

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou
Arréridj

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



Mémoire

Présenté par

HOUMA HANANE

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Systèmes Dynamiques**

Thème

Dimension Fractal

Soutenu publiquement le 29 Septembre 2022 devant le jury composé
de

BEL MECHRI FAIROUZ

SEHILI ISMAHENE

BEN AISSA SORAYA

Président

Encadrant

Examineur

Promotion 2021/2022

Dédicace

À mes chers parents, pour tous leur sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutiens et leurs prières tout le long de mes études.

À mon cher mari qui m'a toujours encouragé.

À mon amour, la prunelle de mes yeux, ma fille Rinade.

À mes soeurs, Imane, Sabrina, Saffa, Maria.

À mes frères, Abd Errahman, Mourad, Haithem.

À mes amies, Riwa, Roumaissa, Sara, Souad.

À tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom HOUMA, à tous ceux qui ont participé à ma réussite, je dédie ce travail.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord à remercier Allah qui m'a donné le pouvoir et la volonté pendant toutes ces années consécutives jusqu'au terme et la concrétisation de notre objectif, d'avantage pour persévérer et aller de lavant.

Je tiens à exprime mes vif remerciements à madame "Sehili Ismahene", pour avoir d'abord proposé ce thème, pour son suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, et qui n'a pas cassé de me donner ses conseils et remarques.

Je remercie très sincèrement les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur.

Notre profonde gratitude au chef du département de mathématiques, "Bensaid Fares".

Enfin je voudrai adresse mes remerciement à tous ceux qui m'ont aidé à mener ce travail à son terme.

Table des matières

Notations	V
Introduction générale	1
1 Géométrie fractale	2
1.1 Historique sur les fractales	2
1.2 Objet fractale	5
1.2.1 Définition d'un objet fractale	5
1.2.2 Caractéristique d'un objet fractale	5
1.2.3 Classification des objets fractals	6
1.3 Dimension non-entière	9
1.3.1 Dimension fractale	9
1.3.2 Dimension d'autosimilarité	10
1.3.3 Dimension de Hausdorff	11
1.3.4 Dimension de Pontrjagin	11
1.3.5 Dimension de Kolmogorov	12
2 Méthodes d'estimation de dimension fractale	13
2.1 Méthode de comptage des boites	13
2.2 Méthode de Richardson	14
2.3 Méthode de Minkowski	14
2.4 Méthode de wiebel	15
2.4.1 Méthode des intersections	16
2.5 Méthode des « Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes » (MMTO)	16
3 Quelques applications des fractales	18
3.1 Les fractales dans la nature	18
3.1.1 Le cerveau	18
3.1.2 Les végétaux	18
3.1.3 Le mouvement Brownien	19

3.2	L'utilisation humaine des fractales	19
3.2.1	Pharmacologie	19
3.2.2	Infographie	20
3.2.3	Finances	20
3.3	Application de dimension fractale dans le milieu médicale	20
3.3.1	Dépistage du cancer du sein	20
3.3.2	La mammographie	21
3.3.3	Méthodologie	22

Table des figures

1.1	Ensemble de cantor	3
1.2	Courbe de peano	3
1.3	Le von koch	4
1.4	triangle de Sierpinski	4
1.5	Ensemble de julia	4
1.6	Ensemble de Mandelbrot	5
1.7	Etapas de la construction d'une courbe de Von Koch	6
1.8	Tapis de Sierpinski	7
1.9	Triangles de Sierpinski	7
1.10	Ensemble de Julia	8
1.11	Ensemble de Mandelbrot	9
2.1	Exemple de Méthode des boites	13
2.2	La saucisse de Minkowski (appliqué sur une courbe E)	14
2.3	Méthode weibell	15
3.1	l'image de cerveau	18
3.2	Un exemple de choux- fleur	19
3.3	Le mouvement Brownien	19
3.4	Exemple de infographie	20
3.5	cancer du sein	21
3.6	Résultats de la détection de micro-calcifications sur des images de mammographies	22
3.7	(a) l'image originale, (b) l'image segmenté avec $min = 0$ et $max = 0.600$, (c) zoom de l'image (b), (d) image segmenté avec $min = 0$ et $max = 0.646$ et (e) zoom de l'image (d) avec, min et max représentent respectivement les valeurs minimum et maximum de l'exposant de Hölder	23
3.8	a) l'image originale, (b) l'image segmenté avec $min = 0$ et $max = 0.03$, (c) zoom de l'image (b) , (d) image segmenté avec $min = 0$ et $max = 0.02$ et (e) zoom de l'image (d), avec min et max représentent respectivement les vale	24

Notations

$3D$	Tridimensionnel.
D	Dimension fractale.
\log	Logarithme.
d	Dimension topologique.
E	Objet fractale.
N	Nombre de pavés de côté ε recouvrant E .
λ	Rapport d'homothétie.
dim_α	Dimension d'autosimilarité.
dim_H	Dimension de Hausdorff.
$\delta = (\delta_n)$	Recouvrement dénombrable.
A	Ensemble de points.
ϕ	Sous ensemble de Ω .
dim_k	Dimension kolmogorov.
μ	Unité de mesure.
Δ_f	Dimension fractale estimée par les méthodes proposées.
vol_d	Volume en dimension d .
p	Pente de régression linéaire.
$\phi(\vartheta)$	Saucisse de Minkowski.
N_ε	Nombre des boites dans la méthode des boites.

Introduction générale

Plusieurs ont une idée de la signification du mot « fractale » mais peu savent vraiment de quoi il s'agit. Inventé en 1975 par *Benoit Mandelbrot*, ce mot signifie à la fois « brisé » et « irrégulier » et sert à représenter géométriquement des objets dont la forme est extrêmement irrégulière. Ces objets présentent des éléments discernables sur une large gamme d'échelles et dont les parties ont approximativement la même structure que le tout.

Depuis, on a observé que les fractales sont présentes de façon universelle dans la nature. Ainsi, comprendre ce concept permet de mieux comprendre notre environnement et les applications des fractales sont nombreuses. Cependant, la notion de fractale en tant qu'objective d'enseignement tarde à faire son chemin. Pourtant, elle offre un support visuel à des concepts abstraits et elle permet d'entrevoir la richesse des mathématiques. Nous pensons donc qu'il serait profitable de mieux faire connaître les fractales dans le milieu de l'enseignement.

Ce mémoire contient l'essentiel de la théorie reliée aux fractales. Il est présenté sous forme de trois chapitres :

Dans **le premier chapitre**, nous allons définir les fractales, donner des notions de base sur la dimension fractale et étudier quelques méthodes pour le calcul de la dimension non-entière (dimension fractale, dimension d'autosimilarité, dimension de Hausdorff, dimension de Pontrjagin, dimension Kolmogorov).

Le deuxième chapitre, présente quelques méthodes d'estimation des dimensions fractales (Méthode de comptage des boîtes, Méthode de Richardson, Méthode de la saucisse de Minkowski, Méthode de Wiebel).

Le dernier chapitre, est consacré pour quelques applications des fractales.

Les fractales sont des schémas que la nature reproduit sans cesse au fil de l'évolution, ils sont dans nos poumons, nos reins, nos vaisseaux sanguins, dans les fleurs, les plantes, les mouvements climatiques le rythme cardiaque, la vie cellulaire.

Le concept de géométrie fractale, introduit par *B. Mandelbrot*, fournit en effet un cadre solide pour l'analyse des phénomènes naturels dans divers secteurs des sciences.

La notion de fractale en fait regroupe dans un cadre géométrique unique de nombreux travaux mathématiques antérieurs. Les objets concernés ont été inventés dès la fin du *XIX^e* siècle par des mathématiciens comme *Cantor*, *Peano* . . .

Le terme **fractal** a été introduit par *B.B. Mandelbrot* (fractal, c'est à-dire qui a été fractionné à l'infini, du latin « fractus » dérivé du verbe « frangere », briser).

1.1 Historique sur les fractales

La Géométrie Fractal est une extension de la géométrie classique. elle ne remplace pas la géométrie classique, mais l'enrichit et en élargit les pouvoirs en servant d'ordinateurs, nous pouvons utiliser la géométrie fractale pour modéliser avec précision des structures physiques.

nous allons maintenant retracer le développement historique de cette discipline mathématique, ayant commencé au *XIX^e* siècle avec les découvertes de Karl Weierstrass [1815 – 1897], Georg Cantor [1845 – 1918] et Henri Poincaré [1845 – 1912], a mené inexorablement à la création d'une nouvelle sorte de géométrie, la première fractale mathématique a été découverte en 1861. Karl Weierstrass, sa propre quête de rigueur absolue l'avait amené à découvrir une fonction continue qui ne pouvait nullement se prêter à un calcul différentiel à savoir une courbe constituée uniquement d'angles. il était simplement impossible de définir un taux de change à quelque point que ce soit, il n'y avait aucune régularité où que ce soit.

En 1883 l'ensemble en question a été découvert en réalité par Henry Smith, prenez une ligne et ôtez-en le tiers du milieu, laissant deux lignes égales retirez alors le tiers du milieu de chacune de ces lignes.

En 1890 découvert la courbe qui remplit l'espace, Peano avait construit une

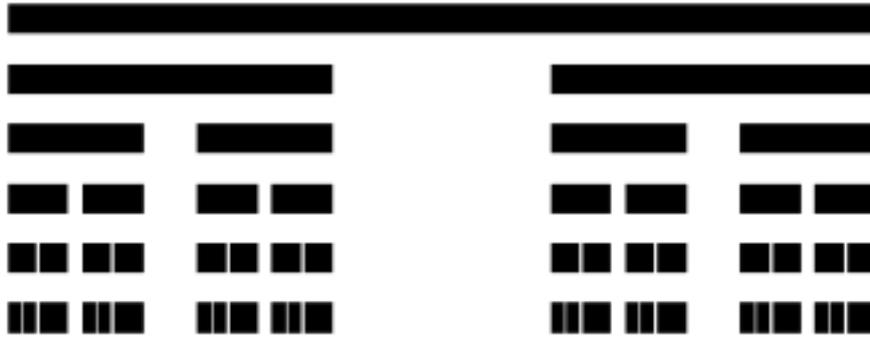


FIGURE 1.1: Ensemble de cantor

courbe idéalisée qui s'entortillait de manière si complexe passait par chaque point du plan entier.

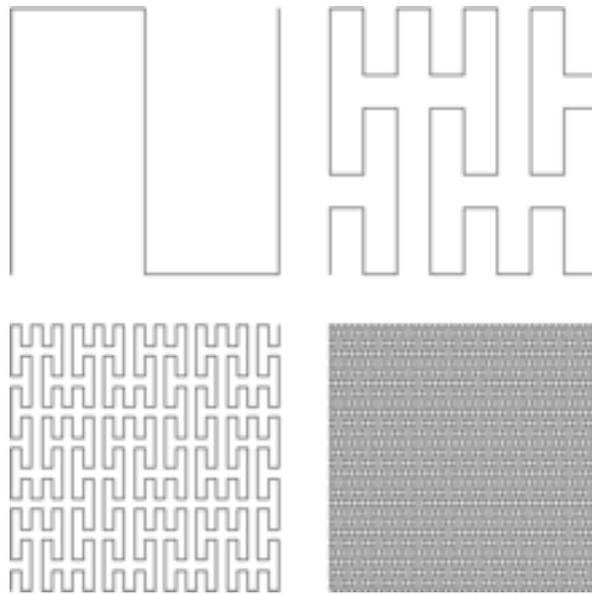


FIGURE 1.2: Courbe de peano

Il a défini cette courbe comme la limite d'une séquence infinie de courbes faisant de plus en plus de plis. la courbe finale est infiniment longue, bien que contenue dans un espace fini. elle ne possède aucune tangente et ne présente aucune régularité. et si l'on coupe la courbe à des angles bien précis, on révèle un nombre infini d'ensemble de Cantor cachés à l'intérieur.

Le joint de culasse de Sierpinski est obtenu en partant d'un triangle équilatéral plein, qui est subdivisé en quatre triangles équilatéraux plus petits, mais en enlevant le triangle du milieu, laissant ainsi un lui-même triangulaire, sont subdivisés de la même manière de sorte qu'apparaissent trois nouveaux trous triangulaires, plus petits que le trou central, le processus peut conceptuellement être répété indéfiniment, une forme composée de trois copies d'elle-même.

Ce sont des ensembles dont les composants sont auto similaires à l'infini et soumis à la théorie du chaos.

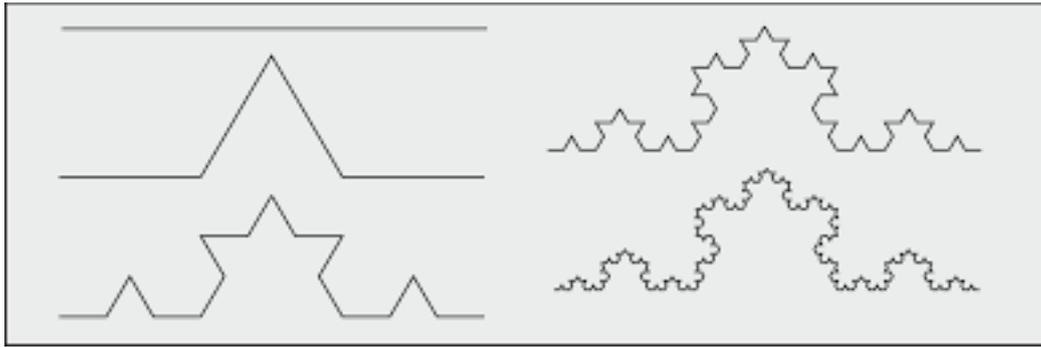


FIGURE 1.3: Le von koch

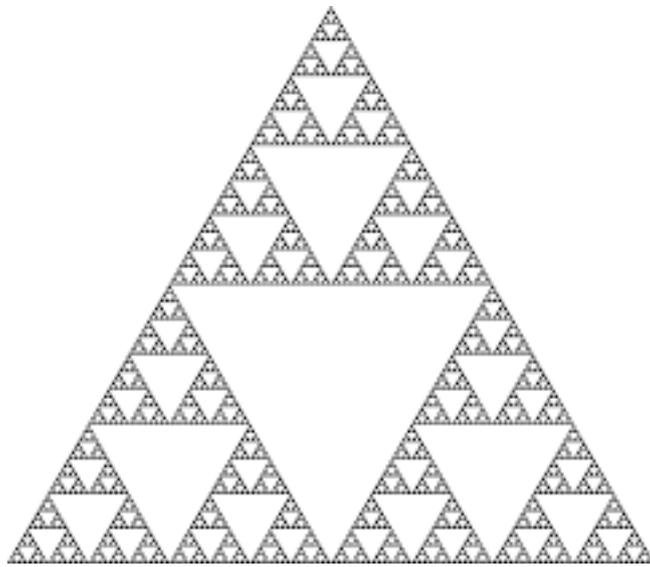


FIGURE 1.4: triangle de Sierpinski

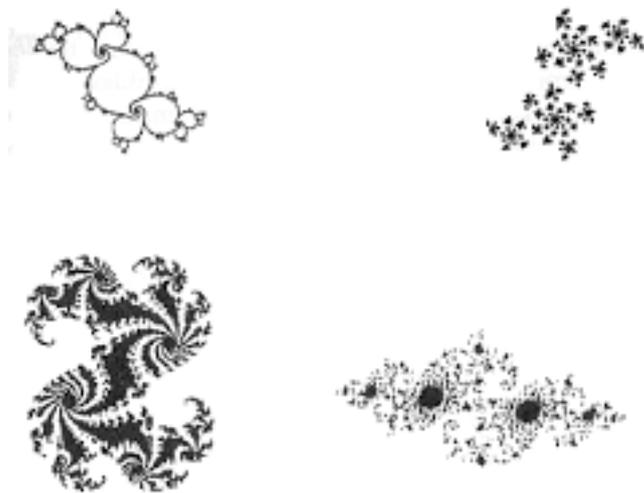


FIGURE 1.5: Ensemble de julia

En 1975 Benoît Mandelbrot développe une nouvelle branche des mathématiques capable de décrire et d'analyser l'irrégularité structurée du monde naturel. Il inventa le terme Fractale pour décrire des objets présentant une structure très détaillée sur un grand éventail d'échelles. Ainsi le terme Fractale correspond une forme géométrique de structure complexe.(Les fractale en image 2016)

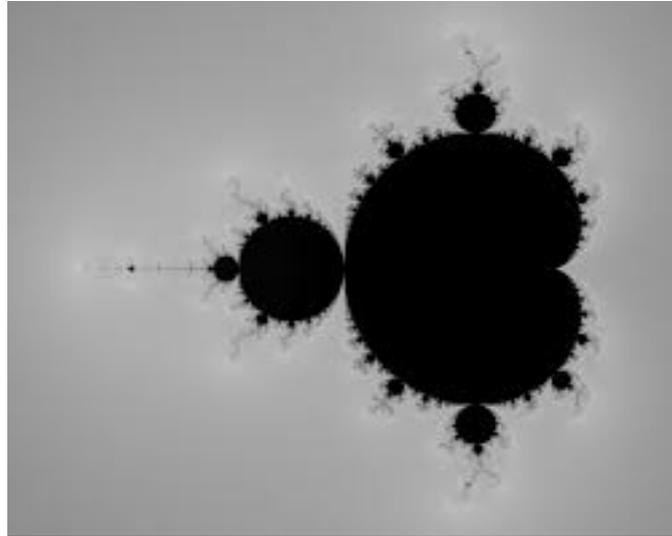


FIGURE 1.6: Ensemble de Mandelbrot

1.2 Objet fractale

1.2.1 Définition d'un objet fractale

Une Fractale est un objet géométrique qui possède une complexité intrinsèque, une irrégularité fondamentale qui se manifeste à toutes les échelles d'observation et surtout une propriété d'autosimilarité (ou homothétie interne), c'est-à-dire semblable à toute échelle (chacune de leur partie reproduit leur totalité). Les objets fractals peuvent se définir comme des structures obtenues par l'itération d'un algorithme géométrique sur une figure. Un objet est dit non fractal s'il n'y a pas d'apparition de nouvelles formes chaque fois qu'on zoom une des ses parties, or dans le cas d'un objet fractal une nouvelle forme est apparue à chaque fois qu'une partie de l'objet est zoomée. Cette forme est plus au moins similaire à la totalité de l'objet lui-même.

1.2.2 Caractéristique d'un objet fractale

Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- ◇ Sa dimension de Hausdorff est plus grande que sa dimension topologique, et possède une valeur fractionnaire(valeur non-entière).
- ◇ Il a des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes.
- ◇ Il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels.
- ◇ Il est exactement ou statistiquement autosimilaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties.(Segmentation d'image texturées à partir des

1.2.3 Classification des objets fractals

Les fractals sont définis de façon récursive ou itérative, selon la manière avec laquelle ils sont construits. Nous pouvons distinguer deux grandes catégories : les fractals déterministes et les fractals non déterministes.

Objets fractals déterministes

Ce sont les objets fractals exacts, purement mathématiques et donc parfaitement autosimilaires. Ceux-ci peuvent être obtenus géométriquement par construction itérative (Flocon de Koch, triangle de Sierpinski, ...) ou bien par des procédés calculatoires tels que l'itération de polynôme complexe (ensemble de Mandelbrot, de Julia, ...).

Les fractales déterministes

Sont les représentations d'ensembles de nombres. On distingue deux types :

Fractales linéaires : basés sur l'itération d'équations linéaires (flocon de Koch, triangle de Sierpinski).

Courbe de Von Koch : La deuxième fractale populaire a été introduite par le mathématicien suédois Helge Von Koch en 1904 et porte le nom lui. L'initiateur de la courbe de Koch est une droite. Le générateur est obtenu en divisant l'initiateur en trois segments égaux. Ensuite nous retirons le tiers médian et remplaçons-le par un triangle équilatéral comme indiqué. Si l'initiateur a une longueur de 1, alors le générateur sera composé de quatre lignes segments, chacun de longueur $\frac{1}{3}$. Par conséquent, la longueur totale du générateur est de $\frac{4}{3}$. Dans la deuxième étape, chacun des quatre segments de ligne agira comme un initiateur et est remplacé par le générateur réduit correspondant. La courbe résultante aura 16 segments de ligne, chacun de longueur $(\frac{1}{3})^2$. De plus, la longueur de la courbe entière vaut $(\frac{4}{3})^2$. Ce processus est répété sur chacun des segments obtenus, à l'infini. (Elaydi Discrete Chaos)

Tapis de Sierpinski Un carré est la réunion de 9 carrés $1/3$ -homothétiques.

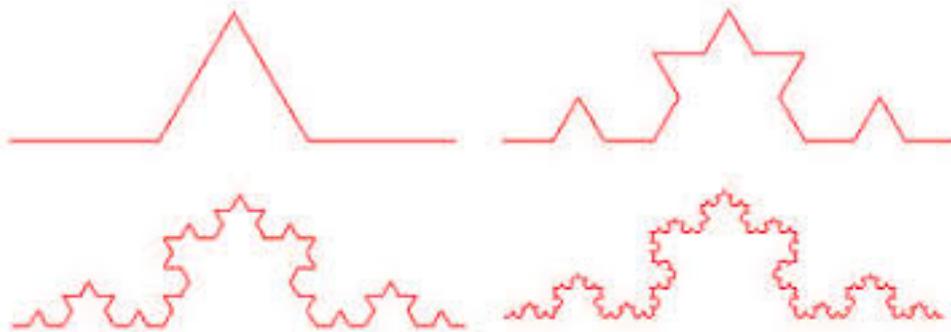


FIGURE 1.7: Etapes de la construction d'une courbe de Von Koch

Supprimons le carré central, c'est-à-dire considérons uniquement les 8 homothéties de rapport $1/3$ centrées aux sommets et aux milieux des côtés. L'attracteur de cette famille est le tapis (ou carpeite) de Sierpinski, de dimension fractale : (Les fractales 2019)

Triangles de Sierpinski : Un triangle est classiquement la réunion de 4 triangles

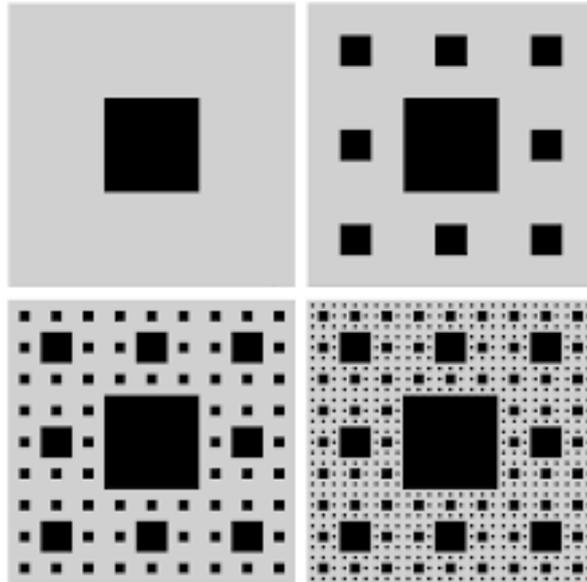


FIGURE 1.8: Tapis de Sierpinski

:

$1/2$ -homothétiques (séparés par les segments médians). Supprimons le triangle central, c'est-à-dire considérons uniquement les trois homothéties de rapport $1/2$ centrées aux sommets.

L'attracteur de cette famille est le « triangle (ou tamis) de Sierpinski », de dimension fractale $\ln 3 / \ln 2 = 1,585 \dots$ (Les fractales 2019)

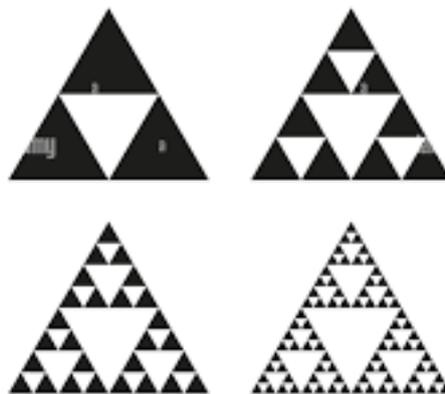


FIGURE 1.9: Triangles de Sierpinski

Fractales non linéaires : basés sur l'itération d'équations de nombres com-

plexes (ensemble de Mandelbrot, de Julia, ...).

Ensemble de Julia : Les ensembles de Julia sont définis par la même suite sauf que le premier terme Z_0 est l'affixe du point courant et, C une constante propre à chaque ensemble de Julia. C'est à dire C est fixé pendant tout le calcul de l'image. Donc à chaque valeur de C correspond un ensemble particulier de Julia. Au départ Gaston Julia à proposer qu'est ce qu'il se passe si on prend une équation toute simple et on la répète en boucle, C'est-à-dire on prend une valeur et on lui applique la fonction, cela donne un résultat ; on prend cette nouvelle valeur et lui appliquant la même équation, nous obtenons une troisième valeur. Que ce que se passe-t-il si nous répétons plusieurs fois. Au bout d'un très grand nombre d'itérations la série de valeur obtenue s'appelle ensemble. Si on le calcule manuellement on ne pourrait jamais savoir à quoi il ressemble dans son intégral. Mais pour que cette branche de mathématique se développe il fallait attendre l'invention de l'ordinateur. Mandelbrot a pris les ordinateur qui l'avait sous la main chez *IBM* et il traça un très grand nombre d'ensemble de Julia puis en 1980 il créa sa propre équation $F(z) = z^2 + c$ qui englobe tout les ensembles de Julia en une seule représentation. pour cela l'ensemble de Julia est un sous-ensemble de l'ensemble Mandelbrot.



FIGURE 1.10: Ensemble de Julia

Ensemble de Mandelbort : L'ensemble de Mandelbrot est considéré de loin comme le plus compliqué, mais le plus fractale fascinante. Il a été découvert par le mathématicien Benoit Mandelbrot à la fin des années 1970 [67]. Pour la famille quadratique d'applications Q_c , les Mandelbrot l'ensemble, noté M , est situé dans l'espace des paramètres et est défini comme

$$M = \{c \in C : O(0) \text{ est borné sous } Q_c\}.$$

En d'autres termes, l'ensemble de Mandelbrot M se compose de toutes ces valeurs c pour dont l'orbite correspondante de 0 sous Q_c ne s'échappe pas à l'infini. (Elaydi Discrete Chaos)

Objets fractals non-déterministes

Par opposition aux fractales déterministes, il existe des fractales liées au hasard ou à des phénomènes aléatoires (le mode de réplification fait intervenir une compo-

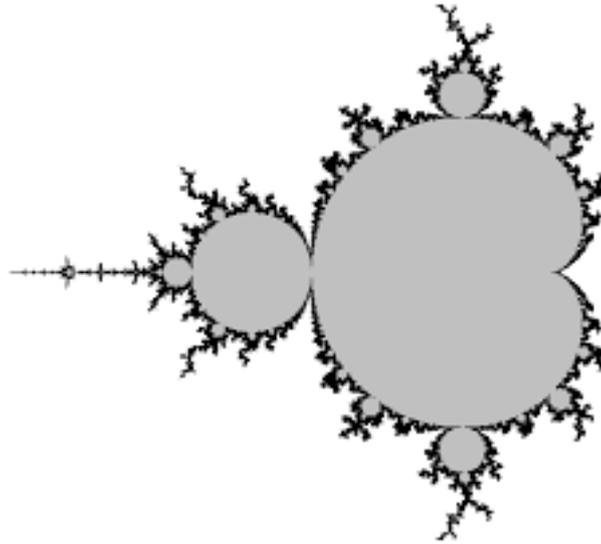


FIGURE 1.11: Ensemble de Mandelbrot

sante aléatoire). Elles se présentent sous deux formes :

Objets fractale naturels objets aléatoires ou non déterministes, car le processus dynamique qui permet leurs création varie lui même avec le temps de façon aléatoire. Citant, les vaisseaux sanguins, le paysages fractals (les nuages, les montagnes, les flacons de neige, le chou- fleur).

Objets fractale aléatoires les fractals exhibent un caractère aléatoire. Par conséquent, les fractals aléatoires n'exhibent pas une autosimilarité exacte. L'aspect non-uniforme de ces fractals est souvent plus près des phénomènes naturels (par exemple, les lignes de côtes, les surfaces topographiques, nuages. . .). Pour décrire la construction de fractals qui impliquent des étapes aléatoires, on peut utiliser la théorie de probabilité.(Analyse Fractale et Multifractale des Échos Radar)

1.3 Dimension non-entière

Les types de dimension non entière, pour une structure fractale donnée, ces dimensions fournissent en générale des valeurs proches de la valeur théorique de la dimension fractale il est plus célèbre :

1.3.1 Dimension fractale

La dimension fractale D ou dimension de similarité, est le nombre qui quantifie le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble géométrique ou d'un objet naturel. La dimension fractale est aussi une mesure de la façon dont la forme fractale occupe l'espace.

On connaît déjà la dimension de quelques figures simples qui sont des entiers naturels :

- Un segment a pour dimension $D = 1$.
- Un carré a pour dimension $D = 2$.
- Un cube a pour dimension $D = 3$.

$$D = \frac{\ln(\text{Nombre de Copies})}{\ln(1/\text{Rapport de Réduction})}$$

Pour les fractals, ce terme est un peu plus compliqué : on peut prendre l'exemple d'une côte rocheuse. Son contour, dessiné très précisément est une ligne extrêmement irrégulière.

En augmentant à l'infini l'irrégularité de cette ligne, son irrégularité serait telle que la ligne semblerait avoir une surface (alors que, par définition, une ligne n'a pas de surface). Ce ne serait donc plus vraiment une ligne, à une dimension, ni tout à fait une surface, à deux dimensions.

En effet, les fractals ont des dimensions fractionnées et il existe des méthodes pour estimer celle de certains objets naturels comme les côtes. Les Fractales présentent donc des dimensions qui ne seraient pas seulement des entiers naturels ; nous citons par exemple le cas des poussières qui représentent des ensembles discontinus de points ayant une dimension entre 0 et 1. Les courbes ou les surfaces planes (côte, mosaïque) ont une dimension entre 1 et 2. Les objets qui ont un volume (cristaux, éponges ...) ont une dimension entre 2 et 3. (Analyse et conception des antennes fractales -Applications aux télécommunications large bande 2017)

1.3.2 Dimension d'autosimilarité

la dimension d'autosimilarité caractérise l'irrégularité d'objets décomposables en N_δ parties de dimension d , obtenues à partir du tout, par une homothétie de rapport $\delta = \frac{1}{n}$ donné.

Ainsi par exemple, peut-on réaliser, une partition :

- d'un segment de droite en $N_\delta = n$ sous-segments, avec $N_\delta = \frac{1}{\delta}$.
- d'un carré en $N_\delta = n^2$ petits carrés, avec $N_\delta = \frac{1}{\delta^2}$.
- d'un cube en $N_\delta = n^3$ petits cubes, avec $N_\delta = \frac{1}{\delta^3}$.

D'une manière générale, on observe que pour un objet simple et classique, l'exposant de δ correspond à la dimension topologique ; ce qui nous permet d'écrire, pour un objet quelconque de dimension d

$$N_\delta = \left(\frac{1}{\delta}\right)^d$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$dim_\alpha = \frac{\log N_\delta}{\log(\frac{1}{\delta})} = -\frac{\log N_\delta}{\log(\delta)}$$

Lorsque la dimension d prend des valeurs dim_a , non entières, l'objet considéré est, du fait de sa structure auto similaire, fractal de "dim_a".

1.3.3 Dimension de Hausdorff

La dimension de Hausdorff, Δ_H est la plus ancienne des dimensions des fractales. Elle a la particularité d'être applicable, notamment, aux objets non rigoureusement autosimilaires. Elle est, de ce fait, plus étendue que la dimension d'autosimilarité. Par ailleurs, elle vient, théoriquement, pallier l'impossibilité de comparaison de courbes, pour lesquelles, la longueur estimée par la méthode de Richardson (voir chapitre 2), tend vers l'infini, lorsque la jauge de mesure d'espace utilisée tend vers 0. La dimension Δ_H est définie par :

$$\Delta_H = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\eta}{\ln(\frac{1}{\eta})}$$

où N_η est le nombre minimal de boules de diamètre η nécessaires au pavage de l'objet.

Elle est par ailleurs, telle que :

- Si $d < \Delta_H$, le contenu de l'objet est infini ;
- Si $d > \Delta_H$, le contenu de l'objet est infini ;

cette dimension n'a pas d'application pratique dans l'étude des courbes qui relèvent des sciences telles que la physique, la biologie et l'ingénierie [Tricot, 1995].

Il est, par ailleurs à noter que la dimension n'est pas toujours égale à la dimension de Hausdorff. (Application de L'analyse Fractale dans le cas de Ruptures Dynamiques 2009)

1.3.4 Dimension de Pontrjagin

Soit donné un espace métrique compact E . nous le recouvrons par un système d'un nombre fini d'ensembles fermés de diamètres ne dépassant pas ξ , ceci est possible d'après le théorème de Heine-Borel, nous pouvons définir le nombre minimum $N(\xi)$ de tels ensembles nécessaires pour recouvrir E . $N(\xi)$ prend des valeurs entières positives pour toute la valeur positive ξ et croît indéfiniment quand ξ tend vers 0.

soit r un nombre réel quelconque ; nous dirons que r appartient à la première classe s'il existe un nombre positif c tel qu'on ait

$$N_E(\xi) \geq \frac{\xi}{\xi^r} \quad (\text{quelque soit } \xi > 0).$$

Dans le cas contraire r appartiendra à la seconde classe, la coupure de Dedekind ainsi obtenue détermine un nombre non négatif $K (\leq \infty)$ que nous appelons ordre métrique de l'espace E .

On voit d'ailleurs sans peine que :

$$K = \lim \inf \left(-\frac{\log N_F(\xi)}{\log(\xi)} \right),$$

On définit alors la mesure

$$\mu_\alpha(E) = \lim \sup_{\eta \rightarrow 0} \eta^\alpha N_\eta(E),$$

et la dimension de Pontrjagin par :

$$\dim(E) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sup \frac{\log N_\eta(E)}{\log(\frac{1}{\eta})}$$

Cette définition est de à Pontrjagin et Schireiman.

1.3.5 Dimension de Kolmogorov

Soit $N(r; A)$ le nombre minimum de boules fermées de rayon r nécessaire pour recouvrir A (on pourrait aussi considérer des pavés de longueur r). (Une méthode d'estimation adaptative de deux dimensions fractales de réseaux de talwegs de ravines 2012)

Définition 1.1 *La dimension de kolmogorov de A , $dim_k(A)$ est définie par :*

$$dim_k(A) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log[N(r, A)]}{\log(\frac{1}{r})}$$

(si cette limite existe).

Proposition 1.1 *Cette limite n'existe pas toujours implique limite supérieure et inférieure*

$$\text{pour tout } F \subset \mathbb{R}^n, dim_k(F) \leq dim inf_k(F) \leq dim sup_k(F).$$

2.1 Méthode de comptage des boites

La dimension des boîtes est apparue dans les années 1930 mais ses débuts semblent difficiles à retracer. On attribue son invention à des pionniers d'Hausdorff. On la retrouve sous plusieurs noms dans la littérature, ce qui peut parfois semer la confusion. Elle consiste de recouvrir l'image ou la figure à l'aide des carrés juxtaposés de côté ε , et par conséquent de calculer la dimension des boîtes qui est donnée par :

$$\dim_B F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\log(N(\varepsilon))}{-\log(\varepsilon)} \right],$$

Où N_ε représente le nombre minimum de carrés nécessaire pour faire le recouvrement dont la mesure du côté est ε . Cette méthode performe bien pour les fractales ayant une autosimilarité stricte, c'est-à-dire que chaque partie est semblable par une transformation affine au tout.

Définition 2.1 pour $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_p$, la dimension de comptage de boîtes de A , $\widehat{\dim}_k(A)$ est l'estimateur par moindres carrés ordinaires à du modèle linéaire :

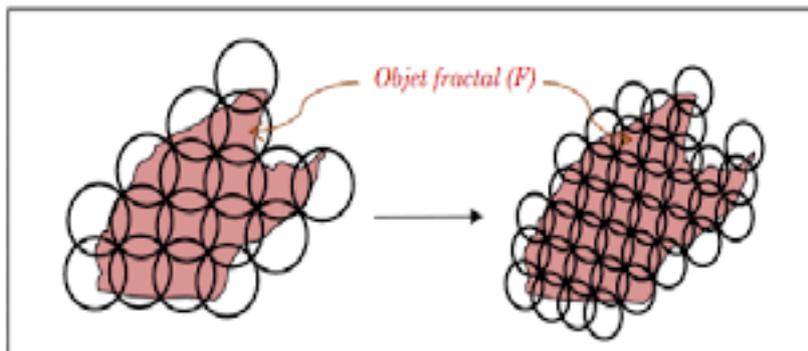


FIGURE 2.1: Exemple de Méthode des boites

$$\log[N(r_i, A)] = a * \log\left(\frac{1}{r_i}\right) + b \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

A : ensemble dont on observe un nombre fini de points ou de segments

Remarque 2.1 Si A infini et $r_p \rightarrow 0, \widehat{dim}_k(A) \rightarrow dim_k(A)$ (si existence)

2.2 Méthode de Richardson

Cette méthode consiste à calculer la dimension fractale d'un objet (les côtes et les frontières de pays plus particulièrement), en déterminant son périmètre. Pour cela on reporte autant de fois que possible, différentes longueurs(ici λ_1, λ_2 , avec $\lambda_1 > \lambda_2$) sur son contour. Une petite longueur reportée permet d'inclure dans notre périmètre plus de détails de la forme de l'objet. Autrement dit, nous allons effectuer une série de mesures avec différentes longueurs, qui vont décroître petit à petit, de manière à avoir des résultats de plus en plus précis(les résultats seront reportés dans un graphique)

2.3 Méthode de Minkowski

Soit E un ensemble plongé dans un espace euclidien de dimension d (précisément E est une partie bornée de \mathbb{R}^d).

Soit maintenant $E(\varepsilon)$ l'ensemble des points de \mathbb{R}^d distants de moins de ε de E
 $E(\varepsilon)$ définit une saucisse de Minkowski

C'est la méthode consiste à faire une dilatation de E .

On peut la définir comme la réunion.

$$E(\varepsilon) = \cup_{x \in E} B(\varepsilon).$$

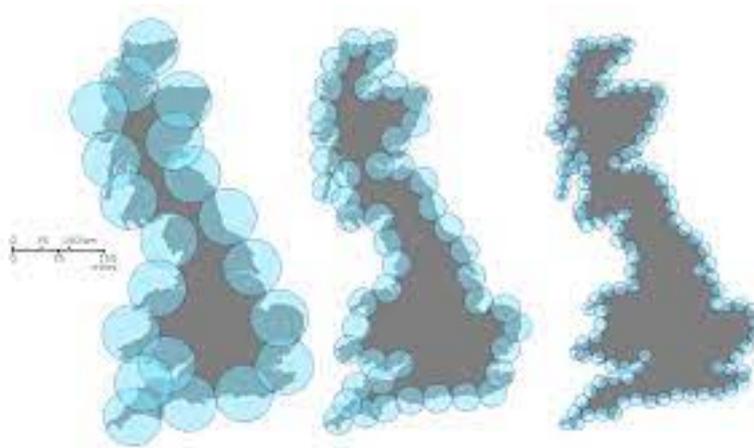


FIGURE 2.2: La saucisse de Minkowski (appliqué sur une courbe E)

$B_\varepsilon(x)$ est une boule de l'espace euclidien à d dimensions, centrée en x et de rayon ε . On calcule :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(d - \frac{\log \text{vol}_d(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right).$$

Où vol_d représente simplement le volume en dimensions d (par exemple, longueur, surface ou volume usuel). On retrouve naturellement la notion usuelle de dimension : considérons par exemple un segment de droite de longueur L , la saucisse de Minkowski associée a comme volume vol_d .

$$vol_d = \begin{cases} 2\varepsilon L + \pi\varepsilon^2 & \text{en } d = 2 \\ \pi\varepsilon^2 L + (\frac{4\pi}{3})\varepsilon^3 & \text{en } d = 3 \end{cases}$$

Dans la pratique on obtient D comme la pente de la droite de régression linéaire (moindres carrés) de l'ensemble des points du plan de coordonnées :

$$\{\log \frac{1}{\varepsilon}, \log vol_d(\frac{E(\varepsilon)}{\varepsilon^d})\}.$$

2.4 Méthode de wiebel

La donnée d'un réseau de droites verticales et régulièrement espacées d'un écart $\ll e \gg$, sur lesquelles on place horizontalement un autre réseau de droites espacées du même écart $\ll e \gg$, nous représente une grille.

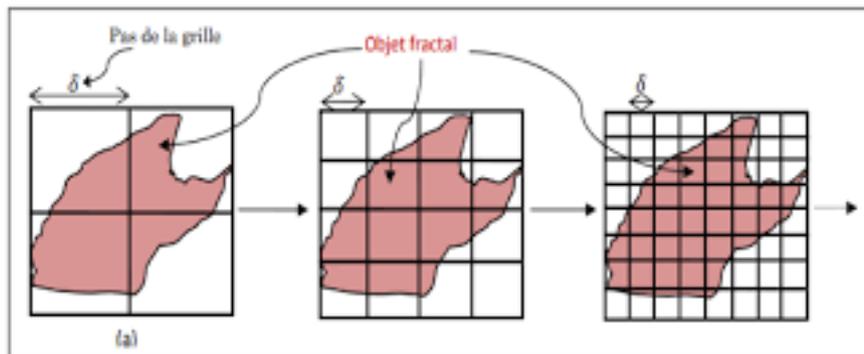


FIGURE 2.3: Méthode weibell

Parmi les relations sotériologique mise au point par Wiebel, celle qui permet d'estimer le périmètre de l'ensemble étudié ϕ à partir d'une grille qu'on place sur ϕ , la formule suivante :

$$P = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{I}{L}\right).$$

- P : Le périmètre à estimer.
- I : Le nombre d'intersections entre le bord de l'ensemble ϕ et la grille.
- L : Le nombre de lignes et de colonnes qui composent notre grille.

$$\log P = \log\left(\frac{\pi}{2}\right) + \log I - \log L.$$

Et

$$P = \delta^{1-D}.$$

Telle que D c'est la dimension fractale.

Comme à chaque fois qu'on varie δ on obtient P différent, par la suite la dimension fractale est estimée par la régression linéaire.

Dans ce travail on va étudié deux méthode de Weibel :

2.4.1 Méthode des intersections

Cette méthode a été mise au point par Tricot. Désignons par m et M les bornes respectivement inférieure et supérieure de f sur son domaine de définition D_f . L_y est la droite horizontale d'ordonnée y considérons l'ensemble $E_y = E \cap L_y$ les points d'ordonnées y de E . f étant continue, E_y est non vide si et seulement si

$$m \leq y \leq M$$

Dans le cas où E est fractale, E_y est en générale un ensemble de Cantor. la dimension de cet ensemble de déduit à partir de la saucisse de Minkowski en dimension 1 en considérant sur L_y la réunion de tous les intervalles de longueur 2δ centrés sur E_y

$$E_{y,\delta} = \cup_{x \in E_y} [x - \delta, x + \delta]$$

On calcule alors la longueur $J(y, \delta)$ de $E_{y,\delta}$ et la dimension fractale D_y de E_y est donnée par :

$$D_y = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\ln(J(y, \delta))}{\ln \delta} \right].$$

Et finalement la dimension fractale de E est égale à $1 + D_y$.

I : représente le nombre d'intersections entre la courbe et le grille. lorsque varie δ en obtient différent P , et par la régression linéaire en peut détermine la dimension fractale qui présenté la pente de la ligne comme le montre la figure Méthode des intersept censures

Elle a été exposée par Flook, elle est basée sur les formules stéréologiques, mais cette fois P est calculé comme suit :

Au lieu de placer l'ensemble sur la grille, on trace des lignes sur l'ensemble étudié, puis on se fixe l'écart δ :

Soit d la distance entre deux points consécutifs de la courbe sur la ligne de la grille, on calcule I suivant la règle :

$$\begin{cases} si & d < \delta & Alors & I = 1 \\ si & d > \delta & Alors & I = 2 \end{cases}$$

2.5 Méthode des « Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes » (MMTO)

La méthode des « maxima du module de la transformée en ondelettes » (MMTO) est basée sur le concept des ondelettes en générale et de la transformée en ondelettes continues en particulier. Son principe général est basé sur le suivi, à différentes échelles, des MMTO. Elle a été développée et utilisée en une ou deux dimensions par de nombreux travaux référencés (Bhatti et al., 2007 ; Enescu et al., 2006 ; Khalil et al., 2006 ; Klapetek and Ohlidal, 2005). Elle a l'avantage d'être plus stable que les autres méthodes de calcul du spectre multifractal (citées ci-dessus). En effet, (Kestener and Arneodo, 2003) ont montré qu'elle est plus efficace que les méthodes dites de « comptage de boîtes ». Dans (Kestener and Arneodo, 2003), ce formalisme a été appliqué en $3D$ et les auteurs ont démontré la robustesse de la méthode, en générant des volumes multifractals $3D$ bien connus théoriquement. Cependant, cet algorithme est beaucoup plus difficile à implémenter que les autres cités ci-dessus.

De plus, son exécution demande l'initialisation de plusieurs degrés de liberté, comme le choix de l'ondelette et le nombre d'échelles.

3.1 Les fractales dans la nature

3.1.1 Le cerveau

Une chose l'on peut affirmer avec certitude s'agissant du cerveau est qu'il d'un assemblage très fractal! sa structure est de toute évidence fractale. il suffit de le regarde pour s'en rendre compte. il est très ridé et craquelé, présente de nombreuses circonvolutions et se replie de nombreuses fois sur lui- même.(Elaydi Discrete Chaos)



FIGURE 3.1: l'image de cerveau

3.1.2 Les végétaux

La forme du chou-fleur fascinait particulièrement Benoît. Il avait remarque que lorsque l'on casse une branche de chou-fleur, le petit morceau ressemble au chou entier. Puis Benoît a découvert qu'en continuant à casser des bouts de plus en plus petits, et ce jusqu'à un certain point, ils continuaient à ressembler à des versions de plus en plus petites du légume entier.(Elaydi Discrete Chaos)



FIGURE 3.2: Un exemple de choux- fleur

3.1.3 Le mouvement Brownien

Le mouvement brownien, le déplacement d'une minuscule particule de fumée dû au bombardement constant de millions de molécules d'air invisibles, trace un chemin fractal de dimension proche de 2.

même à une échelle bien plus petite, les particules subatomiques observées dans une chambre à brouillard présentent exactement le même comportement.(Elaydi Discrete Chaos)

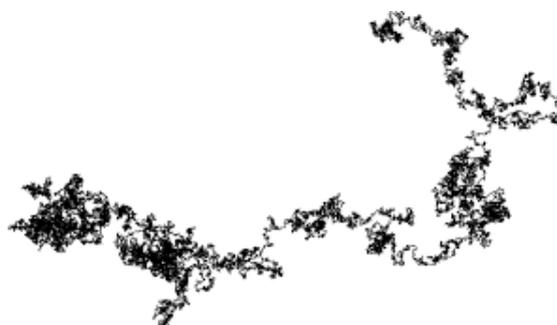


FIGURE 3.3: Le mouvement Brownien

3.2 L'utilisation humaine des fractales

Les fractales sont utilisées dans de nombreuses maladies, infographie et finances ext

3.2.1 Pharmacologie

La géométrie fractale a été utilisée en technologie pharmaceutique, en grande partie grâce au professeur R. Tawachi de la faculté de pharmacie de l'Université de Montréal. il a été parmi les premiers à l'utiliser pour étudier certains problèmes pharmaceutiques tels que l'emploi des produits de bases qui ont une influence sur la

performance des procédés impliqués dans leur fabrication. les opérations permettant la production de poudres pharmaceutiques peuvent influencer la forme et la surface des cristaux de la poudre. ces changements morphologique peuvent à leur tour affecter les propriétés physique et chimique du produit final. la caractérisation physique des poudres pharmaceutique est donc une étape importante dans les procédés qui précèdent la mise en forme d'un médicament. l'approche fractale à contribué à établir le lien entre les irrégularités de surface des cristaux et la qualité du médicament. plus la structure du médicament est irrégulière et moins sa qualité est bonne.

3.2.2 Infographie

Puisque la nature est formée d'objets fractals et que ceux-ci se programment simple-ment, il devient possible d'utiliser cette notion en infographie pour créer des paysages réalistes ou pour rendre les mouvement plus crédibles.

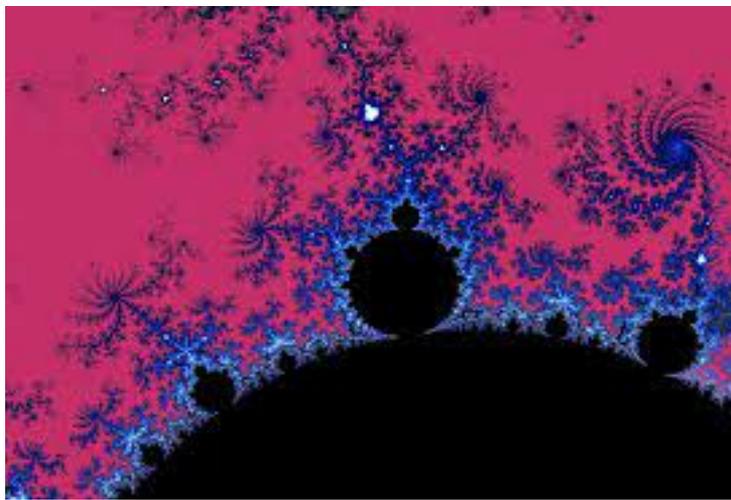


FIGURE 3.4: Exemple de infographie

3.2.3 Finances

En finances, le graphe représentant le cours d'un actif en bourse est de nature fractale car la rentabilité périodique possède une invariance d'échelle. Ainsi, pour obtenir la volatilité d'un titre sur un an, les acteurs du marché multiplient sa volatilité sur un mois par un certain coefficient.

3.3 Application de dimension fractale dans le milieu médicale

3.3.1 Dépistage du cancer du sein

En biologie, le dépistage du cancer du sein se fait en observant le noyau des cellules. la grosseur, la forme, la régularité et la présence de vides dans la chromatine sont autant de critères permettant de juger de la malignité d'une cellule. or, la

géométrie fractale permet de quantifier l'irrégularité d'une figure. Ainsi, on caractérise la texture du noyau en calculant sa dimension fractale. cependant, deux figures d'apparence différentes peuvent avoir la même dimension fractale. pour compléter cette étude, on utilise donc un autre paramètre fractal, la lacunarité, qui permet de mesurer la répartition des vides dans la chromatine. Ainsi, la géométrie fractale offre des critères objectifs permettant de poser un diagnostic qui reposait, jusqu'à maintenant, sur le seul jugement du pathologiste.

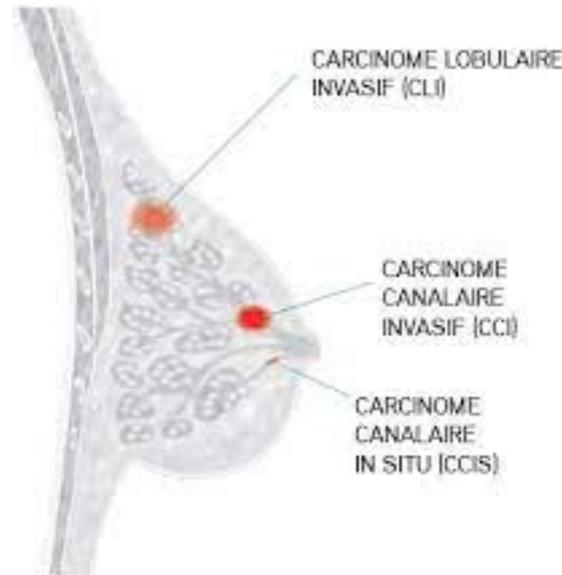


FIGURE 3.5: cancer du sein

3.3.2 La mammographie

La mammographie est le principal outil de dépistage et de diagnostic ; c'est un examen radiographique (par rayons X) des deux seins, généralement sous deux incidences (CC pour Cranio-Caudale et MLO pour Médio-Latérale Oblique). On considère qu'en moyenne le cancer est visible sur la mammographie de un à trois ans avant le premier signe clinique.

D'autres types d'imagerie (échographie, ultrasons, imagerie par résonance magnétique) peuvent être employés mais à titre d'examen complémentaire en cas de diagnostic difficile. La mammographie reste l'outil principal de dépistage pour plusieurs raisons :

- c'est un examen sensible
 - le coût moyen d'un examen mammographique est faible comparé à d'autres techniques d'imagerie comme l'IRM, de plus l'appareillage est mobile et peu encombrant
 - l'examen n'est pas traumatisant. En effet les tissus du sein sont mous et perméables aux rayons X, rendant faibles les doses d'irradiation. d'autre part, la compression du sein, nécessaire pour obtenir une meilleure uniformité de la densité optique et une réduction du flou de diffusé, ne doit pas en général être douloureuse
 - la résolution spatiale d'une radiographie est de l'ordre de quelques dizaines de microns, ce qui permet de visualiser les microcalcifications, contrairement aux autres techniques d'imagerie
- les mammographies numériques sont de plus en plus utilisées, ce qui permet

de disposer du signal directement sous forme numérique, avec les avantages associés en terme d'archivage et de consultation de dossier médical à distance. Pour autant, la mammographie numérique reste couteuse pour des performances au niveau du diagnostic équivalentes à celles des techniques conventionnelles

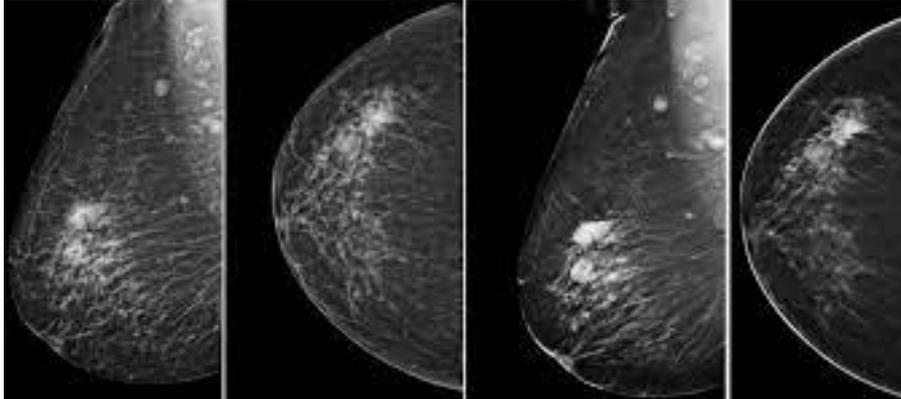


FIGURE 3.6: Résultats de la détection de micro-calcifications sur des images de mammographies

3.3.3 Méthodologie

Notre approche MMTO a été appliquée sur des images mammographiques extraites de la base de données MIAS. Cette base contient 322 images classées selon le type du tissu mammaire (Gras/Dense), le type de l'anomalie (Normal, Calcification, masse circonscrite, masse spiculée, masse mal-définie, distorsion architectural, asymétrie) et la gravité de l'anomalie (maligne ou bénigne).

Algorithme de calcul de l'image alpha par la méthode MMTO

L'implémentation de la méthode MMTO et l'obtention de l'image alpha se fait suivant les étapes suivantes :

- Calculer la TOC 2D de l'image originale convertie en niveaux de gris :
La TOC 2D a été calculée sous MATLAB en utilisant la commande '*cwtft2*' qui admet comme paramètres d'entrées : l'image originale, le type d'ondelette et le vecteur d'échelle. Le choix du type d'ondelette et du vecteur d'échelle dans la première partie avant de passer à l'application médicale.
La TOC est donc calculée pour un certain nombre d'échelle : $scale = [1 : \eta]$.
Ensuite, pour chaque échelle $k \in [1 : \eta]$:
- Extraire la matrice des modules des coefficients d'ondelettes,
- Calculer les maximas des modules (MMTO)
- Retrouver et récupérer la position du maximum des MMTO (MMMTO), enfin
- Appliquer une régression linéaire entre le vecteur d'échelle et des MMMTO pour obtenir l'image alpha

La figure 3.7 représente le résultat de la segmentation d'une image mammographique avec microcalcifications. Nous avons choisi comme paramètre d'entrée, en plus de l'image, les intervalles d'indices [00.600] pour min et [00.646] pour max (de l'indice de hölder). La région encadrée de l'image contient les microcalcifications qui sont

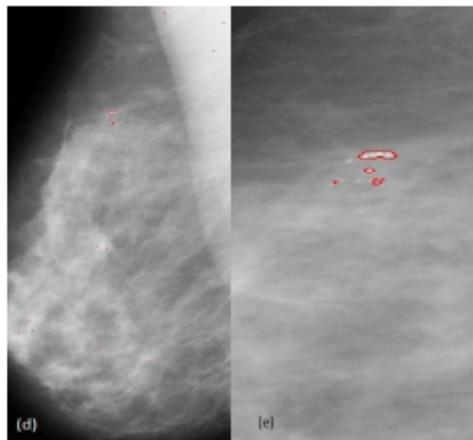
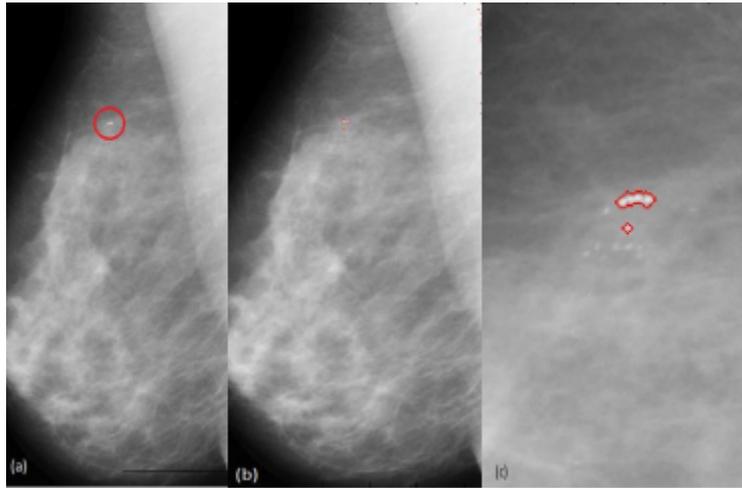


FIGURE 3.7: (a) l'image originale, (b) l'image segmenté avec $min = 0$ et $max = 0.600$, (c) zoom de l'image (b), (d) image segmenté avec $min = 0$ et $max = 0.646$ et (e) zoom de l'image (d) avec, min et max représentent respectivement les valeurs minimum et maximum de l'exposant de Hölder

presque invisibles à l'œil nu.

La figure 3.8 est un autre exemple de segmentation d'une image mammographique

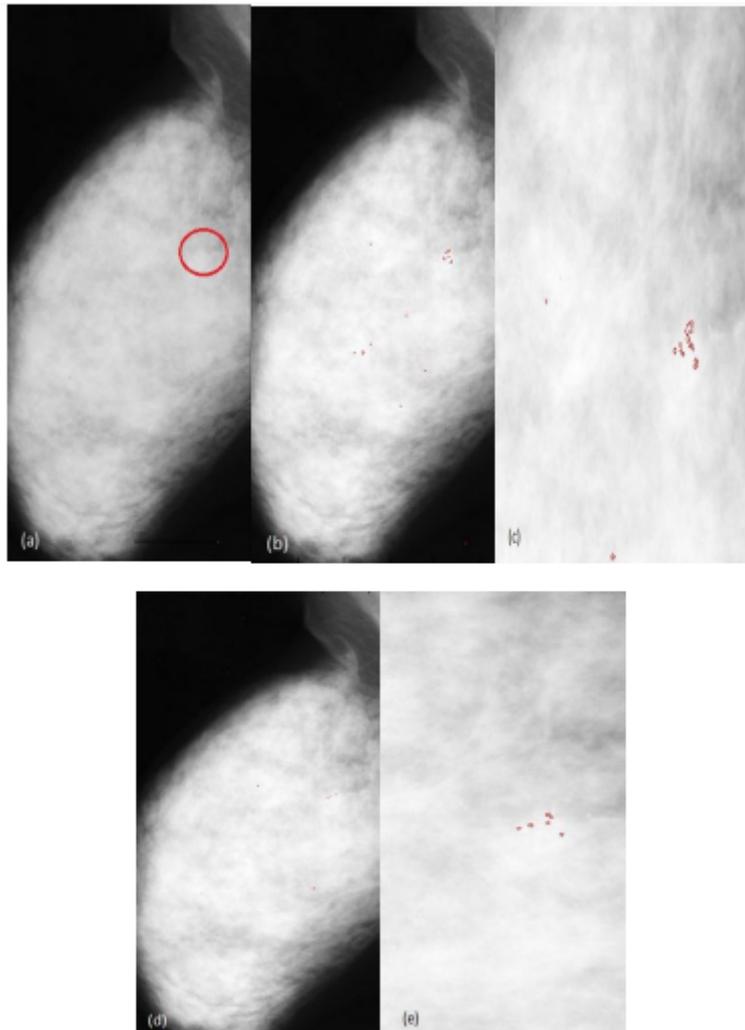


FIGURE 3.8: a) l'image originale, (b) l'image segmenté avec $min = 0$ et $max = 0.03$, (c) zoom de l'image (b) , (d) image segmenté avec $min = 0$ et $max = 0.02$ et (e) zoom de l'image (d), avec min et max représentant respectivement les vale

avec microcalcifications. Nous avons choisi comme paramètre d'entrée min et max [00.3] et [00.2]. On constate une bonne détection des microcalcifications.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons retracé l'histoire de la dimension fractale, et quelques méthodes qui se rapportant au calcul de la dimension non entier, et après avoir défini les effets et les applications des fractales, nous pouvons conclure que c'est seulement depuis la parution des travaux de Benoît Mandelbrot que nous commençons à bien percevoir ce que représente la conformation fractale qui nous entourent.

Il est dorénavant possible de mieux prévoir les irrégularités de la nature et de mieux les comprendre. les deux sciences à première vue si éloignées que sont les mathématiques et la biologie se trouvent des liens autour des fractales. Finalement, nous pouvons dire que l'étude des fractales nous apporte réellement une nouvelle vision de notre environnement et nous offre des perspectives d'innovation pour l'avenir.

Bibliographie

- [1] Collectif, Les fractales : art, nature et modélisation :67.
- [2] Hafehdh Ben Ibrahim Gaha, Analyse et conception des antennes fractales - Applications aux télécommunications large bande, thèse Présentée pour obtenir le titre de Docteur de l'institut national polytechnique de Toulouse (France) et de docteur De l'école nationale d'ingénieurs de Tunis de l'université Tunis El-Manar (Tunisie), 18 juillet 2007.
- [3] J-M.(2012).Une méthode d'estimation adaptative de deux dimensions fractales de réseaux de talwegs de ravines. Université de Paris 1.
- [4] jonathan M. Fraser, Assouad dimension and fractale geometry :03-04.
- [5] Lhamel, M. (2011). Segmentation d'images texturées à partir des attributs fractals, mémoire de magister à l'université de Tizi-Ouzou.
- [6] Lopes, R., 2009 : Analyses fractale et multifractale en imagerie médicale . thèse de doctorat de l'Université de Lille 1
- [7] Nigel Lesmoir-Gordon, Willrood, Ralph Edney, Les fractales en image.
- [8] Saber N. Elaydi Discrete Chaos.
- [9] S'écrier.(2012) Analyse Fractale et Multifractale des Échos Radar. mémoire de magister en Rayonnement Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne atmosphérique.
- [10] S'écrier. G(octobre 2009),Application de L'analyse Fractale dans le cas de Ruptures Dy-namiques.Thèse de doctorat en Mécanique et matériaux de l'université Polytechnique de Timisoara.