

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



Mémoire

Présenté par

TEHAMI MOHAMED LAMINE  
MEGUELLATI RABEH

Pour l'obtention du diplôme de

**Master**

Filière : Mathématiques

Spécialité : Système Dynamique

---

Thème

**Résolution Numérique Des Problèmes Aux Limites, Équations  
Intégrales Et Intégro-Différentielles En Utilisant La Matrice De  
Gegenbauer**

---

Soutenu publiquement le Samedi 5 septembre 2020 devant le jury composé de

I.ADDOUNE	Président
GUECHI AHMED	Encadrant
H.BOUREMEL	Examineur

Promotion 2019/2020

---

# REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier infiniment notre cher encadreur *Mr. Ahmed Guechi* qui a nous orienté durant cette recherche, pour ces inestimables conseils et pour sa patience à notre égard, sans oublier nos familles, nos proches, les personnes qui nous ont aidé de près ou de loin.

Nous tenons également à remercier les membres de jurée d'avoir accepté d'apprécier notre travail.

Enfin, un grand merci à nos collègues de Faculté des *Mathématiques et de l'Informatique*.

---

# TABLE DES MATIÈRES

Liste des tableaux	iv
Table des figures	v
Liste des symboles et abréviations	vi
Introduction	vii
<b>1 Polynômes orthogonaux</b>	<b>1</b>
1.1 Polynômes de Legendre . . . . .	1
1.1.1 Propriétés de base . . . . .	1
1.1.2 Intégration de Gauss-Legendre . . . . .	2
1.1.3 Interpolation et approximation . . . . .	4
1.2 Polynôme de Tchebychev . . . . .	5
1.2.1 Propriétés de base . . . . .	5
1.2.2 Intégration de Gauss-Tchebychev . . . . .	7
1.2.3 Interpolation et approximation . . . . .	7
1.3 Polynômes de Gegenbauer . . . . .	8
1.3.1 Propriétés de base . . . . .	8
1.3.2 Intégration de Gauss-Gegenbauer . . . . .	9
1.3.3 Interpolation et approximation . . . . .	10
<b>2 Équations intégrales et problèmes aux limites (EDO)</b>	<b>12</b>
2.1 Classification des équations intégrales (EI) . . . . .	12
2.1.1 Équations intégrales de Fredholm . . . . .	12
2.1.2 Équations intégrales de Volterra . . . . .	13
2.1.3 Équations intégrales non linéaires de Volterra . . . . .	14
2.1.4 Équations Integro-Différentielles . . . . .	14
2.2 Équations différentielles ordinaires (EDO) . . . . .	15
2.3 Existence et unicité des solutions... . . . .	16
2.3.1 . . . de l'équation intégrale . . . . .	16
2.3.2 . . . de l'équation ordinaire . . . . .	17
2.4 Conversion d'PVI en équations de Volterra . . . . .	17
2.5 Conversion de PVB en équations de Fredholm . . . . .	19

---

<b>3</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>21</b>
3.1	Matrice d'intégrale de Gegenbauer . . . . .	21
3.2	Méthode de solution . . . . .	23
3.3	Résultats numériques . . . . .	25
	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>29</b>

---

# LISTE DES TABLEAUX

1.1	Erreur de troncature dans l'interpolation polynomiale pour l'exemple 1.1.4. . . . .	4
1.2	Erreur de troncature dans l'interpolation polynomiale pour l'exemple 1.2.5. . . . .	8
1.3	Erreur absolue varies $n$ pour l'exemple 1.3.2. . . . .	10
3.1	Resultats numériques obtenus pour l'exemple 3.3.1. . . . .	25
3.2	Resultats numériques obtenus pour l'exemple 3.3.2. . . . .	26
3.3	Resultats numériques obtenus pour l'exemple 3.3.3. . . . .	27

---

# TABLE DES FIGURES

1.1	Approximation par polynôme de Legendre . . . . .	5
1.2	Approximation par polynôme de Tchebychev . . . . .	8
1.3	Approximation par polynôme de Gegenbauer . . . . .	11
3.1	Resultats numériques obtenus pour l'exemple 3.3.1 . . . . .	25
3.2	Resultats numériques obtenus pour l'exemple 3.3.2 . . . . .	26
3.3	Resultats numériques obtenus pour l'exemple 3.3.3 . . . . .	27

---

# LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS

Le tableau ci-dessous est une courte liste de symboles et de notations utilisés dans cette mémoire

$\delta_{n,m}$	: La fonction delta de Kronecker défini par $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$
$E_n(x)$	: L'erreur d'approximation
$EI$	: Équation intégrale
$\mathbb{C}[-1, 1]$	: L'ensemble des fonctions continue sur $[-1, 1]$
EDO	: Équations différentielles ordinaires
$\mathbb{C}(E)$	: L'ensemble des fonctions continus
$\ \cdot\ _\infty$	: La norme définie par $\ f\ _\infty = \max_{x \in E}  f(x) $
$PVI$	: Problème de valeur initiale
$PVB$	: Problème de valeur aux limite
$MIG$	: Matrice d'intégrale de Gegenbauer
$MIHG$	: Matrice d'intégration hybride Gegenbauer
$EAMs$	: Les erreurs absolues maximales observées.

---

# INTRODUCTION

La découverte des équations différentielles remonte à l'invention du calcul et de l'intégration par le math Newton et Leibniz dans le deuxième chapitre de ses travaux en 1671, cette dernière se définit par la relation entre les fonctions et leurs dérivées. Dans les applications, les fonctions représentent généralement des grandeurs physiques et les dérivées représentent leurs taux de changement[3].

Les équations différentielles jouent un rôle primordiale dans des différentes disciplines telles que, la physique l'économie et ingénierie, c'est pourquoi les scientifiques et les chercheurs ont été intéressés par l'étude de leurs deux aspects ; théorique et analytique. Les études continues des équations a permis de découvrir un nouveau type des équations différentielles celles : des équations intégro-différentielles dans lequel la fonction inconnue apparait sous une forme intégrale.

Dans ce type de équations, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît d'un côté comme une dérivée ordinaire, et apparaît de l'autre côté sous le signe intégral[12, 14, 15]. Une grande recherche a été effectuée par les scientifiques *Volterra et Fredholm* en vue de montrer la relation entre des équations différentielles et comment convertir entre elles.

Parmi les plus importantes de ces théories traitant des équations différentielles : des méthodes d'intégration de Gauss à l'aide des polynômes orthogonaux et aussi l'interpolation et approximation.

Notre travaille est organisée de la manière suivante : Le premier chapitre concerne les notions de base des polynômes orthogonaux "Legendre, Tchebychev et Gegenbauer" d'une part, et l'intégration de Gauss. D'autre part, en s'appuyant sur des exemples *Gauss- Gegenbauer, Gauss-Tchebychev, Gauss-Legendre*.

Le deuxième chapitre prend en charge : la présentation théorique des : "Équations intégrales, intégro-différentielles et Équations différentielles ordinaires", les différentes normes de classification. Cette deuxième partie a été renforcée par les théorèmes de l'existence et l'unicité de solution (2.1, 2.16), arrivant enfin à expliquer comment convertir le problème de valeur initiale (PVI) en l'équation de Volterra intégrale et (PVB) en l'équation de Fredholm.

La troisième chapitre parle sur la résolution numérique des problèmes aux limites, équations intégrales et équations intégro-différentielles et en utilisant la matrice de Gegenbauer d'intégrale, à l'aide d'une matrice d'intégrale de Gegenbauer, afin de montrer les résultats numériques.



---

---

# CHAPITRE 1

---

## POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Les polynômes orthogonaux sont introduits par la théorie de Sturm-Liouville, puis les équivalences existantes entre leurs définitions classiques sont montrées. Certains résultats de base de la théorie sont ensuite décortiqués [14, 20].

### 1.1 Polynômes de Legendre

#### 1.1.1 Propriétés de base

On appelle polynômes de Legendre de degré  $n$ , les polynômes défini par la relation de récurrence

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x),$$

initialisée par,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2, \\ P_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2, \\ P_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, \\ P_5(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8, \end{aligned}$$

(1) Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

(2) Les polynômes de Legendre satisfont la relation de récurrence,

$$(1 - x^2)P'_n(x) = -nP_n(x) + nP_{n-1}(x).$$

(3) Formule de Rodrigues,

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n.$$

(4) Majorations

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \quad & |P_n(x)| \leq 1, \\ \forall x \in [-1, 1], \quad & |P'_n(x)| \leq \frac{n(n+1)}{2}, \\ \forall x \in [-1, 1], \quad & |P_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{8\pi n(1-x^2)}}, \\ \frac{1 - P_n^2(x)}{(2n-1)(n+1)} & \leq P_n^2(x) - P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq \frac{2n+1}{3n(n+1)}. \end{aligned}$$

(5) Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids,  $w(x) = 1$ , sur l'intervalle  $[-1, 1]$ ,

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm},$$

où  $\delta_{nm}$  est la fonction delta de Kronecker.

En particulier,  $P_n(1) = 1$  et

$$\|P_n\|_2 = \left( \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

(6) Les polynômes de Legendre vérifient la formule

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2^{2/3}}{2n+1}.$$

## 1.1.2 Intégration de Gauss-Legendre

### Quadratures de Gauss

Il est question de méthode de quadrature lorsqu'on veut approximer numériquement la valeur d'une intégrale. Une méthode très simple et bien connue s'appelle la méthode du trapèze.

On se propose d'évaluer l'intégrale  $\int_a^b f(x)w(x)dx$ , en subdivisant l'intervalle d'intégration régulier,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b,$$

et en approchant l'intégrale de  $f$  sur chaque intervalle par une somme finie de la forme,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N+1} \sum_{i=0}^N f(x_i).$$

Cette méthode requiert donc  $N$  évaluations de  $f(x)$  et est de degré de précision  $N$ , c'est-à-dire que la quadrature est exacte dans le cas des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$ . Cherchons maintenant à atteindre un degré de précision supérieur avec une méthode analogue

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^N \omega_i f(x_i).$$

Les  $\omega_i$  sont appelés poids d'intégration et les  $x_i$  points d'intégration. En prenant  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{b-a}{2}$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ , nous retrouvons la méthode du trapèze.

### Type de Gauss-Legendre quadrature

Les polynômes de Legendre forment une base orthogonale sur  $[-1, 1]$  par rapport à la fonction de pondération  $w(x) = 1$ . Les polynômes de Legendre permettent de calculer une approximation de l'intégrale :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + E_n(c),$$

l'erreur est donnée par [14]

$$E_n(c) = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(c), \quad \text{avec } c \in [-1, 1],$$

et  $\{x_i, \omega_i\}_{i=0}^N$  donnant dans le théorème suivant.

**Théorème 1.1.1 ([20])** Soit  $\{x_j, \omega_j\}_{j=0}^N$  un ensemble de noeuds et de poids en quadratures de type Gauss-Legendre. Donnée par :

$$\{x_j\}_{j=0}^N \text{ sont les zéros de } P_{N+1}(x), \quad (1.1)$$

$$\omega_j = \frac{2}{(1-x_j^2)[P'_{N+1}(x_j)]^2}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (1.2)$$

**Remarque 1.1.2** Pour les intégrales définies sur  $[a, b]$  comme  $I_a^b(f) = \int_a^b f(y)dy$ . En utilisant le changement suivant  $y = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ , c-à-d

$$I_a^b(f) = \int_a^b f(y)dy = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{j=0}^n \frac{1}{w(x_j)} f\left(\frac{b-a}{2}x_j + \frac{b+a}{2}\right) \omega_j,$$

où la fonction  $w$  est une fonction de poids associée la base utilisée.

**Exemple 1.1.3** Pour  $N = 2$ , le polynôme de la troisième degré  $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$ , admet trois racines  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -\sqrt{3}/5$ ,  $x_2 = \sqrt{3}/5$ . Les valeurs  $\omega_0 = 8/9$  et  $\omega_1 = \omega_2 = 5/9$  donc

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{5}{9}(f(-\sqrt{3}/5) + f(\sqrt{3}/5)) + \frac{8}{9}f(0)$$

On prend  $f(x) = \sin(x^2)$ , alors :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx 0.627380525994484.$$

**Exemple 1.1.4** Considéré les intégrales suivantes :

$$(i) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad (ii) \int_0^5 \operatorname{atan}(x) dx, \quad (iii) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx.$$

Le tableau 1.1, nous donnons des erreurs absolues entre la valeur exacte et approchée de l'intégral.

$n$	4	8	16	32
$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$	1.08E-004	7.20E-008	4.02E-014	6.66E-016
$\int_{-1}^5 atan(x) dx$	4.42E-004	3.11E-006	5.15E-011	6.22E-015
$\int_{-\pi}^0 \cos(x) dx$	1.94E-004	4.50E-012	6.21E-016	3.48E-015

TABLE 1.1 – Erreur absolue varius  $n$  pour l'exemple 1.1.4.

### 1.1.3 Interpolation et approximation

Le problème fondamental de l'interpolation consiste à approximer la fonction donnée  $f$  par une autre fonction  $f_n$ ,

$$f(x) = f_n(x) + E_n(x), \quad (1.3)$$

où  $E_n(x)$  est l'erreur d'approximation ou l'erreur de troncature, et donné par [1]

$$E_n(x) = \frac{\prod_{j=0}^n (x - a_j)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \quad (1.4)$$

De plus, la fonction d'interpolation doit correspondre à la fonction donnée à un ensemble spécifié de points  $a_j$ , ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), c'est-à-dire

$$f(a_j) = g(a_j), \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Cet ensemble de points sera appelé points d'interpolations ou abscisses.

**Exemple 1.1.5** Soit  $g(x) = \cos(x) \exp(x)$ , donnée  $g$  par une autre fonction  $g_n$  pour  $n = 4$ , on peut approximer la fonction  $g(x)$  par la série :  $g(x) \approx g_n(x) = \sum_{i=0}^4 a_i P_i(x)$  tel que,

$i$	0	1	2	3	4
$a_i$	0.95	0.72	-0.14	-0.20	-0.05

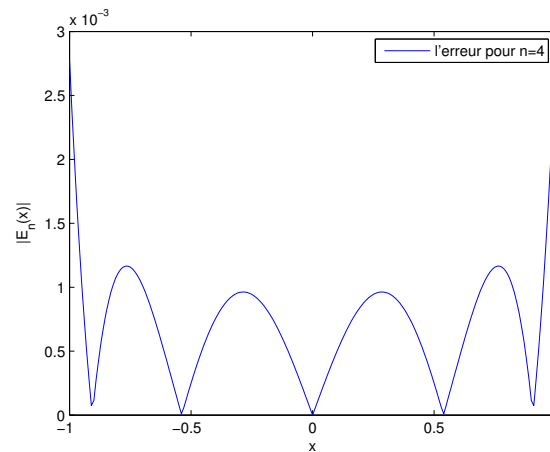
donc

$$\begin{aligned} g(x) &\approx 0.95 + 0.72x - 0.14\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - 0.20\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) - 0.05\left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}\right) \\ &\approx -0.21875x^4 - 0.5x^3 - 0.0225x^2 + 1.02x + 1.0013. \end{aligned}$$

De plus, l'erreur d'approximation  $E_n(x)$  est égale :

$$E_4(x) = \frac{\prod_{j=0}^4 (x - a_j)}{(5)!} f^{(5)}(c), \quad -1 \leq c \leq 1, \quad (1.6)$$

la figure suivante représente la trace de la fonction  $|E_n(x)|$  pour  $n = 4$  et  $c = 0.25$

FIGURE 1.1 – L'erreur d'approximation (1.6) pour  $n=4$ .

## 1.2 Polynôme de Tchebychev

### 1.2.1 Propriétés de base

Les polynômes de Tchebychev (de première espèce) d'ordre  $n$ , sont définie par la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

et les conditions d'initialisation

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Les premier polynômes sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1. \end{aligned}$$

(1) Le polynôme  $T_n$  peut être définie par la relation

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta),$$

ou bien encore par la relation

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left( \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right),$$

$T_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$  dont le coefficient de plus haut degré est  $2^{n-1}$  vérifiant

$$T_n(1) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ces polynômes vérifient la relation

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

(2) Les polynômes de Tchebychev sont solutions de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

(3) Les polynômes de Tchebychev satisfont la relation de récurrence

$$(1 - x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x).$$

(4) Pour  $i = 0, \dots, n$  la relation du produit de deux polynômes

$$T_i(x)T_n(x) = T_{n+i}(x) + T_{n-i}(x).$$

(5) Majorations

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \quad |T_n(x)| &\leq 1, \\ \forall x \in [-1, 1], \quad \left| \frac{dT_n(x)}{dx} \right| &\leq n^2. \end{aligned}$$

(6) Les polynômes de Tchebychev sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids définie sur l'intervalle  $[-1, 1]$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

(7) Si  $v$  désigne la partie entière de  $n/2$ , les polynômes s'expriment en fonction des polynômes de Tchebychev

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ T_n + C_n^1 T_{n-2} + \dots + C_n^{v-1} T_{n+2-2v} + C_n^v T_{n-2v} \left( \frac{3 - (-1)^n}{4} \right) \right].$$

(8) Entre les abscisses

$$x_k^+ = \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right),$$

pour lesquelles  $T_n(x_k^+) = +1$  et les abscisses

$$x_k^- = \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{n} \right),$$

pour lesquelles  $T_n(x_k^-) = -1$ , le polynôme de Tchebychev de degré  $n$  admet exactement  $n$  racines réelles données par

$$\cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

### 1.2.2 Intégration de Gauss-Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev forment une base orthogonale sur  $[-1, 1]$  par rapport à la fonction de pondération  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Les polynômes de Tchebychev permettent de calculer une approximation de l'intégrale :

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + E_n(c),$$

l'erreur est donnée par [14, 16]

$$E_n(c) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 w(x) T_{n+1}^2(x) dx = \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c), \text{ avec } c \in [-1, 1],$$

tel que  $\{x_i, \omega_i\}_{i=0}^N$  donnant dans le théorème suivant.

**Théorème 1.2.1 ([20])** Soit  $\{x_j, \omega_j\}_{j=0}^N$  un ensemble de noeuds et de poids en quadratures de type Gauss-Tchebychev. Les zéros et les poids donnée par :

$$x_j = -\cos \frac{(2j+1)\pi}{2N+2}, \quad \omega_j = \frac{\pi}{N+1}; \quad 0 \leq j \leq N \quad (1.7)$$

**Exemple 1.2.2** Pour  $n = 2$ , le polynôme de la troisième degré  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ , admet trois racines  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -\sqrt{3}/2$ ,  $x_2 = \sqrt{3}/2$ . Les valeurs  $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \pi/3$

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \simeq \frac{\pi}{3} (f(0) + f(-\sqrt{3}/2) + f(\sqrt{3}/2))$$

On prend  $f(x) = \sin(x^2)$ , alors :

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 1.427620880594241.$$

### 1.2.3 Interpolation et approximation

Soit  $\{x_j, w_j\}_{j=0}^n$  l'ensemble des zéros et les poids de Gauss-Tchebychev, on définit le produit scalaire et la norme comme

$$\langle u, v \rangle_{n,\omega} := \sum_{j=0}^n u(x_j) v(x_j) \omega_j, \quad \|u\|_{n,\omega} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{n,\omega}}. \quad (1.8)$$

**Définition 1.2.3** Soit  $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$ , la définition de l'opérateur d'interpolation  $\mathcal{I}_n : \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow P_n$ , tel que

$$(\mathcal{I}_n f)(x_j) = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (1.9)$$

**Théorème 1.2.4** Pour l'approximation par les polynômes de Tchebychev on a

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(x),$$

tel que

$$a_0 \approx \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j), \text{ et } a_i \approx \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) T_i(x_j), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.10)$$

**Exemple 1.2.5** Considérez l'approximation des fonctions suivantes sur l'intervalle  $[-1, 1]$  :

$$(i) x^5 - 2x + 1, \quad (ii) \sin(x), \quad (iii) \frac{1}{1+x^2}, \quad (iv) \sqrt{|x|}.$$

Dans le tableau 1.2, nous donnons des erreurs absolues maximales à 100 points sélectionnés également espacés sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . L'erreur est calculée en comparant la valeur interpolée à la valeur exacte.

$n$	$x^5 - 2x + 1$	$\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{ x }$
4	6.25E-02	5.04E-04	1.22E-02	3.34E-01
8	8.88E-16	1.05E-08	3.59E-04	2.47E-02
16	1.78E-15	6.66E-16	3.11E-07	1.80E-02
32	1.78E-15	9.99E-16	2.34E-13	1.28E-02

TABLE 1.2 – Erreur de troncature dans l'interpolation polynomiale pour l'exemple 1.2.5.

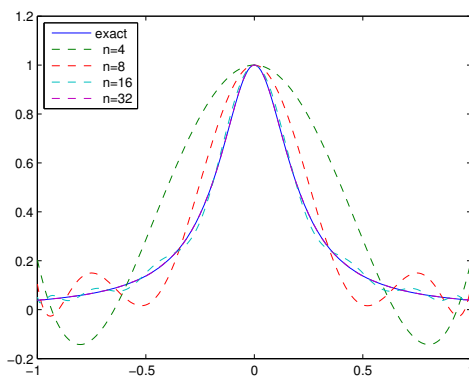


FIGURE 1.2 – La fonction  $f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$  et les polynômes d'interpolation utilisant 4, 8, 16 et 32 points sont affichés en fonction de  $x$ , pour les point de Gauss Tchebychev.

## 1.3 Polynômes de Gegenbauer

### 1.3.1 Propriétés de base

Les polynômes de Gegenbauer  $G_n^{(\alpha)}$  de degré  $n$ , sont les polynômes définis par la relation de récurrence pour  $\alpha > -1/2$ ,

$$(n+1)G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = 2(n+\alpha)xG_n^{(\alpha)}(x) - (n+2\alpha-1)G_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (1.11)$$

et les conditions d'initialisation

$$G_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad G_1^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} 2\alpha x & \text{si } \alpha \neq 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ou on les définis par la relation de récurrence [9, 4],

$$(n+2\alpha)G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = 2(n+\alpha)xG_n^{(\alpha)}(x) - nG_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (1.12)$$



La formule de récurrence (1.12) peut être utilisée pour générer les polynômes ultrasphériques commençant par  $G_0^{(\alpha)}(x) = 1$ , et  $G_1^{(\alpha)}(x) = x$ , (voir Doha [4]).

Dans cette chapitre on utilisé la formule (1.11). Les premiers polynômes pour  $\alpha = 1$  sont :

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1, \\ G_1(x) &= 2x, \\ G_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ G_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ G_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ G_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x, \\ G_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1. \end{aligned}$$

(1) Les polynômes de Gegenbauer sont solutions de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - (2\alpha + 1)xy' + n(n + 2\alpha)y = 0.$$

(2) Les polynômes de Gegenbauer vérifient les relations de récurrence

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \frac{dG_n^{(\alpha)}}{dx}(x) &= -nxG_n^{(\alpha)}(x) + (n + 2\alpha - 1)G_{n-1}^{(\alpha)}(x), \\ (n + \alpha)G_{n+1}^{(\alpha)}(x) &= (\alpha - 1) \left( G_{n+1}^{(\alpha)}(x) - G_{n-1}^{(\alpha)}(x) \right). \end{aligned}$$

(3) Formule de Rodrigues

$$(1 - x^2)^{\alpha-1/2} G_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + 1/2) \Gamma(n + 2\alpha)}{2^n n! \Gamma(2\alpha) \Gamma(\alpha + n + 1/2)} \frac{d^n}{dx^n} \left( (1 - x^2)^{\alpha+n-1/2} \right).$$

(4) Les polynômes de Gegenbauer sont des polynômes orthogonaux sur l'intervalle  $[-1, 1]$  relativement à la fonction de poids  $w(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}$ , on a si  $\alpha \neq 0$

$$\int_{-1}^{+1} G_n^{(\alpha)}(x) G_m^{(\alpha)}(x) (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx = \frac{2^{2\alpha-1} \pi}{n!(n + \alpha)} \frac{\Gamma(n + 2\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2} \delta_{n,m},$$

et si  $\alpha = 0$

$$\int_{-1}^{+1} G_n^{(0)}(x) G_m^{(0)}(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx = \frac{2\pi}{n^2} \delta_{n,m}.$$

(5) Formule d'intégration

$$\frac{n(2\alpha + n)}{2\alpha} \int_0^x G_n^{(\alpha)}(t) (1 - t^2)^{\alpha-1/2} dt = G_{n-1}^{(\alpha+1)}(0) - (1 - x^2)^{\alpha+1/2} G_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

### 1.3.2 Intégration de Gauss-Gegenbauer

Les polynômes de Gegenbauer permettent de calculer une approximation de l'intégrale :

$$\int_{-1}^1 p(x) \omega^\alpha(x) dx = \sum_{j=0}^N p(x_j) \omega_j + E_N[p]. \quad (1.13)$$

Rappelons que si l'erreur de quadrature  $E_N[p] = 0$ , on dit que (1.13) est exacte pour  $p$ . tel que  $\{x_j, \omega_j\}$  donnant dans le théorème suivant.

**Théorème 1.3.1 (Gauss-Gegenbauer [20])** *La formule de quadrature GG (1.13) est exact pour tout  $p \in P_{2N+1}$  avec les noeuds GG. La  $\{x_j\}_{j=0}^N$  étant les zéros de  $G_{N+1}^\alpha(x)$  et les poids correspondants donnés par*

$$\omega_j = \frac{\gamma_N^\alpha}{G_N^\alpha(x) \partial_x G_{N+1}^\alpha(x_j)} \quad (1.14)$$

$$= \frac{\tilde{\gamma}_N^\alpha}{(1-x_j^2)[\partial_x G_{N+1}^\alpha(x_j)]^2}, \quad (1.15)$$

où

$$\gamma_N^\alpha = \frac{2^{2\alpha}(N+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(N+\alpha+\frac{1}{2})^2}{(N+1)!\Gamma(N+2\alpha+1)}, \quad (1.16)$$

$$\tilde{\gamma}_N^\alpha = \frac{2^{2\alpha}\Gamma(N+\alpha+\frac{3}{2})^2}{(N+1)!\Gamma(N+2\alpha+1)}. \quad (1.17)$$

**Exemple 1.3.2** *Considérez l'intégrale suivante :*

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^{1/4}} dx$$

Le tableau 1.3, nous donnons des erreurs absolues entre la valeur exacte et approchée de l'intégral.

$n$	$\alpha$				
	-0.25	0	0.25	0.5	1
10	0.0792	0.0374	3.1086e-015	0.0371	0.116
20	0.0294	0.0141	0	0.0145	0.0449
30	0.0163	0.0079	1.7764e-015	0.0082	0.0256
40	0.0107	0.0052	4.4409e-016	0.0054	0.0170

TABLE 1.3 – Calculez l'erreur absolue d'intégration en changeant  $n = 10, 20, 30, 40$  et  $\alpha = -0.25, 0, 0.25, 0.5, 1$  à partir de l'exemple 1.3.2.

### 1.3.3 Interpolation et approximation

Dans une méthode spectrale typique approximant une fonction  $f \in C^\infty[-1, 1]$  en utilisant les polynômes de Gegenbauer, la fonction  $f(x)$  est approximée par une série d'expansion de Gegenbauer tronquée comme suit :

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^N a_k G_k^{(\alpha)}(x), \quad (1.18)$$

où  $a_k$  sont les coefficients de Gegenbauer.

**Théorème 1.3.3 (Erreur de troncature [10])** *Soit  $f \in C^\infty[-1, 1]$  approximé par la série d'expansion de Gegenbauer (1.18), puis pour chaque  $x \in [-1, 1]$ , un nombre  $c \in [-1, 1]$  existe tel que l'erreur de troncature  $E_N(x, c, \alpha)$  est donnée par*

$$E_N(x, c, \alpha) = \frac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!K_{N+1}^\alpha} G_{N+1}^\alpha(x), \quad (1.19)$$

où

$$K_{N+1}^\alpha = 2^N \frac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}. \quad (1.20)$$

**Exemple 1.3.4** Considéré l'approximation de la fonctions suivante sur l'intervalle  $[-1, 1]$  :

$$f(x) = \sin(x)\exp(-x^5).$$

La figure suivante (1.3) donne les résultats de l'erreur infini ( $\log_{10} \|f - f_n\|_{\infty}$ ) d'approximation de la fonction  $f$ , avec le changement des valeurs de  $n$  et des valeurs de  $\alpha$ .

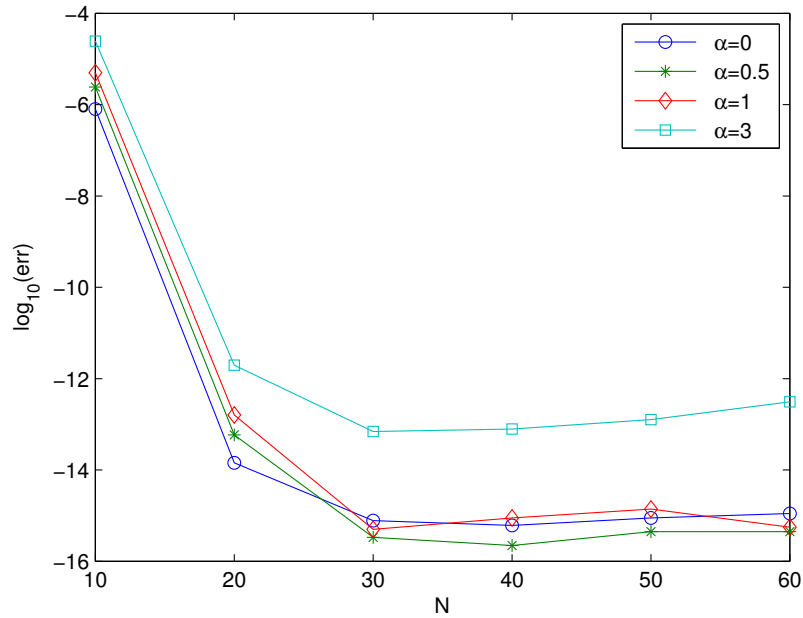


FIGURE 1.3 – l'erreur infini d'approximation de la fonction  $f$ , pour  $n = 10, 20, 30, 40, 50$  et  $\alpha = 0, 0.5, 1, 3$ .

---

---

# CHAPITRE 2

---

## ÉQUATIONS INTÉGRALES ET PROBLÈMES AUX LIMITES (EDO)

Dans ce chapitre, on prend en charge la présentation théorique des : "Équations intégrales, intégral-différentielles et Équations différentielles ordinaires", les différentes normes de classification. Cette deuxième partie a été renforcée par les théorèmes de l'existence et l'unicité de solution (2.1, 2.16), arrivant enfin à expliquer comment convertir le problème de valeur initiale (PVI) en l'équation de Volterra intégrale et (PVB) en l'équation de Fredholm.

### 2.1 Classification des équations intégrales (EI)

Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue à déterminer  $u(x)$  apparaît sous le signe intégrale. La forme d'un équation intégral linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t)u(t)dt, \quad (2.1)$$

où  $K(x, t)$  appelé le noyau de l'équation intégrale, et  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sont les limites de l'intégration. Dans (2.1), on observe facilement que la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît sous le signe intégrale comme indiqué ci-dessus, et hors du signe intégral dans la plus part des autres cas comme être discuté plus tard. Il est important de souligner que le noyau  $K(x, t)$  et la fonction  $f(x)$  dans (2.1) sont donnés à l'avance. Si  $f(x) = 0$  dans (2.1), l'équation résultante est appelée équation intégrale homogène ou non homogène.

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées relèvent de deux classes principales, à savoir Fredholm et les équations intégrales de Volterra. Dans ce qui suit, nous décrivons les définitions et propriétés de base de chaque type.

#### 2.1.1 Équations intégrales de Fredholm

##### Équations intégrales linéaires de Fredholm

La forme standard des équations intégrales linéaires de Fredholm où les limites de l'intégration  $a$  et  $b$  sont des constantes, sont données par la forme :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad (2.2)$$

où le noyau de l'équation intégrale  $K(x, t)$  et la fonction  $f(x)$  sont données à l'avance, et  $\lambda$  est un paramètre. l'équation (2.2) est appelée linéaire car la fonction inconnue  $u(x)$  sous le signe intégral se produit linéairement, c'est-à-dire que la puissance de  $u(x)$  est égale à un. La valeur de  $\phi(x)$  donnera les types d'équations intégrales linéaires de Fredholm suivants :

- Lorsque  $\phi(x) = 0$ , l'équation (2.2) devient

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = 0, \quad (2.3)$$

est connu sous le nom d'équation intégrale linéaire de Fredholm de premier type.

- Lorsque  $\phi(x) = 1$ , l'équation (2.2) devient

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad (2.4)$$

et l'équation intégrale est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième type. En fait, l'équation (2.4) peut être obtenue à partir de (2.2) en divisant les deux côtés de (2.2) par  $\phi(x)$  à condition que  $\phi(x) \neq 0$ .

### Équations intégrales non linéaires de Fredholm

- Du premier type

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, u(t))dt. \quad (2.5)$$

- Du Deuxième type

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, u(t))dt. \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Équations intégrales de Volterra

#### Équations intégrales linéaires de Volterra

la forme standard des équations intégrales linéaires de Volterra, où les limites de l'intégration sont des fonctions de  $x$  plutôt que des constantes, sont de la forme

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt, \quad (2.7)$$

où la fonction inconnue  $u(x)$  sous le signe intégral se produit linéairement comme indiqué précédemment. Il convient de noter que (2.7) peut être considéré comme un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm lorsque le noyau  $K(x, t)$  disparaît pour  $t > x$ ,  $x$  est dans la plage d'intégration  $[a, b]$ . Comme dans les équations de Fredholm, les équations intégrales de Volterra se divisent en deux types, selon sur la valeur de  $\phi(x)$ , à savoir :

- Lorsque  $\phi(x) = 0$ , l'équation (2.7) devient

$$f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt = 0, \quad (2.8)$$

et dans ce cas, l'équation intégrale est appelée équation intégrale de Volterra du premier espèce.

- Lorsque  $\phi(x) = 1$ , l'équation (2.5) devient

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt, \quad (2.9)$$

et dans ce cas, l'équation intégrale est appelée équation intégrale de Volterra du deuxième type.

### 2.1.3 Équations intégrales non linéaires de Volterra

- Du premier type

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t, u(t))dt. \quad (2.10)$$

- Du Deuxième type

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t))dt. \quad (2.11)$$

### 2.1.4 Équations Integro-Différentielles

Volterra, au début des années 1900, a étudié la croissance de la population, où un nouveau type d'équations ont été développés et ont été appelés équations integro-différentielles. Dans ce type de équations, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît d'un côté comme une dérivée ordinaire, et apparaît de l'autre côté sous le signe intégral. Plusieurs phénomènes en physique et biologie. [12, 14, 15] donne naissance à ce type d'équations integro-différentielles.

Une source rapide d'integro-différentielle les équations peuvent être clairement vues lorsque nous convertissons l'équation différentielle en une intégrale équation en utilisant la règle de Leibnitz. L'équation integro-différentielle peut être visualisée dans ce cas comme étape intermédiaire lors de la recherche d'une intégrale Volterra équivalente équation à l'équation différentielle donnée. Voici des exemples d'équations intégrales différentielles linéaires :

$$u'(x) = f(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0. \quad (2.12)$$

$$u'(x) = g(x) + \int_0^x xtu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = -1. \quad (2.13)$$

$$u'(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad u(0) = 0. \quad (2.14)$$

$$u''(x) = h(x) + \int_0^x tu'(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \quad (2.15)$$

Il ressort clairement des exemples ci-dessus que la fonction inconnue  $u(x)$  ou l'un de ses dérivés apparaît sous le signe intégral, et les autres dérivés apparaissent également le signe intégral. Ces exemples peuvent être classés comme équations integro-différentielles de Volterra et Fredholm. Équations (2.12) et (2.13) sont de type Volterra alors que les équations (2.14) et (2.15) sont de type Fredholm équations integro-différentielles. Il est à noter que ces équations sont linéaires équations integro-différentielles. Cependant, les équations integro-différentielles non linéaires se posent également dans de nombreux problèmes scientifiques et techniques.

### Équations intégro-différentielles de Fredholm

Les équations intégrales différentielles de Fredholm apparaissent lorsque nous convertissons les équations différentielles en équations intégrales. L'équation intégro-différentielle de Fredholm contient la fonction inconnue  $u(x)$  et une de ses dérivées  $u^{(n)}(x)$ ,  $n \geq 1$  à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral respectivement. Les limites de l'intégration dans ce cas sont fixées comme dans l'intégrale de Fredholm équations. L'équation est étiquetée comme intégro-différentielle car elle contient différentielle et les opérateurs intégraux dans la même équation. Il est important de noter que les conditions initiales doit être donnée pour les équations intégro-différentielles de Fredholm pour obtenir les solutions particulières. L'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

où  $u^{(n)}$  indique la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $u(x)$ . D'autres dérivés de moindre ordre peuvent apparaître avec  $u^{(n)}$  sur le côté gauche.

### Équations intégro-différentielles de Volterra

Les équations intégro-différentielles de Volterra apparaissent lorsque nous convertissons les problèmes de valeur initiale en intégrale équations. L'équation intégro-différentielle de Volterra contient la fonction inconnue  $u(x)$  et l'un de ses dérivés  $u^{(n)}(x)$ ,  $n \geq 1$  à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Au moins l'une des limites de l'intégration dans ce cas est une variable comme dans les équations intégrales de Volterra. l'équation est appelée intégro-différentielle parce que les opérateurs différentiels et intégraux sont impliqués dans la même équation. Il est important de noter que les conditions initiales être donnée pour les équations intégro-différentielles de Volterra pour déterminer les solutions particulières. L'équation intégro-différentielle de Volterra apparaît sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt,$$

où  $u^{(n)}$  indique la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $u(x)$ . D'autres dérivés de moindre ordre peuvent apparaître avec  $u^{(n)}$  sur le côté gauche.

## 2.2 Équations différentielles ordinaires (EDO)

Qu'est-ce que c'est une équation différentielle ordinaire ? C'est une équation définie en termes d'une variable  $t \in I$ ,  $I$  intervalle réel, une fonction inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et ses dérivées par rapport à  $t$ . En formule :

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots). \quad (2.16)$$

Une fonction  $y$  qui vérifie  $F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots) = 0$  s'appelle solution de l'EDO. Une EDO est d'ordre  $k$  si elle contient les dérivées de jusqu'à l'ordre  $k$ .

**Définition 2.2.1 (Problèmes aux valeurs initiales)** Soit le EDO, sous une forme résolue en  $y_x^{(n)}$

$$y_x^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.17)$$

La solution générale de l'équation 2.17, dépend de  $n$  constantes arbitraires :  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , telle que :

$$y = G(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Le problème de Cauchy consiste à trouver la solution de l'équation 2.17 avec les conditions initiales suivantes :

$$y(t_0) = y_0, \quad y'_t(t_0) = y_0^{(1)}, \quad \dots, \quad y_t^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

**Définition 2.2.2 (Problèmes aux limites)** Soit le EDO sous forme canonique résolue en  $y_x^{(n)}$

$$y_x^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.18)$$

Le problème aux limites à trouver pour chaque  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$ , la solution de l'équation 2.18 avec les conditions aux bornes suivantes :

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1, \quad \dots, \quad y(t_{n-1}) = y_{n-1}.$$

## 2.3 Existence et unicité des solutions d' EI et EDO

### 2.3.1 Existence et unicité des solutions de l'équation intégrale

**Théorème 2.3.1** Soit  $E$  un espace topologique compact. Un sous-ensemble  $G$  de  $C(E)$  est relativement compact si et seulement si,  $G$  est un borné et équi-continu. On dit, si il existe un constant  $M$  tel que

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in E \quad \text{et} \quad \forall f \in G.$$

De plus,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que ;  $\forall f \in G$ , on a

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in E,$$

avec  $|x - y| < \delta$ .

L'ensemble  $C(E)$  désigner l'espace des fonctions définis et continus dans l'ensemble compact  $E \subset \mathbb{R}^n$ , avec muni de la norme maximum

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in E} |f(x)|.$$

**Théorème 2.3.2 (Alternative de Fredholm)** On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autre issues d'une noyau  $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , qui sont donc définies par

$$\text{Trouver } \varphi \in C[a, b] \quad \text{tel que} \quad \varphi(x) - \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (2.19)$$

$$\text{Trouver } \psi \in C[a, b] \quad \text{tel que} \quad \psi(x) - \int_a^b K(x, t)\psi(t)dt = 0. \quad (2.20)$$

On considère pour  $f \in C[a, b]$  et  $g \in C[a, b]$  les équations intégrales avec secondes membres

$$\text{Trouver } \varphi \in C[a, b] \quad \text{tel que} \quad \varphi(x) - \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.21)$$

$$\text{Trouver } \psi \in C[a, b] \quad \text{tel que} \quad \psi(x) - \int_a^b K(x, t)\psi(t)dt = g(x). \quad (2.22)$$

Alors on a l'alternative :

1. Les équations (2.19) et (2.20) n'ont que les solutions triviales  $\varphi \equiv 0$  et  $\psi \equiv 0$ , et dans ces cas les équations (2.21) et (2.22) admettent une solution unique  $\varphi \in C[a, b]$  et  $\psi \in C[a, b]$  pour chaque  $f \in C[a, b]$  et  $g \in C[a, b]$ .



2. Les équation (2.19) et (2.20) ont le même nombre fini  $m$  de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (2.21) et (2.22) sont résolubles si et seulement si pour toute solution  $\varphi$  de (2.19) et toute solution de (2.20) on a

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = \int_a^b g(x)\phi(x)dx = 0. \quad (2.23)$$

Dans ces conditions, la solution générale de (2.21) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i, \quad (2.24)$$

où  $\tilde{\varphi}$  est une solution particulière de (2.21) et les  $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}$  forme une famille libre de solution de (2.19).

### 2.3.2 Existence et unicité des solutions de l'équation différentielle ordinaire

Soit  $I$  un intervalle  $f : I * \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  On considère l'EDO :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Pour choisir une solution particulière de cette problème on impose une condition initiale, c'est à dire :

$$y(t_0) = y_0$$

Pour étudier l'existence de l'unicité de la solution des EDOs, il est nécessaire d'utiliser certains des concepts et théories suivants :

**Définition 2.3.3 (Fonction localement lipschitzienne)** Soient  $I$  un intervalle,  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : I * D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soient  $(t_0, y_0) \in I * D$  Soit  $J \subset D$  un voisinage du point  $y_0$ . On dit que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la variable  $y$  dans le voisinage  $J$  si il existe une constante  $L > 0$  et il existe un voisinage  $U \subset I$  du point  $t_0$  tels que :

$$\|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| \leq L \|y_1(t) - y_2(t)\|,$$

pour  $y_1(t), y_2(t) \in J, t \in U$ .

**Théorème 2.3.4 (Cauchy-Lipschitz)** Soient  $I$  un intervalle,  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : I * D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soient  $(t_0, y_0) \in I * D$ . Si  $f$  est continue et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable dans un voisinage du point  $y_0$ , alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 & t_0 \in I, y_0 \in D \end{cases}$$

admet une unique solution  $\bar{y}$  définie dans un petit voisinage du point  $t_0$ . De plus la solution est de classe  $C^1$  dans ce voisinage.

## 2.4 Conversion d'PVI en équations de Volterra

Dans cette section, nous étudierons comment convertir le problème de valeur initiale (PVI) en l'équation de Volterra intégrale équivalente [18]. Avant de spécifier la méthode souhaitée, On nous rappelle la formule de conversion utile ; Il est dans le lemme suivant :

**Lemme 2.4.1** Pour toute fonction  $u(x)$ ,

$$\int_a^x \int_a^s u(t) dt ds = \int_a^x (x-t)u(t) dt. \quad (2.25)$$

En général, on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{i-1}} u(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x_1)^{n-1} u(x_1) dx_1. \quad (2.26)$$

**Preuve.** Soit  $g(x) = \int_a^x u(t) dt$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^s u(t) dt ds &= \int_a^x g(s) ds = \int_a^x 1 \cdot g(s) ds \\ &= [sg(s)]_a^x - \int_a^x sg'(s) ds \quad (\text{intégration par parties}) \\ &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x su(s) ds \\ &= x \int_a^x u(t) dt - 0 - \int_a^x tu(t) dt = \int_a^x (x-t)u(t) dt \end{aligned}$$

■

Nous appliquons cette technique à un problème de valeur initiale de second ordre donné par :

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = f(x), \quad (2.27)$$

aux conditions initiales

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \beta.$$

On pose

$$y''(x) = u(x) \quad (2.28)$$

où  $u(x)$  est une fonction continue sur l'intervalle de discussion. Cela peut être simplement réalisé en intégrant les deux côtés de (2.28) de  $a$  à  $x$  où l'on trouve :

$$y'(x) = \beta + \int_a^x u(t) dt \quad (2.29)$$

L'intégration des deux côtés de (2.29) de  $a$  à  $x$  donne

$$y(x) = \alpha + \beta(x-a) + \int_a^x \int_a^s u(t) dt ds. \quad (2.30)$$

En utilisant les formules de conversion (2.25), nous obtenons

$$y(x) = \alpha + \beta(x-a) + \int_a^x (x-t)u(t) dt. \quad (2.31)$$

La substitution de (2.28), (2.29) et (2.31) en (2.27) conduit à l'équation intégrale de Volterra du deuxième espèce :

$$u(x) = F(x) + \int_a^x K(x,t)u(t) dt, \quad (2.32)$$

tel que

$$K(x,t) = -P(x) - Q(x)(x-t),$$

et

$$F(x) = f(x) - \beta P(x) - (\alpha + \beta(x-a))Q(x).$$

**Exemple 2.4.2** Nous voulons dériver l'équation d'équivalence intégrale de Volterra le problème de valeur initiale suivant

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad \text{avec } y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (2.33)$$

où

$$P(x) = 5, \quad Q(x) = 6, \quad f(x) = 0, \quad a = 0, \quad \alpha = \beta = 1.$$

En intégrant deux fois le problème (2.33) de  $a$  à  $x$ , et en utilisant la relation (2.25), on obtient

$$u(x) = -6x - 11 + \int_0^x (6t - 6x - 5)u(t)dt, \quad (2.34)$$

C'est l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

## 2.5 Conversion de PVB en équations de Fredholm

Nous présentons dans cette section comment une frontière problème de valeur (PVB) peut être converti en une équation intégrale de Fredholm équivalente.

La méthode est similaire à celle discutée dans la section précédente à quelques exceptions près qui sont liés aux conditions aux limites. Il est à noter ici que la méthode de réduire un PVB à une équation intégrale de Fredholm est compliqué et rarement utilisé.

Nous démontrons cette méthode avec une illustration.

**Exemple 2.5.1** Considérons l'équation différentiel ordinaire de second ordre suivant avec la donnée conditions aux limites.

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = f(x), \quad (2.35)$$

avec les conditions aux limites

$$x = a : y(a) = \alpha, \quad x = b : y(b) = \beta, \quad (2.36)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  reçoivent des constantes. Faisons la transformation

$$y''(x) = u(x). \quad (2.37)$$

L'intégration des deux côtés de l'équation (2.37) de  $a$  à  $x$  donne

$$y'(x) = y'(a) + \int_a^x u(t)dt. \quad (2.38)$$

Notez que  $y'(a)$  n'est pas encore prescrit. Intégration des deux côtés de l'équation (2.38) avec par rapport à  $x$  de  $a$  à  $x$  et en appliquant la condition aux limites donnée à  $x = a$ , nous trouvons

$$y(x) = y(a) + (x - a)y'(a) + \int_a^x \int_a^x u(t)dtu(t)dt = \alpha + (x - a)y'(a) + \int_a^x \int_a^x u(t)dtu(t)dt \quad (2.39)$$

et en utilisant la condition aux limites à  $x = b$  donne

$$y(b) = \beta = \alpha + (b - a)y'(a) + \int_a^b \int_a^b u(t)dttdt$$

et la constante inconnue  $y'(a)$  est déterminée comme

$$y'(a) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_a^b u(t)dttdt \quad (2.40)$$

La solution (2.39) peut donc être réécrite

$$y(x) = \alpha + (x - a) \left( \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_a^b u(t) dt dt \right) + \int_a^x \int_a^x u(t) dt dt \quad (2.41)$$

Par conséquent, l'équation (2.35) peut être écrite en termes de  $u(x)$  comme

$$u(x) = f(x) - P(x) \left( y'(a) + \int_a^x u(t) dt \right) - Q(x) \left( \alpha + (x - a)y'(a) + \int_a^x \int_a^x u(t) dt dt \right) \quad (2.42)$$

où  $u(x) = y(x)$  et donc  $y(x)$  peut être déterminé, en principe, à partir de l'équation (2.41). C'est compliqué procédure pour déterminer la solution d'un PVB par équivalent Équation intégrale de Fredholm.

---



---

## CHAPITRE 3

---

# RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES PROBLÈMES AUX LIMITES, ÉQUATIONS INTÉGRALES ET INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES

### 3.1 Matrice d'intégrale de Gegenbauer

L'intégration de la fonction  $f(x)$  est approximée en intégrant le fini série d'expansion de Gegenbauer, et les approximations d'intégration définies recherchées pour un certain ensemble de noeuds d'intégration  $\{x_i\}_{i=0}^N$  peut être exprimée sous forme de multiplication matrice-vecteur comme suit :

$$I = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{x_0} f(x)dx \\ \int_{-1}^{x_1} f(x)dx \\ \vdots \\ \int_{-1}^{x_N} f(x)dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(1)} & \cdots & p_{0N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N0}^{(1)} & \cdots & p_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0)dx \\ f(x_1)dx \\ \vdots \\ f(x_N)dx \end{bmatrix} = P^{(1)}F, \quad (3.1)$$

où la matrice  $P^{(1)} = (p_{ij}^{(1)})$ ,  $0 \leq i, j \leq N$ , est la matrice opérationnelle d'intégration de Gegenbauer, et est généralement appelée le MIG. Une approche pour construire les entrées du MIG a été introduite dans [7], et modifiée plus tard dans [9] dans le théorème suivant

**Théorème 3.1.1 ([10])** *Soit*

$$S_N^{(\alpha)} = \{x_k \mid G_{N+1}^{(\alpha)}(x_k) = 0, k = 0 \dots N\}, \quad (3.2)$$

*être l'ensemble des points de Gauss-Gegenbauer (GG). De plus, soit  $f(x) \in C^\infty[-1, 1]$  approximée par l'expansion de Gegenbauer série (1.18); alors il existe une matrice  $P^{(1)} = (p_{ij}^{(1)})$ ,  $0 \leq i, j \leq N$ , et quelques nombres  $\xi_i \in [-1, 1]$  satisfaisant*

$$\int_{-1}^{x_i} f(x)dx = \sum_{k=0}^N p_{ik}^{(1)}(\alpha) f(x_k) + E_N^{(\alpha)}(x_i, \xi_i), \quad (3.3)$$

où

$$p_{ik}^{(1)}(\alpha) = \sum_{j=0}^N (\lambda_j^{(\alpha)})^{-1} \omega_k^{(\alpha)} G_j^{(\alpha)}(x_k) \int_{-1}^{x_i} G_j^{(\alpha)}(x)dx. \quad (3.4)$$

$$(\omega_k^{(\alpha)})^{-1} = \sum_{j=0}^N (\lambda_j^{(\alpha)})^{-1} (G_j^{(\alpha)}(x_k))^2, \quad x_k \in S_N^{(\alpha)}, \quad (3.5)$$

$$\lambda_j^{(\alpha)} = \frac{2^{2\alpha-1} j! \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{(j + \alpha) \Gamma(j + 2\alpha)}; \quad (3.6)$$

$$E_N^{(\alpha)}(x_i, \xi_i) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_i)}{(N+1)! K_{N+1}^\alpha} \int_{-1}^{x_i} G_{N+1}^{(\alpha)}(x) dx; \quad \text{tel que } K_{N+1}^\alpha \text{ défini dans Eqs. (1.20)}. \quad (3.7)$$

**Preuve.** [9]. Puisque  $f(x_i) = \sum_{k=0}^M a_k G_k^{(\alpha)}(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$  pour certains coefficients  $a_k$  de Gegenbauer, alors :

$$\omega_j^{(\alpha)} G_s^{(\alpha)}(x_j) f(x_j) = \sum_{k=0}^M a_k \omega_j^{(\alpha)} G_s^{(\alpha)}(x_j) G_k^{(\alpha)}(x_j). \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^M \omega_j^{(\alpha)} G_s^{(\alpha)}(x_j) f(x_j) = \sum_{k=0}^M a_k \sum_{j=0}^M \omega_j^{(\alpha)} (\lambda_s^{(\alpha)} \lambda_k^{(\alpha)})^{\frac{1}{2}} \phi_s^{(\alpha)}(x_j) \phi_k^{(\alpha)}(x_j) \quad (3.9)$$

$$= \sum_{k=0}^M a_k \sum_{j=0}^M \omega_j^{(\alpha)} (\lambda_s^{(\alpha)} \lambda_k^{(\alpha)})^{\frac{1}{2}} \delta_{sk} = a_s \lambda_s^{(\alpha)}, \quad (3.10)$$

où  $\{\phi_j^{(\alpha)}(x)\}_{j=0}^M$  sont les polynômes de base de Gegenbauer orthonormés, sont définis par

$$\phi_j^{(\alpha)}(x) = (\lambda_j^{(\alpha)})^{-\frac{1}{2}} G_j^{(\alpha)}(x), \quad j = 0, \dots, M,$$

et ils satisfont la relation d'orthonormale discrète

$$\sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} \phi_s^{(\alpha)}(x_j) \phi_k^{(\alpha)}(x_j) = \delta_{sk}. \quad (3.11)$$

Par conséquent

$$a_s = (\lambda_s^{(\alpha)})^{-1} \sum_{j=0}^M \omega_j^{(\alpha)} G_s^{(\alpha)}(x_j) f(x_j),$$

alors

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^M (\lambda_s^{(\alpha)})^{-1} \sum_{j=0}^M \omega_j^{(\alpha)} G_k^{(\alpha)}(x_j) G_k^{(\alpha)}(x) f(x_j) \quad (3.12)$$

$$= \sum_{k=0}^M \sum_{j=0}^M (\lambda_s^{(\alpha)})^{-1} \omega_k^{(\alpha)} G_j^{(\alpha)}(x_k) G_j^{(\alpha)}(x) f(x_k). \quad (3.13)$$

Par conséquent  $\int_{-1}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(1)}(\alpha) f(x_k)$ , avec  $p_{ik}^{(1)}(\alpha)$  comme défini par Eq (3.4).

■

Les intégrations des polynômes de Gegenbauer  $G_j^{(\alpha)}(x)$  peuvent être obtenues par Eq. (1.12) comme suit [7] :

$$\int_{-1}^x G_0^{(\alpha)}(x) dx = G_0^{(\alpha)}(x) + G_1^{(\alpha)}(x), \quad (3.14)$$

$$\int_{-1}^x G_1^{(\alpha)}(x) dx = a_1(G_2^{(\alpha)}(x) - G_0^{(\alpha)}(x)), \quad (3.15)$$

$$\int_{-1}^x G_1^{(\alpha)}(x) dx = \frac{1}{2(j+\alpha)}(a_2 G_{j+1}^{(\alpha)}(x) + a_3 G_1^{(\alpha)}(x) + (-1)^j(a_2 + a_3)), \quad (3.16)$$

$$(3.17)$$

où

$$a_1 = \frac{1+2\alpha}{4(1+\alpha)}, \quad a_2 = \frac{j+2\alpha}{j+1}, \quad a_3 = -\frac{j}{j+2\alpha-1}.$$

Les entrées de la  $P$ -matrice d'ordre  $n$  sont données par

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{(x_i - x_j)^{n-1}}{(n-1)!} p_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 0, \dots, N, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

De plus

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{(x_i - x_j)^{n-1}}{2^n(n-1)!} p_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 0, \dots, N, \quad \forall x \in [0, 1].$$

## 3.2 Méthode de solution

Supposons par simplicité, et sans perte de généralité, que nous ayons le PVB linéaire suivant :

$$y''(x) = f(x)y'(x) + g(x)y(x) + r(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.18)$$

aux conditions aux limites de Dirichlet,

$$y(0) = \beta, \quad y(1) = \gamma. \quad (3.19)$$

Pour vous assurer que le problème a une solution unique, supposons également que  $f(x)$ ,  $g(x)$ ;  $r(x)$  sont continus sur  $[0, 1]$ ;  $g(x) > 0$  sur  $[0, 1]$  [2]. On cherche la solution de ce problème aux nœuds GG  $x_i \in S_N^{(\alpha)}$ ,  $i = 0, \dots, N$ , puisqu'ils sont quadratiquement groupés aux extrémités du domaine et bien adaptés à une approximation polynomiale d'ordre élevé [13]. L'intégration directe convertit le problème en la contrepartie intégrale suivante :

$$y(x) = \int_0^x \int_0^x ((g(t) - F(t))y(t) + r(t)) dt dx + \int_0^x f(x)y(x) dx + (c_1 - \beta f_0)x + c_2, \quad (3.20)$$

où  $F = f'$ ,  $f_0 = f(0)$ . Les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites telles que

$$c_1 = \gamma + \beta(f_0 - 1) - \int_0^1 f(x)y(x) dx - \int_0^1 \int_0^x ((g(t) - f(t))y(t) + r(t)) dt dx;$$

$$c_2 = \beta.$$

Laisser  $x_{N+1} = 1$ , puis en appliquant les quadratures de la matrice  $P$ , on refait l'intégrale Eq.(3.20) dans le système d'équations linéaire algébrique suivant :

$$\omega_i - \sum_{j=0}^M (p_{ij}^{(2)}((g_{ij} - f_{ij})\omega_{ij} + r_{ij}) - p_{ij}^{(1)} f_{ij} \omega_{ij}) + (\beta f_0 - c_1)x_i - \beta = 0, \quad i = 0, \dots, N; \quad (3.21)$$

la constante  $c_1$  peut être approximée comme

$$c_1 \approx \gamma + \beta(f_0 - 1) - \sum_{j=0}^M (p_{N+1,j}^{(1)} f_{N+1,j} \omega_{N+1,j} + p_{N+1,j}^{(2)} ((g_{N+1,j} - F_{N+1,j}) \omega_{N+1,j} + r_{N+1,j})), \quad (3.22)$$

où  $\omega = [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N]^T$ ,  $\omega_i \approx y(x_i)$ ,  $\bar{\omega} = (\omega_{lj})$ ,  $\omega_{lj} \approx y(x_{lj})$ ,  $g_{lj} = g(x_{lj})$ ,  $F_{lj} = F(x_{lj})$ ,  $r_{lj} = r(x_{lj})$ ,  $x_{lj} \in S_{N+1,M}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ;  $l = 0, \dots, N+1$ ;  $j = 0, \dots, M$ . Par conséquent, nous avons  $(N+2)$  équations dans  $M(N+2) + 2N + 3$  inconnues. Depuis l'ensemble des noeuds de solution  $\{x_i\}_{i=0}^N$  est symétrique, et en supposant que le nombre  $N$  est pair, on a  $x_{ij} = x_{N-i,j}$ ,  $\forall 0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq M$ , et le système linéaire est en fait un système de  $N(M+3)/2 + 2M + 3$  inconnues. Bien que la quadrature de la matrice  $P$  présentée dans [9] ait été démontrée pour produire des approximations d'ordre élevé, la mise en œuvre pure de la quadrature de la matrice  $P$  pour approximer le PVB conduit à un système linéaire d'équations sous-déterminé. Pour obtenir un système d'équations carré avec une solution unique, nous proposons d'appliquer une technique utilisant la quadrature  $P$ -matrice et la quadrature  $P$ -matrice pour la solution du PVB (3.18). Le terme  $r(x)$  qui n'inclut pas la fonction inconnue  $y(x)$  sera intégré en utilisant la quadrature de la matrice  $P$ , tandis que le reste des intégrations sera approché en utilisant la quadrature de la matrice  $P$ . D'où l'eqs. (3.21) et (3.22) sont remplacés par les deux équations suivantes :

$$\omega_i - \sum_{j=0}^N (p_{ij}^{(2)} (g_j - F_j) + p_{ij}^{(1)} f_j) \omega_j - \sum_{j=0}^M p_{ij}^{(2)} r_{ij} + (\beta f_0 - c_1) x_i - \beta = 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$c_1 \approx \gamma + \beta(f_0 - 1) - \sum_{j=0}^N (p_{N+1,j}^{(1)} f_j + p_{N+1,j}^{(2)} (g_j - F_j)) \omega_j - \sum_{j=0}^M p_{N+1,j}^{(2)} r_{N+1,j},$$

le P (3.18) est transformé en système linéaire  $(N+2)$  d'équations algébriques en  $(N+2)$  inconnues qui peut être écrit plus loin sous la forme matricielle  $A\omega = b$ , où les entrées de la matrice de coefficients  $A = (a_{ij})$ , et le vecteur colonne  $b = (b_i)$  sont donné par

$$a_{ij} = \delta_{ij} - (p_{ij}^{(1)} - p_{N+1,j}^{(1)} x_i) f_j + (p_{ij}^{(2)} - p_{N+1,j}^{(2)} x_i) (F_j - g_j)$$

$$b_i = \sum_{j=0}^M p_{ij}^{(2)} r_{ij} - x_i \left( \sum_{j=0}^M p_{N+1,j}^{(2)} r_{N+1,j} + \beta - \gamma \right) + \beta; \quad i, j = 0, \dots, N.$$

Les solutions approchées sont ensuite obtenues à l'aide de solveurs de systèmes linéaires efficaces. Un des avantages de cette formulation est que le système linéaire issu de la discrétisation est généralement bien conditionné [5, 6, 8, 11, 17]. Le domaine des équations intégrales peut être abordé directement par les MIGs sans reformulations supplémentaires, tandis que des idées similaires à la présente méthode peuvent être facilement généralisées pour résoudre des PVB linéaires généraux et des équations intégro-différentielles en reformulant le problème d'origine dans sa forme intégrale. Ce dernier peut généralement s'écrire :

$$ly = \left( \sum_{j=0}^s f_j(x) l_j \right) y = g(x), \quad x \in [0, 1], s \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.23)$$

où  $l = \sum_{j=0}^s f_j(x) l_j$  est un opérateur intégral linéaire,  $\{f_j\}_{j=0}^s$ ;  $g$  sont des fonctions réelles connues de  $x$ ,  $l_j$  désigne l'intégrale  $j$ -fois de  $y$  par rapport à  $x$ ;  $y(x) \in \mathbb{C}^\infty[0, 1]$  est la solution inconnue du problème approché en utilisant la série d'expansion de Gegenbauer (1.18). Par conséquent, le MIG proposé peut être largement appliqué à un large éventail de problèmes mathématiques.



### 3.3 Résultats numériques

Dans cette section, trois exemples de test sont résolus à l'aide du MIG. Le premier exemple de test est de Cauchy. Le deuxième exemple de test est une équation intégrale de Fredholm. Les troisièmes exemples de test sont des équations intégral-différentielles. Ci-après, (EAMs) désignent les erreurs absolues maximales observées de la présente méthode entre les approximations et les solutions exactes

**Exemple 3.3.1** *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$y''(x) - 4x^2y(x) = -6xe^{-x^2}, \quad \text{avec } y(-1) = y'(-1) = -e^{-1}.$$

La solution exacte est  $y(x) = xe^{-x^2}$ . L'application du MIG donne le système algébrique d'équations linéaires suivant :

$$w_i - 4 \sum_{j=0}^M p_{ij}^{(2)} x_j^2 w_j + e^{-1}(x_i + 2) + \sum_{k=0}^N p_{ik}^{(2)} r_{ik} = 0, \quad i = 0, \dots, M, \quad (3.24)$$

où  $r(x) = 6xe^{-x^2}$ .

Le tableau 3.1, nous donnons les (EAM) pour  $M = 5, 7, 13, 15$  et  $\alpha = -0.4, -0.2, 0, 0.5, 1, 2$  et pour  $N=15$ . Dans la figure 3.1 la valeur optimal de  $\alpha$  pour  $M = 4$  est  $\alpha^* = 0.3$ ; et on a pour  $M = 9$  la valeur optimal  $\alpha^* = -0.3$ .

$M$	$\alpha$					
	-0.4	-0.2	0	0.5	1	2
5	2.21E-002	2.00E-002	2.30E-002	2.49E-002	4.17E-002	7.87E-002
7	1.49E-003	1.52E-003	1.79E-003	2.71E-003	5.00E-003	1.09E-002
13	2.23E-007	2.07E-007	2.27E-007	5.50E-007	1.26E-006	3.95E-006
15	8.13E-009	7.44E-009	8.07E-009	2.16E-008	5.22E-008	1.81E-007

TABLE 3.1 – Calculez l'erreur absolue maximale en changeant  $M = 5, 7, 13, 15$  et  $\alpha = -0.4, -0.2, 0, 0.5, 1, 2$ . à partir de l'exemple 3.3.1.

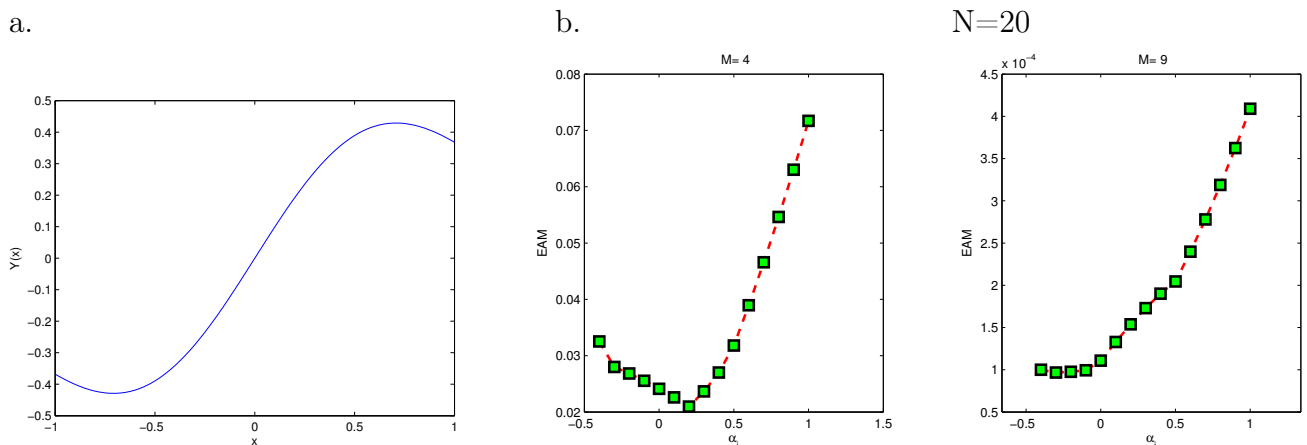


FIGURE 3.1 – Les résultats numériques du MIG sur l'exemple 3.3.1. La figure (a) illustre le graphique de  $y(x)$  sur  $[-1, 1]$ . La figure (b) illustre les EAM du MIG pour  $M = 4, 9$ .

**Exemple 3.3.2** *Considérons l'équation intégrale-différentielle de Fredholm suivante :*

$$y'(x) - y(x) - \int_{-1}^1 e^{(x+1)t} y(t) dt = -\frac{2 \sinh(x+2)}{x+2}, \quad y(-1) = e^{-1}.$$

La solution exacte est  $y(x) = e^x$ . L'application du MIG donne le système algébrique d'équations linéaires suivant :

$$w_i - \sum_{j=0}^M \left( p_{ij}^{(1)} + \sum_{k=0}^M p_{N+1,j}^{(1)} p_{ik}^{(1)} e^{(x_k+1)x_j} \right) w_j - \sum_{j=0}^N p_{ij}^{(1)} r_{ij} - e^{-1} = 0, \quad i = 0, \dots, M, \quad (3.25)$$

où  $r(x) = -\frac{2 \sinh(x+2)}{x+2}$ .

Le tableau 3.2, nous donnons les (EAM) pour  $M = 4, 6, 8, 10$  et  $\alpha = -0.25, -0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  et pour  $N=15$ . Dans la figure 3.2 la valeur optimal de  $\alpha$  pour  $M = 3$  est  $\alpha^* = 0.4$ ; et on a pour  $M = 11$  la valeur optimal  $\alpha^* = 0.5$ .

M	$\alpha$					
	-0.25	-0.1	0.25	0.5	0.75	1
4	2.21E-003	2.24E-003	1.12E-003	1.29E-003	3.04E-003	5.25E-003
6	2.40E-005	3.03E-005	2.07E-005	8.40E-006	4.95E-005	1.05E-004
8	2.74E-007	3.77E-007	3.24E-007	3.17E-008	6.80E-007	1.65E-006
10	2.51E-009	3.63E-009	3.53E-009	7.77E-011	7.64E-009	1.99E-008

TABLE 3.2 – Calculez l'erreur absolue maximale en changeant  $M = 4, 6, 8, 10$  et  $\alpha = -0.25, -0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ . à partir de l'exemple 3.3.2.

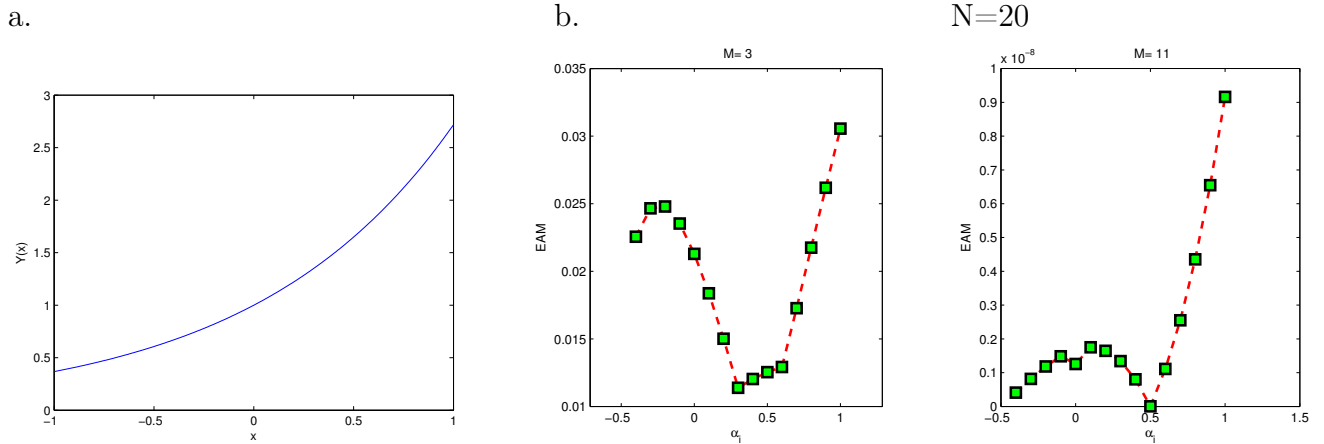


FIGURE 3.2 – Les résultats numériques du MIG sur l'exemple 3.3.2. La figure (a) illustre le graphique de  $y(x)$  sur  $[-1, 1]$ . La figure (b) illustre les EAM du MIG pour  $M = 3, 11$ .

**Exemple 3.3.3** *Considérons l'équation intégrale de Fredholm suivante du deuxième type :*

$$y(x) - \int_{-1}^1 K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad x \in [-1, 1],$$

avec le noyau  $K(x, t) = (x - t)^3 / (x^2(1 + t^2))$ ;

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} - \frac{3(\sqrt{2} - \operatorname{arcsinh}(1))}{x} - 2x \operatorname{arcsinh}(1).$$

La solution exacte est  $y(x) = \sqrt{1+x^2}$ . L'application du MIG conduit au système d'équations algébriques suivant :

$$w_i - \sum_{j=0}^M p_{M+1,j}^{(1)} K(x_i, x_j) w_j - f_i = 0, \quad i = 0, \dots, M, \quad \text{où } f_i = f(x_i). \quad (3.26)$$

Le tableau 3.3, nous donnons les (EAM) pour  $M = 3, 5, 7, 15$  et  $\alpha = -0.4, -0.1, 0.2, 0.5, 1$ . Dans la figure 3.3 la valeur optimal de  $\alpha$  pour  $M = 5$  est  $\alpha^* = 0.3$ ; et on a pour  $M = 17$  la valeur optimal  $\alpha^* = -0.4$ .

M	$\alpha$				
	-0.4	-0.1	0.3	0.5	1
3	2.07E-02	1.12E-02	1.20E-02	1.61E-02	4.25E-02
5	1.63E-03	1.66E-03	1.40E-03	1.50E-03	4.18E-03
7	1.34E-04	1.30E-04	1.45E-04	1.73E-04	6.40E-04
15	4.07E-08	4.39E-08	4.31E-08	6.73E-08	3.43E-07

TABLE 3.3 – Calculez l'erreur absolue maximale en changeant  $M = 3, 5, 7, 15$  et  $\alpha = -0.4, -0.1, 0.2, 0.5, 1$  à partir de l'exemple 3.3.3.

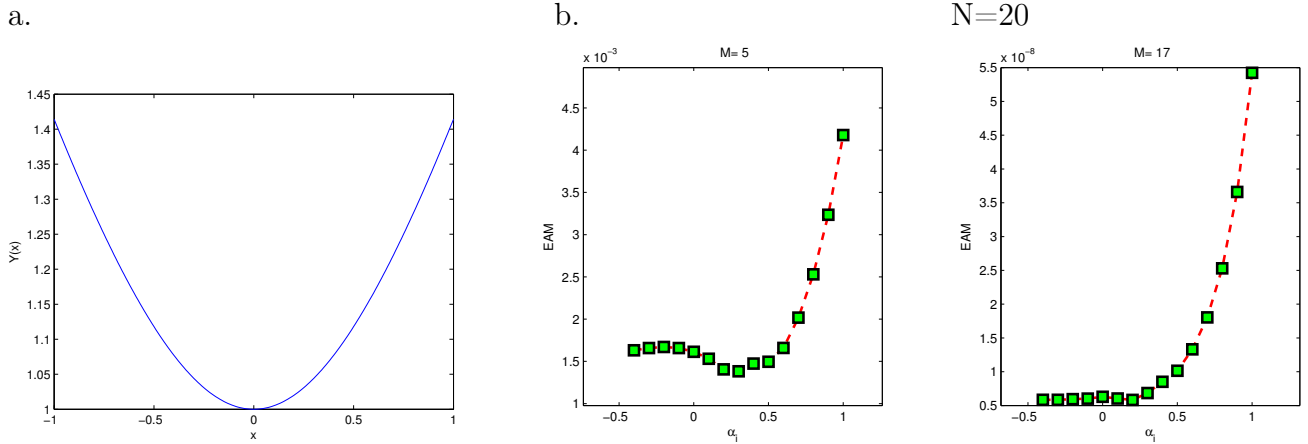


FIGURE 3.3 – Les résultats numériques du MIG sur l'exemple 3.3.3. La figure (a) illustre le graphique de  $y(x)$  sur  $[-1, 1]$ . La figure (b) illustre les EAM du MIG pour  $M = 5, 17$ .

---

## CONCLUSION

Ce mémoire a présenté une méthode numérique efficace pour résoudre les PVB, les équations intégrales et intégréo-différentielles à l'aide de MIG. L'idée clé est de transformer les PVB généraux et les équations intégréo-différentielles en leurs reformulations intégrales, puis de discrétiser à l'aide de MIG. Le système d'équations linéaire algébrique résultant peut être résolu pour les valeurs de solution dans l'espace physique en utilisant des solveurs de système linéaire efficaces. L'algorithme présenté est numériquement stable et la précision spectrale est obtenue en utilisant un nombre relativement petit de points de solution, ce qui est une caractéristique souhaitée pour une méthode spectrale. Le MIG proposé a la capacité d'obtenir des approximations d'ordre supérieur sans qu'il soit nécessaire d'augmenter le nombre de points de solution. L'applicabilité de la méthode proposée est illustrée par trois exemples de test. Les résultats obtenus sont très cohérents, le présent MIG est largement applicable et peut être appliqué pour résoudre de nombreux problèmes tels que les PVB, les équations intégrales et intégréo-différentielles, les problèmes d'optimisation, les problèmes de contrôle optimal, etc.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. M. Antia, Numerical methods for scientists and engineers. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi 1991.
- [2] B. U. Burden, J.D. Faires, Numerical Analysis, 7th ed., Brooks Cole, 2000.
- [3] D. E. Dennis G. Zill (15 mars 2012), Un premier cours sur les équations différentielles avec des applications de modélisation . Apprentissage Cengage. ISBN 1-285-40110-7.
- [4] E. H. Doha, The Coefficientsof Differentiated Expansions and Derivatives of Ultraspherical Polynomials, Computer Math. Applic, 21(2-3)(1991), 115-11.
- [5] E. L. Elbarbary, Integration preconditioning matrix for ultraspherical pseudospectral operators, SIAM J. Sci. Comput. 28 (2006) 1186–1201
- [6] E. L. Elbarbary, Pseudospectral integration matrix and boundary value problems, Int. J. Comput. Math. 84 (2007) 1851–1861.
- [7] H. M. El-Hawary, M.S. Salim, H.S. Hussien, An optimal ultraspherical approximation of integrals, Int. J. Comput. Math. 76 (2000) 219-237.
- [8] K. T. Elgindy, Generation of higher order pseudospectral integration matrices, Appl. Math. Comput. 209 (2009) 153–161.
- [9] K. T. Elgindy, K.A. Smith-Miles, Optimal Gegenbauer quadrature over arbitrary integration nodes, J. Comput. Appl. Math. 242 (2013) 82-106.
- [10] K. T. Elgindy, K.A. Smith-Miles. Solving boundary value problems, integral, and integro-differential equations using Gegenbauer integration matrices. J. Comput, Appl. Math. 237 (2013) 307-325.
- [11] L. G. Greengard, V. Rokhlin, On the numerical solution of two-point boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991) 419–452.
- [12] J. H. He, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations. International Journal of Modern Physics B, 20(2006).
- [13] J. S. Hesthaven, S. Gottlieb, D. Gottlieb, Spectral Methods for Time Dependent Problems, Cambridge University Press, 2007.
- [14] F. J. Jędrzejewski, Introduction aux méthodes numériques. Deuxième édition. Springer-Verlag France, Paris 2005.
- [15] R. P. Kanwal, Linear Integral Equations. Birkhauser, Boston, 1997.
- [16] P. K. Kythe, Michael R. Schäferkotter, Handbook of computational methods for integration, CRC Press. 2005.

- 
- [17] A. L. Lundbladh, D.S. Henningson, A.V. Johansson, An efficient spectral integration method for the solution of the Navier Stokes equations, Technical Report FFA TN 1992-28, Aeronautical Research Institute of Sweden, Bromma, 1992.
  - [18] M. R. Rahman. Integral Equations and their Applications. Southampton, Britain, 2007.
  - [19] A. R. Rahmoune, Sur la Résolution Numérique des Equations Intégrales en Utilisant des Fonctions Spéciales, Thèse de doctorat en science université de Batna, 2011.
  - [20] J. SH. Shen, T. Tang and L.-L. Wang, Spectral methods. Algorithms, Analysis and applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.