Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire

Présenté par

Hammouche Chaima

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Thème

Étude théorique d'un problème aux limites parabolique gouverné par l'équation de Stokes instationnaire

---

Soutenu publiquement le 6 septembre 2020 devant le jury composé de

Dr.I. Alia	Président
Dr.H. Debbiche	Encadrant
Dr.A. Berkani	Examinateur

Promotion 2019/2020

Dédicaces

À ma chère et tendre mère Dalila et à mon cher père Mounir qui m'ont donné de vraies valeurs, que Dieu vous protège pour moi.

À mes frères et sœurs.

À l'âme de ma chère tante Messaouda et l'âme de ma grand-mère paternel Sakina.
Qui ont été toujours dans mon esprit et dans mon cœur.
Que Dieu le miséricordieux, vous accueille dans son éternel paradis.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier le bon Dieu qui m'a donné la force, la santé et la patience d'accomplir ce modeste travail.

J'adresse mes sincères et chaleureux remerciements à mon encadreur DR. Debbiche Hanene pour son orientation, sa patience et ses conseils tout au long dans la réalisation de ce travail.

Un grand merci à mes chers parents Dalila et Mounir qui m'ont comblé avec leurs tendresses et affections, qui n'ont cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, à mon grand frère Charaf-Eddine, mes sœurs Romaissa et Amina, et ma tante Fouzia pour leurs encouragements et leur amour.

Je remercie mes chères amies Halima, Chaima, Hiba et Zina pour leurs encouragements, et d'êtres toujours à mes côtés.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base de dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de leur transfert. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides, liquides et gaz, lorsqu'ils subissent des forces ou des contraintes.
La plupart des écoulements sont régis par les équations de Navier-Stokes, qui sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides Newtoniens ou non-Newtoniens, l'équation de Stokes est une forme simplifier de l'équation de quantités de mouvement contenue dans les équations de Navier-Stokes (le terme de convection est négligé).
Les équations de Navier-Stokes jouent un rôle très important dans toute la physique, elles sont nommées ainsi pour honorer les travaux de deux scientifiques du XIX^e ème siècle : le mathématicien et ingénieur français Claude Louis Henri Navier (1785-1836) qui a introduit un terme supplémentaire à l'équation d'Euler, représente la perte d'énergie dans le fluide en 1820, et le mathématicien et physicien britannique né en Irlande George Gabriel Stokes (1819-1903) qui a donné sa forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 1845.
Entre-temps, divers scientifiques ont contribué à l'avancement du sujet : Augustin Louis Cauchy et Siméon Denis Poisson en 1829 et Adhémar Barré de Saint-Venant en 1843. Elles demeurent jusqu'au jour d'aujourd'hui difficilement intégrable malgré leurs caractère déterministe car elles comportent des termes non linéaires.
Pour résoudre les équations de Stokes ou de Navier-Stokes, il est en général postulé que la vitesse du fluide au voisinage de la paroi solide est nulle. C'est la condition de non-glissement à la paroi. Plusieurs expériences ont montré que cette condition n'est pas satisfaite, et que le fluide ne peut traverser la surface solide. Sa vitesse est forcement nulle dans la direction perpendiculaire à la surface. En revanche, elle n'est pas forcement nulle dans les direction tangentielle. En toute rigueur, il y a un glissement qui peut être modélisé par des différentes lois de frottement, par exemple la loi de Tresca et la loi de Coulomb, ... etc. Ce genre de problème est motivé par les phénomènes de lubrification et d'injection/extrusion.

L'étude mathématique des équations de Navier-Stokes ou Stokes avec un glissement donné par ces conditions a été fait par beaucoup de chercheurs :

-H.Fujita est le premier qui a étudié la loi de Tresca (voir [14], [15]) où il a montré l'existence et l'unicité pour le problème de Stokes stationnaire.

-N.Saito a établit des propriétés de régularité pour les solutions (voir [24]).
On cite aussi [1], [2], [3], [8].

-Dans [3], ils ont prouvé l'existence et l'unicité de solutions d'un système de Stokes instationnaire avec la loi de Tresca et ils ont établit des propriétés de régularité pour ces solutions. De plus, ils ont montré l'existence de solutions avec la loi de Coulomb.

La plupart des systèmes physiques se modélisent par des équations aux dérivées partielles non linéaires. Dans ce travail on étudie un problème parabolique d'un fluide Newtonien incompressible gouverné par l'équation de Stokes avec la condition de Tresca sur une partie du bord où la viscosité est constante qui s'exprime de la façon suivante (voir [3])

$$
(\mathrm{P}_0)\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} - 2div(\mu D(v)) + \nabla p = f & dans \quad \Omega\times]0,T[,\\
div(v) = 0 & dans \quad \Omega\times]0,T[,\\
v = 0 & sur \quad \Gamma_1\times]0,T[,\\
v = g\xi & sur \quad \Gamma_L\times]0,T[,\\
v_n = v\cdot n = 0 & sur \quad \Gamma_0\times]0,T[,\\
\begin{array}{l} |\sigma_\tau| < l \Longrightarrow v_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = l \Longrightarrow \exists\lambda \geqslant 0, \quad v_\tau = -\lambda\sigma_\tau \end{array} & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,T[,\\
v(0,\cdot) = v^0 & dans \quad \Omega,
\end{cases}
$$

où v, p désignent respectivement la vitesse et la pression du fluide (inconnues), μ sa viscosité et $f = (f_1, f_2, f_3)$ est le vecteur des forces extérieures données.

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres.
Dans le **premier chapitre**, on présente quelques notions et résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, qui seront utilisées dans ce mémoire. On va rappeler également les définitions et les propriétés des espaces de Lebesgue, Sobolev à valeurs réelles et à valeurs vectorielles, et quelques résultats sur la topologie faible et la topologie faible *.

Dans le **deuxième chapitre**, on s'intéresse à étudier l'écoulement isotherme d'un fluide Newtonien incompressible et instationnaire, gouverné par l'équation de Stokes qui occupe un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^3$. On introduit les équations qui gouvernent cet écoulement, ainsi que les conditions aux limites et initiales. Ensuite, on établit la formulation variationnelle de ce problème, on obtient que cette formulation variationelle est donnée par une inéquation variationnelle parabolique.

Le **troisième chapitre** est consacré à étudier l'existence et l'unicité de la vitesse et la pression solutions de l'inéquation variationnelle obtenue. On prouve l'existence de la vitesse en utilisant la méthode de Galerkin. Ensuite, on montre l'existence de la pression en utilisant le théorème de De Rham. Enfin, on étudie l'unicité de la solution du problème, et on termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans ce mémoire.
Dans tout le chapitre, le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1 (Norme). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une norme sur E est une application*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad E &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

ayant les trois propriétés suivantes :

(1) $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *(Homogénéité).*

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition 1.2 (Espace vectoriel normé). *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme sur E.*

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.3 (Suite de Cauchy). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad n, m > N_\varepsilon \Rightarrow \|u_m - u_n\| < \varepsilon.$$

Définition 1.4 (Espace de Banach). *Un espace de Banach E est un espace vectoriel normé complet (c'est-à-dire si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E).*

Exemple 1.1. *L'espace $C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme de convergence uniforme définie par*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \forall f \in C^0([0,1]),$$

est un espace de Banach.

Proposition 1.1. [22] *Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui même un espace de Banach pour la norme induite.*

Définition 1.5 (Dual topologique). *Le dual topologique d'un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K}$, est l'ensemble des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$, on le note $E^{'}$. (i.e $E^{'} = L_c(E, \mathbb{K})$). Soit $f \in E^{'}$, on désigne par $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par*

$$\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle_{E', E},$$

où $\langle ., . \rangle_{E', E}$ est le crochet de dualité entre $E^{'}$ et E .
La norme duale est définie par

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|\langle f, x \rangle_{E', E}|}{\|x\|_E}.$$

Le bidual topologique $E^{''}$ est le dual topologique de $E^{'}$.

1.1.3 Espace séparable

Définition 1.6 (Partie dense). *Soit E un espace vectoriel normé et X une partie de E. On dit que X est dense dans E si pour tout $y \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $x_n \to y$ dans E.*

Définition 1.7. *Soit E un espace vectoriel normé, E est séparable s'il existe une partie D de E dénombrable et dense dans E.*

1.1.4 Espace Réflexif

Il y a une application linéaire et continue $J : E \to E^{''}$ qui à $x \in E$ associé l'application $J(x) : E^{'} \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(x)(\varphi) = \varphi(x), \quad \forall x \in E, \quad \forall \varphi \in E^{'}.$$

On écrit aussi

$$\langle J(x), \varphi \rangle_{E'', E'} = \langle \varphi, x \rangle_{E', E}, \quad \forall x \in E, \quad \forall \varphi \in E^{'}.$$

Donc J envoie x vers la forme linéaire continue sur $E^{'}$ donnée par l'évaluation en x. L'application J préserve la norme $\|J(x)\| = \|x\|$ donc J est injective.

Définition 1.8. *Un espace vectoriel normé est dit réflexif si l'injection canonique dans son bidual topologique est surjective ($J(E) = E^{''}$).*

1.1.5 Espace de Hilbert

Dans cette partie nous rappelons quelques notions fondamentales sur les espaces de Hilbert.

Définition 1.9 (Produit scalaire). *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un produit scalaire sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$, telle que, pour tous $x, y, z \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,*

(1) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$, (Positivité).

(2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (Définie).

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(4) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$, *(Linéarité).*

Définition 1.10 (Espace préhilbertien). *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel normé H muni d'un produit scalaire.*
$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *définie une norme sur H appelée norme Hilbertienne.*

Définition 1.11 (Espace de Hilbert). *Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien complet pour sa norme Hilbertienne. C'est donc un cas particulier d'espace de Banach.*

Exemple 1.2.

(1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

(2) L'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suites complexes (ou réelles) $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ muni de

$$\langle (x_n)_{n\geqslant 0}, (y_n)_{n\geqslant 0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\overline{y_n},$$

est un espace de Hilbert.

Projections orthogonales

Définition 1.12 (Orthogonalité). *On dit que deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont orthogonaux, si $\langle x, y\rangle = 0$ on note $x \perp y$.*

Définition 1.13. *Une partie C d'un espace vectoriel est dite convexe si pour tous $x, y \in C$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$: $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.*

Théorème 1.1 (Projection sur un convexe fermé). *Soit H un espace de Hilbert, et soit C une partie convexe et fermée, non vide de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que*

$$\|x - y\| = dist(x, C) = \inf_{z\in C} \|x - z\|,$$

on dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C.

Preuve.
1) Existence :
Soit $d = dist(x, C) = \inf_{z\in C} \|x - z\|$. Notons que si $d = 0$, alors $x \in C$ (car C est fermé), et $y = x$ est l'unique point de C tel que $\|x - y\| = d$. Par définition de d et caractérisation séquentielle de la borne inférieure on a, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $(y_n)_n \in C$ tel que

$$\|x - y_n\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{n}.$$

On applique l'identité de parallélogramme sur $x - y_n$ et $x - y_m$ pour $n, m \geqslant 1$, on obtient :

$$\|x - y_n + x - y_m\|^2 + \|x - y_n - x + y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2)$$
$$\Leftrightarrow 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2),$$

on a $\dfrac{y_n + y_m}{2} \in C$, car C est convexe, donc

$$\left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\| \geqslant d,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4 \left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \\ &\leqslant 2\left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 - \frac{1}{m}\right) - 4d^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

La suite $(y_n)_n$ est par conséquent une suite de Cauchy. Comme H est complet, elle converge vers $y \in H$. Mais comme C est fermé, $y \in C$.
Comme $\|x - y_n\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{n}$, en passant à la limite $\|x - y\| \leqslant d$, et par définition de d, $\|x - y\| = d$.

2)Unicité :
On suppose qu'il existe $y_1, y_2 \in C, \quad \|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$,
on applique l'identité de parallélogramme sur $x - y_1$ et $x - y_2$ on obtient

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|y_1 - y_2\|^2 &\leqslant 4 \left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 \\ &= 2(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2) = 2(d^2 + d^2), \end{aligned}$$

d'où $\|y_1 - y_2\|^2 \leqslant 0$, ce qui n'est possible que si $y_1 = y_2$.

□

Le cas particulier le plus important du théorème précédent est la projection sur un sous espace vectoriel fermé F de H.

Corollaire 1.1. [16] *Soit $x \in H$*

(1) Si $y \in F$ tel que

$$\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

Alors $x - y$ est orthogonale à F (i.e orthogonale à tous les vecteurs $z \in F$).

(2) Réciproquement, si $y \in F$ et tel que $(x - y) \perp F$ alors $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ (i.e $y = P_F(x)$ est la projection de x sur F).

(3) La projection orthogonale $P_F : H \to F$ est une contraction linéaire (i.e. une application linéaire telle que pour tout $x \in H$, $\|P_F(x)\| \leqslant \|x\|$).

Définition 1.14 (Base orthonormée). *Soit H un espace de Hilbert et $(w_i)_{i \in I}$ une famille d'élément de H, I un ensemble arbitraire non vide. On dit que c'est une famille orthonormée, ou un système orthonormé si*

(1) $\|w_i\| = 1, \quad \forall i \in I$,

(2) $w_i \perp w_j, \quad \forall i \neq j$.

Théorème 1.2 (Projection sur un s.e.v de dimension finie). *Soit $(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ une famille orthonormée finie dans un espace de Hilbert H. Posons $\mathcal{F} = Vect(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ le sous-espace vectoriel de H engendré par les w_i, alors pour tout vecteur $x \in H$, le vecteur $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, w_i \rangle w_i$ est la projection orthogonale de x sur $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $y \in \mathcal{F}$ et que le vecteur $x - y$ est orthogonale à $\mathcal{F}$.*

Preuve. Il est évident que $y \in \mathcal{F}$, et il est clair que $\langle y, w_j \rangle = \langle x, w_j \rangle$ pour tout $j = 1, \cdots, n$, donc $x - y$ est orthogonal à tous les (w_j), ce qui implique que $x - y$ est orthogonal à $\mathcal{F}$. □

Définition 1.15 (Base Hilbertienne). *On dit qu'une famille dénombrable orthonormée $(w_n)_{n \geqslant 1}$ dans un espace de Hilbert H est une base de H, si l'ensemble $\{w_n, n \geqslant 1\}$ est totale (le sous espace engendré par l'ensemble $\{w_n, n \geqslant 1\}$ est dense dans H).*

Théorème 1.3. [5] *Tout espace de Hilbert séparable possède une base Hilbertienne.*

Théorème 1.4 (Représentation de Fréchet-Riesz). [5] *Soit H un espace de Hilbert. Pour toute $\Phi \in H'$, il existe un (unique) $y \in H$ tel que*

$$\Phi(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Quand on veut résoudre un problème aux limites en cherchant une autre formulation du problème, on est amené à introduire des espaces dans lesquels vont être contenues des informations utiles. Donc, il est nécessaire de rappeler ici quelques espaces fonctionnels nécessaires dans l'étude mathématique du problème de Stokes instationnaire qu'on va traiter dans ce travail (les espaces : L^p, $W^{1,p}$ à valeurs réelles et vectorielles $\cdots$).

Définition 1.16 (Domaine lipschitzien). *Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est dit lipschitzien s'il existe une famille de boules ouvertes $(B_i)_{i=1,2,\cdots,k}$ telle que $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^{k} B_i$, de plus sur chaque B_i, il existe un système de cordonnées $(x_1, \cdots, x_N)$ et une fonction Ψ_i lipschitzienne telle que*

$$\Omega \cup B_i = \{(x_1, \cdots, x_N) \in B_i, \quad x_n < \Psi_i(x_1, \cdots, x_{N-1})\}.$$

Cela signifie que la frontière de Ω peut-être vue comme le graphe d'une fonction lipschitzienne. La plupart des domaines classiques (en particulier les polygones en dimension 2 et presque tous les polyèdres en dimension 3) sont lipschitziens.

Partout dans ce chapitre, Ω désigne un domaine (ouvert et connexe) borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue dx.

1.1.6 Les espaces $L^p(\Omega)$

Donnons immédiatement des définitions, des théorèmes ainsi que des résultats de réflexivité, de séparabilité et de dualité concernant l'espace $L^p(\Omega)$.

Définition 1.17 (Fonctions intégrables). *On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$* est intégrable au sens de Lebesgue si : $\displaystyle\int_\Omega |f| \, dx < \infty$.

Définition 1.18 (Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$). *Soit $1 \leq p < \infty$, on appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions f mesurables et essentiellement bornées sur Ω, c'est-à-dire

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f \text{ mesurable}, \ \exists \, c > 0 \, : \ |f(x)| \leqslant c \text{ presque partout sur } \Omega \},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = supess_{x\in\Omega} |f(x)| = inf\{c > 0, \ |f(x)| \leqslant c \text{ presque partout sur } \Omega\}.$$

Exemple 1.3. *Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^m}$ définie sur $(0, 1)$ et $m > 0$, on a*

- *Pour $p < \dfrac{1}{m}$*

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x^m} \right|^p dx = \frac{1}{1 - mp} < \infty,$$

donc $f \in L^p(0, 1)$.

- *En particulier, si $m = \dfrac{1}{2}$ on a*

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right|^p dx = \frac{2}{2 - p},$$

si $p \in [1, 2[$ alors $f \in L^p(0, 1)$, si $p \in [2, \infty[$, alors $f \notin L^p(0, 1)$.

- *Si $m = 1$ et $p = 1$*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx &= \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} \, dx \\
&= \lim_{a \to 0^+} [\ln(x)]_a^1 \\
&= \lim_{a \to 0^+} [\ln(1) - \ln(a)] \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

donc, $f \notin L^1(0, 1)$.

Définition 1.19 (Support d'une fonction continue). *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$* une fonction continue, on appelle support de f noté *supp*(f) l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction ne s'annule pas

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega \ \ f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.20 (L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$). *On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonction de classe C^∞* sur Ω à support compact.

Définition 1.21 (Distribution). *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathbb{R},$$

où $\langle ., . \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),D(\Omega)}$ est le crochet de dualité entre $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$.
Le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ est $\mathcal{D}^{'}(\Omega) = L_c(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R})$.

Définition 1.22 (Dérivée au sens de distribution). *Les dérivées premières de T au sens de distribution sont définies par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Théorème 1.5 (Densité). [5] *Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$.*

Définition 1.23 (Exposant conjugué). *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p, qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Théorème 1.6 (Dualité dans $L^p(\Omega)$). [9] *Soit $1 < p < \infty$, le dual topologique de $L^p(\Omega)$ est $L^q(\Omega)$ où q est le conjugué de p. En particulier, le dual de $L^1(\Omega)$ est $L^\infty(\Omega)$.*

Théorème 1.7 (Inégalité de Young). [5] *Soit $1 < p < \infty$ et q son exposant conjugué*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Théorème 1.8 (Inégalité de Hölder). [5] *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.9 (Inégalité de Minkowski). [5] *Soient $f, g \in L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, alors $f + g \in L^p(\Omega)$ et*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lemme 1.1. (Lemme de Fatou) [5] *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que*

- *pour chaque $n, f_n(x) \geq 0$ presque partout sur Ω,*
- $\sup_n \int_\Omega f_n(x)\, dx < \infty.$

Pour chaque $x \in \Omega$, on pose

$$f(x) = \liminf_{n \to +\infty} f_n(x),$$

alors, $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega f(x)\, dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx.$$

Théorème 1.10. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) [5] *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$*. On suppose que*

a) $f_n(x) \to f(x)$ *presque partout sur* Ω,

b) *il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ presque partout sur } \Omega.$$

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Corollaire 1.2. (Convergence dominée dans $L^p(\Omega)$) [21] *Soient* $p \in [1, \infty[$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^p(\Omega)$*. On suppose que*

1- $f_n(x) \to f(x)$ *presque partout sur* Ω,

2- *il existe une fonction* $g \in L^p(\Omega)$*, telle que pour chaque* n *on a*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ presque partout sur } \Omega.$$

Alors, $f \in L^p(\Omega)$ *et* $f_n \to f$ *dans* $L^p(\Omega)$*, (c'est-à-dire* $\|f_n - f\|_p \to 0$*).*

Proprietés 1.1. [5]

(1) $L^p(\Omega)$ *est un espace vectoriel et* $\|.\|_p$ *est une norme pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

(2) $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

(3) $L^p(\Omega)$ *est séparable pour tout* $1 \leq p < \infty$.

(4) $L^p(\Omega)$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Théorème 1.11. [5] *Soit* (f_n) *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$*, tels que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$*. Alors, il existe une sous-suite extraite* (f_{n_k}) *telle que*

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *presque partout sur* Ω,

b) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$, $\forall k$ *et presque partout sur* Ω*, avec* $h \in L^p(\Omega)$.

Définition 1.24. *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces normés*

(1) $X \hookrightarrow_{continue} Y$*, signifie* $X \subset Y$ *avec l'injection continue c-à-d*

$$\exists c > 0, \quad \|u\|_Y \leqslant c\|u\|_X, \ \ \forall u \in X\cdot$$

(2) $X \hookrightarrow_{compacte} Y$ *si de toute suite bornée dans* X*, on peut extraire une sous suite converge dans* Y.

Théorème 1.12 (Comparaison entre les espaces $L^p(\Omega)$). [9] *Soit* $|\Omega| = \int_\Omega dx < \infty$*.*
Alors, $L^r(\Omega) \hookrightarrow_{continue} L^p(\Omega), \quad \forall\, 1 \leqslant p \leqslant r \leqslant \infty$.
(i.e il existe une constante c *telle que* $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{L^r(\Omega)}, \quad \forall u \in L^r(\Omega)$ *où* $c = |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$*).*

1.1.7 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.25. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \exists g_1, \cdots, g_N \in L^p(\Omega) \quad tq \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \cdots, N \right\}.$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour $p = 2$, on pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.2. [5] *Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ est un espace de Banach, séparable si $1 \leqslant p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.*

Théorème 1.13. [5] *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour son produit scalaire.*

Théorème 1.14 (Injection de Sobolev). ([9],[21])

(1) *Si $1 \leqslant p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_{continue} L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, p^*]$ où $p^* = \frac{Np}{N-p}$.*

(2) *Si $p = N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_{continue} L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$.*

(3) *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_{continue} L^\infty(\Omega)$.*

Maintenant, on considère le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov suivant :

Théorème 1.15 (Rellich-Kondrachov). ([9],[21])

(1) *Si $1 \leqslant p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_{compacte} L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*

(2) *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_{compacte} L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$.*

(3) *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_{compacte} C(\overline{\Omega})$.*

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec injection compacte pour tout p.

Exemple 1.4. *On définit la fonction $u(x) = |x|$, pour $x \in (-1, 1)$, on a*

$$\int_{-1}^1 |u(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^1 |x|^2 dx = \int_{-1}^0 (-x)^2 \, dx + \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} < +\infty,$$

alors $u \in L^2(-1,1)$.
D'autre part, on a

$$u'(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0, \\ 1 & si \quad x > 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\int_{-1}^{1} |u'(x)|^2 = \int_{-1}^{0} (-1)^2 \, dx + \int_{0}^{1} 1^2 \, dx = 2 < +\infty,$$

donc $u' \in L^2(-1,1)$.
De plus, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$, *on a*

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x) \, dx = -\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi(x) \, dx.$$

En effet, on intègre par parties on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x) \, dx &= \int_{-1}^{0} u(x)\varphi'(x) \, dx + \int_{0}^{1} u(x)\varphi'(x) \, dx \\
&= \int_{-1}^{0} -x\varphi'(x) \, dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x) \, dx \\
&= -x\varphi(x)]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x) \, dx + x\varphi(x)]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x) \, dx \\
&= -\left(-\int_{-1}^{0} \varphi(x) \, dx + \int_{0}^{1} \varphi(x) \, dx \right) \\
&= -\left(\int_{-1}^{0} u'(x)\varphi(x) \, dx + \int_{0}^{1} u'(x)\varphi(x) \, dx \right) \\
&= -\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi(x) \, dx,
\end{aligned}$$

d'où, $u \in H^1(-1,1)$.

1.1.8 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.26. *Soit* $1 \leqslant p < \infty$, *l'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

Proprietés 1.2. [5]

(1) *Si* $p = 2$, *on note* $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

(2) *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}(\Omega)$, *est un espace de Banach séparable.*

(3) *Si* $1 < p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

(4) *L'espace* $H_0^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* $H^1(\Omega)$.

Lemme 1.2. [5] *Soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *avec* u *est à support compact inclus dans* Ω, *alors* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.1. [5] *On désigne par* $W^{-1,q}(\Omega)$, $q = \frac{p}{p-1}$, $1 \leqslant p < \infty$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et par* $H^{-1}(\Omega)$ *l'espace dual de* $H_0^1(\Omega)$.

- *On identifie* $L^2(\Omega)$ *et son dual. On a le schéma*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.

- *Pour* $\frac{2N}{N+2} \leqslant p < \infty$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.

Dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, on a l'inégalité suivante

Théorème 1.16 (Inégalité de Poincaré). [5] *Il existe une constante* c (dépend de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (1 \leqslant p < \infty).$$

1.1.9 Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$

Définition 1.27. *Soient* $0 < s < 1$ *et* $1 \leqslant p < \infty$*, on définit*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{s+\frac{N}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Où le terme

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une semi-norme de u*.*
En particulier, si $p = 2$ *on note* $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$*.*

Théorème 1.17. *Pour* $s \in]0, 1[$*, l'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, elle converge donc dans $L^p(\Omega)$ vers une fonction $u \in L^p(\Omega)$. D'autre part, la suite des fonctions $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$v_n(x, y) = \frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{s+\frac{N}{p}}},$$

est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega \times \Omega)$, donc elle converge aussi vers un élément de $L^p(\Omega \times \Omega)$. on extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers u. On remarque alors que $v_{\sigma(n)}(x,y)$ converge, pour presque tout couple (x,y), vers $v(x,y) = (u(x) - u(y))\,|x-y|^{-s-\frac{N}{p}}$. En utilisant le lemme de Fatou 1.1, on obtient

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}}\,dx\,dy \leqslant \lim_{n\to+\infty}\inf \int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{\left|u_{\sigma(n)}(x)-u_{\sigma(n)}(y)\right|^p}{|x-y|^{sp+N}}\,dx\,dy.$$

Donc $u \in W^{s,p}(\Omega)$, et en réutilisant un passage à la limite quand $m \to +\infty$, dans $\|v_n - v_m\|_{L^p(\Omega\times\Omega)}$, avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient $u_n \to u$ dans $W^{s,p}(\Omega)$. □

Théorème 1.18. [23] *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$, on a*

- *$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace séparable, pour tout $1 \leqslant p < +\infty$.*
- *$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace réflexif, pour tout $1 < p < +\infty$.*
- *$\|\cdot\|_{W^{s,2}(\Omega)}$ est une norme Hilbertienne, et $H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Proposition 1.3. [9] *Soient $1 \leqslant p < \infty$ et $0 < s \leqslant s' < 1$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow_{continue} W^{s,p}(\Omega).$$

(i.e $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}$ où $c = c(N,s,p) \geqslant 1$).
De plus, cette injection est compacte.

Exemple 1.5. *La fonction $x \mapsto u(x) = \ln(x) \in H^s(0,1)$, avec $s < \frac{1}{2}$.*
En effet, on montre que $\ln(x) \in L^2(0,1)$,

$$\int_0^1 (\ln(x))^2\,dx < +\infty.$$

On a

$$I_0 = \int_0^1 (\ln(x))^2\,dx = \lim_{a\to0^+}\int_a^1 (\ln(x))^2\,dx,$$

on intègre par parties, on obtient

$$\int_a^1 (\ln(x))^2\,dx = -a(\ln(a))^2 - 2\int_a^1 \ln(x)\,dx,$$

on intègre par parties, on obtient

$$\int_a^1 (\ln(x))^2\,dx = -a(\ln(a))^2 + 2a\ln(a) + 2(1-a).$$

Donc,

$$I_0 = \lim_{a\to0^+}\left[-a(\ln(a))^2 + 2a\ln(a) + 2(1-a)\right].$$

Posons $w = \dfrac{1}{a}$ on a alors $a = \dfrac{1}{w}$.
Lorsque a tend vers 0^+, $\dfrac{1}{a}$ tend vers $+\infty$, donc w tend vers $+\infty$. On peut écrire

$$a\ln(a) = \frac{1}{w}\ln\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{-\ln(w)}{w},$$

d'où

$$\lim_{w\to+\infty}\frac{-\ln(w)}{w}=-\lim_{z\to+\infty}\frac{z}{\exp(z)}=0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\lim_{a\to0^+}a(\ln a)^2&=\lim_{w\to+\infty}\frac{1}{w}\left(\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)^2\\&=\lim_{w\to+\infty}\frac{1}{w}\left(-\ln(w)\right)^2\\&=\lim_{z\to+\infty}\frac{z^2}{\exp(z)}=0,\end{aligned}$$

d'où $I_0=2<+\infty$.
Maintenant, on évalue la semi-norme $I=[ln(x)]^2_{H^s(\Omega)}$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\int_0^1\frac{|\ln(x)-\ln(y)|^2}{|x-y|^{2s+1}}\,dx\,dy\\&=\int_0^1\int_0^1\frac{|\ln(x)-\ln(y)|^2}{|y|^{2s+1}\,|\frac{x}{y}-1|^{2s+1}}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

on pose $\vartheta=\dfrac{x}{y}$, *alors*

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\int_0^{\frac{1}{y}}y^{-2s}\frac{|\ln(\vartheta y)-\ln(y)|^2}{|\vartheta-1|^{2s+1}}\,d\vartheta\,dy\\&=\int_0^1y^{-2s}\int_0^{\frac{1}{y}}\frac{|\ln(\vartheta)|^2}{|1-\vartheta|^{2s+1}}\,d\vartheta\,dy\\&=\int_0^1y^{-2s}\left(\int_0^1\frac{|\ln(\vartheta)|^2}{|1-\vartheta|^{2s+1}}\,d\vartheta+\int_1^{\frac{1}{y}}\frac{|\ln(\vartheta)|^2}{|1-\vartheta|^{2s+1}}\,d\vartheta\right)\,dy\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

- *Pour* I_1, *on a*

$\dfrac{|\ln(\vartheta)|^2}{|1-\vartheta|^{2s+1}}$ *est équivalente à* $|\ln(\vartheta)|^2$ *au voisinage de* 0 *et à* $|1-\vartheta|^{1-2s}$ *au voisinage de* 1. *L'intégrale en* ϑ *est donc convergente, et* $\displaystyle\int_0^1 y^{-2s}\,dy<+\infty$ *car* $2s<1$, *d'où* $I_1<+\infty$.

- *Pour* I_2, *par le théorème de Fubini, on a*

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^1y^{-2s}\int_1^{\frac{1}{y}}\frac{|\ln(\vartheta)|^2}{|1-\vartheta|^{2s+1}}\,d\vartheta\,dy\\&=\int_1^{+\infty}\frac{|\ln(\vartheta)|^2}{|1-\vartheta|^{2s+1}}\left(\int_0^{\frac{1}{\vartheta}}y^{-2s}\,dy\right)d\vartheta\\&=\frac{1}{-2s+1}\int_0^{+\infty}\frac{|\ln(\vartheta)|^2}{|1-\vartheta|^{2s+1}}\vartheta^{2s+1}\,d\vartheta.\end{aligned}$$

Or, on a

$\dfrac{1}{|1-\vartheta|^{2s+1}}$ *est équivalente à* $\dfrac{1}{|\vartheta|^{2s+1}}$ *au voisinage de* $+\infty$*, alors* $\dfrac{|\ln(\vartheta)|^2}{|1-\vartheta|^{2s+1}}\vartheta^{2s-1}$ *est équivalente à* $|\ln(\vartheta)|^2\,|\vartheta|^{-2}$ *au voisinage de* $+\infty$ *et au voisinage de* 1 *est équivalente à* $|1-\vartheta|^{1-2s}$.
Donc $I_2 < +\infty$*, ce qui implique que* $I < +\infty$*, d'où le résultat.*

Théorème 1.19 (Trace des fonctions des espaces de Sobolev). [21] *Soit* $1 \leqslant p < \infty$*, il existe une unique application linéaire et continue* $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *qui prolonge l'application de restriction* $u \mapsto u_{|\partial\Omega}$ *définie sur le sous espace dense* $C^1(\overline{\Omega})$.

Cette application appelée application trace, n'est pas surjective. Son image est notée $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.
Pour $p = 2$, on a $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Proprietés 1.3. [21] *On a les propriétés suivantes :*

(1) *Si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, alors* $u_{|\partial\Omega} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ *et*

$$\|u_{|\partial\Omega}\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

De plus l'opérateur trace $u \mapsto u_{|\partial\Omega}$ *est surjectif de* $W^{1,p}(\Omega)$ *sur* $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

(2) *Le noyau de l'opérateur trace est* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, c'est-à-dire*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u_{|\partial\Omega} = 0\right\}.$$

(3) *On a la formule de Green*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} uv(\nu\cdot e_i)\, d\gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

où ν *est le vecteur unitaire de la normale extérieure à* $\partial\Omega$, $\nu\cdot e_i$ *est le produit Euclidien du vecteur* ν *et* e_i*. Les fonctions* u *et* v *sont à comprendre comme* $\gamma_0(u)$ *et* $\gamma_0(v)$.

(4) *Pour* $p \neq 2$ *on a la formule de Green suivante (voir [11])*
Pour $1 \leqslant p, q < +\infty$*, si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $v \in W^{1,q}(\Omega)$ *on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} uv(\nu\cdot e_i)\, d\gamma.$$

1.1.10 Espace de sobolev $W^{1,p}_{\Gamma 1}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ et inégalité de Poincaré généralisée

Définition 1.28 (Espace des fonctions nulles sur une partie de bord). *On définit*

$$W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u = 0 \ \ sur \ \ \Gamma_1\},$$

où Γ_1 *une partie de* $\partial\Omega$.
Si $p = 2$*, on pose* $H^1_{\Gamma 1}(\Omega) = W^{1,2}_{\Gamma 1}(\Omega)$.

Théorème 1.20 (Inégalité de Poincaré). *On suppose que $|\Gamma_1| > 0$, il existe $c > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad \forall u \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega). \tag{1.1}$$

Preuve. Notons d'abord que d'après la définition de la norme $W^{1,p}(\Omega)$ c'est équivalent à montrer que

$$\exists\, c > 1, \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega).$$

Par l'absurde, supposons que l'inégalité de Poincaré (1.1) ne soit pas vérifiée, il existe une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$ telle que

$$\frac{1}{n}\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} > \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Normant cette suite dans $W^{1,p}(\Omega)$, on a la suite $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$ telle que

$$\|v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geqslant 2. \tag{1.3}$$

Sachant que Ω est borné, d'après le théorème de Rellich 1.15 de toute suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ on peut extraire une sous suite convergente pour la norme $\|.\|_{L^p(\Omega)}$.
Donc, $(v_n)_{n\geqslant 2}$ étant bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, on extrait une sous suite, $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente dans $L^p(\Omega)$, donc est en particulier de Cauchy dans $L^p(\Omega)$: $\|v_n - v_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ quand $n, k \to \infty$ avec (1.3) on déduit que

$$\|v_n - v_k\|^2_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v_n - v_k\|^2_{L^p(\Omega)} + \|\nabla(v_n - v_k)\|^2_{L^p(\Omega)} \to 0, \quad n, k \to \infty,$$

et v_n est une suite de Cauchy dans $W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$. $W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$ est complet pour la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ (car fermé dans $W^{1,p}(\Omega)$ complet), et v_n converge vers un élément $v \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$ tel que : $\nabla v = 0$. D'où $v = 0$ puisque Ω un ouvert connexe et v est nul sur une partie de bord, ce qui n'est pas compatible avec $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \|v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, il n'existe donc pas de suite satisfait (1.1) d'où l'existence de $c > 0$. D'où le résultat. □

1.1.11 Cas vectoriel : l'espace $(W^{1,p}(\Omega))^N$ et formule de Green

On s'intéresse ici le cas des champs vectoriels de fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que nous notons $v = (v_1, \cdots, v_N)$ où $v_1, v_2, \cdots, v_N$ sont des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$.
On a les opérateurs vectoriels suivants

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_N}{\partial x_N} \end{pmatrix},$$

$$div(v) = tr(\nabla v) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Proposition 1.4 (Formule de Green). [4] *Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in (W^{1,q}(\Omega))^N$ on a*

$$\int_\Omega u div(v)\, dx + \int_\Omega v \cdot \nabla u\, dx = \int_{\partial\Omega} u(v \cdot \nu)\, d\gamma.$$

1.1.12 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Dans ce paragraphe, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach E.
Pour $T > 0$, $\quad I =]0, T[$, on définit les espaces suivants :

Définition 1.29 (L'espace $L^p(I; E)$). *Soit $1 \leqslant p < \infty$, on définit l'espace*

$$L^p(I;E) = \left\{ f : I \to E \ \text{mesurable telle que} \ \int_I \|f\|_E^p \, dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(I;E)} = \left(\int_I \|f\|_E^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$, on définit l'espace suivant

$$L^\infty(I;E) = \{ f : I \to E \ \text{mesurable} \ \exists c > 0, \ \|f(t)\|_E \leqslant c \ \text{ pour presque tout } t \}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(I;E)} = \inf\{c > 0, \ \|f(t)\| \leqslant c, \ \text{ pour presque tout } t\}.$$

La plupart des propriétés rencontrées dans le cas à valeurs réelles sont encore valables moyennant des hypothèses convenables sur E, on a donc la proposition suivante :

Proposition 1.5. [10] Pour $1 \leqslant p < \infty$, on a les résultats suivants :

(1) Si E est séparable, alors $L^p(I; E)$ est séparable.

(2) Si E est réflexif, alors $L^p(I; E)$ est réflexif, pour tout $1 < p < \infty$

(3) Si E est de Hilbert, alors $L^p(I; E)$ est de Hilbert.

(4) Pour $p = 2$, $L^2(I; E)$ est un espace de Hilbert.

(5) L'ensemble des fonctions continues à valeurs dans E, $C(I; E)$ est dense dans $L^p(I; E)$.

Définition 1.30 (Dualité). *Soit $1 \leqslant p < \infty$ et q deux exposants conjugués. Le dual de $L^p(I; E)$ est $L^q(I, E^{'})$.*

Définition 1.31. *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathbb{R}^+$.*
On note $\mathcal{D}^{'}(I; E)$ l'espace des applications linéaires et continues de $\mathcal{D}(I)$ à valeur dans E.

Définition 1.32 (L'espace $W^{1,p}(I; E)$). *Soit $1 \leqslant p < \infty$, on définit l'espace*

$$W^{1,p}(I,E) = \left\{ u \in L^p(I;E), \ u' \in L^p(I;E) \quad \text{telle que} \quad \int_I u\varphi' \, dt = -\int_I u'\varphi \, dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I) \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(I,E)} = \|u\|_{L^p(I;E)} + \|u'\|_{L^p(I;E)}.$$

Proprietés 1.4. [10]

(1) Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $W^{1,p}(I; E)$ est un espace de Banach.

(2) Si E est séparable et $p < \infty$, alors $W^{1,p}(I; E)$ est séparable.

(3) Si $1 < p < \infty$ et E est séparable réflexif, alors $W^{1,p}(I;E)$ est réflexif.

(4) Pour $p = 2$ on note $H^1(I;E) = W^{1,2}(I;E)$, on a alors $H^1(I;E)$ est de Hilbert.

Théorème 1.21 (Lions-Aubin). [26] *Soient X_0, X et X_1 trois espaces de Banach avec $X_0 \subset X \subset X_1$, supposons que $X_0 \hookrightarrow_{compacte} X \hookrightarrow_{continue} X_1$.*
Soit $1 < p_0, p_1 < \infty$. On suppose que X_0 et X_1 sont réflexifs et on définit

$$W = \{u \in L^{p_0}(I;X_0)\,,\, u' \in L^{p_1}(I;X_1)\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(I;X_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(I;X_1)},$$

alors $W \hookrightarrow_{compacte} L^{p_0}(I;X)$.

Lemme 1.3 (de Simon). [25] *Soient X_0, X, X_1 trois espaces de Banach tels que, l'injection de $X_0 \subset X$ est compacte. Si F est borné dans $L^p(I;X_0)$ où $1 < p < \infty$, et $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t},\quad f \in F\right\}$ est borné dans $L^1(I;X_1)$. Alors F est relativement compact dans $L^p(I;X)$.*
Si F est borné dans $L^\infty(I;X_0)$, et $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ est borné dans $L^r(I;X_1)$ où $r > 1$, alors F est relativement compact dans $C([0,T];X)$. (i.e l'ensemble des fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans X.)

1.2 Topologies faibles

Le but des topologies faibles est de gagner la compacité dans les espaces de dimension infinie.

Théorème 1.22. [22] *Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *E est de dimension finie.*

(2) *La boule unité fermée de E est compacte (pour la topologie définie par sa norme : de toute suite bornée de E, on peut extraire une sous suite convergente).*

Lorsque E est de dimension infinie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de E, que peut on dire ?
Par exemple avec $E = L^p(\Omega)$, on va voir qu'il existe une sous suite qui converge faiblement dans $L^p(\Omega)$.

Définition 1.33 (Topologie faible). *Soit E un espace de Banach. La topologie faible $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications*

$$\begin{aligned} \varphi_g :\ & E \ \to \mathbb{R} \\ & f \ \mapsto \langle g, f\rangle_{E',E}, \quad \forall g \in E'. \end{aligned}$$

Définition 1.34. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si*

$$\langle f, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}, \quad \forall f \in E'.$$

Dans ce cas x s'appelle limite faible de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1.6. [5] *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E*

(1) *Si* $x_n \to x$ *fortement, alors* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E^{'})$.

(2) *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E^{'})$*, alors* $\|x_n\|$ *est bornée et* $\|x\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$.

(3) *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E^{'})$ *et si* $f_n \to f$ *fortement dans* $E^{'}$ *(i.e* $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$*), alors* $\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$.

Le résultat suivant donne une caractérisation importante des espaces réflexifs.

Théorème 1.23 (Kakutani). [5] *Soit* E *un espace de Banach. Alors* E *est réflexif si et seulement si*

$$B_E = \{x \in E \ \ \|x\| \leqslant 1\},$$

est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E^{'})$*. (*E *est réflexif si et seulement si de toute suite bornée de* E*, on peut extraire une sous suite faiblement convergente).*

Définition 1.35 (La topologie faible *). [5] *La topologie faible * sur* $E^{'}$, $\sigma(E^{'}, E)$ *est la topologie la moins fine telle que toute les applications*

$$\begin{aligned} J_x : \ & E^{'} \to \mathbb{R} \\ & f \longmapsto \langle f, x\rangle_{E',E}, \quad \forall x \in E, \end{aligned}$$

soient continues.

Proposition 1.7. [5] *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $E^{'}$*. On a*

(1) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E^{'}, E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}, \quad \forall x \in E$.

(2) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E^{'}, E)$*, alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$.

(3) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E^{'}, E)$ *et si* $x_n \to x$ *fortement dans* E*, alors* $\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$.

Remarque 1.2. *Si* $E = L^p(\Omega)$

- *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement vers* u *si* $u_n, u \in L^p(\Omega)$ *et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

  on note cette convergence par $u_n \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$.

- *Si* $1 \leqslant p < \infty$*, on dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* u *dans* $L^p(\Omega)$*, si* u_n *et* $u \in L^p(\Omega)$ *et si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^q(\Omega),$$

  où $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *on note* $u_n \rightharpoonup u$.

- *Si* $p = \infty$*, on dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement * vers* u *et on note* $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$*, si* $u_n, \ u \in L^\infty(\Omega)$ *et si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

- *On parle de convergence faible * dans $L^\infty(\Omega)$ au lieu de convergence faible, car le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient strictement $L^1(\Omega)$ et il est strictement plus grand que $L^1(\Omega)$.*
- *La boule unité fermée $B_{L^\infty(\Omega)}$ est compacte pour la topologie faible *, $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.*

- *Si (f_n) est une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$ on peut extraire une sous suite qui converge dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie faible *, $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.*

Exemple 1.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies par*

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,2n]}(x),$$

(1) *$u_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans $L^2([0,+\infty[)$. Pour montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2([0,+\infty[)$, on doit prouver que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall\varphi \in L^2([0,+\infty[),$$

comme l'espace des fonctions à support compact est dense dans $L^2([0,+\infty[)$. Il suffit de prouver le résultat lorsque φ est une fonction continue à support compact, on a

$$\int_0^{+\infty} u_n(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{2n}\varphi(x)\,dx.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

d'où $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2([0,+\infty[)$.

(2) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$, mais elle converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p > 2$.*
Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers 0.
Par l'absurde, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers une fonction $u \in L^2([0,+\infty[)$. Alors, il existe une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers u, ce qui implique que $u = 0$ est la seule limite possible. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|u_n\|_2 &= \int_0^{+\infty}|u(x)|^2\,dx\\ &= \frac{1}{n}\int_n^{2n} dx = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

donc, $\|u_n\|_2$ ne tend pas vers $\|u\|_2 = 0$, ce qui contredit le fait que u_n converge vers u dans $L^2([0,+\infty[)$.
Maintenant, on montre que $\|u_n\|_{L^p([0,+\infty[)} \to 0$ quand $n\to+\infty$. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty}|u_n(x)|^p\,dx = \int_n^{2n} n^{-\frac{p}{2}}\,dx = n^{1-\frac{p}{2}}.$$

Pour $p > 2$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|u_n(x)|^p\,dx = 0,$$

d'où u_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

Chapitre 2

Généralité sur les fluides et Formulation variationnelle du problème de Stokes

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'écoulement isotherme d'un fluide Newtonien incompressible et instationnaire, gouverné par l'équation de Stokes occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, (voir [3])
On introduit les équations qui gouvernent cet écoulement, ainsi que les conditions aux limites et initiales. On considère le problème instationnaire décrivant dans un domaine borné, le mouvement d'un fluide Newtonien incompressible. Ce problème est déduit des lois de conservations de la quantité de mouvement et de la masse. Ensuite, on établit la formulation variationnelle de ce problème.

2.1 Généralité sur les fluides

Un fluide est un corps dont les molécules ont peu d'adhésion et peuvent glisser librement les unes sur les autres (liquides) ou se déplacer indépendamment les unes des autres (gaz). Les fluides n'ont pas de forme propre donc ils se déforment facilement.

Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles :

La famille des fluides Newtoniens : (comme l'eau, le miel $\cdots$)
Un fluide Newtonien est un fluide dont la viscosité ne dépend pas des contraintes qui lui sont appliquées. Autrement dit sa viscosité ne varie pas quand on agite le fluide. Elle peut néanmoins dépendre d'autres facteurs tels que la température (dans ce cas le fluide est dit non isotherme), si elle ne dépend pas de la température dans ce cas le fluide est dit isotherme.

La famille des fluides non-Newtoniens : (comme le sang, le gel, la graisse $\cdots$)
Un fluide non-Newtonien est un fluide dont la viscosité ne dépend pas seulement de la température mais peut être dépendre du temps et de la vitesse. Par conséquent le tenseur des contraintes n'est plus une fonction linéaire par rapport au tenseur de déformation.

On cite deux types des fluides non-Newtoniens :

a- Les fluides rhéofluidifiants (Pseudo plastiques)
Plus le fluide est cisaillé, moins il est visqueux. Un bon exemple est la peinture. La peinture est

très visqueuse lorsqu'on la verse, car le taux de cisaillement est faible. Pourtant, lorsque nous appliquons la peinture sur un mur, la couche fine de peinture entre le pinceau et le mur devient moins visqueuse car le taux de cisaillement augmente.
On cite aussi le sang, certains polymères fondus $\cdots$

b- Les fluides rhéoépaississants (Dilatans)
Les fluides rhéoépaississants sont des fluides qui, (à l'inverse des fluides rhéofluidifiants), c'est-à-dire plus le fluide est cisaillé, plus il devient visqueux. Comme le mélange de l'eau et de la maïzena.

Les lois de conservations de la masse et de la quantité de mouvement sont définies respectivement par :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + div(\rho_0 v) = 0 \quad dans \quad \Omega \times]0, T[, \tag{2.1}$$

et

$$\rho_0(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v) = div(\sigma) + \rho_0 f \quad dans \quad \Omega \times]0, T[, \tag{2.2}$$

où v, ρ_0 désignent respectivement la vitesse et la densité du fluide, $f = (f_1, f_2, f_3)$ est le vecteur des forces extérieures données. $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ est le tenseur des contraintes.
Si la densité est constante (on prend $\rho = 1$), le fluide est alors incompressible et les équations (2.1) et (2.2) deviennent

$$div(v) = 0 \quad dans \quad \Omega \times]0, T[, \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = div(\sigma) + f \quad dans \quad \Omega \times]0, T[. \tag{2.4}$$

Le tenseur des contraintes est donné par la loi de puissance (voir [12])

$$\sigma_{ij} = k \dot{\gamma}^{\kappa - 1} d_{ij}(v) - p\delta_{ij},$$

où k est une fonction constante donnée, p désigne la pression et

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker, $\dot{\gamma}$ est le taux de déformation donné par

$$\dot{\gamma} = 2|D(v)| \cdot$$

Avec, $D(v) = (d_{ij}(v))_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ est le tenseur des taux de déformation défini par

$$d_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3.$$

On utilise ici et dans toute la suite la convention de sommation d'Einstein qui consiste à supprimer la somme sur les indices répétés.
On note

$$|D(v)| = \left(d_{ij}(v) d_{ij}(v)\right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme Euclidienne de $D(v)$.
Le produit de deux tenseurs σ et $D(v)$ est défini par

$$\sigma : D(v) = \sigma_{ij}(v) d_{ij}(v) \cdot$$

(1) Si $0 < \kappa < 1$, le fluide est rhéofluidifiant ou pseudoplastique.

(2) si $\kappa = 1$, il est Newtonien.

(3) Si $\kappa > 1$, il est rhéoépaissisant ou dilatant.

Pour avoir le tenseur des contraintes, on prend $\kappa = r - 1$, k constante et on pose

$$\mu = 2^{r-3}k,$$

où μ est la viscosité du fluide qui est constante. Donc

$$\sigma_{ij} = 2\mu|D(v)|^{r-2}d_{ij}(v) - p\delta_{ij}.$$

Donc, avec les trois cas précédents on a :

- Si $r = 2$ le fluide est Newtonien car μ est constante. (ie. le tenseur des contraintes est une fonction linéaire par rapport au tenseur de déformation).
- Si $1 < r < 2$ le fluide est de type 1.
- Si $r > 2$ le fluide est de type 3.

Donc (2.4) devient

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) - 2div\left(\mu|D(v)|^{r-2}D(v)\right) + \nabla p = f \quad dans \quad \Omega\times]0,T[. \tag{2.5}$$

Le problème complet est donné par le système de Navier-Stokes instationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v - 2div(\mu|D(v)|^{r-2}D(v)) + \nabla p = f & dans \quad \Omega\times]0,T[, \\ div(v) = 0 & dans \quad \Omega\times]0,T[. \end{cases}$$

Si on néglige le terme de convection dans le système précédent on obtient le système de Stokes instationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - 2div(\mu|D(v)|^{r-2}D(v)) + \nabla p = f & dans \quad \Omega\times]0,T[, \\ div(v) = 0 & dans \quad \Omega\times]0,T[. \end{cases}$$

Si les variables décrivant le mouvement (la vitesse, la pression $\cdots$) ne dépend pas explicitement du temps $\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \cdots\right)$, on obtient respectivement les systèmes de Navier-Stokes et de Stokes stationnaires suivants

$$\begin{cases} v \cdot \nabla v - 2div(\mu|D(v)|^{r-2}D(v)) + \nabla p = f & dans \quad \Omega, \\ div(v) = 0 & dans \quad \Omega. \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} -2div(\mu|D(v)|^{r-2}D(v)) + \nabla p = f & dans \quad \Omega, \\ \quad div(v) = 0 & dans \quad \Omega. \end{cases}$$

2.1.1 Position du problème

Soit ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$ de frontière lipschitzienne continue, on considère le domaine Ω *de* $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad et \quad 0 < x_3 < h(x')\},$$

où h est une fonction lipschitzienne vérifie

$$\exists h_0, h_1 \in \mathbb{R}, \quad 0 < h_0 \leqslant h(x') \leqslant h_1.$$

On décompose la frontière de Ω comme suit : $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_L \cup \Gamma_1$ avec

$$\Gamma_0 = \{(x', x_3) \in \overline{\Omega} \quad x_3 = 0\}.$$
$$\Gamma_1 = \{(x', x_3) \in \overline{\Omega} \quad x_3 = h(x')\}.$$

Γ_L est la partie latérale de la frontière.

Dans ce travail on étudie le cas $r = 2$, on obtient (voir [3])

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 2div(\mu D(v)) + \nabla p = f \quad dans \quad \Omega\times]0, T[, \tag{2.6}$$

et

$$div(v) = 0 \quad dans \quad \Omega\times]0, T[. \tag{2.7}$$

Pour que le problème soit complet on rajoute au système une condition initiale et des conditions aux limites.

La condition initiale est donnée par

$$v(0, \cdot) = v^0 \quad dans \quad \Omega. \tag{2.8}$$

Les conditions aux limites

On note par $n = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière de Ω, et par $u \cdot v$ (respectivement $|v|$) le produit Euclidien du vecteur u et v (respectivement la norme Euclidienne).

On définit les vitesses normales et tangentielles sur $\Gamma_0\times]0, T[$ par

$$v_n = v \cdot n = v_i n_i, \quad v_\tau = (v_{\tau_i})_{1 \leqslant i \leqslant 3}, \quad avec \quad v_{\tau_i} = v_i - v_n n_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

Et la composante normale et tangentielle du tenseur des contraintes $\sigma = -pId + 2\mu D(v)$ par :

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j, \quad \sigma_\tau = (\sigma_{\tau_i})_{1 \leqslant i \leqslant 3} \quad avec \quad \sigma_{\tau_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

Afin de donner les conditions aux limites pour la vitesse sur la frontière de Ω, on introduit la fonction $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$\int_{\Gamma_L} g_n \, d\gamma = 0, \quad g = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \quad g_n = 0 \quad et \quad g_\tau = 0 \quad sur \quad \Gamma_0.$$

On suppose que la vitesse du fluide vérifie la condition du Dirichlet homogène sur $\Gamma_1\times]0, T[$ et de Dirichlet non homogène sur $\Gamma_L\times]0, T[$ respectivement

$$v = 0 \qquad sur \quad \Gamma_1\times]0, T[, \tag{2.9}$$

$$v = g\xi \quad sur \quad \Gamma_L \times]0,T[, \tag{2.10}$$

où $\xi : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que $\xi(0) = 1$.
La composante normale de la vitesse sur $\Gamma_0 \times]0,T[$ est nulle

$$v_n = v \cdot n = 0 \quad sur \quad \Gamma_0 \times]0,T[, \tag{2.11}$$

alors que la composante de la vitesse tangentielle sur $\Gamma_0 \times]0,T[$ satisfait la condition de Tresca

$$|\sigma_\tau| \leqslant l, \quad sur \quad \Gamma_0 \times]0,T[,$$

où l est une fonction strictement positive dépendante de t et x' appelée le seuil limite pour cette contrainte tangentielle.
Tant que la contrainte tangentielle σ_τ n'a pas atteint le seuil l, la vitesse tangentielle est nulle, il y a un blocage.
Lorsque le seuil est atteint, le fluide et la surface se déplacent tangentiellement l'un par rapport à l'autre, et il y'a glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Ce qui peut se résumé comme suit

$$\begin{matrix} |\sigma_\tau| < l \Longrightarrow v_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = l \Longrightarrow \exists \lambda \geqslant 0, \quad v_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{matrix} \quad sur \quad \Gamma_0 \times]0,T[. \tag{2.12}$$

Finalement, le problème complet consiste donc à trouver le champ de vitesse v et la pression p vérifiant les équations, les conditions aux limites et la condition initiale suivantes :

$$(\mathrm{P}_0) \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - 2div(\mu D(v)) + \nabla p = f & dans \quad \Omega \times]0,T[, \\ div(v) = 0 & dans \quad \Omega \times]0,T[, \\ v = 0 & sur \quad \Gamma_1 \times]0,T[, \\ v = g\xi & sur \quad \Gamma_L \times]0,T[, \\ v_n = v \cdot n = 0 & sur \quad \Gamma_0 \times]0,T[, \\ \begin{matrix} |\sigma_\tau| < l \Longrightarrow v_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = l \Longrightarrow \exists \lambda \geqslant 0, \quad v_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{matrix} & sur \quad \Gamma_0 \times]0,T[, \\ v(0,\cdot) = v^0 & dans \quad \Omega. \end{cases}$$

Lemme 2.1. *La condition aux limites de Tresca* (2.12) est équivalente à la relation suivante

$$v_\tau \cdot \sigma_\tau + l|v_\tau| = 0 \quad sur \quad \Gamma_0 \times]0,T[. \tag{2.13}$$

Preuve. Supposons que v vérifie la condition de Tresca

- Si $|\sigma_\tau| < l$, alors $v_\tau = 0$ d'où (2.13).
  Si $|\sigma_\tau| = l$, alors il existe $\lambda \geqslant 0$, telle que $v_\tau = -\lambda \sigma_\tau$ d'où

$$v_\tau \cdot \sigma_\tau + l|v_\tau| = -\lambda|\sigma_\tau|^2 + \lambda|\sigma_\tau|^2 = 0.$$

- **Inversement :** supposons que (2.13) est vérifié
  - Si $|\sigma_\tau| = l$ alors
$$v_\tau \cdot \sigma_\tau = -|v_\tau||\sigma_\tau|. \tag{2.14}$$
D'autre part, on a
$$v_\tau \cdot \sigma_\tau = |v_\tau||\sigma_\tau| \cos(v_\tau, \sigma_\tau). \tag{2.15}$$
De (2.14) et (2.15), on a
$$\cos(v_\tau, \sigma_\tau) = -1,$$
ce qui montre que v_τ et σ_τ sont colinéaires et de sens opposés c-à-d,
$$\exists \lambda \geqslant 0, \quad tel \;\; que \quad v_\tau = -\lambda \sigma_\tau.$$
  - Si $|\sigma_\tau| < l$
$$\begin{aligned} 0 = v_\tau \cdot \sigma_\tau + l|v_\tau| &\geqslant -|v_\tau||\sigma_\tau| + l|v_\tau| \\ &= |v_\tau|(\underbrace{l - |\sigma_\tau|}_{>0}), \end{aligned}$$
donc $|v_\tau| = 0$, d'où le résultat.

$\square$

2.2 Formulation variationnelle du problème

Afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème, on introduit les espaces fonctionnels suivants :
$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \varphi \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 : \quad \varphi = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L, \quad \varphi_n = 0 \quad sur \quad \Gamma_0 \right\},$$
$$\mathcal{V}_{0.div} = \{ \varphi \in \mathcal{V}_0 \ : \quad div(\varphi) = 0, \quad dans \quad \Omega \},$$
qui sont des sous-espaces vectoriels de $(H^1(\Omega))^3$.
On note par $L^2_0(\Omega)$ le sous espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle
$$L^2_0(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \ : \quad \int_\Omega q \, dx = 0 \right\}.$$
On suppose que
$$f \in L^2\left(0, T; \left(L^2(\Omega)\right)^3\right), \tag{2.16}$$
$$\mu \in \mathbb{R}^*_+ , \quad \xi \in C^\infty([0,T], \mathbb{R}) \quad telle \quad que \quad \xi(0) = 1, \tag{2.17}$$
$$l \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0; \mathbb{R}^+)), \tag{2.18}$$
avec $T > 0$.

Si $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, alors (voir [17])

$$\exists\, G_0 \in \left(H^1(\Omega)\right)^3, \quad div(G_0) = 0 \quad dans \quad \Omega, \quad G_0 = g \quad sur \quad \partial\Omega. \tag{2.19}$$

De plus, pour nous ramener à des conditions aux limites homogènes sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$, nous procédons à un changement d'inconnue, on pose

$$\tilde{v} = v - G_0\xi.$$

Comme $G_{0\tau} = 0$ sur Γ_0, on a

$$\tilde{v}_\tau = v_\tau - G_{0\tau}\xi = v_\tau.$$

Donc, d'après le lemme 2.1, on a

$$\sigma_\tau \cdot \tilde{v}_\tau + l|\tilde{v}_\tau| = 0 \quad sur \quad \Gamma_0\times]0,T[. \tag{2.20}$$

Maintenant, on considère le problème suivant :

<u>Problème</u> (P) Trouver :

$$\tilde{v} \in L^2(0,T;\mathcal{V}_{0.div}) \cap L^\infty\left(0,T;(L^2(\Omega))^3\right), \quad p \in H^{-1}\left(0,T;L^2_0(\Omega)\right),$$

tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ et pour tout $\chi \in \mathcal{D}(0,T)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{dt}(\tilde{v},\varphi),\chi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} - \langle (p, div(\varphi)),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} \\
&+ \int_0^T a(\tilde{v},\varphi\chi)dt + \Psi(\tilde{v}+\varphi\chi) - \Psi(\tilde{v}) \geqslant \langle (f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} \\
&- \int_0^T a(G_0\xi,\varphi\chi)dt - \left\langle \left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

où

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega 2\mu D(u) : D(v)\, dx \\
&= \int_\Omega 2\mu d_{ij}(u) d_{ij}(v)\, dx\,, \quad \forall (u,v) \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 \times \left(H^1(\Omega)\right)^3,
\end{aligned}$$

et

$$\Psi(u) = \int_0^T \int_{\Gamma_0} l(x',t)|u(x',t)|dx'dt, \quad \forall u \in L^2\left(0,T;(L^2(\Gamma_0))^3\right),$$

avec la condition initiale

$$\tilde{v}(0,\cdot) = \tilde{v}^0 = v^0 - G_0\xi(0) = v^0 - G_0, \tag{2.22}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^3$.

Théorème 2.1. *Le problème fort* (P_0) *conduit au problème* (P).

Preuve. On multiplie (2.6) par une fonction test $\varphi\chi$, avec $\varphi \in \mathcal{V}_0$ et $\chi \in \mathcal{D}(0,T)$, on intègre sur Ω puis de 0 à T, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \varphi\chi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (div(2\mu D(v)) + \nabla p) \cdot \varphi\chi \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi\chi \, dx \, dt. \tag{2.23}$$

On utilise la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_\Omega div(2\mu D(v)) \cdot \varphi\chi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla p \cdot \varphi\chi \, dx \, dt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega div(\sigma) \cdot \varphi\chi \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \sigma_{ij} \partial_j \varphi_i \chi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\varphi_i\chi) n_j \, d\gamma \, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega 2\mu \, d_{ij}(v) \partial_j \varphi_i \chi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega p \, div(\varphi)\chi \, dx \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\varphi_i\chi) n_j \, d\gamma \, dt.
\end{aligned}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ on a $\varphi_i = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\varphi_i\chi) n_j \, d\gamma \, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}(\varphi_i\chi) n_j \, dx' \, dt.$$

D'autre part, $\sigma_{ij} n_j = \sigma_{\tau_i} + \sigma_n n_i$, donc on obtient

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}(\varphi_i\chi) n_j \, dx' \, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{\tau_i}(\varphi_i\chi) \, dx' \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_n n_i(\varphi_i\chi) \, dx' \, dt,$$

et pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ on a $\varphi_i n_i = 0$ sur Γ_0 donc

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}(\varphi_i\chi) n_j \, dx' \, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{\tau_i}(\varphi_i\chi) dx' dt.$$

L'équation (2.23) devient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \varphi\chi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega 2\mu \, d_{ij}(v) \partial_j \varphi_i \chi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega p \, div(\varphi)\chi dx \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{\tau_i}(\varphi_i\chi) \, dx' \, dt = \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi\chi \, dx \, dt.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

On remplace v par $\tilde{v} + G_0\xi$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \cdot \varphi\chi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial G_0\xi}{\partial t} \cdot \varphi\chi \, dx \, dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega 2\mu \, d_{ij}(\tilde{v}) \partial_j \varphi_i \chi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega 2\mu \, d_{ij}(G_0\xi) \partial_j \varphi_i \chi \, dx \, dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega p \, div(\varphi)\chi dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi\chi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{\tau_i}(\varphi_i\chi) \, dx' \, dt,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

on ajoute aux deux membre de l'équation le terme $\int_0^T \int_{\Gamma_0} l(|\tilde{v} + \varphi\chi| - |\tilde{v}|)\, dx'\, dt$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \cdot \varphi\chi\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial G_0\xi}{\partial t} \cdot \varphi\chi\, dx\, dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega 2\mu\, d_{ij}(\tilde{v})\partial_j\varphi_i\chi\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega 2\mu\, d_{ij}(G_0\xi)\partial_j\varphi_i\chi\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega p\, div(\varphi)\chi dx\, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_0} l(|\tilde{v} + \varphi\chi| - |\tilde{v}|)\, dx'\, dt = \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi\chi\, dx\, dt + \int_0^T \beta\, dt,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

où

$$\begin{aligned}
\beta &= \int_{\Gamma_0} \sigma_{\tau_i}(\varphi_i\chi) + l(|\tilde{v} + \varphi\chi| - |\tilde{v}|)\, dx' \\
&= \int_{\Gamma_0} \sigma_{\tau_i}(\varphi_i\chi) + \sigma_\tau \cdot \tilde{v} - \sigma_\tau \cdot \tilde{v} + l(|\tilde{v} + \varphi\chi| - |\tilde{v}|)\, dx'.
\end{aligned}$$

Montrons que β positif. On déduit de (2.11) et $G_0 \cdot n = 0$ sur Γ_0 que

$$\tilde{v} \cdot n = 0 \quad sur \quad \Gamma_0\times]0, T[.$$

D'où $\tilde{v} = \tilde{v}_\tau$, et d'après (2.20), le terme β devient

$$\beta = \int_{\Gamma_0} (\sigma_\tau \cdot (\tilde{v} + \varphi\chi) + l|\tilde{v} + \varphi\chi|)\, dx'.$$

Comme $|\sigma_\tau| \leqslant l$ et $\sigma_\tau \cdot (\tilde{v} + \varphi\chi) \geqslant -|\sigma_\tau||\tilde{v} + \varphi\chi|$ sur $\Gamma_0\times]0, T[$, alors

$$\sigma_\tau \cdot (\tilde{v} + \varphi\chi) + l|\tilde{v} + \varphi\chi| \geqslant 0 \quad sur \quad \Gamma_0\times]0, T[.$$

Donc β est positif, et (2.26) devient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \cdot \varphi\chi\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial G_0\xi}{\partial t} \cdot \varphi\chi\, dx\, dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega 2\mu\, d_{ij}(\tilde{v})\partial_j\varphi_i\chi\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega 2\mu\, d_{ij}(G_0\xi)\partial_j\varphi_i\chi\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega p\, div(\varphi)\chi dx\, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_0} l(|\tilde{v} + \varphi\chi| - |\tilde{v}|)\, dx'\, dt \geqslant \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi\chi\, dx\, dt,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution.

Dans ce chapitre, on prouve l'existence et l'unicité de la vitesse et la pression solutions de l'inéquation variationnelle parabolique associée au problème (P). Pour cela, on commence par régulariser la condition aux limites de Tresca, on approche ainsi l'inéquation variationnelle obtenue par une équation variationnelle dont on démontre l'existence de la vitesse par la méthode de Galerkin avec une fonction test à divergence nulle. Puis, on montre l'existence de la pression en utilisant le théorème de De Rham. Enfin, on démontre l'unicité de la solution du problème.

Dans la suite de ce chapitre, pour simplifier les notations, on note $\mathbf{Y} = Y^3$ pour les espaces fonctionnels Y. De plus, on note indifféremment $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ou ∂_i.

3.1 Résultats Fondamentaux

On a besoin des résultats suivants :

Lemme 3.1. *Pour tout $u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega |D(u)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega |D(u)|^2 \, dx &= \int_\Omega \left| \frac{1}{2}\nabla u + \frac{1}{2}(\nabla u)^t \right|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u| + \frac{1}{2}|(\nabla u)^t| \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Comme la fonction carré est convexe et de

$$|\nabla u|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq 3} |\partial_j u_i|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq 3} |\partial_i u_j|^2 = |(\nabla u)^t|^2,$$

on termine la preuve. □

Théorème 3.1 (Inégalité de Korn). [19] *Pour tout $u \in \mathcal{V}_0$, il existe $C_{Korn} > 0$,*

$$\left(\int_\Omega |D(u)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant C_{Korn} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Du lemme 3.1 et l'inégalité de Korn, on déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\alpha \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leqslant 2 \int_\Omega \mu |D(u)|^2 \, dx \leqslant 2\mu \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \tag{3.1}$$

Lemme 3.2. *On a*

$$\left| \int_\Omega D(u) : D(v) \, dx \right| \leq \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in \mathbf{H}^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Preuve. En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega D(u) : D(v) \, dx \right| &= \left| \int_\Omega d_{ij}(u) d_{ij}(v) \, dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |d_{ij}(u) d_{ij}(v) \, dx| \\ &\leq \int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^3 |d_{ij}(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{ij=1}^3 |d_{ij}(v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^3 |\partial_j u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{ij=1}^3 |\partial_j v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega D(u) : D(v) \, dx \right| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2 (Carathéodory). [6] *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \mathcal{F}(t, X), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

où la fonction $\mathcal{F}$ est définie sur

$$R = \{(t, X); \quad |t - t_0| \leqslant a \quad et \quad \|X - X_0\| \leqslant b\}.$$

Si $\mathcal{F}$ satisfait les conditions suivantes sur R

(1) $\mathcal{F}(\cdot, X)$ est mesurable en t.
(2) $\mathcal{F}(t, \cdot)$ est continue en X.
(3) Il existe une fonction M positive et intégrable au sens de Lebesgue, définie sur l'intervalle $|t - t_0| \leqslant a$ telle que

$$|\mathcal{F}(t, X)| \leqslant M(t), \quad \forall (t, X) \in R.$$

Alors le système (3.3) admet au moins une solution locale.

Lemme 3.3 (de Gronwall). [1] *Soient ψ et $y : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant*

$$\exists c \geqslant 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad y(t) \leqslant c + \int_0^t \psi(s)y(s)\, ds.$$

Alors,

$$\forall t \in [0,T], \quad y(t) \leqslant c \exp\left(\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

Maintenant on définit les espaces suivants

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathbf{D}(\Omega), \quad div(\varphi) = 0\}.$$

$$H^1_{0.div}(\Omega) = \{\varphi \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \quad div(\varphi) = 0\}.$$

Théorème 3.3 (de De Rham). [17] *Soit $L \in \mathbf{D}(\Omega)$ satisfait*

$$\forall \varphi \in \mathcal{V}, \quad \langle L, \varphi\rangle_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} = 0.$$

Alors, il existe une distribution $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$L = \nabla p.$$

Le lemme suivant établit une première simplification du théorème de De Rham.

Lemme 3.4. [17] *Soit $L \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ vérifiant*

$$\forall \varphi \in H^1_{0.div}, \quad \langle L, \varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}^1_0(\Omega)} = 0,$$

si et seulement si, il existe un unique $p \in L^2(\Omega)$ (à une constante près car Ω connexe) tel que

$$L = \nabla p.$$

3.2 Problème régularisé (P_ε)

La formulation variationnelle du problème (P) conduit à une inéquation variationnelle à cause de la condition de Tresca impliquant la fonction Ψ, qui est continue et convexe mais n'est pas différentiable.
Pour résoudre cette difficulté, on utilise la régularisation de Ψ. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, on introduit Ψ_ε définie par (voir [2])

$$\Psi_\varepsilon(u) = \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\sqrt{\varepsilon^2 + |u|^2}\, dx'\, dt, \quad \forall u \in L^2\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_0)\right),$$

Ψ_ε est Gâteaux-différentiable dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$, et pour tout $u \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$, $\Psi'_\varepsilon(u) \in (L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)))' = L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Gamma_0))$ est donnée par

$$\langle \Psi'_\varepsilon(u), w\rangle = \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\frac{u \cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2 + |u|^2}}\, dx'\, dt, \quad \forall w \in L^2\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_0)\right),$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)\right)$. En effet, on montre que

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\Psi_\varepsilon(u+\lambda v)-\Psi_\varepsilon(u)}{\lambda}=\left\langle\Psi'_\varepsilon(u),v\right\rangle,$$

et elle est une forme linéaire continue en v.
On a,

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi_\varepsilon(u+\lambda v)-\Psi_\varepsilon(u)}{\lambda} &= \int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{l\left(\sqrt{\varepsilon^2+|u+\lambda v|^2}-\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}\right)}{\lambda}\,dx'\,dt\\
&= \int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{l\left(\varepsilon^2+|u+\lambda v|^2-(\varepsilon^2+|u|^2)\right)}{\lambda\left(\sqrt{\varepsilon^2+|u+\lambda v|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}\right)}\,dx'\,dt\\
&= \int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{l\left(|u|^2+\lambda^2|v|^2+2\lambda\,u\cdot v-|u|^2\right)}{\lambda\left(\sqrt{\varepsilon^2+|u+\lambda v|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}\right)}\,dx'\,dt\\
&= \int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{l\left(\lambda|v|^2+2\,u\cdot v\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+|u+\lambda v|^2}+\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\,dx'\,dt,
\end{aligned}$$

en fait tendre λ vers 0^+, en utilisant le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\Psi_\varepsilon(u+\lambda v)-\Psi_\varepsilon(u)}{\lambda}=\int_0^T\int_{\Gamma_0} l\frac{u\cdot v}{\sqrt{\varepsilon^2+|u|^2}}\,dx'\,dt.$$

On vérifie facilement que cette forme est linéaire et continue en v.

On remplace dans l'inéquation (2.21) Ψ par Ψ_ε et φ par $\beta\varphi$, où $\beta>0$. On devise l'inéquation obtenue par β, puis on fait tendre $\beta\to 0$, on obtient (voir [27])

$$\begin{aligned}
&\left\langle\frac{d}{dt}(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}-\langle(p_\varepsilon,div(\varphi)),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}\\
&+\int_0^T a(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)dt+\lim_{\beta\to 0}\frac{\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon+\beta\varphi\chi)-\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)}{\beta}\geqslant\langle(f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}\\
&-\int_0^T a(G_0\xi,\varphi\chi)dt-\left\langle\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)},
\end{aligned}\tag{3.4}$$

comme

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon+\beta\varphi\chi)-\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)}{\beta}=\langle\Psi'_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon),\varphi\chi\rangle,$$

on remplace dans l'inéquation précédente χ par $-\chi$, on obtient l'équation variationnelle suivante

$$\begin{aligned}
&\left\langle\frac{d}{dt}(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}-\langle(p_\varepsilon,div(\varphi))\,,\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}\\
&+\int_0^T a(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)\,dt+\langle\Psi'_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon),\varphi\chi\rangle=\langle(f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}\\
&-\int_0^T a(G_0\xi,\varphi\chi)\,dt-\left\langle\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}.
\end{aligned}$$

On considère le problème approché suivant

Problème (P_ε) Trouver

$$\tilde{v}_\varepsilon \in L^2(0,T;\mathcal{V}_{0.div}) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad p_\varepsilon \in H^{-1}(0,T;L_0^2(\Omega)),$$

tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$, pour tout $\chi \in \mathcal{D}(0,T)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{dt}(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi),\chi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} - \langle (p_\varepsilon, div(\varphi)), \chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} \\
&+ \int_0^T a(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)\,dt + \langle \Psi'_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon),\varphi\chi\rangle = \langle (f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} \\
&- \int_0^T a(G_0\xi,\varphi\chi)\,dt - \left\langle \left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

avec la condition initiale

$$\tilde{v}_\varepsilon(0,\cdot) = \tilde{v}^0. \tag{3.6}$$

3.3 Existence de solutions du problème (P_ε)

3.3.1 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode, ou plutôt une famille de méthodes, très générale. Son idée est la suivante. Partant d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché en dimension finie, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème du départ.

Soit $\mathbf{H}$ la fermeture de $\{\varphi \in \mathbf{D}(\Omega), \quad div(\varphi) = 0\}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$,

$$\mathbf{H} = \{\varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega); \quad div(\varphi) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \varphi_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

(voir [26]), on déduit qu'il existe une base Hilbertienne $(w_i)_{i\geqslant 1}$ de $\mathbf{H}$ qui est orthonormale pour le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $(w_i)_{i\geqslant 1}$ est aussi une base Hilbertienne de $\mathcal{V}_{0.div}$, orthogonale pour le le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Alors, pour tout $m \geqslant 1$, on a la fonction $\tilde{v}_{\varepsilon m}$ donnée par

$$\tilde{v}_{\varepsilon m}(t,x) = \sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j}(t) w_j(x), \quad \forall t \in]0,T[, \ \forall x \in \Omega, \tag{3.7}$$

tel que, pour tout $k \in \{1,\cdots,m\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, w_k\right) + a(\tilde{v}_{\varepsilon m}, w_k) + \int_{\Gamma_0} l \frac{\tilde{v}_\varepsilon \cdot w_k}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon|^2}} dx' \\
&= (f,w_k) - a(G_0\xi, w_k) - \left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t}, w_k\right), \quad \text{p.p dans }]0,T[,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

avec la condition initiale
$$\tilde{v}_{\varepsilon m}(0,\cdot) = \tilde{v}_m^0, \tag{3.9}$$
où $\tilde{v}_m^0$ est la projection orthogonale de $\tilde{v}^0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sur $Vect\{w_1, \cdots, w_m\}$.
En remplaçant $\tilde{v}_{\varepsilon m}(t,x)$ par son expression (3.7) dans (3.8), et en utilisant l'orthonormalité de $(w_i)_{i\geqslant 1}$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$g'_{\varepsilon k} + \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j} A_{jk} + \int_{\Gamma_0} \frac{l\left(\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j} w_j\right)\cdot w_k}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left|\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j} w_j\right|^2}} dx' = F_k \quad \forall k \in \{1, \cdots, m\} \text{ p.p. } t \in]0,T[, \tag{3.10}$$

où

$$F_k = (f, w_k) - \int_\Omega 2\mu D(G_0\xi) : D(w_k)\, dx - \left(G_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, w_k\right) \in L^2(0,T),$$
$$A_{jk} = \int_\Omega 2\mu D(w_j) : D(w_k)\, dx \ \in L^\infty(0,T).$$

Puis, avec
$$\mathcal{G}_k(t, g_\varepsilon(t)) = F_k - \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j} A_{jk} - \int_{\Gamma_0} \frac{l\left(\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j} w_j\right)\cdot w_k}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left|\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j} w_j\right|^2}} dx',$$

où $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ définie sur $]0,T[\times\mathbb{R}^m$.
Le système différentiel non linéaire (3.10), s'écrit
$$\begin{cases} g'_\varepsilon = \mathcal{G}(t, g_\varepsilon), \\ g_\varepsilon = (g_{\varepsilon j})_{1\leqslant j\leqslant m}, \\ g_\varepsilon(0) = g_\varepsilon^0. \end{cases} \tag{3.11}$$
Comme le théorème de Cauchy-Lipschitz exige la continuité des données, pour cela on utilise le théorème de Carathéodory 3.2 qui est plus général pour l'étude de l'existence des solutions, car la fonction $\mathcal{G}$ est continue en g_ε sur $\mathbb{R}^m$, et elle est seulement dans $L^2(0,T)$ en temps t.
On vérifie maintenant les hypothèses de ce théorème (voir [27])

(1) Comme $l \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_0; \mathbb{R}^+))$, $F_k \in L^2(0,T)$, alors la fonction $\mathcal{G}$ est mesurable en t pour tout $g_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$.

(2) La fonction $\mathcal{G}$ est continue en g_ε sur $\mathbb{R}^m$, pour presque tout $t \in]0,T[$ car elle est combinaison de fonctions continues.

(3) Soit $\mathbf{K}$ un compact de $\mathbb{R}^m$. Par définition de compact sur $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{K}$ est borné, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $|g_{\varepsilon k}| \leqslant c$, $\forall k \in \{1, \cdots, m\}$, d'où

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_k(t, g_\varepsilon)| &\leqslant |F_k| + \left|\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j} A_{jk}\right| + \left|\int_{\Gamma_0} \frac{l\left(\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j} w_j\right)\cdot w_k}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j} w_j|^2}}\, dx'\right| \\ &\leqslant |F_k| + c\sum_{j=1}^m |A_{jk}| + \int_{\Gamma_0} l\,|w_k|\ dx', \end{aligned}$$

on en déduit l'existence d'une application $t \mapsto M(t)$ de $]0,T[$ dans $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $]0,T[$, telle que p.p $t \in]0,T[$, $\forall g_\varepsilon \in \mathbf{K}$:

$$|\mathcal{G}(t, g_\varepsilon)| \leqslant M(t).$$

Donc $\mathcal{G}$ satisfait les hypothèses du théorème de Carathéodory. De plus, la fonction $\mathcal{G}$ est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, car la fonction $\mathcal{G}$ admet des dérivées partielles continues en g_ε sur $\mathbb{R}^m$. On déduit que le système (3.11) admet une unique solution locale $g_{\varepsilon j}$ dans $H^1(0,T_m)$ où $1 \leq j \leq m$ avec $0 < T_m < T$. Donc, le système (3.8)-(3.9) admet une unique solution maximale $\tilde{v}_{\varepsilon m} \in H^1(0,T_m;\mathcal{V}_{0\cdot div})$.

Remarque 3.1. [10] *Soient $X_0 = \mathcal{V}_{0.div}$, $X = X' = \mathbf{H}$, $X_1 = \mathcal{V}'_{0.div}$ les injections de X_0 dans X et de X dans X_1 sont continues et denses. De plus, l'injection de X_0 dans X est compacte. Si $\varphi \in L^2(0,T;\mathcal{V}_{0.div})$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T;\mathcal{V}'_{0.div})$ alors $\varphi \in C([0,T],\mathbf{H})$.*
De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{V}'_{0.div},\mathcal{V}_{0.div}} dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\|\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\varphi(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\end{aligned}$$

on a la formule la plus générale suivante

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v(t) \right\rangle_{\mathcal{V}'_{0.div},\mathcal{V}_{0.div}} dt = (u(T),v(T)) - (u(0),v(0)) - \int_0^T \left\langle \frac{\partial v(t)}{\partial t}, u(t) \right\rangle_{\mathcal{V}'_{0.div},\mathcal{V}_{0.div}} dt,$$
$$\forall u,v \in L^2(0,T;\mathcal{V}_{0.div}), \quad \forall \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;\mathcal{V}'_{0.div}).$$

On peut établir quelques estimations a priori indépendantes de m et ε, qui permet d'étendre cette solution sur $[0,T]$ tout entier.

Lemme 3.5. *Supposons que* (2.16)-(2.19) sont vérifiés, et $\tilde{v}^0 \in \mathbf{H}$, alors $\forall m \geqslant 1$, le problème (3.8)-(3.9) admet une unique solution $\tilde{v}_{\varepsilon m} \in H^1(0,T;\mathcal{V}_{0.div})$ qui satisfait les estimations suivantes

$$\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leqslant C_1, \tag{3.12}$$

$$\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))} \leqslant C_1, \tag{3.13}$$

où C_1 est une constante positive indépendante de m et ε.

Preuve. On multiplie l'équation (3.8) par $g_{\varepsilon k}(t)$ et en sommant pour k allant de 1 à m. Comme l est positive, on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \tilde{v}_{\varepsilon m}\right) + \int_\Omega 2\mu D(\tilde{v}_{\varepsilon m}) : D(\tilde{v}_{\varepsilon m})\, dx \\ &\leqslant (f, \tilde{v}_{\varepsilon m}) - \int_\Omega 2\mu D(G_0\xi) : D(\tilde{v}_{\varepsilon m})\, dx - \left(G_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \tilde{v}_{\varepsilon m}\right), \quad \text{p.p dans }]0,T_m[.\end{aligned}$$

On intègre de 0 à s, avec $0 < s < T_m$. En utilisant (3.1), (3.2) et l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|\tilde{v}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha\int_0^s \|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|\tilde{v}_{\varepsilon m}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int_0^s \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt \\ &+ 2\mu\int_0^s |\xi|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,dt + \int_0^s \left|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant l'inégalité de Young suivante (voir [5])

$$ab \leq \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2, \quad \forall a, b \geq 0, \quad \delta > 0,$$

on obtient

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,,$$

$$2\mu|\xi|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \frac{2\mu^2}{\alpha}|\xi|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

$$\left|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Donc, avec ces inégalités, la formule (3.14) devient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|\tilde{v}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_0^s \|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|\tilde{v}_{\varepsilon m}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int_0^s \frac{1}{2}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt \\ &+ \frac{2\mu^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^s |\xi|^2 dt + \frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_0^s \left|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|^2 dt + \int_0^s \|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt. \end{aligned}$$

Rappelons que $\tilde{v}_{\varepsilon m}(0)$ est la projection orthogonale de $\tilde{v}^0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sur $Vect\{w_1, \cdots, w_m\}$, (i.e $\|\tilde{v}_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\tilde{v}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$), on trouve

$$\frac{1}{2}\|\tilde{v}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_0^s \|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,dt \leqslant C_1' + \int_0^s \|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt, \tag{3.15}$$

où C_1' est donnée par

$$\begin{aligned} C_1' = &\frac{1}{2}\|\tilde{v}^0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_0^T \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{2\mu^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^T |\xi|^2 dt \\ &+ \frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_0^T \left|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|^2 dt. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall 3.3, on obtient

$$\|\tilde{v}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leqslant 2C_1'\exp(2s) \leqslant 2C_1'\exp(2T), \quad \forall s \in [0, T_m[, \tag{3.16}$$

d'après la définition de la solution maximale, on conclue que $T_m = T$ et de (3.16) on trouve (3.12). En reprenant (3.16) dans (3.15) avec $s = T$, on obtient (3.13).

□

Dans le lemme suivant, on établit une estimation de la dérivée de la vitesse $\dfrac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}$ dans $L^2(0,\tau;\mathcal{V}'_{0\cdot div})$.

Lemme 3.6. *Sous les hypothèses du lemme 3.5, et $\tilde{v}^0 \in \boldsymbol{H}$, il existe un réel positif C_2, indépendant de m et ε, tel que*

$$\left\| \frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}'_{0.div})} \leqslant C_2. \tag{3.17}$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{V}_{0.div}$, pour tout $m \geqslant 1$ on définit φ_m comme la projection orthogonale de φ pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sur $Vect\{w_1, \cdots, w_m\}$. On a

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{m} \eta_k w_k, \quad \eta_k \in \mathbb{R}.$$

et $\varphi_m \to \varphi$ fortement dans $\mathcal{V}_{0.div}$.
En multipliant l'équation (3.8) par η_k et en sommant de $k = 1, ..., m$, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m \right) &= -\int_\Omega 2\mu D(\tilde{v}_{\varepsilon m}) : D(\varphi_m)\, dx - \int_{\Gamma_0} l \frac{\tilde{v}_{\varepsilon m} \cdot \varphi_m}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_{\varepsilon m}|^2}} dx' \\ &+ (f, \varphi_m) - \int_\Omega 2\mu D(G_0\xi) : D(\varphi_m)\, dx - \left(G_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \varphi_m \right), \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \ \ ]0,T[. \end{aligned} \tag{3.18}$$

On estime tous les termes dans le seconde membre, en utilisant (3.1), (3.2) et l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m \right) \right| \leqslant 2\mu \|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|l\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)} \|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)} \\ &+ \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\mu|\xi| \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &+ \left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right| \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \text{p.p dans } \ ]0,\mathrm{T}[. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Comme $(w_i)_{i\geqslant 1}$ est une famille orthonormale de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et φ_m est une projection orthogonale pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ de φ sur $Vect\{w_1, \cdots, w_m\}$, on a

$$\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

et

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m \right) = \left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_k \right), \quad \forall k \geqslant m.$$

De plus $(w_i)_{i\geqslant 1}$ est une base Hilbertienne de $\mathcal{V}_{0.div}$, alors la suite $(\varphi_k)_{k\geqslant 1}$ converge fortement vers φ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et on trouve

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi_m \right) = \left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi \right).$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}, \varphi \right) \right| \leqslant 2\mu \|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + c(\gamma_0) \|l\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &+ \left(\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\mu|\xi| \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right| \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \text{p.p dans } \ ]0,\mathrm{T}[, \end{aligned}$$

où $c(\gamma_0)$ est la norme de l'opérateur trace $\gamma_0 : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^2(\Gamma_0)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{V}'_{0.div}} &\leqslant 2\mu\|\tilde{v}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + c(\gamma_0)\|l\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_0)} + \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+ 2\mu|\xi|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \left|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right| \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \text{p.p dans } \Omega.\end{aligned}$$

On trouve des estimations du lemme 3.5, qu'il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de ε et de m telle que

$$\int_0^T \left\|\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}\right\|^2_{\mathcal{V}'_{0.div}} dt \leqslant C_2,$$

d'où le résultat. □

3.3.2 Passage à la limite $m \to +\infty$

On considère le théorème suivant

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses du lemme 3.5, il existe une sous-suite notée encore $(\tilde{v}_{\varepsilon m})_{m\geqslant 1}$ dont la limite, quand $m \to +\infty$, est solution de l'équation variationnelle en vitesse*

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left\langle \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{V}'_{0.div},\mathcal{V}_{0.div}} \chi\, dt + \int_0^T \int_\Omega 2\mu D(\tilde{v}_\varepsilon) : D(\varphi\chi)\, dx\, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_0} l \frac{\tilde{v}_\varepsilon \cdot \varphi}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon|^2}} \chi\, dx'\, dt = \int_0^T (f, \varphi\chi)\, dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega 2\mu D(G_0\xi) : D(\varphi\chi)\, dx\, dt - \int_0^T \left(G_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \varphi\chi\right) dt\ , \quad \forall \chi \in L^2(0.T), \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{0.div}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

avec la condition initiale (3.6).

Preuve. Des estimations a priori (3.12) et (3.13) du lemme 3.5, on déduit que la suite $(\tilde{v}_{\varepsilon m})_{m\geqslant 1}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathcal{V}_{0.div})$. Donc, il existe une sous-suite de $(\tilde{v}_{\varepsilon m})_{m\geqslant 1}$ notée encore $(\tilde{v}_{\varepsilon m})_{m\geqslant 1}$ telle que $\tilde{v}_{\varepsilon m} \rightharpoonup \tilde{v}_\varepsilon$ faiblement * dans $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et faiblement dans $L^2(0,T;\mathcal{V}_{0.div})$.

De l'estimation (3.17) du lemme 3.6, la suite $\left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}\right)_{m\geqslant 1}$ est bornée dans $L^2(0,T;\mathcal{V}'_{0.div})$, donc il existe une sous-suite de $\left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}\right)_{m\geqslant 1}$ notée encore $\left(\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t}\right)_{m\geqslant 1}$ vérifiant

$$\frac{\partial \tilde{v}_{\varepsilon m}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;\mathcal{V}'_{0.div}).$$

En utilisant le théorème 1.21 avec $X_0 = \mathcal{V}_{0.div}$, $X = \mathbf{H}^s(\Omega)$ et $X_1 = \mathcal{V}'_{0.div}$ où $\frac{1}{2} < s < 1$, comme $X_0 \hookrightarrow_{compacte} X$, on obtient

$$\tilde{v}_{\varepsilon m} \to \tilde{v}_\varepsilon \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,T;\mathbf{H}^s(\Omega)).$$

Du théorème de la trace (voir [18]), il existe une application linéaire continue de $\mathbf{H}^s(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$. De plus, puisque $s - \frac{1}{2} > 0$, on a

$$\mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \hookrightarrow_{continue} \mathbf{H}^0(\Gamma_0) = \mathbf{L}^2(\Gamma_0).$$

Donc,

$$\tilde{v}_{\varepsilon m} \to \tilde{v}_\varepsilon \quad \text{fortement dans } L^2\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_0)\right). \tag{3.21}$$

Soit $\chi \in L^2(0,T)$ et $\varphi \in \mathcal{V}_{0.div}$. Pour tout $m \geqslant 1$, on définit à nouveau φ_m comme la projection orthogonale de φ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sur $Vect\{w_1, \cdots, w_m\}$. On multiplie (3.18) par χ et on intègre sur $]0,T[$, avec les convergences faibles et fortes obtenues et comme Ψ'_ε est lipschitzienne (voir [2]), on passe à la limite quand $m \to +\infty$. On obtient (3.20)
De plus, en utilisant le lemme de Simon 1.3, on peut extraire une sous-suite de $(\tilde{v}_{\varepsilon m})_{m\geqslant 1}$ notée encore $(\tilde{v}_{\varepsilon m})_{m\geqslant 1}$, telle que

$$\tilde{v}_{\varepsilon m} \to \tilde{v}_\varepsilon \quad \text{fortement dans } C([0,T]; \mathcal{H}),$$

où $\mathcal{H}$ est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'_{0.div}$, avec injection continue et compacte de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans $\mathcal{H}$. Donc,

$$\tilde{v}_{\varepsilon m}(0) = \tilde{v}^0_m \to \tilde{v}^0 \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

on déduit que $\tilde{v}_\varepsilon(0) = \tilde{v}^0$. $\square$

3.3.3 Recherche de la pression

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses (2.16)-(2.19), $v^0 \in \mathbf{H}$, il existe une distribution p_ε sur $\Omega\times]0,T[$ vérifiant pour tout $\varphi \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\tilde{v}_\varepsilon, \varphi) + a(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi, \varphi) - (p_\varepsilon, div(\varphi)) \\ &= (f, \varphi) - \left(G_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \varphi\right), \end{aligned} \tag{3.22}$$

et de plus

$$\int_\Omega p_\varepsilon \, dx = 0.$$

Preuve. De l'équation (3.20), on a

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{v}_\varepsilon(t) - \tilde{v}^0_\varepsilon, \varphi\right) + \int_0^t \int_\Omega 2\mu D(\tilde{v}_\varepsilon) : D(\varphi) \, dx \, d\mathbf{s} \\ &+ \int_0^t \int_\Omega 2\mu D(G_0\xi) : D(\varphi) \, dx \, d\mathbf{s} + \int_0^t \left(G_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \varphi\right) \, d\mathbf{s} \\ &= \int_0^t (f, \varphi) \, d\mathbf{s}, \quad \forall \varphi \in H^1_{0.div}(\Omega). \end{aligned}$$

Considérons la forme linéaire $F_\varepsilon(t)$ définie par

$$\begin{aligned} \langle F_\varepsilon(t), \varphi \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}^1_0(\Omega)} &= F_\varepsilon(t)(\varphi) = -\left(\tilde{v}_\varepsilon(t) - \tilde{v}^0, \varphi\right) - \int_0^t \int_\Omega 2\mu D(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi) : D(\varphi) \, dx \, d\mathbf{s} \\ &+ \int_0^t (f, \varphi) \, d\mathbf{s} - \int_0^t \left(G_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \varphi\right) \, d\mathbf{s}, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}^1_0(\Omega). \end{aligned}$$

Montrons que $F_\varepsilon \in C\left([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)$. Pour tout $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ on a,

$$\begin{aligned}
&\left|\langle F_\varepsilon(t),\varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)}\right| \leqslant \left\|\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}^0\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&+ 2\mu\left(\sqrt{t}\,\|v\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))} + \sqrt{t}\,\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\xi\|_{C([0,T])}\right)\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&+ \sqrt{t}\,\|f\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sqrt{t}\,\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|_{C([0,T])}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'après l'injection continue de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\left|\langle F_\varepsilon(t),\varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)}\right| \leq c\,\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

ce qui montre que $F_\varepsilon(t)$ est continue.
Remarquons que

$$\langle F_\varepsilon(t),\varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 0, \quad \forall\varphi \in H^1_{0.div}(\Omega).$$

D'après le lemme 3.4, on obtient pour chaque $t \in [0,T]$, l'existence d'une fonction $\pi_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ telle que

$$F_\varepsilon(t) = \nabla\pi_\varepsilon(t). \tag{3.23}$$

De (3.23), on conclut que $\nabla\pi_\varepsilon \in C\left([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)$, et $\pi_\varepsilon \in C\left([0,T];L_0^2(\Omega)\right)$. Donc

$$\langle F_\varepsilon(t),\varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \langle\nabla\pi_\varepsilon(t),\varphi\rangle_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)}, \quad \forall\varphi \in \mathbf{D}(\Omega), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.24}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\left(\tilde{v}_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon^0,\varphi\right) - \int_0^t\int_\Omega 2\mu D(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi) : D(\varphi)\,dx\,d\mathbf{s} \\
&-\int_0^t\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right)\,d\mathbf{s} + \int_0^t (f,\varphi)\,d\mathbf{s} = -\left(\pi_\varepsilon(t), div(\varphi)\right).
\end{aligned}$$

En dérivant l'équation ci-dessus par rapport au temps au sens des distributions, et on pose $p_\varepsilon = \dfrac{\partial\pi_\varepsilon}{\partial t}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi) + a(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi,\varphi) - \langle\nabla p_\varepsilon,\varphi\rangle_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \\
&= (f,\varphi) - \left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right)\,dt, \quad \forall\varphi \in \mathbf{D}(\Omega),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

dans $\mathcal{D}'(0,T)$.
Par la densite de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et la formule de Green on obtient (3.22).
D'autre part, on a

$$\int_\Omega p_\varepsilon\,dx = \int_\Omega \frac{\partial\pi_\varepsilon}{\partial t}\,dx,$$

comme $\pi_\varepsilon \in C\left([0,T];L_0^2(\Omega)\right)$, on a

$$\int_\Omega p_\varepsilon\,dx = 0.$$

□

Lemme 3.7. *On a $p_\varepsilon \in H^{-1}\left(0,T;L_0^2(\Omega)\right)$, et il existe une constante C_3 indépendante de ε telle que*

$$\|p_\varepsilon\|_{H^{-1}\left(0,T;L_0^2(\Omega)\right)} \leqslant C_3.$$

Preuve. De (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle (p_\varepsilon, div(\varphi))\,, \chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} &= -\int_0^T (\tilde{v}_\varepsilon, \varphi)\chi^{'}\,dt + \int_0^T a(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi, \varphi)\chi\,dt \\
&- \int_0^T (f,\varphi)\chi\,dt + \int_0^T \left(G_0\frac{\partial \xi}{\partial t}, \varphi\right)\chi\,dt, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),\ \forall \chi \in \mathcal{D}(0,T).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Soit $\tilde{w} \in L^2(\Omega)$ et

$$w = \tilde{w} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{w}\,dx.$$

Remarquons que $w \in L_0^2(\Omega)$ et

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\tilde{w}\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{3.27}$$

De plus, il existe un opérateur linéaire continue $\mathcal{K} : L_0^2(\Omega) \to \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que (voir [17])

$$\mathcal{K}(w) = \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad div(\varphi) = w, \quad \forall w \in L_0^2(\Omega). \tag{3.28}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\langle (p_\varepsilon, \tilde{w}), \chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}\right| = \left|\langle (p_\varepsilon, w), \chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}\right| \\
&= \left|\langle (p_\varepsilon, div(\varphi)), \chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}\right| \leqslant \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)} \left\|\mathcal{K}(w)\chi^{'}\right\|_{L^2\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)} \\
&+ 2\mu\left(\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2\left(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)} + \sqrt{T}\,\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,\|\xi\|_{C([0,T])}\right)\|\mathcal{K}(w)\chi\|_{L^2\left(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)\right)} \\
&+ \left(\|f\|_{L^2\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)} + \sqrt{T}\,\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right\|_{C([0,T])}\right)\|\mathcal{K}(w)\chi\|_{L^2\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)}, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,T).
\end{aligned}$$

Comme l'estimation obtenue dans le lemme 3.5 est indépendante de m et ε, on déduit que la suite $(\tilde{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2\left(0,T;\mathcal{V}_{0.div}\right) \cap L^\infty\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$.
On utilise la continuité de l'opérateur $\mathcal{K}$ et la densité de $\mathcal{D}(0,T)\otimes L^2(\Omega)$ dans $H_0^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ on trouve le résultat. □

Lemme 3.8. *On a Ψ_ε est convexe.*

Preuve. On définit la fonction suivante

$$\hat{f}(\hat{t}) = \sqrt{\varepsilon^2 + \hat{t}^2}, \quad \forall \hat{t} \in \mathbb{R}_+,$$

cette fonction est différentiable.

Pour monter la convexité de $\hat{f}$, en utilisant la caractérisation suivante

$$\hat{f} \text{ convexe si et seulement si } \hat{f}''(\hat{t}) \geqslant 0, \quad \forall \hat{t} \in \mathbb{R}_+.$$

On calcul les dérivées première et deuxième de $\hat{f}$

$$\hat{f}'(\hat{t}) = \frac{\hat{t}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \hat{t}^2}}, \quad \forall \hat{t} \in \mathbb{R}_+,$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}''(\hat{t}) &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \hat{t}^2} - \frac{\hat{t}^2}{\sqrt{\varepsilon^2+\hat{t}^2}}}{\varepsilon^2 + \hat{t}^2} \\
&= \frac{\varepsilon^2 + \hat{t}^2 - \hat{t}^2}{\left(\varepsilon^2 + \hat{t}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{\left(\varepsilon^2 + \hat{t}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0, \quad \forall \hat{t} \in \mathbb{R}_+,
\end{aligned}$$

d'où $\hat{f}$ est convexe, alors

$$\hat{f}(\lambda \hat{t}_1 + (1-\lambda)\hat{t}_2) \leq \lambda \hat{f}(\hat{t}_1) + (1-\lambda)\hat{f}(\hat{t}_2).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\Psi_\varepsilon\left(\lambda u + (1-\lambda) v\right) &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} l \sqrt{\varepsilon^2 + |\lambda u + (1-\lambda)v|^2}\, dx'\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\Gamma_0} l \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\lambda\, |u| + (1-\lambda)\, |v|\right)^2}\, dx'\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\, \hat{f}(\lambda\, |u| + (1-\lambda)\, |v|)\, dx'\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\, \left(\lambda \hat{f}(|u|) + (1-\lambda)\hat{f}(|v|)\right)\, dx'\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\, \left(\lambda \sqrt{\varepsilon^2 + |u|^2} + (1-\lambda)\sqrt{\varepsilon^2 + |v|^2}\right)\, dx'\, dt \\
&\leq \lambda\, \Psi_\varepsilon(u) + (1-\lambda)\, \Psi_\varepsilon(v),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

Théorème 3.5. *Sous les hypothèses (2.16)-(2.19), le problème (P_ε) admet au moins une solution. De plus, on a l'inéquation variationnelle suivante*

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{dt}(\tilde{v}_\varepsilon, \varphi), \chi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} - \left\langle (p_\varepsilon, div(\varphi)), \chi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T a(\tilde{v}_\varepsilon, \varphi\chi)\, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon + \varphi\chi|^2}\, dx'\, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon|^2}\, dx'\, dt \\
&\geqslant \left\langle (f, \varphi), \chi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} - \int_0^T a\left(G_0\xi, \varphi\chi\right)\, dt - \left\langle \left(G_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \tilde{\varphi}\right), \chi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}, \\
&\forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,T).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Preuve. On a $\sigma_\varepsilon = -p_\varepsilon Id + 2\mu D(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi)$ appartient à $H^{-1}(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times3})$, σ_ε est uniformément borné dans $H^{-1}(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times3})$. De plus, on a

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{d}{dt}(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T a(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi,\varphi\chi)\,dt \\ &- \langle(p_\varepsilon, div(\varphi)),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = \langle(f,\varphi),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} \\ &\left\langle\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right),\chi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}, \quad \forall\varphi\in\mathbf{D}(\Omega),\ \forall\chi\in\mathcal{D}(0,T),\end{aligned}$$

i.e,

$$\begin{aligned}&-\int_0^T(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi)\chi'\,dt - \int_0^T\langle div(\sigma_\varepsilon),\varphi\rangle_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)}\chi\,dt \\ &= \int_0^T(f,\varphi)\chi\,dt - \int_0^T\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right)\chi\,dt, \quad \forall\varphi\in\mathbf{D}(\Omega),\ \forall\chi\in\mathcal{D}(0,T).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Montrons que $\mathrm{div}(\sigma_\varepsilon)\in \mathrm{H}^{-1}\left(0,\mathrm{T};\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\langle div(\sigma_\varepsilon),\varphi\rangle_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)}\chi\,dt = \int_0^T(f,\varphi)\chi\,dt \\ &-\int_0^T\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right)\chi\,dt + \int_0^T(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi)\chi'\,dt, \quad \forall\varphi\in\mathbf{D}(\Omega),\ \forall\chi\in\mathcal{D}(0,T).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\langle div(\sigma_\varepsilon),\varphi\rangle_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)}\chi\,dt\right| &\le \left|\int_0^T(f,\varphi)\chi\,dt\right| + \left|\int_0^T\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right)\chi\,dt\right| \\ &+\left|\int_0^T(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi)\chi'\,dt\right|.\end{aligned} \tag{3.31}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps, on obtient

$$\left|\int_0^T(f,\varphi)\chi\,dt\right| \le \|f\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\varphi\chi\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))},$$

d'où

$$\left|\int_0^T(f,\varphi)\chi\,dt\right| \le \|f\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\varphi\chi\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}, \tag{3.32}$$

$$\left|\int_0^T\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right)\chi\,dt\right| \le \sqrt{T}\,\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|_{C([0,T])}\|\varphi\chi\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))},$$

d'où

$$\left|\int_0^T\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\right)\chi\,dt\right| \le \sqrt{T}\,\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|_{C([0,T])}\|\varphi\chi\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}. \tag{3.33}$$

D'autre part, on a

$$\left|\int_0^T(\tilde{v}_\varepsilon,\varphi)\chi'\,dt\right| \le \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\varphi\chi'\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))},$$

d'où
$$\left|\int_0^T (\tilde{v}_\varepsilon, \varphi)\chi' \, dt\right| \leq \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\varphi\chi\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}. \tag{3.34}$$

En remplaçant (3.32), (3.33) et (3.34) dans (3.31), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \langle div(\sigma_\varepsilon), \varphi\rangle_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \chi \, dt\right| \\
&\leq \left(\|f\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \sqrt{T}\,\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|_{C([0,T])} + \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\right) \|\varphi\chi\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Alors, de la densité de $\mathcal{D}(0,T)\otimes\mathbf{D}(\Omega)$ dans $H_0^1\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ pour la topologie de $H^1\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$, on conclue que $div(\sigma_\varepsilon)$ appartient à $H^{-1}\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$, et est uniformément borné dans $H^{-1}\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$.

Maintenant, on considère $\varphi \in \mathcal{V}_0$ dans (3.30), rappelons que σ_ε et $\mathrm{div}(\sigma_\varepsilon)$ sont dans $H^{-1}\left(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times 3}\right)$ et $H^{-1}\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ respectivement, on applique la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (\tilde{v}_\varepsilon, \varphi)\chi' \, dt + \int_0^T a(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi, \varphi\chi)\, dt - \int_0^T (p_\varepsilon, div(\varphi))\,\chi\, dt \\
&-\int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij\varepsilon} n_j \varphi_i \chi \, dx'\, dt = \int_0^T (f,\varphi)\chi\, dt - \int_0^T \left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t}, \varphi\right)\chi\, dt, \quad \forall\chi\in\mathcal{D}(0,T).
\end{aligned}$$

Mais, pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$, on a
$$\int_{\partial\Omega} \varphi\cdot n\, d\gamma = 0,$$
et il existe $\tilde{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ telle que

$$\tilde{\varphi} = \varphi \text{ sur } \partial\Omega, \quad \mathrm{div}(\tilde{\varphi}) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

puisque Ω est connexe (voir [17]). Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{\varphi})\chi' \, dt + \int_0^T a(\tilde{v}_\varepsilon + G_0\xi, \tilde{\varphi}\chi)\, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij\varepsilon} n_j \tilde{\varphi}_i \chi \, dx'\, dt \\
&= \int_0^T (f,\tilde{\varphi})\chi\, dt - \int_0^T \left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t}, \tilde{\varphi}\right)\chi\, dt, \quad \forall\chi\in\mathcal{D}(0,T).
\end{aligned}$$

En comparant avec (3.20), on obtient

$$-\int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij\varepsilon} n_j \tilde{\varphi}_i \chi \, dx'\, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\frac{\tilde{v}_\varepsilon\cdot\tilde{\varphi}}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon|^2}}\chi\, dx'\, dt, \quad \forall\chi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Comme $\tilde{\varphi} = \varphi$ sur Γ_0, on déduit que

$$-\int_0^T \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij\varepsilon} n_j \varphi_i \chi \, dx'\, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_0} l\frac{\tilde{v}_\varepsilon\cdot\varphi}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon|^2}}\chi\, dx'\, dt, \quad \forall\chi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Enfin, $(\tilde{v}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est solution du problème (P_ε).

D'autre part, comme Ψ_ε est convexe et Gâteaux-différentiable, on a

$$\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon + \varphi\chi) - \Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon) \geq \langle \Psi'_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon), \varphi\chi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,T), \tag{3.35}$$

d'où

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} l \left(\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon + \varphi\chi|^2} - \sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon|^2} \right) dx'\, dt \geqslant \int_0^T \int_{\Gamma_0} l \frac{\tilde{v}_\varepsilon \cdot \varphi}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon|^2}} \chi \, dx'\, dt,$$

de (3.5), on obtient l'inéquation variationnelle (3.29). □

3.4 Existence et unicité de solutions du problème (P)

3.4.1 Existence (Passage à la limite $\varepsilon \to 0$)

Théorème 3.6. *Supposons que (2.16)-(2.19) sont vérifiés. Alors, pour tout $\tilde{v}^0 \in \boldsymbol{H}$, le problème (*P) admet au moins une solution. De plus $\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \in L^2(0,T;\mathcal{V}'_{0div})$.

Preuve. Puisque les estimations obtenues dans le lemme 3.5, lemme 3.6, et lemme 3.7 sont indépendantes de m et ε, on en déduit que les suites $(\tilde{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $\left(\dfrac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial t}\right)_{\varepsilon>0}$ et $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont bornées dans $L^2(0,T;\mathcal{V}_{0.div}) \cap L^\infty\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$, $L^2(0,T;\mathcal{V}'_{0.div})$ et $H^{-1}\left(0,T;L^2_0(\Omega)\right)$ respectivement. Par conséquent, on a les résultats de convergence suivants

$$\tilde{v}_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{v} \text{ faiblement} * \text{ dans } \mathrm{L}^\infty\left(0,\mathrm{T};\mathbf{L}^2(\Omega)\right) \text{ et faiblement dans } \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathcal{V}_{0.\mathrm{div}}),$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \text{ faiblement dans } \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathcal{V}'_{0.\mathrm{div}}),$$

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ faiblement dans } \mathrm{H}^{-1}\left(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2_0(\Omega)\right).$$

De plus, on peut extraire une autre sous-suite, on a

$$\tilde{v}_\varepsilon \longrightarrow \tilde{v} \text{ fortement dans } \mathrm{L}^2\left(0,\mathrm{T};\mathbf{L}^2(\Gamma_0)\right),$$

et

$$\tilde{v}_\varepsilon \longrightarrow \tilde{v} \text{ fortement dans } \mathrm{C}\left([0,\mathrm{T}];\mathcal{H}\right),$$

où $\mathcal{H}$ est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'_{0.div}$ avec injection continue et compacte de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans $\mathcal{H}$. Ensuite, on peut utiliser les mêmes arguments que précédemment, pour passer à la limite quand ε tend vers zéro dans le problème (3.29). En effet, on a (voir [2])

$$|\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon + \varphi\chi) - \Psi(\tilde{v} + \varphi\chi)| = \left| \int_0^T \int_{\Gamma_0} l \sqrt{\varepsilon^2 + |\tilde{v}_\varepsilon + \varphi\chi|^2}\, dx'\, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_0} l \left|\tilde{v} + \varphi\chi\right| \, dx'\, dt \right|,$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&|\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon+\varphi\chi)-\Psi(\tilde{v}+\varphi\chi)| \\
&=\left|\int_0^T\int_{\Gamma_0} l\left(\sqrt{\varepsilon^2+|\tilde{v}_\varepsilon+\varphi\chi|^2}-|\tilde{v}_\varepsilon+\varphi\chi|\right)\,dx'\,dt+\int_0^T\int_{\Gamma_0} l\left(|\tilde{v}_\varepsilon+\varphi\chi|-|\tilde{v}+\varphi\chi|\right)\,dx'\,dt\right|.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
|\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon+\varphi\chi)-\Psi(\tilde{v}+\varphi\chi)| &\leqslant \int_0^T\int_{\Gamma_0} l\,||\tilde{v}_\varepsilon+\varphi\chi|-|\tilde{v}+\varphi\chi||\,\,dx'\,dt+\int_0^T\int_{\Gamma_0} l\,\varepsilon\,dx'\,dt \\
&\leqslant \|l\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))}\left(\|\tilde{v}_\varepsilon-\tilde{v}\|_{L^2\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Gamma_0)\right)}+\varepsilon\sqrt{Tmes(\Gamma_0)}\right),
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\Psi_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon+\varphi\chi)=\Psi(\tilde{v}+\varphi\chi),
$$

pour tout $\varphi\in\mathcal{V}_0$ et pour tout $\chi\in\mathcal{D}(0,T)$, ce qui nous permet de conclure que $(\tilde{v},p)$ est solution du problème (P).

□

3.4.2 Unicité

Théorème 3.7. *Sous les hypothèses du théorème précédent. Le problème* (P) admet une unique solution.

Preuve. Supposons que $(\tilde{v}_1,p_1)$ et $(\tilde{v}_2,p_2)$ sont deux solutions du problème (P). Puisque $\dfrac{\partial\tilde{v}_i}{\partial t}\in L^2(0,T;\mathcal{V}'_{0div})$, $i=1,2$, on peut écrire (2.21) comme suit

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\left\langle\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial t},\varphi\chi\right\rangle_{\mathcal{V}'_{0.div},\mathcal{V}_{0.div}}dt+\int_0^T a(\tilde{v}_i+G_0\xi,\varphi\chi)\,dt \\
&+\int_0^T\int_{\Gamma_0} l\left(|\tilde{v}_i+\varphi\chi)|-|\tilde{v}_i|\right)\,dx'\,dt\geqslant\int_0^T(f,\varphi\chi)\,dt-\int_0^T\left(G_0\frac{\partial\xi}{\partial t},\varphi\chi\right)\,dt,
\end{aligned}
$$

pour tout $\varphi\in\mathcal{V}_{0.div}$ et $\chi\in\mathcal{D}(0.T)$. Par la densité de $\mathcal{D}(0.T)\otimes\mathcal{V}_{0.div}$ dans $L^2(0,T;\mathcal{V}_{0.div})$ on peut remplacer $\varphi\chi$ par $(\tilde{v}_j-\tilde{v}_i)1_{[0,s]}$ avec $i,j\in\{1,2\}$, $i\neq j$ et $s\in[0,T]$. En sommant les deux inéquations variationnelles, et en utilisant (3.1), on obtient

$$
\frac{1}{2}\int_0^s\frac{d}{dt}\|\tilde{v}_1-\tilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt+\alpha\int_0^s\|\tilde{v}_1-\tilde{v}_2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\,dt\leqslant 0,
$$

comme $\tilde{v}_1(0)=\tilde{v}_2(0)=\tilde{v}^0$, on obtient

$$
\|\tilde{v}_1(s)-\tilde{v}_2(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\leqslant 0,\quad\forall s\in[0,T].
$$

Alors, avec (2.21) on obtient

$$
\langle(p_1-p_2,\operatorname{div}(\varphi)),\chi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}=0,\quad\forall\varphi\in\mathbf{H}^1_0(\Omega),\quad\forall\chi\in\mathcal{D}(0,T).
$$

Maintenant, on considère $\tilde{w} \in L^2(\Omega)$ et

$$w = \tilde{w} - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \tilde{w}\, dx \quad \in L^2_0(\Omega).$$

Il existe $\varphi = \mathcal{K}(w) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$ telle que $div(\varphi) = w$ (voir [17]) et

$$\langle (p_1 - p_2, \tilde{w}), \chi \rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = \langle (p_1 - p_2, w), \chi \rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = 0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Par densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes L^2(\Omega)$ dans $H^1_0\,(0,T;L^2(\Omega))$, on obtient

$$\langle (p_1 - p_2, \varpi \rangle_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),H^1_0(0,T;L^2(\Omega))} = 0, \quad \forall \varpi \in H^1_0\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

et $p_1 = p_2$. $\square$

Remarque 3.2. *On peut montrer l'existence de solutions du problème* (P) par une autre méthode. En utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires et la méthode de la monotonie pour la vitesse, et le théorème de De Rham pour la pression, mais avant appliquer cette technique, il faut supposer que $v^0 = G_0$ pour avoir une condition initiale nulle ($\tilde{v}^0 = 0$). Le principe de cette technique est d'approcher le problème parabolique par une suite de problèmes elliptiques. Pour plus de details voir [8] qu'ils ont traité le même problème par cette technique, mais avec une viscosité plus compliqué qui dépend de la température, de la vitesse et du module de tenseur des taux de déformation.

Conclusion

Les équations de Navier-Stokes ou de Stokes ont une grande utilisation dans la mécanique des fluides malgré que leur étude mathématique est loin d'être totalement achevée, et de nombreuse chose reste à comprendre.
Dans ce mémoire, on a fait quelques notions fondamentales d'analyse fonctionnelle qui sont nécessaire pour l'étude de l'existence et l'unicité de solution en dimension 3 du système de Stokes, muni de la loi de Tresca (cette condition non linéaire rajoute une difficulté supplémentaire au problèmes habituellement étudié).
On a fait une description de ce système et on a présenté la méthode de Galerkin pour montrer l'existence de la vitesse et le théorème de De Rham pour la pression.

Bibliographie

[1] D. Benterki. Étude asymptotique des fluides non-Newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords, Thèse de doctorat à l'université de Sétif, 2017.

[2] M. Boukrouche, I. Boussetouan, L. Paoli. Unsteady 3D-Navier-Stokes system with Tresca's friction law, Quarteley of Applied Mathematics, Vol 78, pp 525-543, 2020.

[3] M. Boukrouche, L. Paoli. Global existence for a 3D non-stationary Stokes flow with Coulomb's type friction boundary conditions, Applicable Analyse, An International Journal, Vol 97, pages 1385-1415, 2017.

[4] F. Boyer, P. Fabri. Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models, Applied Mathematical Sciences, Vol.183, Springer, New York, 2013.

[5] H. Brezis. Analyse fonctionnelle théorie et applications, Dunod, Paris, 1999.

[6] E.A. Coddington, N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, Mc Graw-Hill, New-York, 1955.

[7] A. Cohen. Approximations variationnelles des EDP. Cours de l'Université Pierre et Marie Curie, 2010.

[8] H. Debbiche. Sur des problèmes de lubrification stationnaires et instationnaires non isothermes. Thèse de doctorat à l'université Jean Monnet, Saint-Étienne, 2016.

[9] F. Demengel, G. Demengel. Espaces fonctionnels, Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles, EDP Sciences, Paris, 2007.

[10] J. Droniou. Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, hal-01382368, version 1, Polycopié de l'école doctorale de Math-Info de Marseille, 2001.

[11] J. Droniou. Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev, Polycopié de l'école doctorale de Maths- Info de Marseille, 2001.

[12] M. Fang, R.P. Gilbert. Non-isothermal, non-Newtonian Hele–Shaw flows within Cattaneo's heat flux law, Mathematical and computer modelling,

[13] D. Françoise, D. Gilbert. Espaces Fonctionnels, utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles. EDP Sciences and CNRS éditons, 2007.

[14] H. Fujita. Flow problems with unilateral boundary conditions. Leçons, Collège de France, 1993.

[15] H. Fujita. A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions. Math. Fluid Mech. Model,888, 199–216, 1994.

[16] M.L. Gallardo. Notes du cours sur les espaces de Hilbert, licence 3 ème année, Université de Tours, 2007-2008.

[17] V. Girault, P.A. Raviart. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[18] R.H.W. Hoppe. Finite Element Methods, Spring, 2011.

[19] V.A. Kondratév, O.A.Oleinik. Boundary-value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn's inequalities. Russian Math. Surveys, 43(5) :95–119, 1998

[20] G. Leborgne. Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et éléments finis, 2003.

[21] H. Le Dert. Équations aux dérivées partielles non linéaires, Mathématiques et Applications, Vol. 72, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[22] B. Maurey. Cours d'Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale, Université de Paris 7, année 2000-2001.

[23] S. Mohammed. P-laplacien fractionnaire. Mémoire de master mathématiques pures et appliquées (Équations aux dérivées partielles et analyse numériques), Université de Sidi Mohamed Ben Abdellah Fès, Maroc, 2017.

[24] N. Saito. On the stokes equations with the leak and slip boundary conditions of friction type : regularity of solutions. Publ. RIMS Kyoto Univ, 40 :345–383, 2004.

[25] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 146, 65-95, 1987

[26] R. Temam. Navier-Stokes Equations. North-Holland, Amsterdam, New-York, Ox-ford, 1984.

[27] F.Ziane. Existence unicité, analyse asymptotique et convergence à deux échelles pour un problème d'évolution décrivant l'écoulement d'un fluide micro-polaire, soumis à une loi de Tresca de frottement d'interface fluide-solide, Thèse doctorat, Université Alger (Bab Ezzouar). Université de Saint-Étienne, 2019.