est suffisamment lisse alors les familles ε et ε^*sont des suites de Bessel de $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$. Nous rappelons qu'une suite $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ dans un espace de Hillbert $\mathbb{X}$ est une suite Bessel si elle satisfait

$$\sum_{k\geq 1} \left|\langle \varphi, \varphi_k\rangle_{\mathbb{X}}\right|^2 < \infty, \ \forall \varphi \in \mathbb{X}.$$

Nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 3.12 *Supposons que $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$. Les solution ψ_k^* et ψ_k à (3.30) et (3.33) écrivent respectivement*

$$\psi_k^*(x) = \left(m_k^* + \frac{H_k(x)}{k^2}\right)\sin(kx) + \left(\frac{A_k(x)}{k} + \frac{P_k(x)}{k^2}\right)\cos(kx), \tag{3.34}$$

$$\psi_k(x) = \left(m_k - \frac{H_k(x)}{k^2}\right)\sin(kx) - \left(\frac{A_k(x)}{k} + \frac{P_k(x)}{k^2}\right)\cos(kx), \tag{3.35}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{c} A_k(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (a(\xi) + 2c_k) d\xi, \\ H_k(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{a(x)+a(0)}{2} + 2c_k \right) + \frac{1}{2} \int_0^x a^{'}(\xi)\cos(2k\xi) d\xi \right], \\ P_k(x) = -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^x a^{'}(\xi)\sin(2k\xi) d\xi. \end{array} \right. \tag{3.36}$$

et

$$\begin{array}{rcl} m_k^* & = & \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{ic_k}{2k^2} + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{i}{k} \displaystyle\int_0^\pi \int_0^x (a(\xi) + 2c_k)\varphi_{|k|}(\xi)\sin(k(\xi - x)) d\xi \varphi_{|k|}(x) dx. \\ m_k & = & -m_k^* \end{array}$$

Proof. On a si $d \neq 1$, $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$, $M_4 \neq \varnothing$ et $\lambda = ik \in M_4$

$$S_k(x) = \int_0^\pi \left(a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi) - a_{k,\frac{k}{d}}\varphi_{|\frac{k}{d}|}(\xi) \right) \sin(\frac{k}{d}(\xi - x)) d\xi$$

et pour $d = 1$

$$S_k(x) = \int_0^\pi \left(a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi) - a_{k,k}\varphi_{|k|}(\xi) \right) \sin(k(\xi - x)) d\xi,$$

d'après 3.29 on obtient

$$S_k(x) = \int_0^\pi (a(\xi) + 2c_k)\,\varphi_{|k|}(\xi)\sin(k(\xi - x)) d\xi,$$

On note les formules suivantes pour ψ_k et ψ_k^* (solutions à 3.30 et 3.33 respectivement) : pour $x \in (0,\pi)$,

$$\left\{ \begin{array}{c} \psi_k^*(x) = m_k^* \sin(kx) - \frac{i}{k} S_k(x), \\ m_k^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ic_k}{2k^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{k} \int_0^\pi S_k(x)\varphi_{|k|}(x) dx. \end{array} \right. \tag{3.37}$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{c} \psi_k(x) = m_k \sin(kx) + \frac{i}{k} S_k(x), \\ m_k = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ic_k}{2k^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{k} \int_0^\pi S_k(x)\varphi_{|k|}(x) dx. \end{array} \right. \tag{3.38}$$

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2\pi} S_k(x) & = & \displaystyle\int_0^x (a(\xi) + 2c_k) \left[\cos(kx) - \cos(k(2\xi - x)) \right] d\xi \\ & = & \displaystyle\int_0^x (a(\xi) + 2c_k)\, d\xi \cos(kx) - \int_0^x (a(\xi) + 2c_k)\cos(k(2\xi - x)) d\xi \end{array}$$

L'intégration par parties de terme suivante :

$$\int_0^x (a(\xi) + 2c_k) \cos(k(2\xi - x)) d\xi,$$

on posse

$$\begin{array}{ll} f = a(\xi) + 2c_k & g^{'} = \cos(k(2\xi - x)) \\ f^{'} = a^{'}(\xi) & g = \frac{\sin(k(2\xi - x))}{2k} \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^x (a(\xi) + 2c_k) \cos(k(2\xi - x)) d\xi &= \left[\frac{a(\xi) + 2c_k}{2k} \sin(k(2\xi - x)) \right]_0^x - \frac{1}{2k} \int_0^x a^{'}(\xi) \sin(k(2\xi - x)) d\xi \\ &= \left(\frac{a(x) + a(0) + 4c_k}{2k} \right) \sin(kx) - \frac{1}{2k} \int_0^x a^{'}(\xi) \sin(k(2\xi - x)) d\xi. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^x (a(\xi) + 2c_k)\, d\xi + \frac{1}{2k} \int_0^x a^{'}(\xi) \sin(k2\xi) d\xi \right) \cos(kx) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a(x) + a(0) + 4c_k}{2k} + \frac{1}{2k} \int_0^x a^{'}(\xi) \cos(2k\xi) d\xi \right) \sin(kx). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Car

$$\sin(k(2\xi - x)) = \sin(2k\xi - kx) = \sin(2k\xi) \cos(kx) - \cos(2k\xi) \sin(kx).$$

Par conséquent, cette formule de S_k justifie les formes 3.34 et 3.35 des solutions ψ_k et ψ_k^* respectivement. ■

Les fonctins ψ_k et ψ_k^* joueront un rôle important dans ce document et nous aurons besoin des estimations simples suivantes.

Lemme 3.13 *Supposons que $a \in W^{1,\infty}(0, \pi)$. Alors il existe un constant C telle que*

$$\|A_k\|_{W^{1,\infty}(0,\pi)} \leq C, \quad \|H_k\|_{W^{1,\infty}(0,\pi)} \leq C, \quad \|P_k\|_{W^{1,\infty}(0,\pi)} \leq C, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \tag{3.40}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} |m_k^*| \leq \frac{C}{k^2}, & |m_k| \leq \frac{C}{k^2}, \\ \|\psi_k^*\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq \frac{C}{|k|}, & \|\psi_k\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq \frac{C}{|k|}, \\ \left\| \frac{d\psi_k^*}{dx} \right\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq C, & \left\| \frac{d\psi_k}{dx} \right\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq C, \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \tag{3.41}$$

Proof. fixons $k \in \mathbb{Z}^*$. A partir des formules 3.37 et 3.38.

Nous avons, en utilisant la nouvelle formule 3.39 pour S_k et après intégration par parties:

$$\begin{aligned} m_k^* &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{k}\int_0^\pi S_k(x)\varphi_{|k|}(x)dx \qquad (3.42)\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} + \frac{i}{2\pi k^2}\int_0^\pi\int_0^x a'(\xi)\sin(2k\xi)\cos(kx)\varphi_{|k|}(x)d\xi dx \\ &+\frac{i}{2\pi k^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi (a(\xi)+2c_k)\,dx + \int_0^\pi (a(\xi)+2c_k)\cos(2kx)dx\right) \\ &-\frac{i}{2\pi k^2}\int_0^\pi\left(a(\xi)+a(0)+4c_k+\int_0^x a'(\xi)\cos(2k\xi)d\xi\right)\sin(kx)\varphi_{|k|}(x)dx, \end{aligned}$$

on a

$$m_k = -m_k^*$$

donc

$$\begin{aligned} m_k &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{k}\int_0^\pi S_k(x)\varphi_{|k|}(x)dx \qquad (3.43)\\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} - \frac{i}{2\pi k^2}\int_0^\pi\int_0^x a'(\xi)\sin(2k\xi)\cos(kx)\varphi_{|k|}(x)d\xi dx \\ &-\frac{i}{2\pi k^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi (a(\xi)+2c_k)\,dx + \int_0^\pi (a(\xi)+2c_k)\cos(2kx)dx\right) \\ &+\frac{i}{2\pi k^2}\int_0^\pi\left(a(\xi)+a(0)+4c_k+\int_0^x a'(\xi)\cos(2k\xi)d\xi\right)\sin(kx)\varphi_{|k|}(x)dx. \end{aligned}$$

Propriétés (3.40) et (3.41) peuvent être facilement déduites de la formule (3.42), (3.43), (3.34), (3.35), (3.36). ■

Nous avons le corollaire suivant concernant les élément d'entrée.

Corollaire 3.14 *Supposons que* $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$. *Alors*

$$f \in L^2(0,\pi) \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|k\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2 < \infty,$$

et

$$f \in H_0^1(0,\pi) \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|k^2\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2 < \infty,$$

Proof. Maintenant, nous estimons $\left|k\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2$ et $\left|k^2\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2$ utilisant le Lemme 3.12 et le Lemme 3.13.

Pour $f \in L^2(0,\pi)$et ψ_k^* définir par (3.34)alors

$$\begin{aligned}
k\int_0^\pi f\psi_k^* dx &= k\int_0^\pi f(x)\left(m_k^* + \frac{H_k(x)}{k^2}\right)\sin(kx)dx + k\int_0^\pi f(x)\left(\frac{A_k(x)}{k} + \frac{P_k(x)}{k^2}\right)\cos(kx)dx \\
&= km_k^*\int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx + \frac{1}{k}\int_0^\pi f(x)H_k(x)\sin(kx)dx + \int_0^\pi f(x)A_k(x)\cos(kx)dx \\
&\quad + \frac{1}{k}\int_0^\pi f(x)P_k(x)\cos(kx)dx
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de H_k et P_k en (3.36), nous obtenons

$$\left|\int_0^\pi f(x)H_k(x)\sin(kx)dx\right|^2 \leq C\,\|f\|^2_{L^2(0,\pi)},$$

$$\left|\int_0^\pi f(x)P_k(x)\cos(kx)dx\right|^2 \leq C\,\|f\|^2_{L^2(0,\pi)}.$$

A partir de la définition de A_k en (3.36), on obtient

$$\left|\int_0^\pi f(x)A_k(x)\cos(kx)dx\right| = \left|\int_0^\pi f(x)\left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x (a(\xi)+2c_k)d\xi\right)\cos(kx)dx\right|,$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi f(x)A_k(x)\cos(kx)dx\right|^2 &\leq C\left|\int_0^\pi \left(f(x)\int_0^x a(\xi)d\xi\right)\cos(kx)dx\right|^2 \\
&\quad + C\left|\int_0^\pi f(x)\int_0^x d\xi\cos(kx)dx\right|^2, \\
&\leq C\left(\left|\int_0^\pi \left(f(x)\int_0^x a(\xi)d\xi\right)\cos(kx)dx\right|^2 + \left|\int_0^\pi xf(x)\cos(kx)dx\right|^2\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent, et (3.41) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left|k\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2 &\leq k^2\frac{C^2}{k^4}\left|\int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx\right|^2 + \frac{1}{k^2}C\,\|f\|^2_{L^2(0,\pi)} + \frac{1}{k^2}C\,\|f\|^2_{L^2(0,\pi)} \\
&\quad + C\left(\left|\int_0^\pi \left(f(x)\int_0^x a(\xi)d\xi\right)\cos(kx)dx\right|^2 + \left|\int_0^\pi xf(x)\cos(kx)dx\right|^2\right), \\
&\leq C\left(\frac{1}{k^2}\left|\int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx\right|^2 + \frac{1}{k^2}\,\|f\|^2_{L^2(0,\pi)}\right. \\
&\quad \left. + \left|\int_0^\pi \left(f(x)\int_0^x a(\xi)d\xi\right)\cos(kx)dx\right|^2 + \left|\int_0^\pi xf(x)\cos(kx)dx\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Depuis $f \in L^2(0,\pi)$ et $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$, alors les fonctions $x \mapsto f(x)\int_0^x a(\xi)d\xi$ et $x \mapsto xf(x)$ sont en $L^2(0,\pi)$, et donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_0^\pi \left(f(x)\int_0^x a(\xi)d\xi\right)\cos(kx)dx\right|^2 < \infty$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_0^\pi xf(x)\cos(kx)dx\right|^2 < \infty$. Nous conclurons que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|k\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2 < \infty.$$

Et, par des calcules similaires, nous avons pour $f \in H_0^1(0,\pi)$

$$\begin{aligned} k^2 \int_0^\pi f\psi_k^* dx &= k^2 m_k^* \int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx + \frac{1}{k}\int_0^\pi (f(x)H_k(x))' \cos(kx)dx \\ &\quad - \int_0^\pi (f(x)A_k(x))' \sin(kx)dx - \frac{1}{k}\int_0^\pi (f(x)P_k(x))' \sin(kx)dx. \end{aligned}$$

Encore une fois, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de H_k et P_k en (3.36), nous obtenons

$$\left| \int_0^\pi (f(x)H_k(x))' \cos(kx)dx \right|^2 \leq C \|f\|^2_{H_0^1(0,\pi)},$$

$$\left| \int_0^\pi (f(x)P_k(x))' \sin(kx)dx \right|^2 \leq C \|f\|^2_{H_0^1(0,\pi)}.$$

A partir de la définition de A_k en (3.36), on obtient

$$\left| \int_0^\pi (f(x)A_k(x))' \sin(kx)dx \right|^2 = \left| \int_0^\pi \left(f(x) \left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (a(\xi) + 2c_k)d\xi \right) \right)' \sin(kx)dx \right|^2$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi (f(x)A_k(x))' \sin(kx)dx \right|^2 &\leq C \left| \int_0^\pi \left(f(x) \int_0^x a(\xi)d\xi \right)' \sin(kx)dx \right|^2 \\ &\quad + C \left| \int_0^\pi \left(f(x) \int_0^x d\xi \right)' \sin(kx)dx \right|^2 \\ &\leq C \left(\left| \int_0^\pi \left(f(x) \int_0^x a(\xi)d\xi \right)' \sin(kx)dx \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^\pi (xf(x))' \sin(kx)dx \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Pour des inégalités précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| k^2 \int_0^\pi f\psi_k^* dx \right|^2 &\leq C \left(\left| \int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx \right|^2 + \frac{1}{k^2} \|f\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^\pi \left(f(x) \int_0^x a(\xi)d\xi \right)' \sin(kx)dx \right|^2 + \left| \int_0^\pi (xf(x))' \sin(kx)dx \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Depuis $f \in H_0^1(0,\pi)$ et $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$, alors $x \mapsto \left(f(x) \int_0^x a(\xi)d\xi \right)'$ et $x \mapsto (xf(x))'$ sont des fonctions en $L^2(0,\pi)$. Donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left| \int_0^\pi \left(f(x) \int_0^x a(\xi)d\xi \right)' \sin(kx)dx \right|^2 < \infty,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left| \int_0^\pi (xf(x))' \cos(kx)dx \right|^2 < \infty.$$

Cela prouve que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|k^2\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2<\infty$. $\blacksquare$

Nous sommes maintenant prêts à preuver que ε et ε^* des suites de Bessel de $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$.

Lemme 3.15 *Supposons que $d=1$ et $M_3=\varnothing$. Étant donné une fonction $a\in W^{1,\infty}(0,\pi)$, les suites ε et ε^* sont des suites de Bessel de $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$.*

Proof. On note $\langle .,.\rangle$ produit scalaire en $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$. Montrer que ε et ε^*sont des suites de Bessel revient à prouver que pour tous les $F\in\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[\left|\left\langle F,V_{1,k}^*\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle F,V_{2,k}^*\right\rangle\right|^2\right]<\infty,$$

et

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[\left|\left\langle F,V_{1,k}\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle F,V_{2,k}\right\rangle\right|^2\right]<\infty.$$

Soit $a\in W^{1,\infty}(0,\pi)$. Notez d'abord que la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ est bornée. En effet:

$$|c_k|:=\left|-\frac{1}{2}\int_0^\pi a(x)\varphi_{|k|}^2dx\right|\le\frac{1}{2}\left\|a\right\|_{L^\infty(0,\pi)}\ ,\forall k\in\mathbb{Z}^*.$$

Si $F=(f,g)$ alors pour 3.27 et (3.32):

$$\left\langle F,V_{1,k}^*\right\rangle=\int_0^\pi f_x\frac{d\Phi_{1,k}^*}{dx}dx-ik\int_0^\pi g\Phi_{1,k}^*dx,$$

$$\left\langle F,V_{2,k}^*\right\rangle=\int_0^\pi f_x\frac{d\Phi_{2,k}^*}{dx}dx-ik\int_0^\pi g\Phi_{2,k}^*dx+2c_k\int_0^\pi g\Phi_{1,k}^*dx,$$

$$\left\langle F,V_{1,k}\right\rangle=\int_0^\pi f_x\frac{d\Phi_{2,k}}{dx}dx-ik\int_0^\pi g\Phi_{2,k}dx-2c_k\int_0^\pi g\Phi_{1,k}dx,$$

$$\left\langle F,V_{2,k}\right\rangle=\int_0^\pi f_x\frac{d\Phi_{2,k}}{dx}dx-ik\int_0^\pi g\Phi_{1,k}dx.$$

Ensuite en particulier, si $f=(f_1,f_2)$ et $g=(g_1,g_2)$, et l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\langle F,V_{1,k}^*\right\rangle &= \int_0^\pi\begin{pmatrix}\frac{df_1}{dx}\\ \frac{df_2}{dx}\end{pmatrix}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2k}\varphi_{|k|}\end{pmatrix}dx-ik\int_0^\pi\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2k}\varphi_{|k|}\end{pmatrix}dx\\ &= \frac{1}{2k}\int_0^\pi\frac{df_2}{dx}\frac{d\varphi_{|k|}}{dx}dx-ik\frac{1}{2k}\int_0^\pi g_2\varphi_{|k|}dx\end{aligned}$$

on a $\frac{d\varphi_{|k|}}{dx}=|k|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx)$

donc

$$\left\langle F,V_{1,k}^*\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{|k|}{2k}\int_0^\pi\frac{df_2}{dx}\cos(kx)dx-\frac{i}{2}\int_0^\pi g_2\varphi_{|k|}dx,$$

et

$$\left|\left\langle F,V_{1,k}^*\right\rangle\right|^2\le C_1\left(\left|\int_0^\pi\frac{df_2}{dx}\cos(kx)dx\right|^2+\left|\int_0^\pi g_2\varphi_{|k|}dx\right|^2\right).$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
\left\langle F, V_{2,k}^*\right\rangle &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \frac{df_2}{dx} \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\varphi_{|k|} \\ \psi_k^* \end{pmatrix} dx - ik \int_0^\pi \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\varphi_{|k|} \\ \psi_k^* \end{pmatrix} dx \\
&\quad +2c_k \int_0^\pi \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2k}\varphi_{|k|} \end{pmatrix} dx \\
&= \frac{1}{k}\int_0^\pi \frac{df_1}{dx}\frac{d\varphi_{|k|}}{dx}dx + \int_0^\pi \frac{df_2}{dx}\frac{d\psi_k^*}{dx}dx - i\int_0^\pi g_1\varphi_{|k|}dx - ik\int_0^\pi g_2\psi_k^* dx + \frac{c_k}{k}\int_0^\pi g_2\varphi_{|k|}dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{|k|}{k}\int_0^\pi \frac{df_1}{dx}\cos(kx)dx + k^2\int_0^\pi f_2\psi_k^* dx - i\int_0^\pi f_2(a(x)+2c_k)\varphi_{|k|}dx \\
&\quad -i\int_0^\pi g_1\varphi_{|k|}dx - ik\int_0^\pi g_2\psi_k^* dx + \frac{c_k}{k}\int_0^\pi g_2\varphi_{|k|}dx,
\end{aligned}$$

et il s'ensuit que:

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle F, V_{2,k}^*\right\rangle\right|^2 &\leq C\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \frac{df_1}{dx}\cos(kx)dx\right|^2 + \left|k^2\int_0^\pi f_2\psi_k^* dx\right|^2\right. \\
&\quad \left. + \left|\int_0^\pi g_1\varphi_{|k|}dx\right|^2 + \left|k\int_0^\pi g_2\psi_k^* dx\right| + \frac{c_k^2}{k^2}\left|\int_0^\pi g_2\varphi_{|k|}dx\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Depuis $(f_1, f_2) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi)$ et $(g_1, g_2) \in \mathbb{L}^2(0,\pi)$, pour $i = 1, 2$ les séries

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_0^\pi \frac{df_i}{dx}\cos(kx)\right|^2, \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_0^\pi \frac{df_i}{dx}\sin(kx)\right|^2,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_0^\pi f_i\varphi_{|k|}\right|^2, \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_0^\pi g_i\varphi_{|k|}\right|^2, \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_0^\pi g_i\cos(kx)\right|^2$$

sont convergents et, en utilisant le corollaire 3.14, il s'ensuit que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[\left|\left\langle F, V_{1,k}^*\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle F, V_{2,k}^*\right\rangle\right|^2\right] < \infty.$$

Des arguments similaires prouveront que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[|\langle F, V_{1,k}\rangle|^2 + |\langle F, V_{2,k}\rangle|^2\right] < \infty$. ■

Maintenant rappelez-vous la caractérisation suivante des bases de Riesz:

Lemme 3.16 $\{\varphi_k\}_{k\leq 1}$ *une suite dans l'espace de Hilbert* $\mathbb{X}$. *Ensuite les énoncés suivants sont équivalents.*

1.$\{\varphi_k\}_{k\leq 1}$ *est une base de Riesz dans* $\mathbb{X}$.

2.$\{\varphi_k\}_{k\leq 1}$ *est une suite totale de Bessel dans* $\mathbb{X}$ *et posséde un système biorthogonal* $\{\psi_k\}_{k\leq 1}$ *qui est également une suite totale de Bessel dans* $\mathbb{X}$.

Avec cette dernière caractérisation et de ce que nous avons déja prouvé, il suit:

Proposition 3.17 *Supposons que* $d = 1$ *et* $M_3 = \varnothing$. *Étant donné une fonction* $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$, *les suites* ε *et* ε^* *sont des bases de Riesz dans* $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$.

Pour détermines la preuve de Proposition 3.9 nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 3.18 *Le système* $\mathcal{F} = \left\{e^{ikt}, te^{ikt}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^*}$ *est une base de Riesz de ces sous espaces vectoriels fermés sur* $L^2(0,T)$ *si* $T \geq 4\pi$.

Nous sommes maintenant prêts à prouver la Proposition 3.9.

Proof. La solution du problème adjoint 3.7 est donnée par la série

$$\theta(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \alpha_k e^{ik(T-t)}\Phi_{1,k}^* + \beta_k e^{ik(T-t)}(2c_k(T-t)\Phi_{1,k}^* + \Phi_{2,k}^*).$$

Donc

$$B^*\theta(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \alpha_k e^{ik(T-t)}B^*\Phi_{1,k}^* + \beta_k e^{ik(T-t)}(2c_k(T-t)B^*\Phi_{1,k}^* + B^*\Phi_{2,k}^*).$$

En prenant la dérivée par par rapport à x, et en mettant $x=0$, nous obtenons

$$B^*\frac{d\theta}{dx}(0,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(\alpha_k e^{ik(T-t)}B^*\frac{d\Phi_{1,k}^*(0)}{dx} + \beta_k e^{ik(T-t)}\left(2c_k(T-t)B^*\frac{d\Phi_{1,k}^*(0)}{dx} + B^*\frac{d\Phi_{2,k}^*(0)}{dx}\right)\right).$$

On a

$$\Phi_{1,k}^*(x) = \left(0, \frac{1}{2k}\varphi_{|k|}\right) = \left(0, \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\right),$$

$$\frac{d\Phi_{1,k}^*}{dx} = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx)\right),$$

pour $x=0$

$$\frac{d\Phi_{1,k}^*(0)}{dx} = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

Et

$$\Phi_{2,k}^*(x) = \left(\frac{1}{k}\varphi_{|k|}, \psi_k^*\right) = \left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx), \psi_k^*\right) = \left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx), m_k^*\sin(kx) - \frac{i}{k}S_k(x)\right),$$

$$\frac{d\Phi_{2,k}^*(0)}{dx} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}, m_k^* k\right).$$

Par conséquent

$$B^*\frac{d\theta}{dx}(0,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\alpha_k e^{ik(T-t)}B^*\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\end{pmatrix} + \beta_k e^{ik(T-t)}\left(2c_k(T-t)B^*\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\end{pmatrix} + B^*\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\\ m_k^* k\end{pmatrix}\right)$$

Puisque $B^* = (b_1, b_2)$, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
B^* \frac{d\theta}{dx}(0,t) \quad &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 \right) \alpha_k + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2 \right) \beta_k \right) e^{ik(T-t)} \\
&\quad + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 c_k \right) \beta_k (T-t) e^{ik(T-t)},
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T |B^* \theta_x(0,t)|^2 \, dt \\
= & \int_0^T \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 \right) \alpha_k + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2 \right) \beta_k \right) e^{ik(T-t)} \right. \\
& \left. + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 c_k \right) \beta_k (T-t) e^{ik(T-t)} \right|^2 dt.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Ainsi, en utilisant lemme 3.18, nous pouvons écrire 3.44 pour $T \geq 4\pi$ sous la forme

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T |B^* \theta_x(0,t)|^2 \, dt \\
\geq \quad & C_T \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\left| \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 \alpha_k + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2 \right) \beta_k \right|^2 + \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 c_k \beta_k \right|^2 \right).
\end{aligned}
$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\left| \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 \alpha_k + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2 \right) \beta_k \right|^2 + \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 c_k \beta_k \right|^2 \right) \\
= \quad & \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left[\frac{b_2^2}{2\pi} \alpha_k^2 + \left(\frac{2}{\pi} b_1 b_2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k m_k^* b_2^2 \right) \alpha_k \beta_k + \left(\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2 \right)^2 + \frac{2 b_2^2 c_k^2}{\pi} \right) \beta_k^2 \right] \\
= \quad & \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} Q_k \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice Q_k dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est dannée par :

$$
Q_k = \begin{pmatrix} \frac{b_2^2}{2\pi} & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi} b_1 b_2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k m_k^* b_2^2 \right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi} b_1 b_2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k m_k^* b_2^2 \right) & \left(\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2 \right)^2 + \frac{2 b_2^2 c_k^2}{\pi} \right) \end{pmatrix}.
$$

On a

$$\begin{aligned}
\det(Q_k - \lambda I_2) &= \left(\frac{b_2^2}{2\pi} - \lambda\right) \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2\right)^2 + \frac{2b_2^2 c_k^2}{\pi} - \lambda\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi} b_1 b_2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k m_k^* b_2^2\right)\right)^2 \\
&= \lambda^2 - \left(\frac{b_2^2}{2\pi} + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2\right)^2 + \frac{2b_2^2 c_k^2}{\pi}\right)\lambda + \frac{b_2^4 c_k^2}{\pi^2} = 0
\end{aligned}$$

Et

$$\Delta_k = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2\right)^4 + (1 - 4c_k^2)^2 \frac{b_2^4}{4\pi^2} + 2\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2\right)^2 \left(\frac{b_2^2}{2\pi} + \frac{2b_2^2 c_k^2}{\pi}\right) > 0, \forall k \in \mathbb{Z}^*$$

Ainsi Q_k est défini positif et nous dénotons par (q_k^-, q_k^+) ses valeurs propres avec $0 < q_k^- < q_k^+$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} Q_k \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} q_k^- \left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2\right).$$

Mais

$$\begin{aligned}
q_k^- &= \frac{2b_2^4 c_k^2}{\pi^2 \left(\frac{b_2^2}{2\pi} + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + m_k^* k b_2\right)^2 + \frac{2b_2^2 c_k^2}{\pi} + \sqrt{\Delta_k}\right)} > 0 \\
&= \frac{2b_2^4 c_k^2}{h_k}
\end{aligned}$$

Depuis

$$\lim_{|k| \to \infty} c_k^2 = \lim_{|k| \to \infty} \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi a(x) \varphi_{|k|}^2(x) dx\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(x) dx\right)^2}{4}$$

et $k m_k^* \to 0$ comme $|k| \to \infty$, il est facile de vérifier qu'il existe une constante positive C telle que :

$$h_k \leq C(b_1^2 + b_2^2) = C \|B^*\|^2, \ \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

Donc

$$q_k^- \geq C \frac{b_2^4}{\|B^*\|^2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(x) dx\right)^2, \ \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

Ensuite, nous obtenons

$$Q(\alpha_k, \beta_k) \geq C \frac{b_2^4 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(x) dx\right)^2}{\|B^*\|^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2\right).$$

Donc

$$\int_0^T \left|B^*\theta_x(0,t)\right|^2 dt \geq C_T \frac{b_2^4 \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a(x)dx\right)^2}{\left\|B^*\right\|^2} \left\|(\theta^0,\theta^1)\right\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)}.$$

cela exclut clairement l'inégalité d'observabilité et met fin à la prouve. ■

Bibliographie

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York San Francisco London, (1975).

[2] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, and C. Dupaix. Null controllability of some reaction-diffusion systems with one control force. *J. Math. Anal. Appl., 320, (2006), 928-943.*

[3] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, L. de Teresa. Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey. *Math. Control Relat. Fields 1, (2011) 267–306.*

[4] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, L. de Teresa. The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 96(6), (2011), 555-590.*

[5] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, L. de Teresa. New phenomena for the null controllability of parabolic systems: Minimal time and geometrical dependence. *J. Math. Anal. Appl. 444 (2016) 1071–1113.*

[6] S. Avdonin, A. Choque Rivero and L. de Teresa. Exact boundary controllability of coupled hyperbolic equations. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 23-4 (2013) 701-710.*

[7] S. A. Avdonin and S.A. Ivanov. *Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[8] S. Avdonin, W. Moran. Ingham-type inequalities and Riesz bases of divided differences. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 11-4, (2001) 803-820.*

[9] A. Bennour, F. Ammar Khodja, D. Teniou. Exact and approximate controllability of coupled one-dimensional hyperbolic equations. *J. EECT. 25 (2017) 487–516.*

[10] F. Boyer and G. Olive. Approximate controllability conditions for some linear 1d parabolic systems with space-dependent coefficients, *(2013), hal-00848709.*

[11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext, Springer, New York, (2011).

[12] T. Cazenave, A. Haraux. *Introduction aux problèmes sémi-linéaires.* Mathématiques et Applications, Ellipses, Paris, (1990).

[13] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI, (2007).

[14] J.-M. Coron, S. Guerrero, and L. Rosier. Null controllability of a parabolic system with a cubic coupling term. *SIAM J. Control Optim., 48(8), (2010), 5629-5653.*

[15] H.O. Fattorini. Some remarks on complete controllability, *SIAM J. Control 4 (1966), 686–694.*

[16] I. Gohberg & M. Krein. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, AMS, Providence, R.I. (1969).

[17] A. Haraux. Quelques méthodes et résultats récents en théorie de la contrôlabilité exacte. *Rapport de recherche INRIA N°1317, (1990).*

[18] A. E. Ingham – « Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series », Math. Z. 41 , no. 1, p, (1936), 367-379.

[19] A. Ya. Kinchin. *Continued fractions.* The University of Chicago Press (1964).

[20] V. Komornik and P. Loreti. *Fourier Series in Control Theory.* Springer, New York, (2005).

[21] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 335-356.*

[22] J.L. Lions. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisations de Systèmes Distribués.* Masson, Paris, 1988.

[23] J. L. Lions, E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[24] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. Transl. Amer. Math. Soc., 34, 2, 39-68, 1963; translation of Math. Sbornik, 45, (1938), 471-496.

[25] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and Control for Operator Semigroups.* Birkhauser Advanced Texts: Basler Lehrbucher, Birkhauser Verlag, Basel, 2009.

[26] D. Ullrich. Divided differences and systems of nonharmonic Fourier series. *Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 47–57.*

[27] K. Yosida. *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1965.

[28] J. Zabczyk. *Mathematical control theory.* An introduction, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.