N° d'ordre : ....

RÉPUBLIQUE ALGÉRIÈNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET

DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI

Faculté de Mathématiques & Informatique

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Systèmes Dynamiques**

Par : **BISSET Meriem**

Sujet :

Introduction aux équations différentielles à retard

Soutenu publiquement, le ***05/09/2020****, devant le jury composé de :*

ZEGHDANE Rebiha	Maître de Conférences/**B**	Présidente
BERKANI Amirouche	Maître de Conférences/**B**	Encadreur
BENTERKI Djamila	Maître de Conférences/**A**	Examinatrice

Promotion 2019/2020

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement **Dr. BERKANI Amirouche**, enseignant à l'université Mohamed El Bachir El Ibrahimi, Bordj Bou Arréridj, pour son aide, sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif. Pendant ces années, il m'a témoigné sa confiance. Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela, je ne l'en remercierai jamais assez.

Merci au membres de jury, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et nous les en remercions sincèrement.

Sans oublier de remercier tous nos enseignants pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement aux enseignants qui ont enrichi nos connaissances.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire est vivement remerciée.

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$t \in \mathbb{R}$	Variable temporelle.
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs.
$[a,b]$	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$\mathbb{R}^d$	Espace euclidien de dimension d.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	La dérivée de la variable x par rapport au temps t, et c'est dérivée à droite dans ce travail.
$C = C\big([a,b],\mathbb{R}^d\big)$	Espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$.
$\lvert x\rvert$	Si $x \in \mathbb{R} \to \lvert x\rvert$ est la valeur absolue Si $x \in \mathbb{R}^d \to \lvert x\rvert = \parallel x \parallel$ la norme de la convergence uniforme.
$\parallel f \parallel_\infty$	Égale $\sup\lvert f\rvert$.
max	Fonction maximum.
min	Fonction minimum.
sup	Fonction supremum.

Table des matières

Introduction générale

Dans la nature, plusieurs phénomènes sont gouvernés par une classe d'équations différentielles à retard (E.D.R). Comme leur non indique, ces équations généralement l'évolution des variables dépendant nous seulement des valeurs actuelles mais dépendant aussi irréductiblement des valeurs prises dans le passé autrement dit elles tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur.

Les équations différentielles à retard constituent un champs d'étude très important pour modéliser des phénomènes d'hérédité rencontrés en physique, biologie, chimie, économie, écologie, etc. Malgré que dans la plupart des modèles, le retard est estimé non signicatif et ignoré pour simplifie l'étude, il a été prouvé que dans de nombreux cas, le retard joue un rôle dominant dans plusieurs domaines et que les modèles avec retard fournissent des résultats plus précis et réalistes que leurs homologue sans retard.

À notre connaissance l'apparition des équations différentielles à retard remonte au 18$^{\text{ème}}$ siècle. L'analyse de ces équations à commencer dans les années cinquante, ces années ont vu une explosion de la théorie qui a été largement développée et les (E.D.R) fait partie du vocabulaire des chercheurs travaillant sur la viscoélasticité, les problèmes mécaniques, les réacteurs nucléaires, le flux de chaleurs, les réseaux de neurones, la combustion, l'interaction des espèce, les modèles micro-biologiques, épidémiologiques ou physiologique, ainsi que beaucoup d'autres.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à introduire quelques notions de base pour l'étude des systèmes d'équations à retard, le reste de ce travail est décomposé en trois chapitres.

Le premier chapitre est un état de l'art sur les équations différentielles à retard. Après une définition générale, une classification des types d'équations et quelques exemple, nous passons à un rappel du quelques notions de base et certaines résultats de la théorie d'existence et d'unicités des solutions. Ensuite, nous nous intéressons plus particulièrement à présent la théorie de la stabilité des systèmes à retard.

Le deuxième chapitre, qui est consacré à l'étude des équations différentielle à retard constant, on donne une définition générale, la solution et théorème d'existence et d'unicité de la solution. Nous nous intéressons plus à la méthode d'intégration de ces équations.

Puis, on termine dans le troisième chapitre par l'étude des équations différentielles dépendant de l'état : où on s'intéressera à la définition, existence et unicité des solution. Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Quelques résultats sur les équations différentielles à retard

Dans ce chapitre, nous allons voir que le cadre approprié pour les équations différentielles linéaires à retard. Nous avons donné quelques définitions, exemples et des résultats de base associés aux équations différentielles à retard, nécessaires pour l'élaboration de ce travail.

1.1 Définitions et des exemples

Dans cette section, nous donnerons une définition générale des équations différentielles à retard et quelques exemples dans lesquels ces équations sont appliquées.

1.1.1 Notations et définitions

Soit $r \geq 0$ un réel donné. Pour $a < b$, on note par $C\big([a,b],\mathbb{R}^d\big)$ l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour $[a,b] = [-r,0]$ on pose :

$$C_0 = C\big([-r,0],\mathbb{R}^d\big)$$

et on désigne la norme d'un élèment ϕ de C_0 par :

$$|\phi| = \sup\left\{|\phi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\right\}$$

où $|\cdot|$ est une norme dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.1 *Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $L \geq 0$, $x \in C\big(\left[t_0 - r, t_0 + L\right], \mathbb{R}^d\big)$ et $t \in \left[t_0, t_0 + L\right]$. On définit une nouvelle fonction x_t élèment de C_0 par :*

$$x_t(\theta) = x(t + \theta)$$

où $\theta \in [-r, 0]$.

Définition 1.2 *Si U un sous ensemble de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ est une fonction donnée, alors l'équation*

$$\dot{x} = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

où "·" représente la dérivée à droite avec $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ est une équation différentielle à retard sur U notée en abrégé (E.D.R) et le nombre r est appelé le retard.
Il est clair que le cas $r = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires. Il est évident qu'une condition initial appropriée au temps $t = t_0$ exige la détermination de la fonction x sur tout intervalle $[t_0 - r, t_0]$; c-à-d :

$$x(t) = \phi(t), \qquad t \in [t_0 - r, t_0]$$

où $\phi : [t_0 - r, t_0] \to \mathbb{R}^d$ est une fonction donnée supposée continue appelée la condition initiale de l'équation différentielle (1.1). *Ainsi, l'équation* (1.1) *peut se mettre sous la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x_t) & t \geq t_0 \\ x(t) = \phi(t) & t \in [t_0 - r, t_0] \end{cases} \tag{1.2}$$

où ϕ est une fonction donnée continue sur l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$.

1.1.2 Exemples

Exemple 1.1 *Considérons le modèle de Malthus qui décrit l'évolution d'une population d'individus, notée $N(t)$, au temps t :*

$$N'(t) = bN(t) - dN(t).$$

-Le terme $bN(t)$ décrit la fraction de la population contribuant à la naissance d'individus (b est le taux de naissance).
- $dN(t)$ décrit la fraction de la population contribuant à la mort d'individus (d est le taux de mortalité).
Cette équation se résout simplement :

$$N(t) = e^{(b-d)(t-t_0)}N(t_0); \qquad t \geq t_0.$$

Trois situations sont possibles :
- Soit la population croit exponentiellement ($b > d$) ; $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = +\infty$.
-Soit elle décroit exponentiellement ($b < d$) et disparait ; $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 0$.
-Soit la population est constante ($b = d$); $N(t) = N(t_0)$.
Ce modèle n'est pas valide, en temps long tout du moins (il ne tient pas compte de fluctuations de la population, etc.).
En 1973, Cooke et Yorke ont proposé un modèle "de Malthus" modifié (population d'individus adultes) :

$$N'(t) = bN(t-r) - dN(t);$$

où $r > 0$ est l'âge auquel un individu devient adulte (ou, de façon équivalente, peut se reproduire). Ainsi, la contribution des individus à la dynamique de la population n'est pas instantanée, mais retardée, le temps qu'ils deviennent adultes.
Il s'agit d'une équation à retard, et plus précisément une équation linèaire à retard discret. Le retard est égal à r. Ce type d'équation, quoiqu'a priori similaire à une équation différentielle ordinaire (E.D.O.), possède des propriétés différentes.

Exemple 1.2 Hutchinson (1948)

Le modèle logistique de Verhulst (1838) :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) \tag{1.3}$$

où r est le taux de croissance de la population et k est la capacité de charge du milieu. Par la méthode de séparation des variables, on obtient :

$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 - (N_0 - k)e^{-rt}}; \quad avec\ N(t_0) = N_0 > 0 \tag{1.4}$$

-Si $N_0 < k$, la population croit, se rapprochant de k de manière asymptotique (quand $t \to +\infty$).
-Si $N_0 > k$, la population décroit, approchant à nouveau de façon asymptotique la valeur k.
-Si $N_0 = k$, la population reste constante ($N(t) = k$).
En fait, $N = k$ est appelé l'équilibre positif de l'équation (1.3). *Zéro est aussi un équilibre de cet équation. D'après ce qui précède, l'équilibre k de l'équation logistique* (1.3) *est globalement asymptotiquement stable ; c'est-à-dire que $\lim_{t\to+\infty} N(t) = k$, pour n'importe quelle valeur initiale $N(t_0) = N_0 > 0$.*

Dans le modèle précédent, il est supposé que le taux de croissance d'une population à tout instant t dépend du nombre d'individus à cet instant. En pratique, le processus de reproduction qui fait croitre cette population n'est pas instantané (période de gestation ou temps d'éclosion des oeufs, par exemple). En 1948, Hutchinson avait proposé de tenir compte de la durée $\tau > 0$ de formation des oeufs dans une population. Il a considéré l'équation logistique

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{k}\right); \tag{1.5}$$

où r et k ont la même signification que dans l'équation logistique (1.3), *$\tau > 0$ est une constante. L'équation* (1.5) *est souvent appelée équation de Hutchinson ou équation logistique avec retard.*

Exemple 1.3 *En mécanique, des modèles avec séquelle sont utilisés pour décrire les états contrainte déformation des matériaux, par exemple du bois, des polymères, du plastique, de* *la glace, etc. La théorie de la séquelle élastique pour les corps rigides a été proposée par Boltzmann et développée par Volterra. Ce dernier l'a appelée la théorie héréditaire de l'élasticité. Dans la littérateur moderne, l'expression élasticité héréditaire est généralement remplacée par viscoélasticité. La théorie de la viscoélasticité est à la base de la conception de nombreux éléments de construction qui doivent fonctionner dans des conditions d'exploitation complexes. Du point de vie de la théorie de (E.D.R), les structures viscoélastiques peuvent être décrites par des équations avec séquelle distribuée illimitée.*

Considérons les équations d'approximation linéaire du mouvement transversal d'une

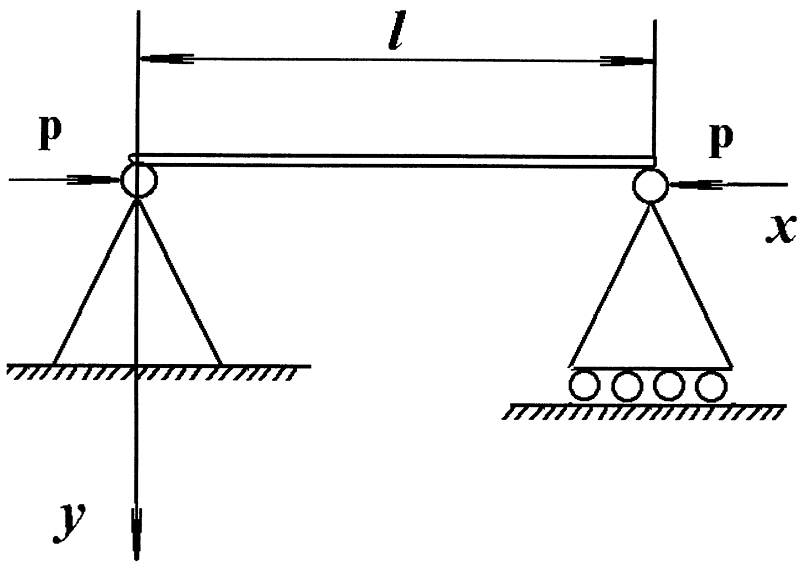

FIGURE 1.1

barre viscoélastique homogène articulée à articulation rectiligne soumise à une charge axiale P (Fg 1.1). L'effet de viscosité détend les contraintes de flexion dans la barre. Formellement, cet effet équivaut à l'apparition d'un moment de flexion antagoniste. Supposons que le moment de flexion unitaire appliqué à un élément de barre pendant l'intervalle de temps $(t, t+dt)$ *donne à chaque instant* $t+r > t$ *une élévation au moment de flexion antagoniste* $\tau(t,r)dt$. $($*Ici* $\tau \geq 0$ *est appelé la fonction de relaxation; la dépendance de* τ *sur* t *est liée à un éventuel vieillissement du matériau*$)$. *Si le processus démarre à l'instant* $t = t_0 \geq -\infty$, *on obtient* *l'équation de mouvement :*

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} y(t,x) = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[P y(t,x) + M(t,x)\right] \\ M(t,x) = EI \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[y(t,x) - \displaystyle\int_{t_0}^{t} \tau(r,t-r) y(r,x) dr\right], \quad t \geq t_0 \quad 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

avec ρ est la densité linéaire du matériau de la barre, I le moment d'inertie d'une section transversale de la barre, et l la longueur de la barre, les condition aux limites suivantes :

$$y(t,0) = y(t,l) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0.$$

Exemple 1.4 ***Equation de Nicholson*(*mouches-moutons*)**

En 1950, le célèbre biologiste entomologiste australien Alexander J.Nicholson a mené une longue série d'expériences visant à en apprendre davantage sur des populations de mouches dévoreuses de viandes responsables de 90% des myiases ovines qui menacent les élevages de plusieurs pays comme l'Australi, la Nouvelle Zélande et l'Afrique du sud.

Cette mouche diptère ayant un corps rond à ovale de longueur varie de 4.5 à 10 millimètres avec des yeux rougeâtres et un corps verdâtre ou vert bleuté avec des reflets cuivrés fait partie de la famille des "Calliphoridae" et elle est connue sous le nom "lucilie cuivrée australienne" ou tout simplement "mouches du mouton australien" ou en Latin "Lucilia cuprina" ou "Phaenicia cuprina".

En outre, elle a deux paires d'ailes, la première paire étant des ailes des membraneuses et la seconde paire étant des ailes postérieures réduites et modifiées connues sous le nom "d'haltères" qui sont utilisées pour la stabilisation du vol.

Le cycle de développement de cette mouche comprend quatre stades de croissance :œuf, larve, pupe et adulte. La lucilie femelle gravide attirèe par les plaies ou les replis laineux malodorants et humides des moutons pond en moyenne 250 œuf sur la peau de l'animal et qui vont éclore et se muent en larves carnivores après une période d'incubation ne dépasse pas 24h. Ces asticots se nourrissent des sécrétions des plaies et des tissus sous-jacents du moutons pendant trois stades larvaires de durée de 4 à 5 jours.

FIGURE 1.2 – La lucilie cuivrée.

Après la phase larvaire, les larves complètement développées se laissent tomber et s'enfoncent dans le sol pour se transformer en pupes donnant des nouvelles mouches jeunes.

Motivés par les données expérimentales obtenues par Nicholson, Gurney, Blythe et Nisbet ont proposé en 1980, l'équation retardée $(*)$ *ci-dessous qui décrit l'évolution de la dynamique d'une population au cours du temps :*

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta N(t-\tau)e^{\left(\frac{-N(t-\tau)}{k}\right)} - \delta N(t) \qquad (*)$$

où :

$N(t)$ *représente l'effectif de la population à l'instant* t *(les lucilies cuivrées adultes à l'instant* t*).*

$\frac{dN(t)}{dt}$ *représente le taux dévolution du nombre de la population.*

β *est le maximum de la croissance quotidienne d'œufs par individu.*

k *est le nombre maximale d'individus que le milieu peut supporter.*

δ *est le taux de mortalité par individu (jour*$^{-}1$*).*

τ *est la durée de la phase de maturation (le cycle de développement).*

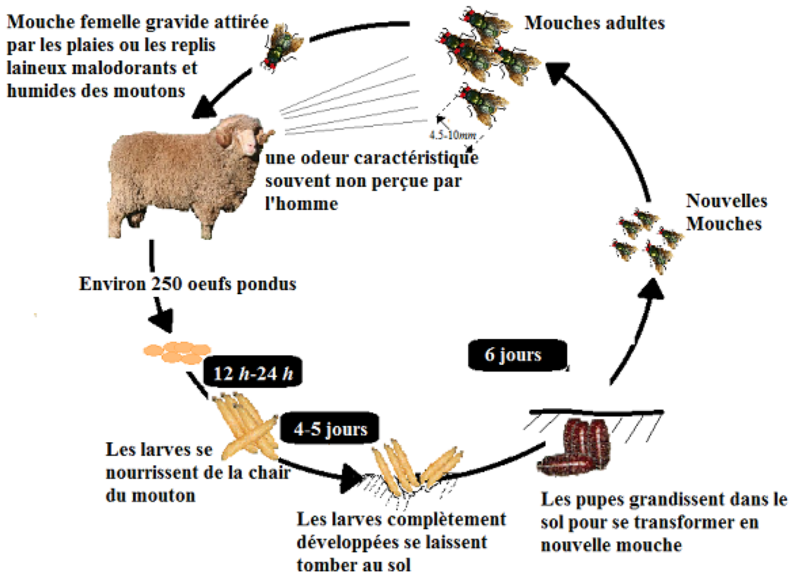

FIGURE 1.3 – Cycle de développement de la lucilie cuivrée.

1.2 Classification des équations différentielles à retard

Les équations différentielles à retard peuvent être classées comme linéaires ou non linéaires, autonomes ou non autonomes, périodiques ou non ou encore selon les types des retard. Dans cette section, on s'intéresse à donner une classification des (E.D.R) selon les types à retard, on trouve les sous catégories suivantes :

Équations différentielles à retard constant : Sous leur forme la plus simple, les équations différentielles à retard constant, s'écrivent comme suit :

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-r));$$

où f est une fonction donnée et le retard r est un constant positif.

Équations différentielles à retard variant dans le temps : Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-r(t)));$$

où f est une fonction donnée.

Équations différentielles à retard variable dépendant de l'état : Sous leur forme la plus simple, ces équation s'écrivent comme suit :

$$\dot{x} = f\big(t, x(t), x(t - r(x(t)))\big)$$

avec f étant donnée.

Des fois cette classification, n'est pas suffisante dans l'étude, ce qui conduit à ajouter des contraintes supplémentaires relatives au retard ou à sa dérivée et qui mène ensuite à définir de nouvelles sous catégories d'équations à retard variable comme :

Équations à retard variable arbitraire : Le retard et sa dérivée ne sont pas limités.

Équations à retard majoré : Cette sous-catégorie suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard

$$0 \leq r(t) \leq r_{max}$$

Si $r(t) = r$ est constant, il reste en pratique incertain et la contrainte ci-dessus assure un intervalle borné. Ce type de retard a été très largement abordé dans la littérature.

Équations à retard (bi-borné) : Cette sous-catégorie est moins abordée que le cas précédent dont on suppose que le retard vérifie la contrainte :

$$r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}$$

Équations à retard variant lentement dans le temps : $r(t)$ est une fonction dérivable presque partout telle que

$$\dot{r}(t) \leq \lambda < 1$$

qui indique alors une limitation sur la vitesse de variation du retard et que ce dernier varie lentement dans le temps autrement dit que les informations retardés arrivent dans l'ordre chronologique.

Équations à retard variant modérément dans le temps : $r(t)$ est une fonction dérivable presque partout telle que

$$\dot{r}(t) \leq \lambda \quad \text{avec} \quad \lambda \geq 1$$

Équations à retard variant rapidement dans le temps : Dans cette sous-catégorie, il n'y a aucune contrainte sur le retard et sa dérivée.

Équations différentielles à retard distribué : Ce type d'équations a été traité dans la littérature, pour la conception d'observateurs pour des systèmes non linéaire. Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) - \beta \int x(t-a)d\eta(a)$$

On trouve ce type d'équations dans le modèle dynamique des populations présenté par *Volterra* où il a utilisé un terme de retard distribué pour examiner un effet cumulatif sur le taux de mortalité d'une espèce.

Équations différentielles à retard inconnu : Dans ce cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérés qu'il soit constant, variable ou distribué.

Équations différentielles à retard de type neutre : Ces équations notées en abrégé (E.D.N) différencient des (E.D.R) par le fait que la dérivée de l'état au temps actuel dépend non seulement des valeurs de l'état passé mais de la dérivée d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation du temps passé. Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left[Dx(t-r(t))\right] = f\big(t, x(t), x(t-r(t))\big)$$

où f est donnée et D est un opérateur.

1.3 Existence, unicité et prolongement de la solution d'une équation différentielle à retard

Définition 1.3 *Soit x une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$. On dit que x est une solution de l'équation* (1.1) *s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $L > 0$ telle que $x \in C\big([t_0 - r, t_0 + L], \mathbb{R}^d\big)$,$(t, x_t) \in U$ et x vérifie la relation* (1.1) *pour tout $t \in [t_0, t_0 + L[$.*

1.3. Existence, unicité et prolongement de la solution d'une équation différentielle à retard

Définition 1.4 *Soit $x(t)$ une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in C_0$ donnés, x est une solution du problème à valeur initiale* (1.2) *telle que $x(t) = \phi(t)$ si $t \in [t_0 - r, t_0]$ et satisfaisant* (1.1) *si $t \in [t_0, t_0 + L]$ avec $L > 0$.*

Remarque 1.1 *Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in C_0$ donnés, la solution du probléme* (1.2) *est dite unique si deux solutions considérent là où elles sont simultanément définie.*

Proposition 1.1 (*Voir [3]*) *Etant données une fonction $\phi \in C_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Trouver une solution de l'équation* (1.2) *est équivalant à la résolution de l'équation intégrale*[1] *suivante :*

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\,ds, \\ x_{t_0} = \phi \end{cases} \tag{1.6}$$

pour tout $t \geq t_0$.

Théorème 1.1 (*Voir [1]*) **(Existence)** *Pour l'équation* (1.1)*, supposons que U est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$ et $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$ est une application continue sur U. Si $(t_0, \phi) \in U$, alors il existe une solution du problème* (1.1) *passant par (t_0, ϕ).*

Définition 1.5 *On dit que la fonction $f(t, \phi)$ est lipschitzienne par rapport à ϕ sur un compact K de $\mathbb{R} \times C_0$ s'il existe une constante α telle que pour tout $(t, \psi_i) \in K$ $i = 1, 2$, on a :*

$$\left| f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2) \right| \leq \alpha |\psi_1 - \psi_2|.$$

Théorème 1.2 (*Voir [1]*) **(Unicité)** *Supposons que U est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C_0$, $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue et $f(t, x)$ est lipschitzienne par rapport à x sur tout sous ensemble compact de U. Si $(t_0, \phi) \in U$, il existe une solution unique de l'équation* (1.1) *passant par (t_0, ϕ).*

1. Chaque équation dont l'inconnue sous le signe d'intégral est dite équation intégrale. Par exemple, l'équation de résolution d'un équation différentielle il est équation intégrale.

Définition 1.6 *On suppose que la fonction f dans l'équation* (1.1) *est continue. Soit x une solution de cette équation, définie sur l'intervalle* $[t_0 - r, a[, a \geq t_0$.
On dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x s'il existe $b > a$ tel que $\tilde{x}$ est définie sur $[t_0 - r, b[$, *coïncide avec x sur* $[t_0 - r, a[$, *et vérifie l'équation* (1.1) *sur* $[t_0 - r, b[$.

Définition 1.7 *La solution x est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement, c'est-à-dire que l'intervalle* $[t_0 - r, a[$ *est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.*

1.4 Stabilité locale et globale des équations différentielles à retard

À présent, on considère l'équation (1.1) avec $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue et suffisamment lisse pour garantir que la solution $x(t, t_0, \phi)$ passe par $(t_0, \phi) \in [-r, +\infty) \times C_0$ soit unique et définie sur $[t_0, +\infty)$. On peut alors donner les définitions suivantes :

Définition 1.8 *Un point $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ est appelé un point d'équilibre, ou une solution stationnaire de* (1.2) *si $f(\bar{x}_0) = 0$ où $\bar{x}_0$ désigne la fonction constante sur C_0 avec $\bar{x}_0(\theta) = x_0$, $\theta \in [-r, 0]$.*

Définition 1.9 *Supposons que $f(0) = 0$. On dit que la solution $x \equiv 0$ de* (1.2) *est :*

- *Stable, si pour tout $t_0 \geq L$, $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\phi \in C_0$:*

$$|\phi| < \delta \Rightarrow |x(t; t_0, \phi)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

- *Uniformément stable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ indépendant de t_0, tel que pour tout $\phi \in C_0$:*

$$|\phi| < \delta \Rightarrow |x(t; t_0, \phi)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq L.$$

- *Localement asymptotiquement stable, si elle est stable et que pour tout $t_0 \geq L$ il existe $b = b_0(t_0) > 0$ tel que pour tout $\phi \in C_0$:*

$$|\phi| < b_0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t; t_0, \phi) = 0.$$

— *Globalement attractive si toutes les solutions de* (1.2) *tendent vers zéro quand* $t \longrightarrow \infty$.

— *Globalement asymptotiquement stable si elle est stable et globalement attractive.*

— *Instable si elle n'est pas stable.*

Définition 1.10 *L'origine du système* (1.2) *est dite exponentiellement stable s'il existe trois constantes positives* a, b *et* δ *qui éventuellement dépendent de* t_0 *tel que pour tout* $\phi \in C_0$ *:*

$$| \phi | < \delta \Rightarrow | x(t; t_0, \phi) | < a | \phi | e^{-b(t-t_0)}.$$

La propriété est uniforme si a, b *et* δ *ne dépendent pas du temps* t_0.

Remarque 1.2 *Pour étudier la stabilité de la solution non trivial de l'équation* (1.1)*, on suppose que* $x(t) = 0$ *est une solution de l'équation différentielle* (1.1)*, qu'on va appeler solution triviale. En effet, si on désire étudier la stabilité d'une solution non triviale* $y(t)$*, on fera le changement suivant :*

$$z(t) = x(t) - y(t).$$

Le système ainsi obtenu est alors :

$$z'(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t) \tag{1.7}$$

qui admet la solution triviale $z(t) = 0$.
On dit que $y(t)$ *est stable si la solution* $z(t) = 0$ *de l'équation* (1.7) *est stable.*
Les autres types de stabilité sont définie de la même manière.

Ils existes des méthodes pour étudier la stabilité des équations différentielles à retard, la première méthode c'est celle de Lyapunov, cette méthode repose sur l'étude de l'existence d'une fonctionnelle V définie positive[2], telle que le long des trajectoires du système (1.1),

2. Soit $V(t, x)$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$V : [t_0, +\infty] \times D \to \mathbb{R}.$$

On suppose que $V(t, 0) = 0$.
- On dit que V est définie positive s'il existe $\omega(x) \in C^1$ tel que : $0 < \omega(x) \leq V(t, x)$ pour tout $x \neq 0$ et pour tout $t \geq 0$

on ait $\frac{dV}{dt} < 0$, si $x \neq 0$ (en effet, cette dérivée n'est pas une fonction ordinaire mais une fonctionnelle : elle dépend aussi de certaines valeurs passées de l'argument t).

Étant une dimension infinie, cette méthode est donc difficilement exploitable pour de nombreux cas de système à retard. Deux extensions de la seconde méthode de Lyaponov ont alors été développée d'un coté par Krasovskii et l'autre par Razumikhin.

1.4.1 L'approche de Lyaponov-Krasovskii et de Lyaponov-Razumikhin

Soient $V : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}$ est continue et $x(t_0, \phi)$ une solution de l'équation (1.1) à valeur initiale (t_0, ϕ). On définit

$$\dot{V}(t,\phi) = \lim_{h \to 0^+} \sup \frac{1}{h} \Big[V\big(t+h, x_{t+h}(t,\phi)\big) - V(t,\phi) \Big]$$

où la fonction $\dot{V}(t,\phi)$ est la dérivé à droite de $V(t,\phi)$ le long de la solution de l'équation (1.1).

1.4.1.1 L'approche de Lyaponov-Krasovskii

La méthode de Lyaponov-Krasovskii est une extension de la méthode de Lyaponov traditionnelle aux équations différentielle retardée. La principale difficulté reste néanmoins de trouver une fonctionnelle qui vérifie les hypothèses du théorème. En particulier les conditions de décroissance sur la dérivée de V.

Cette technique est une extension des fonctions usuelles de Lyaponov des fonctionnelles vérifiant certaines propriétés et qui décroissent le long des trajectoires du système étudié. Cette approche est donnée par les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.3 (*Voir [8]*) *S'il existe une fonctionnelle V à valeur dans $\mathbb{R}_+$ définie positive, telle que : $\dot{V}(t,\phi) \leq 0$ le long de trajectoires de l'équation* (1.1). *Alors la solution nulle de* (1.1) *est stable.*

Théorème 1.4 (*Voir [2]*) *Soit $f : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^d$ une fonction telle que l'image par f de $\mathbb{R} \times I$ avec I un ensemble borné de C est un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$, et soient $u, v, \omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ des fonctions continues croissantes avec $u(s)$ et $v(s)$ sont positives pour $s > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$.*

— *S'il existe une fonction continue* $V(t,\phi):\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}$ *tels que :*

$$u\left(|\,\phi(0)\,|\right)\leq V(t,\phi)\leq v\left(|\,\phi\,|\right)$$

$$\dot{V}(t,\phi)\leq-\omega\left(|\,\phi(0)\,|\right)$$

Alors la solution $x=0$ *de l'équation* (1.1) *est uniformément stable.*

— *Si* $u(s)\longrightarrow\infty$ *quand* $s\to\infty$*, alors les solutions de l'équation* (1.1) *sont uniformément bornées.*

— *Si* $\omega(s)>0$ *pour* $s>0$*, alors la solution* $x=0$ *est uniformément asymptotiquement stable.*

1.4.1.2 L'approche de Lyaponov-Razumikhin

La méthode proposée par Razumikhin tient compte simplement de l'état instantané $x(t)\in\mathbb{R}^d$. Il s'agit plus alors, de cherche une fonction de Lyaponov plus classique. De plus, cette méthode présente la particularité de vérifier la décroissance de la fonction V seulement pour les trajectoires de l'état qui ont tendance à s'éloigner du point d'équilibre, plus précisément lorsque :

$$V(x(t))\geq\max_{\theta\in[-r,0]}V(x(t+\theta)).$$

Cette méthode est donnée par les théorèmes suivants :

Théorème 1.5 (*Voir [2]*) *Supposons que la fonction* $f:\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}^d$ *telle que l'image par* f *de* $\mathbb{R}\times I$ *avec* I *un ensemble borné de* C *est un ensemble borné de* $\mathbb{R}^d$ *et que* $u,v,\omega:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *sont continues, non décroissantes et* $u(s),v(s)$ *positives pour* $s>0$*, avec* $u(0)=v(0)=0$*,* v *strictement croissante.*
S'il existe une fonction continue différentiable $V:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$u(|\,x\,|)\leq V(t,x)\leq v(|\,x\,|),\qquad t\in\mathbb{R},\;\; x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.8}$$

et

$$\dot{V}(t,\phi(0))\leq-\omega(|\,\phi(0)\,|)\quad si\quad V(t+\theta,\phi(\theta))\leq V(t,\phi(0)). \tag{1.9}$$

pour $\theta\in[-r,0]$*, alors la solution* $x=0$ *de l'équation* (1.1) *est uniformément stable.*

Théorème 1.6 (*Voir [2]*) *Supposons que tout conditions de théorème (1.5) sont satisfait et en outre* $\omega(s) > 0$ *si* $s > 0$. *S'il y a une fonctions non décoissante* $p(s) > 0$ *pour* $s > 0$ *tel que la condition* (1.9) *est satisfaite avec*

$$\dot{V}(t,\phi(0)) \leq -\omega(|\phi(0)|) \text{ si } V(t+\theta,\phi(\theta)) < p\big(V(t,\phi(0))\big) \tag{1.10}$$

pour $\theta \in [-r,0]$, *alors la solution* $x = 0$ *de l'équation* (1.1) *est uniformément asymptotiquement stable.*

Si $u(s) \longrightarrow \infty$ *quand* $s \to \infty$, *alors la solution* $x = 0$ *est aussi globalement attractif pour l'équation* (1.1).

Chapitre 2

Les équations différentielles à retard constant

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un cas d'équation différentielle à retard de type constant. Après quelques définitions et un résultat d'existence et l'unicité de solution, nous terminerons ce chapitre par une méthode d'intégration des (E.D.R) constant pour avoir la solution.

2.1 Définitions et résultat d'existence

Dans cette section, on donne quelque définitions générales sur les équations différentielles à retard constant, ensuite la solution de ces équations. Enfin, on énonce un théorème d'existence et d'unicité de la solution sans démonstration.

Définition 2.1 *Soientt U un ouvert de $\mathbb{R} \times {C_0}^2$ et f une fonction continue. La forme la plus simple d'une équation différentielle à retard constant s'écrivent comme suit :*

$$\dot{x} = f\big(t, x(t), x(t-r)\big) \tag{2.1}$$

où r est un nombre réel strictement positif que l'on appelle le retard.

Remarque 2.1 *Pour déterminer la solution de l'équation différentielle* (2.1) *sur l'intervalle* $[t_0, t_0+r]$, *il faut connaître* $x(t)$ *sur l'intervalle intérieur* $[t_0-r, t_0]$. *Soit* ϕ *une fonction continue sur l'intervalle* $[t_0-r, t_0]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$.

Définition 2.2 *Une fonction sur* $[t_0-r, \infty[$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *différentiable sur* $[t_0, \infty)$ *est solution de l'équation* (2.1), *si et seulement si elle est vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} x_{|[t_0-r,t_0]} = \phi, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad pour \ \ t \in [t_0, \infty). \end{cases} \tag{2.2}$$

Autrement dit :

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & pour \ \ t \in [t_0-r, t_0] \\ \phi(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-r))ds, & pour \ \ t \in [t_0, \infty) \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour énoncer un résultat d'existence et unicité de la solution, on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)) & \text{pour } \ t > 0 \\ x(t) = \phi(t) & \text{pour } \ t \in [-r, 0] \ \text{ et } \ \phi \in C([-r,0], \mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.4}$$

Théorème 2.1 *Si* $f : U \to \mathbb{R}^d$ *est continue, alors le probléme* (2.4) *admet au moins une solution.*

Si de plus f *est localement lipschitzienne par rapport aux deux derniers variables, alors cette solution est unique.*

2.2 Propriétés générales : Comparaison avec les équations différentielles ordinaires

1- Pour résoudre l'équation différentielle à retard (2.1) il faut conaître $x(t)$ sur l'intervalle $[t_0-r, t_0]$, de longueur r. Par contre, pour résoudre une équation différentielle ordinaire il suffit de conaître $x(t)$ en un seul point.

2- Une équation différentielle à retard linéaire et homogène, peut avoir des solutions non triviales, c'est-à-dire des solutions qui s'annulent plusieurs fois, mais elle ne sont pas identiquement nulles, or si la solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire et homogène, s'annule en un point, elle est nulle partout (grâce à l'unicité de la solution). D'une manière générale, si deux solution d'une équation différentielle ordinaire se rencontrent en un point, et si la condition d'unicité est satisfaite, alors elles sont égales sur tout le domaine de définition. Par contre, deux solutions d'une équation différentielle à retard peuvent se rencontre en plusieurs points, sans quelles soient égales.

2.3 Intégration des équations différentielles à retard constant par la méthode des étapes

La méthode des étapes dite aussi la méthode pas à pas permet de résoudre numériquement les (E.D.R) et permet par la même occasion d'établir l'existence et l'unicité de la solution.

Pour expliquer cette méthode considérons l'équation linéaire à retard avec coefficients variables :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1(t)x(t) + a_2(t)x(t-r), & \text{pour tout} \quad t \in [0, r] \\ x(t) = \phi(t), & \text{pour tout} \quad t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{2.5}$$

On va résoudre cet équation par la méthode des étapes. Le principe de cette méthode est de chercher des solutions sur des intervalles de types $[kr, (k+1)r]$ où $k \in \mathbb{N}$, en suivant les étapes suivantes :

$1^{\text{ére}}$ **étape :** Dans l'intervalle $[-r, 0]$, la solution $x(t)$ est la fonction donnée $\phi(t)$, alors l'équation est résolue dans l'intervalle $[-r, 0]$, donc la solution est : $x_0(t) = \phi(t)$ pour $t \in [-r, 0]$.

$2^{\text{ème}}$ étape : Dans l'intervalle $[0,r]$, si $t \in [0,r]$ alors $t-r \in [-r,0]$, donc $x(t-r) = x_0(t-r)$ dans l'intervalle $[0,r]$ et le système (2.5) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1(t)x(t) + a_2(t)x_0(t-r) & \text{pour tout } t \in [0,r] \\ x(0) = \phi(0) \end{cases} \tag{2.6}$$

qui est un problème à valeur initiale pour une équation différentielle ordinaire (E.D.O) où $x_0(t-r) = \phi(t-r)$ est connue.Ainsi, on résout cette (E.D.O) dans $[0,r]$ en utilisant la condition initiale $x(0) = \phi(0)$, et on désigne par $x_1(t)$ cette solution dans $[0,r]$.

$3^{\text{ème}}$ étape : Dans l'intervalle $[r,2r]$, si $t \in [r,2r]$ alors $t-r \in [0,r]$, donc $x(t-r) = x_1(t-r)$ dans l'intervalle $[r,2r]$ et le système (2.5) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1(t)x(t) + a_2(t)x_1(t-r) & \text{pour tout } t \in [r,2r] \\ x(r) = x_1(r) \end{cases} \tag{2.7}$$

cette (E.D.O) avec la condition initiale $x_1(r)$ est à son tour peut être résolue pour trouver la solution $x_2(t) \in [r,2r]$.
Et ainsi de suite.

Exemple 2.1 *Considérons une population de la taille $N(t)$ à l'instant t, soumise à des processeurs de reproduction ou de disparition. Supposons que la vitesse de croissance $\frac{dN(t)}{dt}$ est proportionnelle à $N(t)$ à l'instant t. Donc l'équation de cette population est représentée par :*

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \qquad \textit{(E.D.O)}$$

La solution de cette équation est $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, où N_0 est la taille de cette population à l'instant t_0.

Remarque 2.2 *1- Si $\lambda > 0$; on a une explosion de la population $(\lim_{t\to+\infty} N(t) = +\infty)$.*

2- Si $\lambda < 0$; on a une extinction de la population $(\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0)$.

3- Si $\lambda = 0$; la population reste constante $(N(t) = N_0) \quad \forall t$.

On remplace, le facteur λ par une quantité qui décroit, quand $N(t)$ croit et inversement, et on propose comme deuxième modèle l'équation suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \qquad \alpha, k \in \mathbb{R}_*^+ \tag{2.8}$$

avec k : la capacité limite de la population.

L'équation (2.8) *s'écrit sous la forme :*

$$\frac{N'(t)}{N^2(t)} - \frac{\alpha}{N(t)} + \frac{\alpha}{k} = 0 \qquad \textit{(équation différentielle de Bernoulli)} \tag{2.9}$$

Posons $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$ *; alors* $y'(t) = -\dfrac{N'(t)}{N^2(t)}$, *l'équation* (2.9) *devient :*

$$y'(t) + \alpha y(t) = \frac{\alpha}{k}. \tag{2.10}$$

Résolvons l'équation homogène suivante :

$$y'(t) + \alpha y(t) = 0$$

$$y'(t) + \alpha y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-\alpha t}.$$

La solution de l'équation (2.9) *est donnée comme suit :*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \frac{\alpha}{k} ds \\ &= y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{k} e^{-\alpha t} \int_0^t \alpha e^{\alpha s} ds \\ &= y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{k} e^{-\alpha t}(e^{\alpha t} - 1) \\ &= \frac{y_0 + \frac{1}{k}(e^{\alpha t} - 1)}{e^{\alpha t}} \end{aligned}$$

En remplaçant $y(t)$ *par* $\dfrac{1}{N(t)}$, *et* y_0 *par* $\dfrac{1}{N_0}$, *on aura :*

$$N(t) = \frac{kN_0}{(k - N_0)e^{-\alpha t} + N_0}, \qquad \alpha, k \in \mathbb{R}_*^+.$$

On remarque que $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = k$, *le facteur* $(1 - \dfrac{N(t)}{k})$, *joue une rôle de régulateur.*

On remarque que le modèle (2.8), *présente un défaut de principe, car on ne peut pas avoir une* *connaissance claire de la capacité démographique d'une population.*

On propose un troisième modèle dans lequel, le facteur régulateur fait intervenir la taille de la population à un instant intérieur $t-r$, on aura donc l'équation suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha\left[1 - \frac{N(t-r)}{k}\right]N(t). \tag{2.11}$$

Cette dernière équation est une équation différentielle à retard.

On résoudre cette équation par la méthode des étapes, l'équation (2.11) *s'écrit sous la forme intégrale suivante :*

$$\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)}\,ds = \int_0^t \alpha\left[1 - \frac{N(s-r)}{k}\right]\,ds. \tag{2.12}$$

On remarque que pour résoudre cette équation sur l'intervalle $[0,r]$*, il faut connaître* $N(t)$ *sur* $[-r,0]$. *Ainsi, on se donne une fonction* ϕ *continue sur* $[-r,0]$*, et on pose comme condition initiale* $N(t)=\phi(t)$ *sur l'intervalle* $[-r,0]$.

1**ére étape :** *Si* $t\in[-r,0]$*, la solution est la fonction donnée, on note cette solution par* $N_1(t)$*, donc*

$$N_1(t) = \phi(t) \qquad t\in[-r,0].$$

2**ème étape :** *Si* $t\in[0,r]$ *alors* $(t-r)\in[-r,0]$ *donc :* $N(t-r)=N_1(t-r)=\phi(t-r)$*, alors*

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)}ds &= \int_0^t \alpha\left[1-\frac{N_1(s-r)}{k}\right]ds\\ &= \int_0^t \alpha\left[1-\frac{\phi(s-r)}{k}\right]ds \quad pour\ \ t\in[0,r].\end{aligned}$$

La solution sur $[0,r]$*, qu'on notera* $N_2(t)$ *est donnée par :*

$$N_2(t) = N_0 e^{\int_0^t \alpha\left[1-\frac{\phi(s-r)}{k}\right]ds}, \qquad t\in[0,r].$$

3**ème étape :** *Si* $t\in[r,2r]$ *alors* $(t-r)\in[0,r]$ *donc :* $N(t-r)=N_2(t-r)$*, alors :*

$$\int_r^t \frac{N'(s)}{N(s)}ds = \int_r^t \alpha\left[1-\frac{N_2(s-r)}{k}\right]ds \qquad pour\ \ t\in[r,2r]$$

$N_3(t)$ la solution sur $[r,2r]$ est donnée par :

$$N_3(t) = N(r)e^{\int_r^t \alpha[1-\frac{N_2(s-r)}{k}]ds} \qquad t \in [r,2r].$$

On refait l'opération sur $[2r,3r]$, en considérant comme condition initiale $N(t) = N_3(t)$ sur $[r,2r]$, et ainsi de suite.

Exemple 2.2 *Soit l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x(t-r), & \text{pour } t \in [0,2r] \\ x(t) = \phi(t) = 1 & -r \leqslant t \leqslant 0 \end{cases}$$

$1^{\text{ére}}$ **étape :** *Dans $[-r,0]$ la solution est :*

$$x_1(t) = \phi(t) = 1.$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** *Intégration dans $[0,r]$:*

Soit $t \in [0,r]$ alors $(t-r) \in [-r,0]$ donc : $x(t-r) = \phi(t-r) = 1$ car $x(t) = 1$ pour $t \in [-r,0]$.

Alors :

$$\int_0^t x'(s)ds = \int_0^t \alpha\, x(s-r)\, ds$$

Donc :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \alpha\, \phi(s-r)\, ds + x(0) \\ &= \int_0^t \alpha\, ds + x(0) \\ &= \alpha t + 1 \end{aligned}$$

Alors la solution sur l'intervalle $[0,r]$ est $x_2(t) = \alpha t + 1$.

$3^{\text{ème}}$ **étape :** *Dans l'intervalle $[r,2r]$*

$$\int_r^t x'(s)ds = \int_r^t \alpha\, x(s-r)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \int_r^t \alpha\, x(s-r)\, ds + x(r)$$

Si $t \in [r, 2r]$ *alors* $t - r \in [0, t]$ *donc* $x(t-r) = \alpha(t-r) + 1$ *car* $x(t) = \alpha t + 1$ *pour* $t \in [0, r]$.

Donc :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_r^t \alpha(\alpha(s-r)+1)ds + (\alpha r + 1) \\ &= \left[\frac{\alpha^2}{2}s^2 - \alpha^2 r s + \alpha s\right]_r^t + (\alpha r + 1) \\ &= \frac{\alpha^2}{2}t^2 - \alpha^2 r t + \alpha t + \frac{\alpha^2}{2} r^2 + 1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Alors la solution sur l'intervalle $[r, 2r]$ *est :* $x_3(t) = \dfrac{\alpha^2}{2}t^2 - \alpha^2 r t + \alpha t + \dfrac{\alpha^2}{2}r^2 + 1.$

Chapitre 3

Les équations différentielles à retard dépendant de l'état

Ce chapitre est consacré à prouver l'existence et unicité de la solution d'une équation différentielle à retard dépendant de l'état en utilisant le **théorème d'Ascoli**.

3.1 Équation à retard dépendant de l'état

Définition 3.1 *On appelle équation différentielle à retard dépend de l'état ; une équation de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r(x(t)))), & \text{pour tout } \ t \geq 0. \\ x(t) = \phi(t), & \forall\, t \in [-\sigma, 0] \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonction continue, $r : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\sigma = \max_{x \in \mathbb{R}} r(x)$ et $\phi \in C\big([-\sigma, 0], \mathbb{R}\big)$.
On remarque que r est une fonction de $x(t)$.

Exemple 3.1 *Citons l'exemple suivant qui à été proposé récemment par Arino, Hbid et Bravo, comme modèle décrivant l'évolution d'une population de poissons dont les larves consomment* *une nourriture, supposée limitée. Le modèle est sous la forme suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r(t))). \\ \dot{r} = h(x(t - r(t))). \end{cases}$$

où x est le nombre total de la population et r représente la durée nécessaire, pour que les larves deviennent des juvéniles, la deuxième équation différentielle ordinaire, elle dépend de la variable x, c'est pourquoi l'équation est dite, équation à retard dépendant de l'état.

3.2 Existence et unicité de la solution

Soit l'équation différentielle à retard dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(t - r(x(t)))\big), & \text{pour tout } t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & \forall t \in [-\sigma, 0] \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, fonction continue, $r : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\sigma = \max_{x \in \mathbb{R}} r(x)$ et $\phi \in C\big([-\sigma, 0], \mathbb{R}\big)$.
Supposons que f et r vérifient les hypothèses suivants :

(1) f est localement lipschitzienne, pr rapport à $x(t)$, et par rapport $x(t - r(x(t)))$.

(2) r est localement lipschitzienne.

(3) f est bornée sur les bornes.

Pour nombre positif T, soit X l'ensemble des fonctions continue de $[-\sigma, T]$ à valeurs réelles, muni de la norme du sup, X est un espace de Banach pour ω et ρ, deux réels positifs, soit $C_{\phi,T}$ le sous ensemble de X définit par :

$$C_{\phi,T} = \begin{cases} x \in X, x(s) = \phi(s), & \forall s \in [-\sigma, 0]. \\ \| x \| \leq \rho, \text{et } | x(t) - x(s) | \leq \omega \mid t - s \mid, & \forall t, s \in [-\sigma, T] \end{cases}$$

Proposition 3.1 (*Voir [7]*) *$C_{\phi,T}$ est compact.*

Démonstration

a)- Montrons d'abord que $C_{\phi,T}$ est relativement compact [1], il suffit d'aprés le théorème d'Ascoli [2], que $C_{\phi,T}$ soit borné et uniformément equicontinue.

i)- Il est claire que $C_{\phi,T}$ est bornée par construction.

ii)-Pour tout $t,s \in [-\sigma, T]$ et pour tout $x \in C_{\phi,T}$ on a :

$$| x(t) - x(s) | \leq \omega | t - s | \tag{3.3}$$

pour tout $\varepsilon \geq 0$ et pour $| t - s | \leq \frac{\varepsilon}{\omega}$, (3.3) donne $| x(t) - x(s) | < \varepsilon$, ce qui preuve que $C_{\phi,T}$ est relativement compact.

b)- Montrons maintenant que $C_{\phi,T}$ est fermé.

Prenons donc, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_{\phi,T}$, telle que $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ et montrons que $x(t) \in C_{\phi,T}$.

D'une part, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n(s) = \phi(s);\ \forall s \in [-\sigma, 0]$. En passant à la limite, on trouve : $\lim_{n\to\infty} x_n(s) = \phi(s)\ \forall s \in [-\sigma, 0]$:

$$| x(s) - x(t) | \leq | x(s) - x_n(s) | + | x_n(s) - x_n(t) | + | x_n(t) - x(t) | \tag{3.4}$$

D'après la définition de la limite , (3.4) devient :

$$| x(s) - x(t) | \leq \frac{\varepsilon}{2} + u | s - t | + \frac{\omega}{2} = \varepsilon + R | s - t |, \ \ \forall \varepsilon \geq 0, \ R \geq 0$$

Ainsi :

$$| x(s) - x(t) | \leq \omega | s - t |$$

c)- $\| x \| = \| \lim_{n\to\infty} x_n \| \leq \lim_{n\to\infty} \| x_n \| \leq \rho$ Alors $x \in C_{\phi,T}$ et par conséquent $C_{\phi,T}$ est fermé ; on conclut que $C_{\phi,T}$ est compact.

1. On dit qu'un ensemble est relativement compact si sa fermeture est compact.
2.

Théorème 3.1 (théorème d'Ascoli) *: Soit K un espace métrique compact , soit H un sous espace de $C(K)$, qui est l'ensemble des fonctions continue de K dans K. On suppose que H est uniformément équicontinue i.e :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \textit{tel que } \ d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon, \ \ \forall f \in H$$

Alors H est relativement compact dans $C(k)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir et de démontrer notre résultat principal de l'existence et unicité de la solution.

Théorème 3.2 (*Voir [7]*) *Supposons que les hypothèses (1), (2) et (3) sont vérifier, alors pour toute fonction ϕ dérivable avec $|\phi'(t)| \leq R$ $(R>0)$, alors le problème*(3.2) *admet une solution unique.*

Démonstration. Pour la démonstration, on applique le thorème du point fixe [3]

1. Soient N la borne de ϕ, M la borne de f, supposons que $R \geq M$

   Pour $\omega = R$ et $\rho = N + TM$, on définit, $C_{\phi,T}$.

   D'après la proposition précédent, $C_{\phi,T}$ est compact.

2. Montrons qu'il est convexe [4] :

   a/ Soit $\alpha \in [0,1]$ et $x, y \in C_{\phi,T}$: on a

$$\begin{aligned}\alpha x(s) + (1-\alpha)y(s) =& \alpha\phi(s) + (1-\alpha)\phi(s), \quad \forall s \in [-\sigma, 0]\\ =&\phi(s), \quad \forall s \in [-\sigma, 0].\end{aligned}$$

   b/ Pour tout $t, s \in [-\sigma, T]$ on a :

$$\begin{aligned}|\alpha x(s) + (1-\alpha)y(s) - \alpha x(t) + (1-\alpha)y(t)| \leq& |\alpha(x(s)-x(t)) + (1-\alpha)(y(s)-y(t))|\\ \leq& \alpha|(x(s)-x(t))| + (1-\alpha)|(y(s)-y(t))|\\ \leq& \alpha R|s-t| + (1-\alpha)R|s-t|\\ \leq& R|s-t|.\end{aligned}$$

   Alors $\alpha x + (1-\alpha)y$ est lipschitzienne sur $[-\sigma, T]$, avec la constante de lipschitz égale à R.

3.

Théorème 3.3 (Théorème du point fixe) *Soient E un espace de Banach, U un convexe fermé borné de E et T : $U \longrightarrow U$ un opérateur complètement continue, alors T admet un point fixe dans U.*

4. On dit qu'un ensemble A est convexe si on a $tx + (1-t)y \in A$, $\forall x, y \in A$, pour tout $t \in [0, 1.]$

c/ x et y sont bornées par ρ, alors

$$\| \alpha x + (1-\alpha) y \| \leq \alpha \| x \| + (1-\alpha) \| y \| \leq \rho$$

Donc $\alpha x + (1-\alpha) y \in C_{\phi,T}$ et par suite $C_{\phi,T}$ est convexe.

3. Posons $J = [-\sigma, T]$ et considérons l'application :

$F : C_{\phi,T} \to X$, définie par :

$$(Fx)(t) = \begin{cases} \phi & -\sigma \leq t \leq 0 \\ \phi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s - r(x(s))))ds, & \forall 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Si F est complètement continue [5] et $F\big(C_{\phi,T}\big) \subset C_{\phi,T}$; Alors F admet un point fixe. Ce point fixe est une solution de l'équation(3.2).

Montrons que $F\big(C_{\phi,T}\big) \subset C_{\phi,T}$:

(a) : on sait que $\big(Fx\big)(t) = \phi(t)$ pour $\forall \ -\sigma \leq t \leq 0$ comme ϕ est une fonction bornée par N et f est $R-$lipschitzienne alors $F\big(C_{\phi,T}\big) \subset C_{\phi,T}$.

(b) : Si $x \in C_{\phi,T}$, on a, pour $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq \left| \phi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s - r(x(s))))ds \right| \\ &\leq |\phi(0)| + \int_0^t M ds \\ &\leq |\phi(0)| + TM \\ &\leq N + TM = \rho, \end{aligned}$$

donc F est bornée.

(c) : Pour prouver que $F(x)$ est $R-$lipschitzienne, il suffit de montrer que $\left| \big(F(x)(t)\big)' \right|$ est bornée par R. En effet on a :

$$\big(F(x)(t)\big)' = f(t, x(t, x(t - r(x(t))))),$$

et $\| \big(F(x)(t)\big)' \| \leq M$ d'aprés l'hypothèse (3) donc

$$\| \big(F(x)(t)\big)' \| \leq M \leq R$$

5. Soient E et F, deux espaces topologiques. Une fonction $h : E \to F$ est dite complètement continu si elle est continue et compact.

4. Montrons maintenant que F est complètement continue.

   a/ Supposons que $x_j \in C_{\phi,T}$ et $\| x_j - x \|_\infty \to 0$.

   Notons par $\rho_j(s) = r(x_j(s)), \rho(s) = r(x(s))$, l la constante de lipschitz de r et k la constante de lipschitz de f. Donc pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\left| \big(Fx_j\big)(t) - \big(Fx\big)(t) \right| \\
&\leq \left| \int_0^t f(s, x_j(s), x_j(s-\rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s-\rho(s))) ds \right| \\
&\leq \int_0^t \left| f(s, x_j(s), x_j(s-\rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s-\rho(s))) \right| ds \\
&\leq \int_0^t \left| f(s, x_j(s), x_j(s-\rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s-\rho_j(s))) \right| ds \\
&+ \int_0^t |f(s, x(s), x(s-\rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s-\rho(s)))| ds \\
&\leq \int_0^t k \sup\{\| x_j - x \|_\infty, \| x_j - x \|_\infty\} ds \\
&+ \int_0^t k \sup\{0, \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s-\rho_j(s)) - x(s-\rho(s))|\} ds \\
&\leq \int_0^t k \| x_j - x \|_\infty ds + \int_0^t k \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s-\rho_j(s)) - x(s-\rho(s))| ds \\
&\leq \int_0^t k \| x_j - x \|_\infty ds + \int_0^t k \sup_{s\in[-\sigma,T]} R|s-\rho_j(s) - s - \rho(s)| ds \\
&\leq \int_0^t K \| x_j - x \|_\infty ds + \int_0^t kR \sup_{s\in[-\sigma,T]} |\rho_j(s) - \rho(s)| ds \\
&\leq \int_0^t k \| x_j - x \|_\infty ds + \int_0^t kRl \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s) - x(s)| ds,
\end{aligned}
$$

   d'où

$$
\begin{aligned}
\left| F(x_j)(t) - F(x)(t) \right| &\leq T[k \| x_j - x \|_\infty + kRl \| x_j - x \|_\infty] \\
&\leq Tk[1 + Rl] \| x_j - x \|_\infty,
\end{aligned}
$$

   donc F est lipschitzienne dans $C_{\phi,T}$ et par conséquent elle est continue.

   b/ F est compact, en effet : soit B un ensemble borné de $C_{\phi,T}$.

   $\overline{F(B)}$ un fermé inclue dans $C_{\phi,T}$ qui est compact par conséquent, $\overline{F(B)}$ est compact. Ainsi F est complètement continue.

   Le théorème du point fixe, nous donne : pour tout nombre $T \geq 0$, il existe une fonction $x \in C_{\phi,T}$, tel que $(Fx)(t) = x(t)$, pour tout $t \in [0,T]$.

Dans ce qui suit , on montre, l'unicité de la solution.

On procède par l'absurde.

Supposons qu'il existe deux solutions $x(t), y(t)$; pour $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &\leq |\int_0^t (f(s,x(s),x(s-r(s))) - f(s,y(s),y(s-r(s))))ds| \\
&\leq \int_0^t |(f(s,x(s),x(s-\rho(s))) - f(s,y(s),y(s-\rho(s))))|ds \\
&\leq \int_0^t k \parallel x_j - x \parallel_\infty ds + \int_0^t kRl \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s)-y(s)|ds \\
&\leq (1-p)k[1+Rl] \parallel x-y \parallel_\infty \\
&\leq Tk[1+Rl] \parallel x-y \parallel_\infty,
\end{aligned}$$

et pour $T < \dfrac{1}{k[1+Rl]}$, on obtient :

$$|x(t)-y(t)| < \parallel x-y \parallel_\infty$$

Contradiction, en par conséquent, on a : $x(s) = y(s)$, pour $s \in [0,T]$.

■

Exemple 3.2 *Considérons l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2\sin\left(x\left(t - \frac{-x+1}{2}\right)\right), & t \geq 0 \\ x(t) = e^{-t}, & t \leq 0 \end{cases}$$

On a : $r(x(t)) = \dfrac{-x+1}{2}$, $f(t,x(t),x(t-r(xt()))) = -2\sin\left(x\left(t - \dfrac{-x+1}{2}\right)\right)$ *et* $\phi(t) = e^{-t}$.

Il est claire que r *est une fonction lipschitzienne,* f *est de classe* C^1*, par rapport à* x*, donc elle est localement lipschitzienne et comme la fonction* $\sin x$ *est bornée par* 1 *pour tout* x*, alors* f *est bornée par* 2*.De même* ϕ *est une fonction de classe* C^1 *et sa dérivée est bornée par* 1.

Alors toutes les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, donc cette équation, admet une solution unique.

Conclusion

Tout au long de ce travail, nous avons considéré des équations différentielles à retard. Notre but était de rappeler des définitions générales, des exemples ainsi que des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour ces équations à retard.

Après une introduction générale sur le sujet, dans le chapitre, bref aperçu historique sur la théorie des équations différentielles à retard notamment quelques notions de base et certaines résultats de la théorie d'existence et d'unicités des solutions. Dans le chapitre 2, nous avons étudié un cas particulier de ces équations pour un retard constant, suivi d'une méthode d'intégration connue sur le nom "Méthode des étapes" pour déterminer la solution.

Enfin, dans le dernier chapitre nous avons étudié les équations différentielles à retard dépendant de l'état, plus précisément, on a démontre l'existence et unicité de la solution d'une équation différentielle à retard dépendant de l'état en utilisant le théorème d'Ascoli et théorème de point fixe.

Bibliographie

[1] A. Bouakkaz, *Technique de points fixes et applications aux équations différentielles fonctionnelles non linéaires à retard.* Thèse en Mathématique. Université de Badji Mokhtar Annaba, 2018.

[2] J.K. Hal and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential eqautions.* Springer Science+ Business Media, New York 1993.

[3] Joan Gimeno I Alquézar, *On time Delay Differential Equations.* Université de Barcelona 2015.

[4] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Introduction to the theory and Applications of Functional Differential Equations.* Kluwer 1999.

[5] Y. Kung, *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics.* Academic Press 1993.

[6] M. Lakrib, *Strobocopie et moyennisation dans les équations différentielles fonctionelles à retard.* Thèse en Mathématiques, Université de Haut Alsace-Mulhouse, 2004.

[7] M. Yahiaoui Mohamed, *Les Equations différentielles à retard dépendant de l'état.* Thèse en Magistère, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, 2013.

[8] N. Yeganefar *Définitions et analyse de stabilité pour les systèmes à retard non linaire.* Thèse en en Mathématiques, Université des Sciences et Technologie de Lille, 2006.